МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконав: студент 2 курсу, 221М групи

Спеціальності 014 Середня освіта

Спеціалізації 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти Марецький Ілля Сергійович

Керівник кандидатка фізико-математичних наук, доцентка Котова Ольга Володимирівна

Рецензент доцентка кафедри природничо-наукової підготовки Херсонської державної морської академії, кандидатка педагогічних наук

Спичак Тетяна Сергіївна

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. В останні десятиріччя проблема вивчення елементів теорії ймовірностей і статистики постає з особливою гостротою. В матеріалах науковців та методистів відмічається, що «в умовах інформаційного вибуху виникає потреба в умінні передавати величезний обсяг інформації, опрацьовувати його і робити обгрунтовані висновки. Формування і розвиток ймовірнісного мислення і відповідних умінь у підростаючих громадян розглядається як актуальна вимога сучасного розвитку суспільства, і ще в більшій мірі – майбутнього» [15]. Проте в кожній країні введення теорії ймовірності та елементів математичної статистики в шкільний курс математики відбувається по-різному, в нашій країні дискусії щодо цього питання ведуться й по сьогоднішній день.

Одразу після впровадження нової програми з математики, нових підручників та посібників, зокрема, підручника з алгебри та початків аналізу під редакцією А. М. Колмогорова [21], комбінаторику було виключено з програми і посібників, потім її знову деякий час вивчали, потім знову виключили. У зв'язку з уведенням у 1996 році до нової програми української школи початків теорії ймовірностей, було передбачено і вивчення комбінаторики. Проблемам змісту та методики навчання учнів теорії ймовірностей в шкільному курсі математики приділяють велику увагу провідні науковці та педагоги тому тема є актуальною. Якщо до введення нового освітнього стандарту, початки теорії ймовірностей і вступу до статистики розглядалися тільки в класах і школах з поглибленим вивченням математики, то в сучасний період вони стали базовими знаннями і уміннями для учнів.

Фахівці з методики викладання математики, які складають навчальні програми для шкіл різного профілю, часто ставлять запитання про те, які саме розділи математики необхідні у тій чи іншій професії. У повсякденному житті нам постійно доводиться зустрічатися з випадковістю, і теорія ймовірностей вчить нас, як діяти раціонально з урахуванням ризику, пов'язаного з прийняттям окремих рішень. Розвиток теорії ймовірностей як науки і розширення сфери її застосування чинить вплив на формування ймовірнісно-статистичної лінії при викладанні багатьох предметів, зокрема математики, в загальноосвітній школі вже протягом понад століття.

Тому одна із актуальних на сьогодні проблем полягає в тому, щоб, враховуючи сучасний розвиток математики та методики навчання математики, через призму прикладної і диференційованої спрямованості навчання, виходячи із специфіки початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, розкрити можливості ефективної реалізації підвищеної і поглибленої математичної підготовки здобувачів загальноосвітніх та профільних шкіл, розвитку їхніх математичних здібностей, зокрема, необхідних для вибору профілю та успішного навчання у ВНЗ за різними спеціальностями. Вище названі чинники зумовили вибір теми дослідження.

Об'єктом дослідження є процес навчання початків теорії ймовірностей та математичної статистики в шкільному курсі математики.

Предметом дослідження є методична система навчання початків теорії ймовірностей та математичної статистики в шкільному курсі математики.

Мета дослідження полягає в уточненні змісту та вивченні ефективних методів, форм і засобів навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в шкільному курсі математики, зокрема в класах з поглибленим вивченням математики на сучасному етапі розбудови освіти України.

Основні ***завдання*** дослідження:

1) проаналізувати психолого-педагогічну, навчальну, математичну

та методичну літературу з теми дослідження;

2) виявити психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги до структури змісту теоретичного матеріалу та системи задач з елементів стохастики в шкільному курсі математики;

3) вивчити методичні прийоми навчання елементів стохастики в шкільному курсі математики;

4) розглянути прикладну спрямованість навчання теорії ймовірностей.

Дослідження було виконано в межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. В першому розділі розкриваються теоретичні основи вивчення елементів теорії ймовірностей та математичної статистики в школі. Другий розділ присвячений методичним засадам вивчення елементів стохастики. В третьому розділі наведено методичні рекомендації стосовно викладання елементів теорії ймовірності та математичної статистики в різних класах. Розділ містить значну кількість завдань та вправ, що можуть бути використані як під час уроків, так і під час факультативних або гурткових занять з математики.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

1.1. Проблема введення початків ймовірності та математичної статистики в шкільний курс математики

Розвиток теорії ймовірностей як самостійної науки та збільшення сфери її застосування сприяє формуванню ймовірнісно-статистичної лінії при викладанні значної кількості предметів в загальноосвітній школі, зокрема, й математики. Так, елементи теорії ймовірностей і статистики викладалися в школах ряду країн вже в XIX ст. [9] і на початок XX ст. була складена певна система вивчення цих дисциплін [12].

