

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики  
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

## **ЗАДАЧА ЕРДЕША-СЕКЕРЕША**

**Кваліфікаційна робота (проєкт)**  
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи  
Спеціальності 014 Середня освіта  
Спеціалізації 014.04 Математика  
Освітньо-професійної програми «Середня освіта  
(математика)» другого (магістерського) рівня  
вищої освіти  
Балакова Ольга Русланівна

Керівник кандидатка педагогічних наук,  
старша викладачка  
Григор'єва Валентина Борисівна  
Рецензент доцентка кафедри природничо-  
наукової підготовки Херсонської державної  
морської академії, кандидатка педагогічних  
наук Спичак Тетяна Сергіївна

Івано-Франківськ – 2022

## ЗМІСТ

|   |           |
|---|-----------|
| ВСТУП .....   | 3         |
| <b>РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ РОЗБИТТЯ ФІГУР</b>                    |           |
| 1.1. Розбиття фігур на частини меншого діаметра .....                       | 6         |
| 1.2. Покриття опуклих тіл гомотетичними тілами і задача<br>освітлення ..... | 13        |
| <b>РОЗДІЛ 2. ЗАДАЧА ЕРДЕША-СЕКЕРЕША</b>                                     |           |
| 2.1. Постановка задачі Ердеша-Секереша про опуклі<br>многокутники .....     | 21        |
| 2.2. Теорема Рамсея .....   | 26        |
| 2.3. Чашки і кришки .....   | 29        |
| <b>РОЗДІЛ 3. МОДИФІКАЦІЇ ЗАДАЧІ ЕРДЕША-СЕКЕРЕША ....</b>                    | <b>38</b> |
| <b>ВИСНОВКИ .....</b>   | <b>45</b> |
| <b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>                                     | <b>47</b> |

## ВСТУП

*Актуальність дослідження.* Одним з розділів сучасної геометрії є комбінаторна або дискретна геометрія – розділ, в якому вивчаються комбінаторні властивості геометричних об'єктів та пов'язані з ними конструкції. В комбінаторній геометрії розглядаються скінченні та нескінченні дискретні множини або структури базових однотипових геометричних об'єктів (точок, прямих, кіл, багатокутників, тіл з однаковим діаметром тощо) та ставлять питання, пов'язані із властивостями різних геометричних конструкцій з цих об'єктів або на цих структурах. Проблеми комбінаторної геометрії простираються від конкретних предметно-комбінаторних питань – покриття, пакування на площині – до питань загальних та глибоких [12]. І хоча многогранники, заміщення та пакування досліджувалися ще Кеплером та Коші, сучасна комбінаторна геометрія почала формуватися наприкінці ХІХ-го ст. Одними з перших задач були щільність пакування кіл Акселя Туе, проєктивна конфігурація Стейніца, геометрія чисел Мінковського та проблема чотирьох фарб Френсіса Гутрі [24]. Подальші дослідження в області комбінаторній геометрії розвинули не тільки цей розділ, але й інші розділи математики. Так, теорема Мінковського про опукле тіло поклала початок геометрії чисел, а гіпотеза Борсука про розбиття тіла певного діаметру визначила можливість здійснення його в евклідовому просторі певної розмірності [9].

Однією із задач комбінаторної геометрії є задача Ердеша-Секереша про опуклі багатокутники. Ця задача була сформульована у 40-х рр. ХХ ст. П. Ердешем та Г.Хадвігером та стверджує, що в довільній достатньо великій множині точок загального положення на площині можна знайти певну множину точок, які є вершинами опуклого багатокутника. Гіпотеза Ердеша-Секереша про мінімальну кількість таких точок й досі не доведена навіть для площини, хоча за своєю

простотою та природним формулюванням вона відразу привернула увагу математиків. До цього часу розроблені деякі частинні підходи до її розв'язання, зокрема, в теорії Рамсея, проте остаточне вирішення даної проблеми й досі не знайдено.

**Мета** дипломної роботи – розглянути задачу Ердеша-Секераша про опуклі многокутники та її модифікації.

Реалізація поставленої мети передбачає розв'язання наступних **завдань**:

- 1) розглянути деякі теоретичні положення з комбінаторної геометрії;
- 2) розкрити особливості постановки задачі Ердеша-Секереша та деякі підходи до знаходження її розв'язків;
- 3) розглянути модифікацію задачі для випадку довільної множини точок.

**Об'єкт дослідження** – теорія опуклих многокутників, **предмет дослідження** – безпосередньо задача Ердеша-Секереша.

У дослідженні використовувався комплекс **методів**: метод паралельного перенесення, метод математичної індукції, метод розрізання та заміщення фігур на площині.

**Теоретичне значення** роботи полягає у тому, що були систематизовані основні положення, які стосуються розбиття фігур. **Практичне значення** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл при викладанні відповідних тем в школі.

Дослідження було виконано в межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

*Апробація результатів дослідження.* За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірці наукових праць студентів «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота містить три основні розділи. В першому розділі розглядаються деякі теоретичні положення з комбінаторної геометрії. В другому розділі наведено частинні підходи до розв'язання задачі Ердеша-Секереша. Третій розділ розкриває питання стосовно модифікації задачі Ердеша-Секереша.

Матеріал дипломної роботи може бути використаний під час проведення уроків геометрії у класах з поглибленим вивченням математики, а також на факультативних або гурткових заняттях.

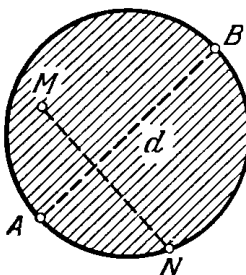
## РОЗДІЛ 1

### ДЕЯКІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ РОЗБИТТЯ ФІГУР

#### 1.1. Розбиття фігур на частини меншого діаметра

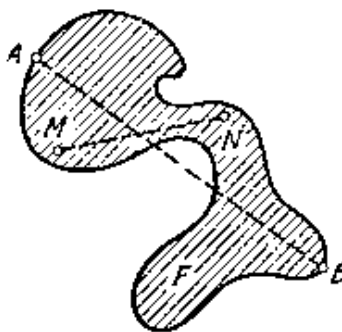
##### *Діаметр фігури*

Нехай, ми розглядаємо круг діаметра  $d$ . Тоді відстань між будь-якими двома точками  $M$  і  $N$  цього кола (рис.1.1) не перевищує  $d$ . В той же час можна знайти дві точки  $A$  і  $B$  нашого кола, віддалені одна від одної в точності на відстань  $d$ .



*Рис. 1.1*

Розглянемо тепер замість кола якусь іншу фігуру. Що можна назвати «діаметром» цієї фігури? Сказане вище наводить на думку назвати діаметром фігури найбільшу з відстаней між її точками. Інакше кажучи, діаметром фігури  $F$  (рис.1.2) ми будемо називати таку відстань  $d$ , що, по-перше, відстань між будь-якими двома точками  $M$  і  $N$  фігури  $F$  не перевищує  $d$  і, по-друге, можна відшукати в фігурі  $F$  хоча б одну пару точок  $A, B$ , відстань між якими дорівнює  $d$ .



*Рис. 1.2*

Нехай, наприклад, фігура  $F$  являє собою півколо (рис.1.3).



Рис. 1.3

Позначимо через  $A$  і  $B$  кінці, які обмежують його півколо. Тоді зрозуміло, що діаметром фігури  $F$  є довжина відрізка  $A$  і  $B$ . Взагалі, якщо фігура  $F$  являє собою сегмент кола, обмежений дугою  $l$  і хордою  $a$ , то у випадку, коли дуга  $l$  не перевищує півкола (рис. 1.4, а) діаметр фігури  $F$  дорівнює  $a$  (тобто довжині хорди), у випадку ж, коли дуга  $l$  більше півкола (рис. 1.4, б) діаметр фігури  $F$  співпадає з діаметром всього кола.

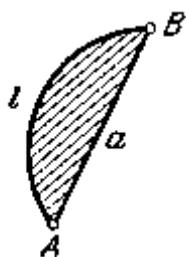


Рис. 1.4, а

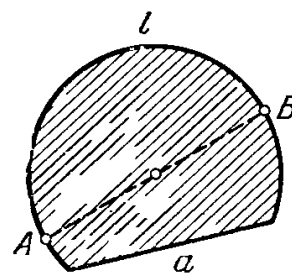


Рис. 1.4, б

Легко зрозуміти, що якщо  $F$  являє собою багатокутник (рис. 1.5), то його діаметр є найбільше з відстаней між вершинами [7]. Зокрема, діаметр будь-якого трикутника (рис. 1.6) дорівнює його найбільшій стороні.

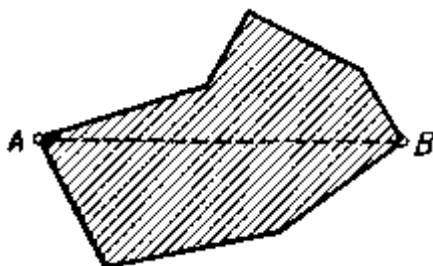


Рис. 1.5

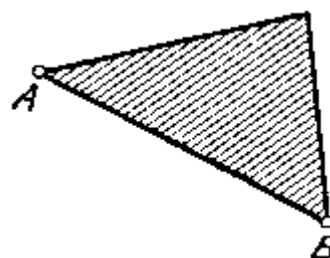


Рис. 1.6

Зауважимо, що якщо діаметр фігури  $F$  дорівнює  $d$ , то в фігурі  $F$  може існувати і багато пар точок, відстань між якими дорівнює  $d$ . Наприклад, у випадку еліпса (рис. 1.7) така пара точок одна, у випадку квадрата (рис. 1.8) їх дві, у випадку правильного трикутника (рис. 1.9) – три, нарешті, у випадку кола таких пар точок нескінченна множина.

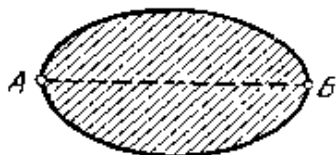


Рис. 1.7

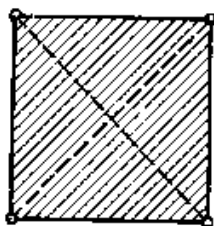


Рис. 1.8

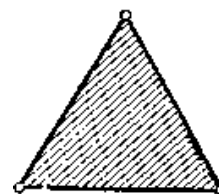


Рис. 1.9

### Постановка задачі

Неважко зрозуміти, що якщо коло діаметра  $d$  розрізати деякою

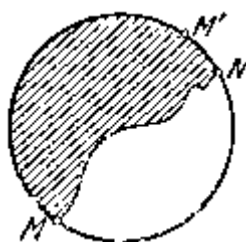


Рис. 1.10, а



Рис. 1.10, б

лінією  $MN$  на дві частини, то хоча б одна із цих частин буде мати той же діаметр  $d$ . Справді, якщо  $M'$  - точка, діаметрально протилежна точка  $M$ , то вона повинна належати який-небудь із частин, і ця частина (яка містить точки  $M, M'$ ) буде мати діаметр  $d$  (рис. 1.10).

Разом з тим зрозуміло, що коло можна розрізати на три частини, кожна з яких має діаметр, менший  $d$  (рис. 1.11).

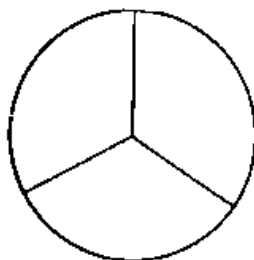


Рис. 1.11, а

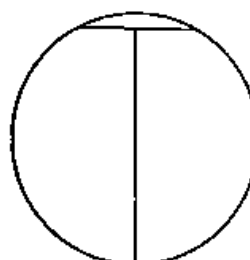


Рис. 1.11, б



Отже, коло діаметра  $d$  не можна розбити на дві частини, діаметр кожної з якої буде менше  $d$ , але можна розбити на три такі частини. Тією ж властивістю володіє рівносторонній трикутник зі стороною  $d$  (якщо він розбитий на дві частини, то якась із частин повинна містити дві вершини трикутника, і діаметр цієї частини буде дорівнювати  $d$ ). Але є фігури, які можна розбити на дві частини меншого діаметра (рис. 1.12).