На початку XX ст. у зв'язку із початком руху за реформу середньої математичної освіти гостро постало питання про внесення до шкільних програм з математики деяких понять теорії ймовірностей, були навіть розроблені проекти, але Міністерством народної освіти проект прийнятий не був. Україна, хоч і була поділена в цей час між Росією і Австро-Угорщиною, не залишилась осторонь реформи. Так, у формуванні планів для російських гімназій активну участь брало Київське фізико-математичне товариство, а в Галичині (де лишались лічені школи з українською мовою викладання) була створена триступенева освіта: нижчий ступінь - I-III класи, середній - IV-V класи, вищий - VI-VIII класи гімназій і у VIII класі вивчалися комбінаторика, елементи теорії ймовірностей, статистика із застосуванням до теорії життєвого страхування. На відміну від Росії, у більшості країн Європи теми з математичної статистики в шкільному курсі математики початку століття не зустрічаються. Поняття статистики дещо ширше вводилися в шкільний курс математики у 1924-1932 рр., коли навчання проводилось за програмами, складеними на засадах комплексної системи [1]. Нова програма з математики для шкіл, за якою почали працювати з 1935 р. і яка проіснувала майже два десятиліття, передбачала в курсі алгебри X класу вивчення елементів комбінаторики та формули бінома Ньютона. Елементи теорії ймовірностей і статистики в ній не розглядалися.

З кінця 50-х років у шкільній освіті починається другий період руху за реформу шкільної математики. Більш гостро постає питання не лише про зміст, але й методи викладання математики в школі, щоб паралельно з вивченням змісту більш ефективно розвивати також мислення учнів. Це відображається в тематиці міжнародних нарад з викладання шкільного курсу математики і дослідженнях вчених. В СРСР у цей період питання про включення в шкільний курс математики елементів теорії ймовірностей і застосування ставилось неодноразово. В необхідності цієї справи були переконані як провідні математики, так і окремі працівники освіти, передові вчителі-практики [3]. Після зміни структури шкільної освіти у 1958 році новою програмою передбачалося вивчення комбінаторики та підрахунку ймовірностей в X класі. У 1967 році був зроблений ще один сміливий крок в цьому починанні. Зокрема, в проекті програми з математики, підготовленої В. Г. Болтянським, А. М. Колмогоровим, М. Ю. Макаричевим, О. І. Маркушевичем планувалося в курсі алгебри і початків аналізу X класу розглянути тему "Початки теорії ймовірностей", а на факультативних заняттях в X класі вивчати тему за вибором - "Додаткові питання теорії ймовірностей" [6]. Проте в остаточному варіанті програма з математики (за якою почали навчання в 1968-1969 н. р.) містила тільки у IX класі елементи комбінаторики. Теми з теорії ймовірностей були віднесені до програми факультативів і програм спеціалізованих класів, а елементи статистики так і залишились осторонь шкільного курсу математики.

В останнє десятиріччя проблема вивчення елементів теорії ймовірностей і статистики в нашій школі постала з особливою гостротою. В матеріалах VI Міжнародного Конгресу з математичної освіти (1988 р.) відмічається, що "в умовах інформаційного вибуху виникає потреба в умінні передавати величезний обсяг інформації, опрацьовувати його і робити обгрунтовані висновки. Формування і розвиток ймовірносного мислення і відповідних умінь у підростаючих громадян розглядається як актуальна вимога сучасного розвитку суспільства, і ще в більшій мірі - майбутнього. До цього треба віднестися особливо уважно, тому що СРСР, очевидно, є однією з небагатьох країн, в шкільному курсі якої елементи теорії ймовірностей і математичної статистики відсутні повністю. На думку авторів, необхідно ознайомити учнів з поняттям ймовірності та частоти, правилами підрахунку скінченних та геометричних ймовірностей, з поняттям незалежних подій і умовною ймовірністю, з деякими статистичними методами обробки даних. Основний напрямок впровадження відповідного змісту в шкільний курс математики – це включення ймовірнісних та статистичних ідей в задачний матеріал шляхом розширення традиційного набору формул і арсеналу методів розв'язування. Вже на початкових стадіях навчання повинні регулярно зустрічатися задачі, що вимагають розгляду і підрахунку різних варіантів на основі простих теорем теорії сполук [8]. У зв'язку з диференціацією та гуманізацією шкільної освіти почали з'являтися програми для класів різних профілів, створюватися відповідні підручники, їх автори додержуються думки, що елементи стохастики необхідні всім випускникам шкіл, незалежно від обраного ними профілю.