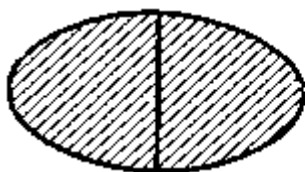


Рис. 1.12, а



Рис. 1.12, б

Ми можемо розглядати для будь-якої фігури  $F$  задачу про розбиття її на частини меншого діаметра. Найменше число частин, яке для цього знадобиться, позначимо через  $a(F)$ . Таким чином, якщо  $F$  – коло або рівносторонній трикутник, то  $a(F) = 3$ , а для еліпса або паралелограма  $a(F) = 2$ .

Задачу про розбиття фігури на частини меншого діаметра можна розглядати не тільки для плоских фігур, але і для тіл, розташованих у просторі (або навіть в  $n$  – мірному просторі).

Задачу про те, які значення може приймати  $a(F)$ , поставив у 1933 році відомий польський математик К. Борсук [5].

### ***Розв'язання задачі для плоских фігур***

Для деяких плоских фігур  $a(F)$  приймає значення 2, а для інших – значення 3. Виникає питання, чи не можна знайти плоску фігуру, для якої  $a(F) > 3$ , тобто таку фігуру, що для розбиття її на частини меншого діаметра не можна обійтися трьома частинами, а потрібно буде 4 або більше частин? Виявляється, що насправді трьох частин завжди достатньо, тобто має місце наступна теорема, встановлена Борсуком у 1933 році:

**Теорема 1.1** *Всяка плоска фігура  $F$  діаметра  $d$  може бути розбита на три частини діаметра  $< d$ , тобто  $a(F) \leq 3$ .*

**Доведення.** Основною частиною доведення буде встановлення наступної леми, яку в 1920 році отримав угорський математик Пал: *всяка плоска фігура діаметра  $d$  може бути укладена в правильний шестикутник, у якого відстань між протилежними сторонами дорівнює  $d$*  (рис. 1.13) [6].

Візьмемо пряму  $l$ , яка не перетинає фігуру  $F$ , і почнемо наближати цю пряму до  $F$  (залишаючи її паралельною самої собі) до тих пір, поки переміжна пряма не доторкнеться до фігури  $F$  (рис. 1.14).

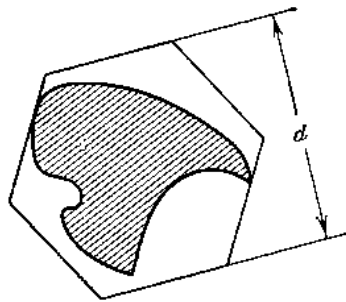


Рис. 1.13

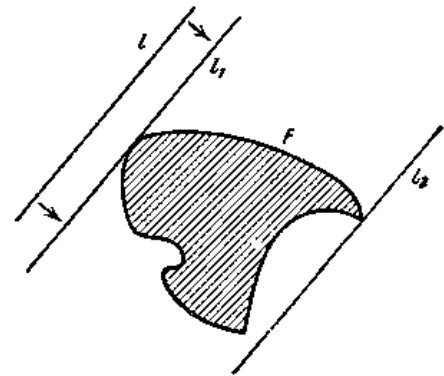


Рис. 1.14

Отримана пряма  $l_1$  володіє тією властивістю, що вона має хоча б одну спільну точку з фігурою  $F$  і вся фігура  $F$  розташована по одну сторону від  $l_1$ . Така пряма називається *опорною прямою* фігури  $F$ . Проведемо, крім того, другу опорну пряму  $l_2$ , паралельну  $l_1$  (рис. 1.14). Ясно, що всяка фігура  $F$  буде знаходитися в смузі між прямими  $l_1$  і  $l_2$  і що відстань між цими прямими не перевищує  $d$  (так як діаметр фігури  $F$  дорівнює  $d$ ).

Проведемо тепер до фігури  $F$  дві паралельні опорні прямі  $m_1$ ,  $m_2$ , які складають із  $l_1$  кут  $60^\circ$  (рис. 1.15). Прямі  $l_1, l_2, m_1, m_2$  утворюють паралелограм  $ABCD$  із кутом  $60^\circ$  і висотами, які не перевищують  $d$ , в середині якого цілком полягає фігура  $F$ .

Проведемо тепер дві опорні прямі  $p_1, p_2$  фігури  $F$ , які складають із  $l_1$  кут  $120^\circ$ , і позначимо через  $M$  і  $N$  основи перпендикулярів, які опущенні на ці прямі з кінців діагоналі  $AC$  (рис. 1.15). Ми покажемо, що напрям прямої  $l_1$  можна вибрати таким чином, щоб виконувалась рівність  $AM = CN$ . В такій справі, допустимо, що  $AM \neq CN$  і нехай для впевненості  $AM < CN$ .

Таким чином, величина  $y = AM - CN$  від'ємна. Тепер ми почнемо безперервно змінювати напрям прямої  $l_1$  до тих пір, поки вона повернеться на  $180^\circ$  (фігуру  $F$  будемо залишати нерухомою).

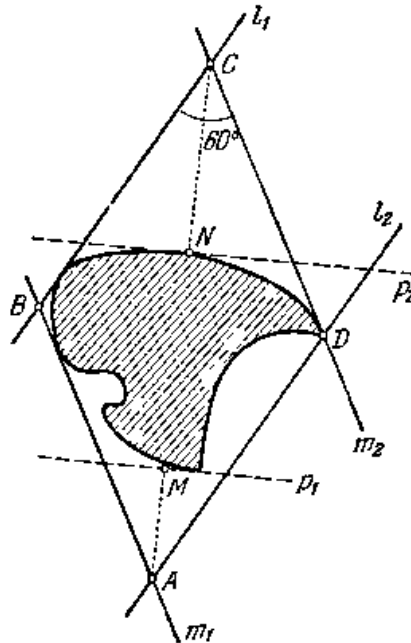


Рис. 1.15

Разом із прямою  $l_1$  будемо змінювати своє положення та інші прямі  $l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$  (так як їх положення повністю визначається вибором прямою  $l_1$ ). Тому при повороті прямої  $l_1$  будуть неперервно переміщуватися і точки  $A, C, M, N$ , а значить, буде неперервно змінюватися величина  $y = AM - CN$ . Але коли пряма  $l_1$  повернеться на  $180^\circ$ , вона займе положення, яке раніше займала пряма  $l_2$ . Тому ми отримаємо той же паралелограм, що на рис. 1.15, але в ньому точки  $A$  і  $C$ , а також  $M$  і  $N$ , поміняються ролями. Отже, в цьому положенні величина  $y$  буде все додатною. Якщо ми тепер зобразимо графік

змінення величини  $y$  при повороті прямої  $l_1$  від  $0^\circ$  до  $180^\circ$  (рис. 1.16), то зрозуміємо, що знайдеться положення прямої  $l_1$ , при якому величина  $y$  обертається в нуль, тобто  $AM = CN$  (або, безперервно змінюючись від від'ємного значення до додатного, величина  $y$  повинна в деякий момент обернутися в нуль). Ми розглянемо положення всіх наших прямих як раз у той момент часу, коли величина  $y$  обертається у нуль (рис. 1.17).

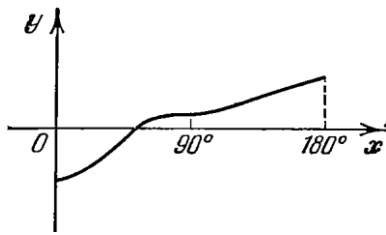


Рис. 1.16

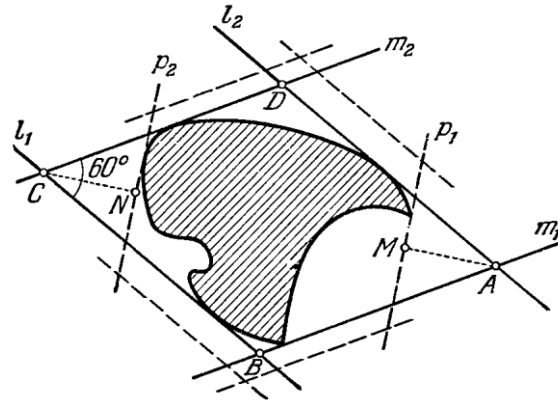


Рис. 1.17

Із рівності  $AM = CN$  випливає, що шестикутник, який утворений прямими  $l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$ , центрально симетричний [15]. Кожен кут цього шестикутника дорівнює  $120^\circ$ , а відстань між протилежними сторонами не перевищує  $d$ . Якщо відстань між  $p_1$  і  $p_2$  менше  $d$ , то ми розсунемо ці прямі (переміщаючи їх на однакову відстань) так, щоб відстань між розсуненими прямими дорівнювало  $d$ . Точно так же ми вчинимо з прямими  $l_1, l_2$ , а потім із прямими  $m_1, m_2$ . В результаті ми отримаємо центрально симетричний шестикутник (з кутами  $120^\circ$ ), у якого протилежні сторони віддалені один від одного на відстані  $d$  (пунктирний шестикутник на рис. 1.17). Із сказаного ясно, що всі сторони цього шестикутника рівні між собою, тобто цей шестикутник – правильний, при чому фігура  $F$  розташована в середині шестикутника.

Тепер ми покажемо, що побудований правильний шестикутник можна розрізати на три частини, кожна з яких має діаметр, менший  $d$ . При цьому фігура  $F$  також розрізеться на три частини, діаметр кожної із якої буде менше  $d$ . Необхідне розбиття правильного шестикутника на

три частини показано на рис. 1.18 (точки  $P, Q$  і  $R$  є серединами сторін, а  $O$  – центр шестикутника). Щоб впевнитися, що діаметри частин менше  $d$ , достатньо зауважити, що в трикутнику  $PQL$  кут  $Q$  прямої і тому  $PQ < PL = d$ .

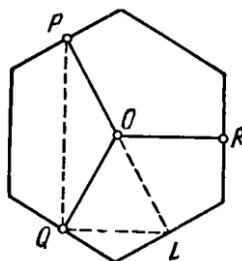


Рис. 1.18

Таким чином, теорема 1.1 доведена.

## 1.2. Покриття опуклих тіл гомотетичними тілами і задача освітлення

### Опуклі фігури

Плоска фігура  $F$  називається опуклою, якщо разом з кожними двома точками  $A$  і  $B$  вона містить і весь з'єднуючий їх відрізок  $AB$  (рис. 1.19).

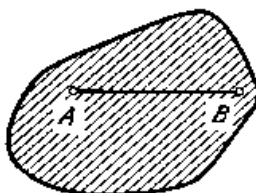


Рис. 1.19

Так, наприклад, трикутник, паралелограм, трапеція, коло, сегмент кола, еліпс є прикладами опуклих фігур (рис. 1.20).

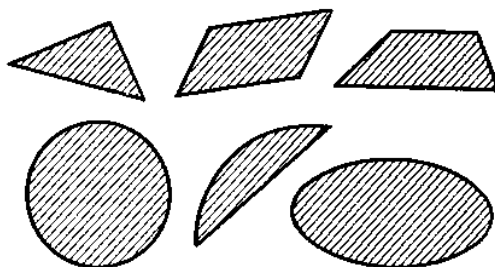


Рис. 1.20

На рис. 1.21 наведені приклади не опуклих фігур. Фігури, зображені на рис. 1.20, є обмеженими.

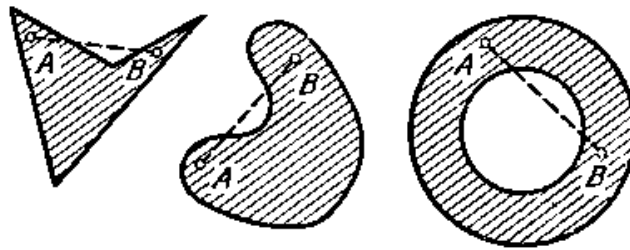


Рис. 1.21

Існують також необмежені («які тягнуться в нескінченність») опуклі фігури: півплощина, кут, менший  $180^\circ$ , та інші (рис. 1.22).

Точки будь-якої опуклої фігури  $F$  поділяються на два класи - *внутрішні* точки і *граничні* точки. Внутрішніми вважаються ті точки, які з усіх сторін оточені точками фігури  $F$ .

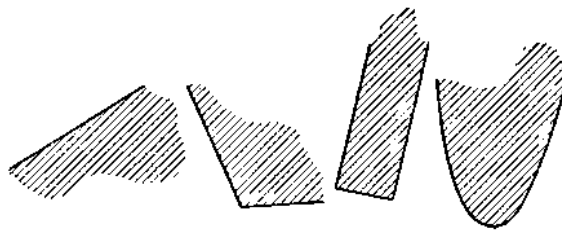


Рис. 1.22

Таким чином, якщо  $A$  – внутрішня точка фігури  $F$ , то коло деякого (хоча б дуже маленького) радіуса з центром в точці  $A$  цілком належить фігурі  $F$  (рис. 1.23). До граничної точки фігури  $F$  як завгодно близько підходять як точки, що належать фігурі  $F$ , так і точки, які їй не належать (точка  $B$  на рис. 1.23). Всі граничні точки, разом узяті, утворюють деяку лінію, так звану *границею* опуклої фігури  $F$ . Якщо фігура  $F$  обмежена, то її границя являє собою замкнуту лінію (пор. рис. 1.19, 1.20).

Для подальшого важливо буде зауважити, що *будь-яка пряма, що проходить через внутрішню точку опуклої обмеженої фігури  $F$ , перетинає границю цієї фігури рівно в двох точках* (рис. 1.24), причому відрізок, який з'єднує ці дві точки, належить фігурі  $F$ , а вся інша частина цієї прямої лежить поза фігурою  $F$ .

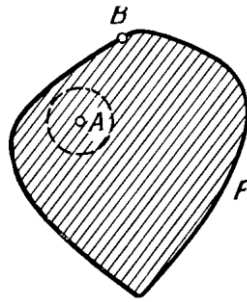


Рис. 1.23

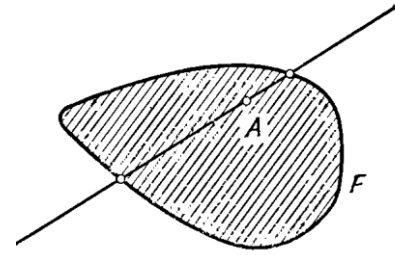


Рис. 1.24

Нехай  $B$  - деяка гранична точка опуклої фігури  $F$ . З точки  $B$  проведемо різноманітні промені, які проходять через відмінні від  $B$  точки фігури  $F$ . Ці промені або заповнять деяку півплощину (рис. 1.25,а), або складуть деякий кут, менший  $180^\circ$  (рис. 1.25,б).

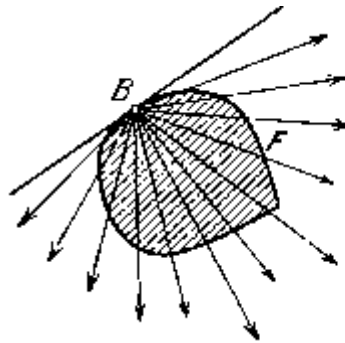


Рис. 1.25,а

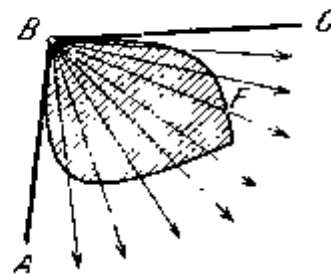


Рис. 1.25,б

В першому випадку пряма, що обмежує півплощину, є опорною прямою фігури  $F$ . Будь-яка інша пряма, що проходить через точку  $B$ , буде розсікати фігуру на дві частини (рис. 1.26), тобто буде опорною. Інакше кажучи, через точку  $B$  в цьому випадку проходить єдина опорна пряма фігури  $F$ . У другому випадку (рис. 1.25, б) вся фігура  $F$  розташована всередині кута  $ABC$ , меншого  $180^\circ$ , і тому через точку  $B$  проходить нескінченно багато опорних прямих фігури  $F$  (рис. 1.27). Зокрема, опорними є прямі  $BA$  і  $BC$ . Промені  $BA$  і  $BC$  (проведені жирною лінією на рис. 1.27) називаються *напівдотичними* в точці  $B$  до фігури  $F$ .

Об'єднуючи обидва випадки разом, ми бачимо, що через кожну граничну точку  $B$  опуклої фігури  $F$  проходить хоча б одна опорна пряма цієї фігури. Якщо ж через точку  $B$  проходить тільки одна опорна пряма фігури  $F$  (рис. 1.25, а), то  $B$  називається *звичайною граничною* точкою

цієї фігури. Якщо ж через точку  $B$  проходить нескінченно багато опорних прямих фігури  $F$ , то  $B$  називається *кутовою точкою* (рис. 1.25,б).

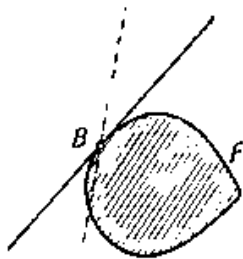


Рис. 1.26

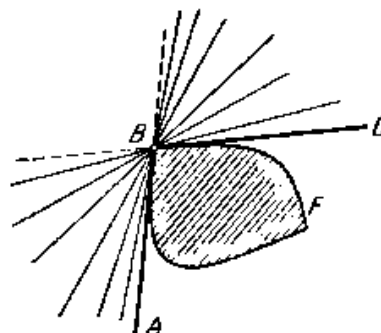


Рис. 1.27

### **Постановка задачі про покриття фігур гомотетичними**

Нехай  $F$  - деяка плоска фігура. Виберемо на площині довільну точку  $O$  і візьмемо, крім того, додатне число  $k$ . Для будь-якої точки  $A$  фігури  $F$  ми знайдемо на промені  $OA$  таку точку  $A'$ , що  $OA': OA = k$  (Рис. 1.28).

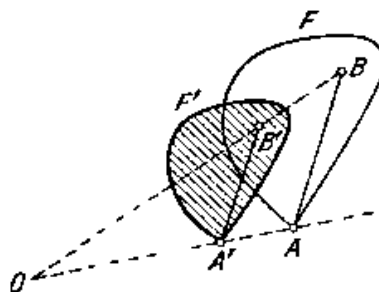


Рис. 1.28

Множина всіх точок  $A'$ , які отримуються таким чином являє собою нову фігуру  $F'$ . Перехід від фігури  $F$  до фігури  $F'$  називається гомотетією з центром  $O$  і коефіцієнтом  $k$ , а сама фігура  $F'$  називається гомотетичною фігурою  $F$ . (Гомотетія з від'ємним коефіцієнтом [18] нам ніде в подальшому не знадобиться, і тому ми її не розглядаємо). Якщо фігура  $F$  опукла, то і гомотетична їй фігура  $F'$  також є опуклою (бо якщо відрізок  $AB$  цілком належить фігурі  $F$ , то відрізок  $A'B'$  цілком належить фігурі  $F'$ ). Зауважимо, що якщо коефіцієнт гомотетії  $k$  менше одиниці, то фігура  $F'$  (гомотетична  $F$  з коефіцієнтом  $k$ ) є «зменшеною копією»



фігури  $F$ .

Тепер ми поставимо наступну задачу. Дана деяка плоска опукла обмежена фігура  $F$ . Знайти мінімальне число гомотетичних «зменшених копій» фігури  $F$ , якими можна покрити всю фігуру  $F$ . Це мінімальне число позначимо через  $b(F)$ . Більш точно, якщо  $b(F) = m$ , то це означає, що існують такі фігури  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , гомотетичні фігури  $F$  з деякими центрами гомотетії і з коефіцієнтами гомотетії, меншими одиниці (хоча б ненабагато), що в своїй сукупності фігури  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , покривають всю фігуру  $F$  (рис. 1.29); при цьому число  $m$  мінімальне, тобто меншого ніж  $m$  числа гомотетичних фігур для цієї мети недостатньо.

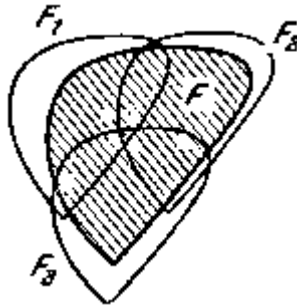


Рис. 1.29

Задачу про покриття опуклої фігури меншими гомотетичними фігурами можна розглядати не тільки для плоских фігур, а й для опуклих тіл в просторі (або навіть в  $n$  – вимірному просторі). Задача про те, які значення може приймати  $b(F)$ , була поставлена в 1960 році кишинівськими математиками І. Ц. Гохбергом і А. С. Маркусом. Трохи раніше ця задача (проте в іншому формулюванні) розглядалася німецьким математиком Ф. Леві [10].

Для прикладу розглянемо випадок, коли фігура  $F$  є коло. Коли меншими гомотетичними фігурами є довільні кола меншого діаметру. Неважко зрозуміти, що двома такими колами неможливо покрити вихідне коло  $F$ , тобто  $b(F) \geq 3$ . Справді, нехай  $F_1$  і  $F_2$  - два кола меншого діаметру і  $O_1, O_2$  - їх центри (рис. 1.30). Проведемо через центр  $O$  вихідного кола  $F$  перпендикуляр до лінії центрів  $O_1O_2$ .

Цей перпендикуляр перетинає окружність кола  $F$  в двох точках  $A$  і  $B$ . Нехай, наприклад, точка  $A$  розташована по ту ж сторону від прямої  $O_1O_2$ , що і точка  $O$  (якщо пряма  $O_1O_2$  проходить через точку  $O$ , то можна взяти будь-яку з точок  $A, B$ ).

Тоді  $AO_1 \geq AO = r$ ,  $AO_2 \geq AO = r$ , де  $r$  – радіус кола  $F$ . Оскільки кола  $F_1$  і  $F_2$  мають радіуси, менші  $r$ , то точка  $A$  не належить жодному з них, тобто кола  $F_1, F_2$  не покривають всього кола  $F$ .

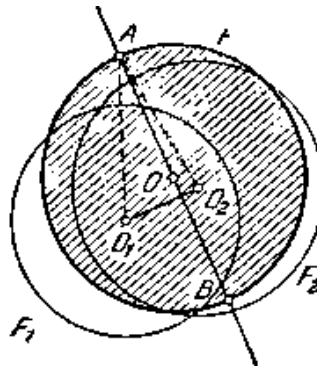


Рис. 1.30

З іншого боку, коло  $F$  легко покрити трьома колами трохи меншого діаметру (рис. 1.31). Таким чином, в разі кола  $b(F) = 3$ .

Розглянемо ще випадок, коли  $F$  являє собою паралелограм. Ясно, що ніякий паралелограм, гомотетичний  $F$  з коефіцієнтом гомотетії, меншим одиниці, не може містити відразу двох вершин паралелограма  $F$ . Інакше кажучи, чотири вершини паралелограма  $F$  повинні належати чотирьом різним гомотетичним паралелограмам, тобто  $b(F) \geq 4$ . Чотирьох же гомотетичних фігур явно достатньо (рис. 1.32). Таким чином, в разі паралелограма  $b(F) = 4$ .

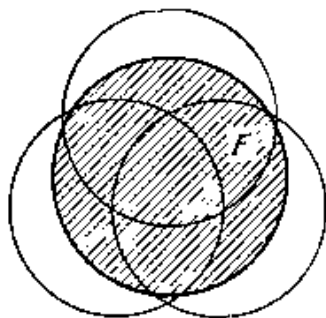


Рис. 1.31

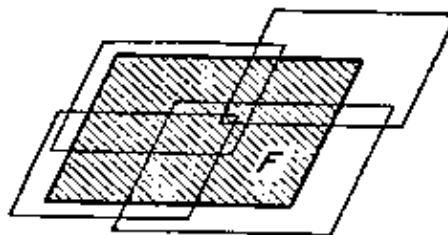


Рис. 1.32

### *Інше формулювання задачі*

Задачі про покриття фігури меншими гомотетичними фігурами можна надати іншу форму, зближуючи її із задачею Борсука про розбиття фігури на частини меншого діаметра.

Нехай  $F$  - опукла фігура і  $G$  - деяка її частина. Будемо говорити, що частина  $G$  фігури  $F$  має *габарит, рівний  $k$* , якщо існує фігура  $F'$ , гомотетична  $F$  з коефіцієнтом  $k$ , яка містить  $G$ , але ніяка фігура, гомотетична  $F$  з коефіцієнтом, меншим  $k$ , що не містить цілком  $G$ . Очевидно, що якщо частина  $G$  збігається з усією фігурою  $F$ , то її габарит дорівнює 1. Тому для будь-якої, яка не збігається з  $F$  частини  $G$  фігури  $F$  габарит  $k \leq 1$ .