В Україні як самостійній державі ця проблема стоїть не менш гостро. Необхідно створювати свої навчальні програми і підручники, які би відповідали світовому рівню і вимогам сучасного розвитку людського суспільства. Міністерством освіти України, Академією педагогічних наук України, Національною Академією наук України підготовлено проект Державного стандарту загальної середньої освіти в

Україні з математики, в якому традиційні змістові лінії доповнюються такими, як "Елементи теорії множин. Комбінаторика" та "Елементи стохастики", формулюється обов'язковий мінімум змісту навчання з цих тем та вимоги до його засвоєння [5]. Починають друкуватися українські підручники з математики, в їх числі пробний підручник з алгебри і початків аналізу для 10-11 класів, автори якого М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубінчук. В ньому є розділи "Елементи комбінаторики", "Початки теорії ймовірностей", "Вступ до статистики". Перші кроки зроблені, але для того, щоб такі необхідні в сучасному житті ймовірнісно-статистичні знання міцно і органічно ввійшли у шкільну освіту, потрібна копітка праця протягом всього навчання математики і, напевно, під час вивчення інших предметів (фізики, хімії, біології тощо).

1.2. Основні мотиви вивчення теми

Перед вивченням розділу стохастики в основній школі, обов’язковим етапом являється зацікавлення дітей до сприйняття матеріалу.На перший погляд здається, що точну відповідь на це питання можна дати лише в тому випадку, якщо відомо, в якій формі і на якому рівні здійснюється викладання теорії ймовірностей. Мотивація дітей має багато аспектів, особливо важливу роль відіграє рівень знань та обізнаності учнів. Провівши опитування, можна зробити висновки, що мотивів вивчення існує безліч , але умовно їх можна поділити на групи:

1) Теорію ймовірностей необхідно вивчати тому, що вона грає досить важливу роль у розвитку мислення здобувачів. Ознайомлення з основними поняттями теорії ймовірностей необхідне для того, щоб ми могли пізнавати оточуючий світ і створювати одну з науково обгрунтованих картин цього світу. Викладання будь-якого розділу математики благодатно відбивається на розвитку розумовому здобувачів, оскільки сприяє розвитку навичок ясного та логічного

мислення, вміння оперувати чітко означеними поняттями. Все, що стосується викладання довільного розділу математики в повному обсязі відноситься й до викладання теорії ймовірностей, але навчання «законам випадку грає дещо більшу роль і виходить за межі звичайного» [13]. Вивчаючи курс теорії ймовірностей, здобувач дізнається, як використовувати прийоми логічного мислення саме в тих випадках, коли маємо справу з невизначеністю (а такі випадки виникають на практиці).

Вивчення теорії ймовірностей належним чином впливає і на характер учнів, наприклад, розвиває хоробрість, оскільки дає змогу зрозуміти, що при певних обставинах невдачі можна віднести до випадковостей і, отже, зазнавши невдачі, зовсім не варто відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети. Люди, що знаходяться на низькому рівні розвитку, схильні до надмірної недовірливості: яка би біда не гранилась з ними, вони схильні приписувати її чиємусь злому наміру, навіть якщо подібні твердження позбавлені найменших підстав. Пояснюється це необізнаністю з таким поняттям, як випадковість. Викладання теорії ймовірностей може принести безперечну користь, оскільки дозволяє остаточно порвати з пережитками магічного мислення кам'яного століття. Вивчаючи теорію ймовірностей, люди стають більш доброзичливими і толерантними до оточуючих, і, отже, легше вписуються в життя суспільства.

2) Теорію ймовірностей слід вивчати ще й тому, що її результати знаходять відображення у повсякденному житті, техніці, науці тощо. Адже кожного дня нам доводиться стикатися з випадковістю, а теорія ймовірностей вчить нас, як потрібно діяти раціонально, враховуючи ризик, який пов'язаний з прийняттям певних рішень. Прикладом застосування теорії ймовірностей у побуті є вибір найбільш доцільної форми страхування. Так, при плануванні сімейного бюджету або під час подорожі за кордон досить часто доводиться оцінювати витрати, що в певній мірі мають суто випадковий характер. Саме такі життєві

приклади показують, що знайомство на тому чи іншому рівні із законами випадку необхідні кожному.

Застосування теорії ймовірностей у науці, техніці, економіці тощо набуває раз у раз зростаючого значення. Саме тому у все більшого числа людей в процесі своєї діяльності виникає необхідність у вивченні теорії ймовірностей. Зрозуміло, обсяг курсу теорії ймовірностей залежить від типу навчального закладу. Але не треба забувати и про інше: сучасна освічена людина, незалежно від професії і роду діяльності, повинна мати принаймні загальне уявлення про те, що таке атомна енергія, радіоактивність, генетика і т. ін. Перелік необхідних знань включає в себе і ознайомлення, нехай навіть суто поверхове, з найпростішими поняттями теорії ймовірностей.