Не слід, однак, думати, що якщо частина  $G$  не збігається з усією фігурою  $F$ , то її габарит  $k$  неодмінно менше одиниці. Якщо, наприклад,  $F$  являє собою коло, а частина  $G$  - вписаний в нього гострокутний трикутник (рис. 1.33), то габарит частини  $G$  дорівнює одиниці (бо ніяке коло меншого діаметра не містить цілком трикутника  $G$ ). Частина  $G$  фігури  $F$  ми будемо називати *частиною меншого габариту*, якщо її габарит  $k < 1$ .

Користуючись поняттям габариту, ми можемо надати визначення величині  $b(F)$  іншу форму:  *$b(F)$  є мінімальне число частин меншого габариту, на які можна розбити дану опуклу фігуру  $F$* . Неважко зрозуміти, що це визначення величини  $b(F)$  еквівалентно попередньому. Справді, нехай  $F_1, F_2, \dots, F_m$ - менші гомотетичні фігури, що покривають  $F$ . Позначимо через  $G_1, G_2, \dots, G_m$  частини фігури  $F$ , як відтинаються від неї фігурами  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . Очевидно, що кожна з частин  $G_1, G_2, \dots, G_m$  фігури  $F$  має габарит  $< 1$ . Таким чином, якщо фігура  $F$  може бути покрита  $m$  меншими гомотетичними фігурами, то її можна розбити на  $m$  частин меншого габариту. Навпаки, якщо фігура  $F$  може бути розбита на  $m$  частин  $G_1, G_2, \dots, G_m$  меншого габариту, то існують фігури

$F_1, F_2, \dots, F_m$ , які містять, відповідно, частини  $G_1, G_2, \dots, G_m$  і гомотетичні фігурі  $F$  з коефіцієнтами, меншими одиниці. Ці фігури  $F_1, F_2, \dots, F_m$  і утворюють покриття фігури  $F$  меншими гомотетичними частинами.

Все сказане (тобто визначення габариту і інше визначення числа  $b(F)$ ) відноситься, зрозуміло, не тільки до плоских фігур, але і до опуклих фігур будь-якого числа вимірів. Таким чином, задачу про покриття опуклої фігури меншими гомотетичними фігурами можна ще сформулювати, як *задачу про розбиття фігури  $F$  на частини меншого габариту*. У цій формі вона нагадує задачу Борсука.

Однак зв'язок між цими задачами не тільки зовнішній. Справді, якщо фігура  $F$  має діаметр  $d$ , то фігура, гомотетична  $F$  з коефіцієнтом  $k$ , має діаметр  $kd$ . Звідси випливає, що якщо опукла фігура  $F$  має діаметр  $d$ , то будь-яка її частина меншого габариту  $\epsilon$  в той же час і частиною меншого діаметру. (Обернене, взагалі кажучи, невірно; наприклад, рівносторонній трикутник, вписаний в коло  $F$  діаметра  $d$ , є частиною меншого діаметра, але має габарит, що дорівнює одиниці; рис. 1.33). Тому, якщо опукла фігура  $F$  може бути розбита на  $t$  частин меншого габариту, то вона може бути розбита на  $t$  частин меншого діаметру (але, взагалі кажучи, не навпаки, як показує приклад паралелограма).

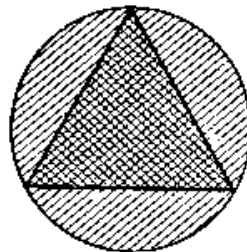


Рис. 1.33

Таким чином, для будь-якої опуклою фігури  $F$  справедлива нерівність:  $a(F) \leq b(F)$ .

## РОЗДІЛ 2

### ЗАДАЧА ЕРДЕША-СЕКЕРЕША

#### 2.1. Постановка задачі Ердеша-Секереша про опуклі многокутники

Задача, про яку йдеться далі, по праву вважається однією із перлин комбінаторної геометрії. Виняткова простота її постановки робить розповідь про неї доступним школяреві, а нетривіальність її розв'язання і багаточисельні її зв'язки з іншими областями математики одразу ж виводять зацікавленого слухача на передній край сучасної комбінаторики. Ця задача виникла у 1934 році [8].

Розглянемо яку-небудь скінчену множину точок  $\chi$  на площині і поставимо таке запитання: чи вірно, що в множині  $\chi$  завжди знайдуться три точки, які являються вершинами трикутника? На перший погляд, питання здається просто безглуздим. Ясно ж, що якщо в  $\chi$  одна чи дві точки, то і казани нема про що; якщо ж  $|\chi| \geq 3$  (потужність  $\chi$  не менше трійки), то якби будь-які три елемента в множині слугують вершинами трикутника. Так-то воно так, але не зовсім: а що якщо якісь три точки із множини  $\chi$  лежать на одній прямій? Тоді навряд чи доречно говорити про трикутник з вершинами в них. І зовсім нікуди не годиться ситуація, в якій всі точки нашої множини виявляються «нанизаними» на одну пряму. Відповідь на питання несподівано негативна. Проте, якщо ми із самого початку допустимо, що в множині  $\chi$  не які три точки не лежать на одній прямій, тоді спрацьовує природна логіка і при умові  $|\chi| \geq 3$  ми зможемо гарантувати наявність трикутників у  $\chi$ .

З трикутниками ми розібралися. А як тоді йдуть справи з опуклими чотирикутниками, опуклими п'ятикутниками й інші? Хочеться отримати відповідь в тій же формі, що і у випадку

трикутників, а саме: для кожного  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , бажано відшукати таку «граничну» величину  $g(n) \in \mathbb{N}$ , щоб у кожній множині  $\chi$ , що не містять трійок точок на одній прямій і які мають не менш ніж  $g(n)$  елементів, знайшлися  $n$  вершин випуклого  $n$ -кутника і щоб для  $g(n) - 1$  описана властивість не виконувалась. Ось  $g(3) = 3$ , а чому дорівнюють  $g(4), g(5)$  та інші? Взагалі, чи існують ці величини? Адже цілком може статися, що, скажемо, для будь-якого  $m$  знайдеться множина  $\chi$  розміру  $m$ , в якій немає вершин випуклих десятикутників. Проблема Ердеша – Секереша, до вивчення якої ми переходимо, як раз і складається у знайденні величин  $g(n)$ .

Очевидно, що  $g(4) > 3$ . Може бути,  $g(4) = 4$ ? Зрозуміло, ні. Достатньо подивитися на рисунок 2.1, щоб зрозуміти це: зображені на малюнку точки знаходяться у спільному положенні, і тим не менш, серед них немає вершин опуклих чотирикутників. Отже,  $g(4) \geq 5$ .

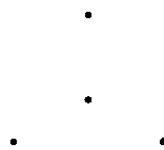


Рис. 2.1

*Чотирикутники.* Покажемо, що  $g(4) = 5$ , тобто переконаємося, що будь якій множині з п'яти точок на площині є опуклі чотирикутники. Тут нам знадобиться поняття опуклої оболонки множини точок. Опукла оболонка (кінцевої) множини  $\chi$  – це «найменший» опуклий многокутник, всередині чи на грані якого лежать всі точки з  $\chi$ . На рисунку 2.2 показані приклади опуклих оболонок.



Рис. 2.2

Нехай дані довільні п'ять точок на площині. Розглянемо їх опуклу оболонку. Або всередині неї наших точок немає, або всередині неї одна

точка, або всередині неї дві точки (рис. 2.3).



Рис. 2.3

У перших двох випадках все очевидно, а у третьому випадку міркування влаштоване так: проведемо через дві внутрішні точки пряму; з виду на спільності положення, ця пряма не пройде ні через жодну вершину трикутника (рис. 2.4), але «зачепити» одразу дві його сторони; візьмемо дві внутрішні точки і дві вершини сторони трикутника, яка залишалася; їх опукла оболонка і є шуканим чотирикутником.

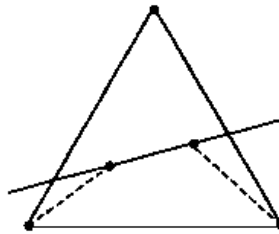


Рис. 2.4

*П'ятикутники.* Є два приклади, які показують, що  $g(5) \geq 9$ . Це приклади з восьми точок у спільному положенні і без опуклих п'ятикутників. Вони зображені на рисунку 2.5. Нижче буде показано, що насправді  $g(5) = 9$ .

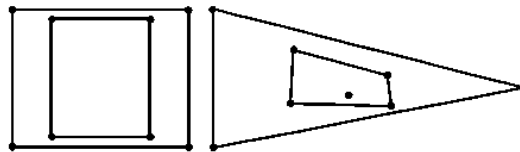


Рис. 2.5

Це старий результат, та його історія трохи туманна. Вперше він згадується ще у 1935 році у статі, де він підписується Е. Макаї. У 1961 році Ердеш і Секереш опублікували роботу, і там вже говориться про двох авторів – все те ж Макаї і П. Туране.

Отже, нехай дані дев'ять точок, які утворюють множину  $\chi$  спільного положення на площині. Розглянемо опуклу оболонку  $q$

множини  $\chi$ . З виду спільності положення у  $q$  не може бути менше трьох вершин. Якщо у  $q$  п'ять або більше вершин, то опуклий п'ятикутник знайдений, і далі говорити, про що не будь не має сенсу. Інакше у  $q$  три або чотири вершини. Останні шість або п'ять точок із множини  $\chi$  знаходиться всередині  $q$ . Візьмемо тепер їх опуклу оболонку і назвемо її  $g$ . Знову: або у  $g$  три або чотири вершини...Стоп: а чому, наприклад, не дві? Заважає спільність положення. Де тоді розташуються точки із  $\chi$ , яких не вистачає (рис. 2.6)? На внутрішньому відрізку їх бути не може.

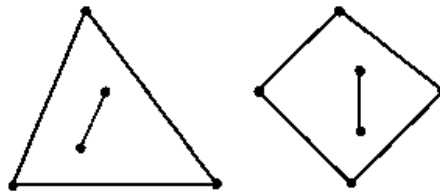


Рис. 2.6

На даному етапі ми маємо наступну картину. Якщо у процесі побудови опуклих оболонок п'ятикутник ще не знайдений, то в нас таких вкладених один в одну оболонок вже дві -  $q$  і  $g$ , і кожна з них є або трикутник, або чотирикутник. А всього то точок дев'ять. Тоді, процес можна продовжити.

Подивимося всередину  $g$ . Там, очевидно, одна, дві або три точки із  $\chi$ . Позначимо через  $i$  кількість вершин многокутника  $q$ , через  $j$  – кількість вершин многокутника  $J$ , а через  $k$  – кількість точок всередині  $J$ . Зрозуміло, що їх опукла оболонка  $K$  - це точка, відрізок або трикутник. В підсумку залишається вивчити лише чотири випадки, і всі вони зображені на рисунку 2.7. По природнім причинам, назвемо їх випадками  $(4, 4, 1)$ ,  $(4, 3, 2)$ ,  $(3, 4, 2)$  і  $(3, 3, 3)$ .



Рис. 2.7

Взагалі, вираз «конфігурація виду  $i, j, k$ » зручно, і нас не хто не



змушує використовувати його тільки для наших дев'ятиточкових множин. Наприклад, конфігурація виду  $(3, 3, 2)$ , яка відповідає восьми точковій множині, зображена на рисунку 2.8.

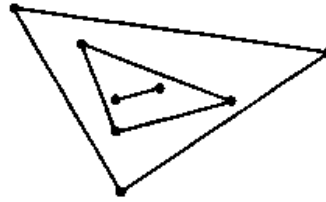


Рис. 2.8

Нехай, ми довели, що в будь-яких конфігураціях виду  $(3, 3, 2)$ ,  $(4, 3, 1)$  і  $(3, 4, 2)$  все ж таки є опуклий п'ятикутник. Що ж, це перемога, адже зовсім легко бачити, що кожна із конфігурацій рисунка 2.7 у свою чергу містить одну із вказаних конфігурацій (у  $(3, 3, 3)$  таїться  $(3, 3, 2)$ ; у  $(4, 3, 2)$  і  $(4, 4, 1)$  вмістилась  $(4, 3, 1)$ ; із  $(3, 4, 2)$  все і так ясно).

Розберемося спочатку із випадками  $(3, 3, 2)$  і  $(4, 3, 1)$ . Саме цим випадкам присвячений рисунок 2.9.

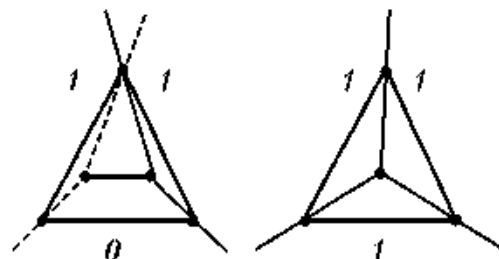


Рис. 2.9

На ньому зображені дві оболонки, які ми називали  $j$  і  $k$ . Далі, в першому випадку ми покриваємо площину навколо трикутника  $j$  трьома областями, в середині яких написані цифри. Область з нулем строго відділена від областей з одиницями, а області з одиницями між собою перетинаються (біля однієї границі пунктирна, а біля іншої – сполощна). Сенс дуже простий: якщо, скажемо, в будь-якої із областей з одиницею опиниться більше однієї вершини многокутника  $q$ , то, виду його опуклості, і опуклий п'ятикутник у нас в руках. Іншими словами, якщо ми запропонуємо, що у нашій конфігурації опуклих п'ятикутників не

має, то ми опинимося змушені признати, що у  $q$  не більш ніж дві вершини. Цим напевно і завершується розбір випадку. Точно також діємо у другому випадку. Залишився випадок  $(3, 4, 2)$ . Знову подивимося на проміжний чотирикутник і внутрішній відрізок. Завдяки спільності положення, існують лише два варіанти їх взаємного розміщення. А саме, пряма, яка містить відрізок, перетинає або сусідні сторони чотирикутника, або протилежні. Перший варіант зображений на рисунку 2.10 зліва, і в ньому п'ятикутник ловиться одразу. Другий варіант розташований на тому ж малюнку з права, і у ньому ми діємо згідно логіці (розрізаємо площину на частини і виписуємо, скільки вершин зовнішнього трикутника могли б у ці часті попасти, не будь у конфігурації опуклого п'ятикутника).

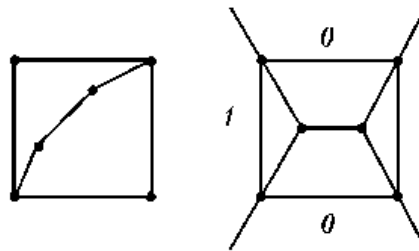


Рис. 2.10

Отже, нерівність  $g(5) \leq 9$  доведено.

## 2.2. Теорема Рамсея

**Гіпотеза 2.1.** Має місце рівність  $g(n) = 2^{n-2} + 1$ .

Це твердження не ким і досі не доведено і не спростоване, що не може не виявляти враження. З гіпотези 2.1, спроб довести її і виникаючій навколо цього багатогранної проблематики починається посправжньому серйозна робота над задачею. Перш за все: а хіба ми десь, взагалі, показали, що  $g(n) < \infty$  для кожної  $n$ ?

В математиці все взаємопов'язане, та іноді для розв'язання задач із однієї області доводиться примати міркування із області, які, на перший

погляд, можуть здатися вельми далекими від неї. Так і тут: ми побачимо, що задача Ердеша – Секереша має безпосередній вихід на класичну теорему Рамсея в комбінаториці. Давайте згадаємо, що таке, поступово переходячи від простих часткових випадків до більш складніших загальних випадків.

**Теорема Рамсея.** *Для будь-яких натуральних чисел  $k, l_1, \dots, l_r$  існує найменше натуральне число  $m_0$ , яке володіє наступними властивостями. Яке б не було  $m \geq m_0$ , якщо кожна  $k$ - елементна підмножина множини  $\{1, \dots, m\}$  пофарбоване в один із  $r$  кольорів з «іменами»  $1, \dots, r$ , то знайдеться  $i \in \{1, \dots, r\}$  і така  $l_i$  – елементна підмножина  $T \subset \{1, \dots, m\}$ , що всі її  $k$ - елементна підмножина має колір з ім'ям  $i$ .*

Результат про граfi впливає із цієї теорема при  $k = 2, r = 2, l_1 = s, l_2 = t$ . Є тут і своя маленька логічна тонкість, яку допитливий читач повинен, по ідеї, помітити одразу: а що якщо  $k > l_i$  при якому-небудь  $i$ ? Скажемо, нехай як і раніше  $k = 2, r = 2, l_1 = 1, l_2 = 100$ .

Доведення теорема Рамсея отримується за допомогою багатократної індукції і, будучи елементарним, потребує все ж багато місця для свого викладу. Це настільки класичний факт, що відшукати його повне доведення не складає багато складнощів.

Зауважимо, що для величини  $m_0$ , яка фігурує у теоремі, використовується більш менш стандартне позначення  $R_k(l_1, \dots, l_r)$ . Зокрема, ми вже казали, що  $R_2(3, 3) = 6$  і  $R_2(1, 100) = 1$ . До речі, таких точних рівностей відомо дуже мало.

Зараз ми доведемо, що  $g(n) \leq R_4(n, 5)$ . Дійсно, нехай  $\chi$  – множина точок, яка складається з не менш ніж  $R_4(n, 5)$  елементів. Пофарбуємо всі четвірки точок в ньому у червоний і синій кольори: якщо дані чотири точки є вершинами опуклого чотирикутника, позначаємо четвірку червоним; інакше кажемо, що вона синя. За

теоремою Рамсея можливі два варіанта. В одному з них в  $\chi$  знайдуться п'ять точок, серед яких всі четвірки сині, тобто немає не однієї четвірки, яка б породжувала опуклий чотирикутник. Але це нонсенс, так як суперечить твердженню Кляйн про те, що  $g(n) = 5$ . Отже, залишається лише альтернатива, при якій у  $\chi \in n$  точок без синіх четвірок. Інакше кажучи, всі чотирикутники, які породжувані цими точками, опуклі. Таке можливо у тому випадку, якщо самі ці  $n$  точок суть вершини опуклого  $n$  – кутника. Все, нерівність отримана.

Аналогічний фокус дозволяє встановити і оцінку  $g(n) \leq R_3(n, n)$ . Візьмемо множину  $\chi = \{x_1, \dots, x_m\}$  розміру не менше  $R_3(n, n)$ . Розглянемо в ній довільну трійку  $\{x_i, x_j, x_k\}$  ( $i < j < k$ ) і подивимося на її опуклу оболонку (трикутник). Якщо, починати із точки  $x_i$  і рухаючись за годинниковою стрілкою навколо цього трикутника, ми зустрічаємо точки  $x_i, x_j, x_k$  саме в такому порядку, то фарбуємо трійку у червоний колір. Інакше – у синій. На рисунок 2.11 ми проводимо приклади червоної та синьої трійок. Отже, тепер ми знаємо, що  $g(n) < \infty$ . Але нам у слід за Ердешем та Секерешем хочеться вірити у красиву гіпотезу 2.1.

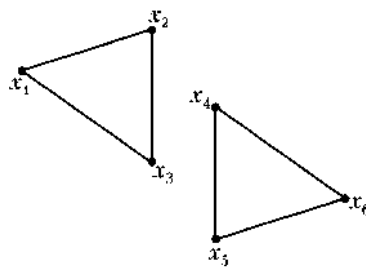


Рис. 2.11

Отже, потрібно сказати пару слів про те, як співвідносяться величини  $R_4(n, 5)$ ,  $R_3(n, n)$  і  $2^{n-2} + 1$ . Насамперед, дуже мало відомо про швидкості зростання функцій  $R_4(n, 5)$  і  $R_3(n, n)$ . Здається, що при великих  $n$  величина  $R_3(n, n)$  все ж таки, менше, ніж  $R_4(n, 5)$ . Але строго це не доведено. Виною тому та обставина, що всі оцінки для потрібних нам чисел Рамсея, які на даному етапі розвитку науки вдалося отримати, слабкі. Наприклад, ось найкраще, що ми вміємо сказати про  $R_3(n, n)$ :

$$2^{an^2} < R_3(n, n) < 2^{b^n},$$

де  $a$  і  $b$  – деякі конкретні числа. В будь-якому випадку навіть  $2^{an^2}$  зростає куди швидше, ніж  $2^{n-2} + 1$ , а про  $2^{b^n}$  і говорити страшно.

### 2.3. Чашки і кришки

Зараз ми визначимо два типи опуклих ломаних на площині – чашки і крижки. Для цього зафіксуємо на площині яку не будь прямокутну систему координат (рис. 2.12,а). Нехай дані натуральні числа  $k \geq 3$  і  $l \geq 3$ . Назвемо  $k$  – чашкою лому, яка має  $k$  вершин із різними абсцисами ( $k - 1$  ланка) і зовнішні нагадує чашку (рис. 2.12,б), якщо ми дивимося не неї як би зверху униз уздовж осі ординат. Аналогічно визначаємо  $l$  – кришку (рис. 2.12,в).



Рис. 2.12

Зрозуміло, існує більш строгі визначення кожного із введених нами об'єктів. Наприклад, у випадку чашки суть у тому, що багатокутна область, обмежена чашкою та двома прямими, які перпендикулярні осі абсцис і проходять через лівий і правий кінці чашки, опукла (« над графік» чашки – опукла множина). Приведемо ще приклад опуклої ломаної, яка не є ні чашкою, ні кришкою у *нашій системі координат* (рис. 2.13).

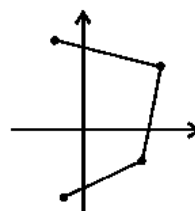


Рис. 2.13

Зрозуміло, що якщо ми знайдемо в тій чи іншій множині  $\chi$  чашку або кришку з  $n$  вершинами в якій-небудь системі координат, то опуклий  $n$  – кутник в нас: достатньо з'єднати вільні кінці ломаної відсутнім відрізком. Насправді вираз « в будь-якій системі координат» можна замінити виразом « в будь-якій системі координат, для якої парі точок із  $\chi$  не завдають прямих, паралельних осі  $y$ ». Назвемо всяку систему координат із вказаною властивістю *правильною для  $\chi$* . Відмітимо, що у певному сенсі для даного  $\chi$  « майже всяка» система координат правильна.

Розглянемо величину  $f(k, l)$ , рівну найменшому  $f_0$  такому, що для будь-якого  $f \geq f_0$  в кожній множині  $\chi$  із  $f$  точок на площині і в кожному правильному для  $\chi$  системі координат знайдеться або  $k$  – чашка, або  $l$  – кришка. В кінцевому рахунку  $g(n) \leq f(n, n)$ , так що тепер хочеться зрозуміти, як себе поводить функція  $f(k, l)$  із зростанням своїх аргументів.

**Теорема про чашки та кружки.** *Має місце рекурентна нерівність*

$$f(k, l) \leq f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1.$$

Теорему довели Ердеш і Секереш.

#### ***Доведення теореми про чашки і кришки***

Покладемо  $n = f(k - 1, l) + f(k, l - 1) - 1$ , зафіксуємо довільну множину  $\chi$  потужності  $n$  і будь-яку правильну для  $\chi$  систему координат. Нам необхідно показати, що або в  $\chi$  є  $k$  – чашка, або в  $\chi$  є  $l$  – кришка. Позначимо через  $\mathcal{U}$  множину всіх точок, які є лівими кінцями  $(k - 1)$  – чашок в  $\chi$ . Допустимо спочатку, що в множині  $\chi \setminus \mathcal{U}$  не менше ніж  $f(k - 1, l)$  точок. Тоді або в ньому є  $(k - 1)$  – чашок, або в ньому є  $l$  – кришка. Але перший випадок неможливий, бо  $\chi \setminus \mathcal{U}$  за будовою не містить не однієї  $(k - 1)$  – чашок. Тобто, в реченні  $|\chi \setminus \mathcal{U}| \geq f(k - 1, l)$  у  $\chi$  є  $l$  – кришка, і все гаразд.

Припустимо тоді, що  $|\chi \setminus \mathcal{Y}| \geq f(k-1, l) - 1$ . В цьому випадку  $|\mathcal{Y}| = |\chi| - |\chi \setminus \mathcal{Y}| \geq n - f(k-1, l) + 1 = f(k, l-1)$ .

Отже, або в  $\mathcal{Y} \in k$ -чашка і знову все добре, або у  $\mathcal{Y} \in (l-1)$ -кришка. Подивимося на правий кінець цієї кришки. Він слугує лівим кінцем деякої  $(k-1)$ -чашки. На рисунку 2.14 показані обидва можливих варіантів взаємного розташування нашої  $(l-1)$ -кришки і  $(k-1)$ -чашки.



Рис. 2.14

В першому випадку перша ланка нашої чашки перетворює нашу кришку в  $l$ -кришку, в другому випадку остання ланка нашої кришки перетворює нашу чашку в  $k$ -чашку. Так чи інакше, або  $l$ -кришка, або  $k$ -чашка у  $\chi \in$ , і теорема доведена.

### ***Про одну комбінаторну тотожність***

Добре відомо, що  $C_a^b = C_{a-1}^b + C_{a-1}^{b-1}$ . Розглянемо функцію  $F(k, l) = C_{k+1-4}^{k-2}$  і застосуємо до неї вказану тотожність. Отримаємо

$$F(k, l) = C_{k+1-5}^{k-2} + C_{k+1-5}^{k-3} + 1 = F(k, l-1) + F(k-1, l) - 1.$$

Інакше кажучи, функція  $F(k, l)$  задовольняє тій же рекурентній нерівності, що і та, яка цікавить нас величина  $f(k, l)$ . Більш того, неважко бачити, що

$$f(k, 3) = f(3, k) = F(k, 3) = F(3, k) = k.$$

Звідси випливає, що  $f(k, l) \leq F(k, l)$ . Зокрема,

$$g(n) \leq f(n, n) \leq F(n, n) = C_{2n-4}^{n-2} + 1.$$

Нам хочеться прикинути, як швидко зростає функція  $C_{2n-4}^{n-2} + 1$ . По-перше, доданок 1 нас одразу не повинен хвилювати, а по-друге, покладемо для зручності  $m = n - 2$ . Отже, розглянемо  $C_{2m}^m$ . Згадаємо ще одну тотожність:

$$2^{2m} = C_{2m}^0 + C_{2m}^1 + \dots + C_{2m}^{2m}.$$

З неї одразу випливає оцінка  $C_{2m}^m < 2^{2m}$ . В той же час доданок  $C_{2m}^m$  – найбільше в зазначеній сумі, а всього в ній доданків  $2m + 1$ . Таким чином,  $C_{2m}^m > \frac{2^{2m}}{2m+1}$ .

Існує спосіб ще точніше оцінити біноміальний коефіцієнт. Для цього нам буде потрібна чудова формула Стірлінга, яке дає приблизне значення для факторіала. Ось вона:

$$t! = \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t (1 + o(1)).$$

Тут  $e = 2,71 \dots$  – основа натурального логарифма, а запис  $o(1)$  означає, що існує функція  $\varphi$  від аргументу  $t$ , яка прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , при підстановці якої замість  $o(1)$  отримується точна рівність.

Формула Стірлінга [13] доводиться доволі важко засобами математичного аналізу. Ми застосуємо її до виразу

$$C_{2m}^m = \frac{2^{2m}}{\sqrt{2\pi m}} (1 + o(1)).$$

Якщо в гіпотезі 1 фігурує функція  $2^{n-2}$ , то в нас же є верхня оцінка за допомогою величини  $2^{2n-4}$ .

Отже, нерівність  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 1$  довели Ердеш та Секереш у 1935 році. А у 1998 році виникло одразу три уточнення.

Перше з них належить Ф. Чанг і Р. Грехему і вражає своєю «значимістю»:  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2}$ . Вони прибравли доданок 1 ... Далі – більше. Д. Клейтман і Л. Пахтер показали, що вірна нерівність  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 7 - 2n$ . Нарешті, третього покращення домоглися Г. Тот і П. Вальтр:  $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 2$ . Останній результат приблизно вдвоє краще результату Ердеша – Секереша. Поточний рекорд також належить Тоту і Вальтру. Тільки дотується він 2005 роком. А успіх цілком у дусі Чанг і Грехема:  $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 1$  при  $n \geq 5$ .



### Чи завжди $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$ ?

В боротьбі за верхні оцінки ми позабули про, що в сутності, і ще не знаємо навіть, чи вірна нерівність  $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$ . При  $n \leq 6$  вона, звичайно, справедлива, а ось далі? Зараз для кожного  $n$  побудуємо приклад множини розміру  $2^{n-2}$ , в якій немає опуклих  $n$  – кутників. Тут ми будемо слідувати Ердешу – Секерешу.

Перш за все повернемося до величини  $f(k, l)$ . Ми все знаємо, що

$$f(k, l) \leq F(k, l) = C_{k+l-4}^{k-2} + 1.$$

Тепер ми побудуємо множину  $\mathcal{F}(k, l)$ , яка не містить ні  $k$  – чашек, ні  $l$  – кришек, але яка має розмір  $F(k, l) - 1$ . Інакше кажучи, ми переконаємося у тому, що хоча проблема відшукування величини  $g(n)$  важка, допоміжна задача про  $f(k, l)$  куди простіше, отже

$$f(k, l) = C_{k+l-4}^{k-2} + 1.$$

Організуємо індуктивний процес побудови  $\mathcal{F}(k, l)$ . Базою послужать множини  $\mathcal{F}(k, 2)$ , і  $\mathcal{F}(2, l)$ . Розмір кожного з них повинен бути рівний одиниці, тобто і справді одна точка не містить ні чашек, ні кришок.

Нехай множини  $\mathcal{F}(k - 1, l)$  і  $\mathcal{F}(k, l - 1)$  (назвемо їх для кратності  $\mathcal{A}$  і  $\mathcal{B}$ ) все побудовані. Зрозуміло, що якщо  $\varphi$  і  $\psi$  – довільні перетворення площини, що представляють собою композиції паралельних переносів і стиснень (розтягнень) уздовж координатних осей, то множини  $\varphi(\mathcal{A})$  і  $\psi(\mathcal{B})$  як і раніше не містять чашок та кришок належного розміру. Наша мета – підібрати такі  $\varphi$  і  $\psi$ , щоб  $\varphi(\mathcal{A}) \cap \psi(\mathcal{B}) = \emptyset$  і щоб у множині  $C = \varphi(\mathcal{A}) \cup \psi(\mathcal{B})$  не з'явилась ні  $k$  – чашка, ні  $l$  – кришка. Якщо ми мету реалізуємо, то отримаємо

$$\begin{aligned} |C| &= |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = F(k - 1, l) - 1 + F(k, l - 1) - 1 = F(k, l) + 1 - 2 \\ &= F(k, l) - 1. \end{aligned}$$

Ми оберемо  $\varphi$  і  $\psi$  так, щоб виконувались наступні дві умови:

- 1) Будь-яка точка із множини  $\psi(\mathcal{B})$  має більше значення

координати  $x$ , ніж будь-яка точка із множини  $\varphi(\mathcal{A})$ .

2) Кутовий коефіцієнт будь-якої прямої, яка проходить через точку із  $\varphi(\mathcal{A})$  і точку із  $\psi(\mathcal{B})$ , більше, ніж у будь-якої прямої, яка проходить через пару точок із  $\varphi(\mathcal{A})$  або пару точок із  $\psi(\mathcal{B})$ .

Ясно, що такий вибір легко здійснити (перше досягається паралельним переносом, друге – стисненням уздовж осі ординат, адже і рухати, і «сплющувати» множини ми повинні окремо). І зрозуміло в той же час, що за рахунок вказаних умов кожна чашка із  $\varphi(\mathcal{A})$  (її розмір за визначенням не перевищує  $k - 2$ ) може бути розширена не більш ніж однією точкою із  $\psi(\mathcal{B})$  і кожна кришка із  $\psi(\mathcal{B})$  (її розмір за визначенням не перевищує  $l - 2$ ) може бути розширена не більше ніж в одній точці із  $\varphi(\mathcal{A})$ . Інакше кажучи, ні  $k -$  чашка, ні  $l -$  кришка в  $\varphi(\mathcal{A}) \cup \psi(\mathcal{B})$  насправді немає. Побудова  $\mathcal{F}(k, l)$  завершена, і ми для наочності наводимо на рисунку 2.15 процес побудови  $\mathcal{F}(k, l)$  аж до  $k = l = 5$ .

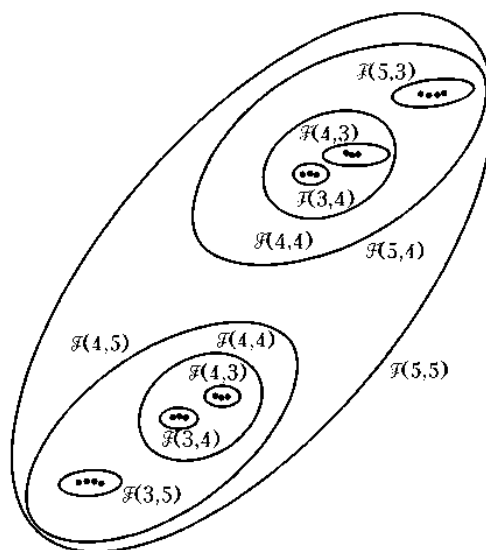


Рис. 2.15

Повернемося до побудови прикладу множини розміром  $2^{n-2}$  без опуклих  $n -$  кутників. Оскільки її формальний опис досить клопітний, спробуємо одразу створити інтуїцію за допомогою малюнка. На рисунку 2.16 зображені конструкції для  $n = 4, 5, 6$ . А саме, це сукупність точок, як би нанизаних на своєрідні дуги (випадок  $n = 4$  відповідає лівій,

найкоротшій, точки для випадку  $n = 5$  розташовані на середній дузі, а випадок  $n = 6$  показаний справа). Групування точок взяті, для лівої вони суть (зверху вниз)  $\mathcal{F}(4, 2)$ ,  $\mathcal{F}(3, 3)$ ,  $\mathcal{F}(2, 4)$ ; для середньої -  $\mathcal{F}(5, 2)$ ,  $\mathcal{F}(4, 3)$ ,  $\mathcal{F}(3, 4)$ ,  $\mathcal{F}(2, 5)$ ; для правої -  $\mathcal{F}(6, 2)$ ,  $\mathcal{F}(5, 3)$ ,  $\mathcal{F}(4, 4)$ ,  $\mathcal{F}(3, 5)$ ,  $\mathcal{F}(2, 6)$ . Правда, при  $n = 6$  шість точок у центрі дуги трохи злиплися, і все ж таки закономірність все майже ясна. Залишилось лише формалізувати її.



Рис. 2.16

Сперш розглянемо на координатній площині прямий кут, утворений прямими  $y = x$  і  $y = -x$  (саме той, який містить позитивну піввісь  $x$ , рис. 2.17, а). Потім проведемо в цьому куту дугу окружності радіуса 1 (рис. 2.17, б). Розділимо дугу на  $n - 2$  однакові дужки точками  $x_0, \dots, x_{n-2}$ , рухаючись зверху вниз (рис. 2.17, в). Інакше кажучи, вектор, який йде із початку координат в  $x_i$ , проходить під кутом  $\frac{\pi}{4} - \frac{i\pi}{2(n-2)}$  до вісі абсцис.

Тепер візьмемо однакові крихітні кружки із центром  $x_0, \dots, x_{n-2}$  і, подібно бусинкам в намисті, нанизаємо їх на нашу дугу (рис. 2.17. г). Потім одразу, що бусинки повинні бути настільки дрібними, щоб будь яка пряма, проведена через які-небудь дві точки, які належать різним бусинкам, мала кутовий коефіцієнт, за модулем більший одиниці (тобто була скоріше «вертикальною», ніж «горизонтальною»).

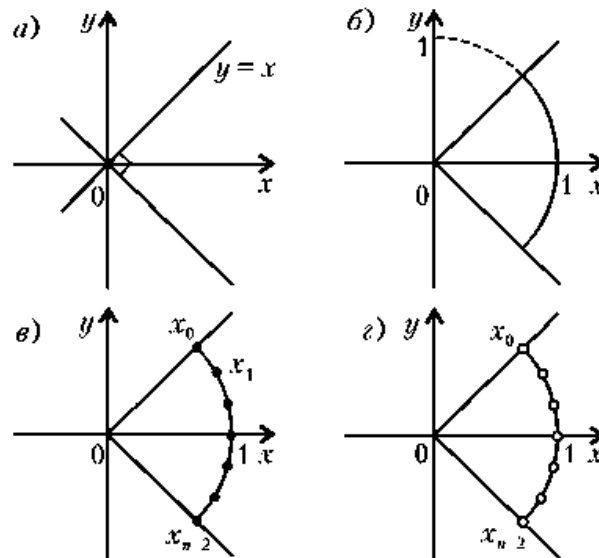


Рис. 2.17

Тепер розглянемо множини  $\mathcal{F}(n, 2), \mathcal{F}(n-1, 3), \dots, \mathcal{F}(2, n)$ . Їх стільки ж, скільки бусинок. Стисненнями доб'ємося, по-перше, того, щоб кожне із цих множин без втрати своїх «чашково-кришечних» властивостей містилося всередині бусинки, а по-друге, того, щоб будь-яка пряма, яка проходить через дві довільні точки «сплюснутої» множини, мала кутовий коефіцієнт, за модулем, що не перевищує одиниці (тобто була скоріше горизонтальною, ніж вертикальною). За допомогою паралельних переносів заженемо стиснений варіант  $\mathcal{F}(n-i+2, i)$  у бусинку з центром у  $x_{i-2}, i = 2, \dots, n$ . Позначимо нові множини, які сидять у бусинках, через  $\mathcal{F}(n-i+2, i)$ . Такі множини як і раніше не містять  $(n-i+2)$  – чашек та  $i$  – кришек, при чому  $|\mathcal{F}(n-i+2, i)| = C_{n-2}^{i-2}$ .

Покладемо

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{X}| &= \mathcal{F}(n, 2) \cup \mathcal{F}(n-1, 3) \cup \dots \cup \mathcal{F}(2, n). \\
 |\mathcal{X}| &= |\mathcal{F}(n, 2)| + |\mathcal{F}(n-1, 3)| + \dots + |\mathcal{F}(2, n)| = \\
 &= C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2}.
 \end{aligned}$$

Авжеж, нам залишається лише перевірити, що будь-яка підмножина  $\mathcal{Y}$  в множині  $\mathcal{X}$ , елементи якого слугують вершинами опуклого многокутника, має розмір, який не перевищує  $n-1$ .

Можливо два варіанти. Перший варіант складається у тому, що  $\mathcal{U}$  цілком сидить в одній із бусинок, тобто при деякому  $i$   $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}(n - i + 2, i)$ . Але у цьому випадку  $\mathcal{U}$  не містить ні  $n - i + 2$  - чашки, ні  $i$  - кришки, а це означає,  $|\mathcal{U}| \leq (i - 1) + (n - i + 2 - 1) - 2 = n - 2$ .

Таким чином, ми змушені звернутися до другого варіанту, у рамках якого множина  $\mathcal{U}$  має не порожній перетин одразу з декількома бусинками. Позначимо через  $a$  і  $b$  номери самої «верхньої» і самої «нижньої» із цих бусинок. Завдяки махінаціям з кутами нахилу прямих, які ми із самого початку здійснили, множина точок із  $\mathcal{U}$  у верхній бусинці породжує кришку, а множина точок із  $\mathcal{U}$  у нижній бусинці - чашку, причому для будь-якого  $i$  між  $a$  і  $b$  в бусинці  $\mathcal{F}(n - i + 2, i)$  сидить не більше однієї точки із  $\mathcal{U}$ . Отже, «зверху» у  $\mathcal{U}$  не більше  $a - 1$  точок, «знизу» - не більше  $n - b - 1$  точок. Разом,

$$|\mathcal{U}| \leq (a - 1) + (n - b + 1) + (b - a - 1) = n - 1.$$

### РОЗДІЛ 3

## МОДИФІКАЦІЇ ЗАДАЧІ ЕРДЕША-СЕКЕРЕША

В 1978 році Ердеш запропонував злегка видозмінити умову вихідної проблеми, яка до того часу стала класичною [8].

Він задався питанням: що якщо ми будемо шукати в тій чи іншій множині  $\mathcal{X}$  загального положення на площині не просто вершини опуклих багатокутників, в середині яких немає точок множини  $\mathcal{X}$ ? Такі багатокутники дійсно зветься *простими або дірами*. На рисунку 3.1 показаний приклад діри та приклад не діри.

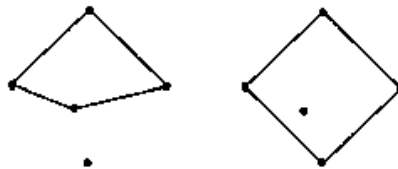


Рис. 3.1

Введемо величину  $h(n)$ , яка послугує аналогом величини  $g(n)$  у рамках нової задачі. Що це значить? За ідеєю все дуже просто. Нехай, для даного натурального  $n \geq 3$  ми знайшли таке число  $h$ , що в будь-якій множині спільного положення на площині, яке має потужність  $h$ , є пустий  $n$ -кутник і знайдеться множина спільного положення на площині, яка має розмір  $n - 1$  та дір на  $n$  вершинах які не містять. Ось і покладемо тоді  $h(n) = h$ . Просто? Не зовсім. Справа у тому, що сходу не зовсім зрозуміло, чому наявність пустих багатокутників в довільній  $h$ -точковій множині гарантує нам їх присутність у кожній множині розміру  $h + 1$ . Виникає проблема з дотриманням умови пустоти, якого раніше (тобто при визначенні величини  $g(n)$ ) зовсім не було. Інакше кажучи, якщо ми раніше спокійно казали про *пограничну* величину  $g(n)$ , починаючи з якої будь-яка множина відповідного розміру містила опуклий багатокутник, то зараз такого немає. Але цю проблему легко усунути.

**Твердження 3.1.** Нехай при деякому  $h$  будь-яка множина спільного положення на площині, яка має потужність  $h$ , містить опуклий та пустий  $n$  – кутник. Тоді теж саме вірно і для кожної множини спільного положення розміру  $h + 1$ .

**Доведення.** Розглянемо довільну множину  $\mathcal{X}$  потужності  $h + 1$ . Нехай  $\mathcal{H}$  – многокутник, який є його опуклою оболонкою. Видалим із  $\mathcal{X}$  будь-яку вершину цього многокутника. Залишиться множина розміру  $h$ , в якій, за нашою пропозицією, є опуклий та пустий  $n$  – кутник. Очевидно, викинута нами вершина знаходиться поза цього  $n$  – кутника. Отже,  $\mathcal{X}$  містить опуклий та пустий  $n$  – кутник. Твердження доведено.

Якщо кожному  $h$ , для якого існує множина розміру  $h$  без опуклих і пустих  $n$  – кутників, ставити у відповідність 0, а кожному  $h$ , для якого подібної множини немає, зіставляти 1, то, з огляду на твердження 1, виникне одна із трьох випадків, зображених графічно на рисунку 3.12. В першому випадку  $h(n) = 3$ , у другому -  $h(n) = h$ , у третьому випадку можна казати, що  $h(n) = \infty$  або що  $h(n)$  не існує.

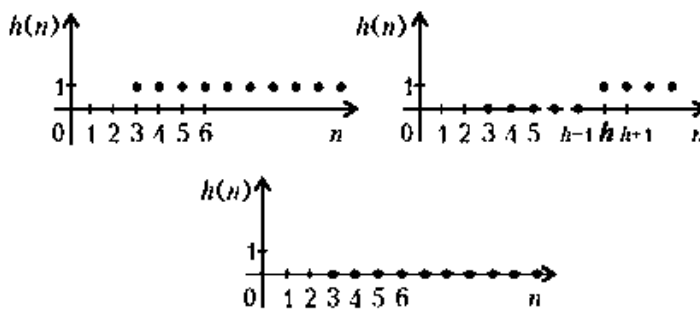


Рис. 3.2

Спробуємо розібратися з малими  $n$ . Очевидно, що  $h(3) = 3$ . Знаючи доведення того, що  $g(4) = 5$ , не важко зрозуміти, що і  $h(4) = 5$  (рис. 3.3, рис. 3.4).

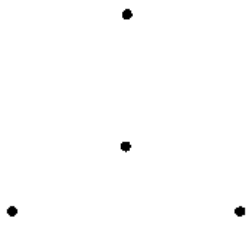


Рис. 3.3



Рис. 3.4

Ердеш тільки дарма намагався, придумуючи модифікацію своїй старій задачі. По-перше, на рисунку 3.4 зображений приклад множини із дев'яти точок: вона у спільному положенні, і як потрібно, опуклі п'ятикутники на її елементах будуються; проте жоден із цих п'ятикутників порожнім не являється. Отже,  $h(5) \geq 10 > g(5) = 9$ . Насправді  $h(5) = 10$ . Це показав Х. Харборт у 1978 році [15].

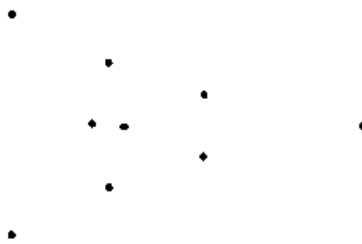


Рис. 3.5

А у 1983 році, можна сказати, грянув грім, серед ясного неба: Дж. Хортон довів не існування величини  $h(7)$  і, стало бути, всіх  $h(n)$  при  $n \geq 7$ . Для кожного  $h$  він побудував приклад множини із  $h$  точок на площині, в якій не має опуклих та порожніх семикутників.

### **Множина Хортонна**

Отже, нам потрібно для кожного  $h$  побудувати множину на площині, розмір якої  $h$  і в якій будь-який опуклий семикутник містить хоча б одну точку в середині. Заради реалізації цього замислу нам буде потрібно згадати визначення «чашек» та «кришек».

Ми лише підкреслимо, що і чашки, і кришки визначаються в деякій системі координат, яку від нині ми будемо вважати раз і назавжди зафіксованою на площині. В цій системі координат типова чашка і типова кришка виглядає так, як це показано на рисунку 3.6.



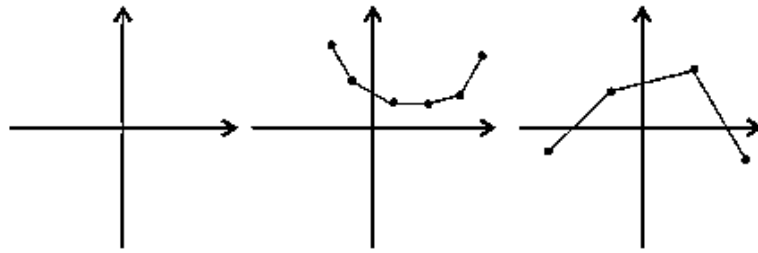


Рис. 3.6

Нагадаємо ще, що  $k$  – чашка – це чашка з  $k$  вузлами і, стало б,  $k - 1$  ланцюгами. Наприклад, чашка на малюнку 2.23 є 6 – чашкою. Аналогічно визначаються і  $k$  – кришек.

**Твердження 3.2.** *Будь-який опуклий семикутник на площині, у якого в даній системі координат немає сторін, паралельних осі  $O_y$  (назвемо такі сторони вертикальними), або містить 5-чашку, або містить 5-кришку.*

Висновок твердження такий: якщо для даного  $h$  ми побудували множину розміром  $h$  на площині, в якій не які дві точки не слугують кінцями вертикального відрізка і якій будь-яка 5-чашка і будь-яка 5-кришка містять хоча б одну точку цієї множини, то і будь-який опуклий семикутник в цій множині не порожній. (Ми кажемо, що чашка (або кришка) містить точку, якщо цю точку містить опуклий п'ятикутник, який був отриманий із нашої чашки (кришки) додаванням відсутнього ребра.)

*Невелике спрощення задачі.* Отже, нам потрібно для кожного  $h$  придумати множину потужності  $h$  на площині, в якій немає вертикальних відрізків і в якій кожна 5-чашка і кожна 5-кришка у відомому сенсі містить точки. А у сутності, навіщо для кожного  $h$ ? Насправді, цілком вистачить нам і довільної нескінченної послідовності натуральних чисел  $h_k, k = 1, 2, 3 \dots$ . Просто з твердження 1 не буває випадку, зображеного на рисунку 3.7 (зрівняйте з рисунком 3.6), адже якщо на графіку є нуль, то і зліва від нього стоять тільки нулі.

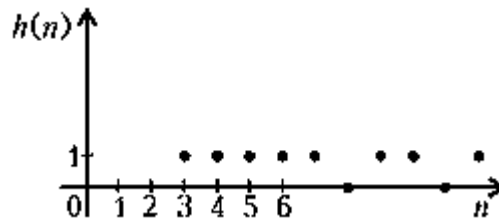


Рис. 3.7

В подальшому ми розглянемо  $k = 4, 5, 6, \dots$  і у якості  $h_k$  візьмемо  $2^k$ . Щоб було все ясно, ми спочатку у всіх подробицях опишемо конструкцію у випадку  $k = 4$ .

**Випадок  $k = 4$ .** Нашою метою є побудова множини із шістнадцяти точок на площині. Воно повинно бути спільного положення, і в ньому не повинно бути порожніх 5-чашек або 5-кришек, а також вертикальних відрізків. Організуємо ітеративний процес побудови. Ідея проста: якщо вже якась множина, то її копію, отриману паралельним переносом на «достатньо велику відстань», об'єднаємо з нею і все разом оголосимо новою множиною. Зрозуміло відразу, що, стартувавши з одноточкової множини, ми за чотири кроки як раз і отримаємо шістнадцять точок.

Що ж, покладемо  $S_1 = \{(0; 0)\}$ , тобто  $S_1$  – це множина, яка складається тільки із однієї точки – початок координат (рис. 2.25, а). Зрушимо цю множину на вектор  $(1; 8)$ , отримаємо множину  $S_2 = \{(0; 0), (1; 8)\}$ , яку ми легко можемо зобразити на рисунок 2.25, б. Тепер  $S_2$  ми зрушуємо на вектор  $(17; 4)$ . Маємо

$$S_3 = S_2 \cup \{(17; 4), (18; 12)\}.$$

Це свого роду «змійка», показана в зменшеній по осі  $x$  масштабі на рисунку 3.8, в.

Далі здійснюємо зсув всієї змійки на вектор  $(17^2; 2) = (289; 2)$  (зовсім далеко від вихідної змійки розміщуємо її копію). Утворюється множина  $S_4$  з правої частини рисунку 3.8, г, яку ми належним чином промасштабували у зрівнянні з іншими частинами того ж рисунку.

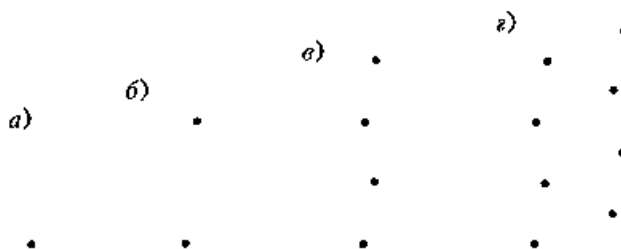


Рис. 3.8

Нарешті, із  $S_4$  формуємо  $S_5$  за допомогою переносу на  $(17^3; 1) = (4913; 1)$  (рис. 3.9). Очевидна закономірність?



Рис. 3.9

Ну звичайно:  $17 = 2^4 + 1 = 2^k + 1$ ,  $8 = 2^3 = 2^{k-1}$ , і очевидна множина отримується із попереднього за рахунок зсуву на  $(17^i; 2^{3-i})$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . При цьому, зрозуміло,  $|S_5| = 2^k = 16$ , що і потрібно було. Зрозуміло, що у  $S_5$  вертикальних відрізків немає. Залишається впевнитися у тому, що немає в  $S_5$  і порожніх 5-чашек з 5-кришками. Це робиться шляхом зрівняльного перебору. У цьому нам допоможуть рисунки 3.10, 3.11, які показують типові 5-чашки (завжди не порожні).



Рис. 3.10

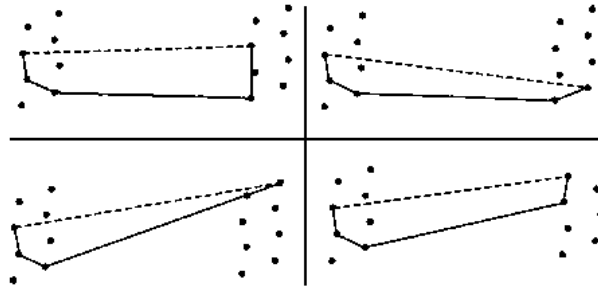


Рис. 3.11

**Випадок довільного  $k$ .** Нехай тепер  $k$  – яке угодне, більше чотирьох. Покладемо  $c = 2^k + 1$  (це аналог сімнадцяти) і стартуємо з  $S_1 = \{(0; 0)\}$ . Множина  $S_2$  ми отримуємо, об'єднуючи  $S_1$  із своєю копією, яка виникає при зсуві  $S_1$  на вектор  $(c^0; 2^{k-1}) = (1; 2^{k-1})$  (аналог вектора  $(1; 8)$ ). Множина  $S_3$  задається вектором  $(c^1; 2^{k-1})$  (аналог вектора  $(17; 4)$ ). І так далі. Остання множина має номер  $k + 1$ , так що її потужність як раз співпадає з  $h_k = 2^k$  і утворюється шляхом переносу свого попередника – множини  $S_k$  – на вектор  $(c^{k-1}; 2^0) = (c^{k-1}; 2^1)$  (аналог вектора  $(17^3; 1)$ ). Інакше кажучи, ми знову організуємо ітеративний процес, в якому на кожному кроці ми копіюємо вже наявну множину.

## ВИСНОВКИ

В результаті дослідження було розглянуто деякі теоретичні положення з комбінаторної геометрії, розкрито особливості постановки задачі Ердеша-Секереша та деякі підходи до знаходження її розв'язків, а також розглянуто модифікацію задачі для випадку довільної множини точок. Зокрема, можна відмітити наступні основні положення:

Задачу про покриття опуклої фігури меншими гомотетичними фігурами можна ще сформулювати, як задачу про розбиття фігури  $F$  на частини меншого габариту. Якщо фігура  $F$  має діаметр  $d$ , то фігура, гомотетична  $F$  з коефіцієнтом  $k$ , має діаметр  $kd$ . Звідси випливає, що якщо опукла фігура  $F$  має діаметр  $d$ , то будь-яка її частина меншого габариту є в той же час і частиною меншого діаметру. Тому, якщо опукла фігура  $F$  може бути розбита на  $t$  частин меншого габариту, то вона може бути розбита на  $t$  частин меншого діаметру.

Задача Ердеша-Секереша для опуклих багатокутників формулюється наступним чином: для кожного  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , бажано відшукати таку «граничну» величину  $g(n) \in \mathbb{N}$ , щоб у кожній множині  $\chi$ , що не містять трійок точок на одній прямій і які мають не менш ніж  $g(n)$  елементів, знайшлися  $n$  вершин випуклого  $n$ -кутника і щоб для  $g(n) - 1$  описана властивість не виконувалась. Проблема Ердеша – Секереша як раз і полягає у знайденні величин  $g(n)$ .

Нерівність  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 1$  довели Ердеш та Секереш. Крім того, були визначені деякі уточнення, а саме: Ф. Чанг і Р. Грехем показали, що  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2}$ ; Д. Клейтман і Л. Пахтер показали, що вірна нерівність  $g(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 7 - 2n$ ; Г. Тот і П. Вальтр показали, що  $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 2$  та  $g(n) \leq C_{2n-5}^{n-2} + 1$  при  $n \geq 5$ .

В результаті розгляду модифікацій задачі, отримали твердження:

а) нехай при деякому  $h$  будь-яка множина спільного положення на

площині, яка має потужність  $h$ , містить опуклий та пустий  $n$  – кутник. Тоді теж саме вірно і для кожної множини спільного положення розміру  $h + 1$ ;

б) Будь-який опуклий семикутник на площині, у якого в даній системі координат немає сторін, паралельних осі  $O_y$  (назвемо такі сторони вертикальними), або містить 5-чашку, або містить 5-кришку.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Яглом И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский – М. : Гостехиздат, 1991.
2. Холл И. М. Комбинаторика / И. М. Холл – М.: Мир, 1997.
3. Грэхэм Л. Р. Начала теории Рамсея / Л. Р. Грэхэм – М.: Мир, 1994.
4. Райгородский А. М. Вероятность и алгебра в комбинаторике / А. М. Райгородский – М.: МЦНМО, 2008.
5. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин – М.: МЦНМО, 2006.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц – М.: Ижевск, 2003.
7. Волков М. В. Кого послать на Марс? / М. В. Волков, Н.Н. Силкин – М.: «Квант», №8, 1988.
8. Кошелев В. А. Задача Эрдеша – Секереша о выпуклых многоугольниках / В. А. Кошелев, А. Райгородский. – М.: «Квант», №2, 2009.
9. Сендов Бл. Обязательные конфигурации точек на плоскости / Бл. Сендов. – М.: «Фундаментальная и прикладная математика», 1 (1995), 2, 491 – 516.
10. Кошелев В. А. Задача Эрдеша – Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости / В. А. Кошелев. – М.: «Моделирование и анализ информационных систем», т. 16 (2009), №2, 21 – 73.
11. Кошелев В.А. Почти пустые шестиугольники / В.А. Кошелев. – М.: «Фундаментальная и прикладная математика», 14 (2008), №6, 91 – 120.
12. Кошелев В.А. Теорема Эрдеша-Секереша и сравнения / В.А. Кошелев. – М.: «Математические Заметки», в печати.

13. Кошелев В.А. О проблеме Эрдеша-Секереша / В.А. Кошелев. – М.: «Доклады Академии Наук», 415 (2007), №6, 734 - 736.
14. Кошелев В.А. Вокруг проблем Эрдеша-Секереша / В.А. Кошелев. – М.: «Доклады Академии Наук», 426 (2009), №3, 304 306.
15. Шклярский Д. О. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М.: Наука, 2000.
16. Яглом И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. – М.: ГИТТЛ, 1999.
17. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии / И.Р. Шафаревич // Успехи математических наук. – 24, №6. – 1969. – С. 23-29.
18. Антоненко М. І. Розв'язання геометричних задач / І. М. Антоненко. – К. : Радянська школа, 1991. – 125 с.
19. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники / Л. А. Люстерник. – М.: 1996, 212 с.
20. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. – М.: АСТ, 2006. – 200 с.
21. Курант Р. Что такое математика / Р. Курант, Г. Роббинс. – М.: 2-е изд., 1967, 558 с.
22. Бляшке В. И. Э. Введение в дифференциальную геометрию / И. Э. М. Бляшке. – М.: 1957, 224 с.
23. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники / Л.А. Люстерник. – М.: 1956, 212 с.
24. Александров А.Д. Выпуклые многогранники / А.Д. Александров. – М.: Л., 1954, 428 с.
25. Цыганов Ш. И. Комбинаторика от А до Я / Ш. И. Цыганов //Математика. – 2001. - №26. – с. 9-23.
26. Семеновых А. Ю. Комбинаторика / А. Ю. Семеновых // Математика. – 2004. - №15. – с. 28-32.



27. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век, 2006. – 416 с.
28. Затула Н. І. Вища математика. Модуль 5. Диференційні рівняння: Навч. Посібник / Н. І. Затула , Т. А. Левковська. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 144 с.
29. Нестеренко Ю. В. Теория чисел : учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю. В. Нестеренко. — М.: Издательский центр «Академия», 2008. - 272 с.
30. Айгнер М. Комбинаторная теория / М. Айгнер. – М.: Мир, 1982. — 555 с.
31. Айгнер М. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней: Пер. с англ / М. Айгнер, Циглер Г. – М.: Мир, 2006. — 256 с.,
32. Хадвигер Г. Комбинаторная геометрия плоскости / Г. Хадвигер, Г. Дебруннер. – М.: Наука, 1995.
33. Купавский А. Б. О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей / А. Б. Купавский, А. М. Райгородский, М. В. Титова // Тр. МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 111—121.
34. Болтянский В. Г. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии / В. Г. Болтянский, И. Ц. М. Гохберг. – М.: Наука, 1995.
35. Koshelev V.A. On the Erdos-Szekeres problem in combinatorial geometry, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, V. 29 (2007), 175-177.
36. Koshelev V.A. On Erdos-Szekeres-type problems, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, V. 34 (2009), 447-451.