3) Теорію ймовірностей необхідно вивчати ще й тому, що вона має значення для математичної освіти, це значення важливе, яке не можна ні з чим порівняти.

Вивчення теорії ймовірностей сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між дійсністю і математикою, математичних моделей дійсності. Якщо в курсі математики теорія ймовірностей обминається повною мовчанкою, то в учнів складається невірне уявлення про істинний характер математики та її застосування. Люди, не знайомі з теорією ймовірностей, поділяють помилкову думку, нібито математичні методи можна застосовувати лише в тих випадках, коли йдеться про прості й точні залежності між величинами, які можна точно виміряти і обчислити. Нерідко можна почути і твердження, наче математичні методи непридатні для вивчення і опису тих або інших явищ, через те що ті "дуже складні" [17]. Подібний забобон живе в свідомості людей, які не вивчали ні математику, ні, тим паче, теорію ймовірностей. Саме ті, хто дотримується цих докорінно невірних поглядів, до недавнього часу перешкоджали (принаймні, у деяких країнах) застосуванню математичних методів в економіці, соціології, біології, психології та інших галузях науки. Не можна не згадати й про думку тих, хто вважає, що викладання теорії ймовірностей не виходить за межі програм з математики в учбових закладах середнього або нижчого рівня. Ця думка узгоджується з іншими сучасними тенденціями у викладанні математики, що легко пояснити: її поділяють ті, хто викладає теорію ймовірностей і своєю діяльністю реалізує нові тенденції.

Також слід звернути увагу, що дана тема буде вивчатися і у вищих навчальних заклад, але обсяг та зміст її вивчення буде залежати від обраної професії [21].

Так, наприклад, розвиток економіки країни безпосередньо пов'язаний з використанням математичної теорії у прикладній сфері діяльності людини.

Особливо корисні знання з теорії ймовірностей при оцінці вибору дій, здатних привести до матеріального виграшу або втрат. Не можна людину вважати освіченою, якщо вона не може дати кількісної оцінки, наприклад, доцільності участі в тій або іншій грошово-речовій лотереї, а тим більше пояснити вибір прийнятого рішення з оперативного керування виробництвом.

Методи теорії ймовірностей широко застосовують в різних галузях природознавства і техніки:

- теорії надійності та теорії масового обслуговування;
- теоретичній фізиці;
- геодезії;
- астрономії;
- теорії похибок;
- теорії автоматизованого управління;
- загальній теорії зв'язку;
- медичній і технічній діагностиках;
- теорії розпізнавання образів;
- радіолокаційній техніці;

- стохастичному програмуванні;
- у багатьох інших теоретичних і прикладних науках.

“Теорія ймовірностей” лежить в основі іншої прикладної дисципліни – “Математичної статистики”, яка, в свою чергу, використовується при плануванні й організації виробництва, аналізі технологічних процесів, планово-попереджувальному ремонті, контролі якості продукції і для багатьох інших цілей.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

2.1. Пропедевтика вивчення елементів теорії ймовірностей та математичної статистики

У сучасних умовах швидкого розвитку технологій, виробничих ресурсів, науки та економіки важливе значення має ґрунтовна математична освіта. Математика, а особливо прикладна математика, є фундаментом для побудови моделей передових технологій.

Формування статистичного мислення має починатися в початковій та в основній школі на наочному, а також на інтуїтивному рівні [5]. Здобувачів потрібно залучати до проведення та організації експериментів, до реєстрування результатів проведених експериментів у вигляді таблиць. В ході цього процесу здобувачі повинні коментувати усі свої дії, намагатися охарактеризувати отримані результати та формулювати основні висновки. Експерименти можуть бути як штучно створеними, так і такими, які незалежні від зовнішнього контролю.

У 5-6 класах таку роботу потрібно продовжувати. Вивчаючи у 5 класі тему «Дії другого ступеня», здобувачі знайомляться з таким поняттям, як діаграми, зокрема, вони навчаються зображувати та порівнювати певні величини, використовуючи для цього спочатку лінійну діаграму, наприклад, порівнювати довжини за допомогою відрізків відповідної довжини. Якщо при цьому замість відрізків побудувати прямокутники, то отримаємо так звану стовпцеву діаграму, яка в статистиці має назву гістограми.

Тут виникає реальна можливість провести невелике статистичне дослідження та опрацювати його результати. Наприклад, напередодні уроку здобувачам пропонують удома дізнатися розмір свого одягу (запитати у батьків). На уроці учитель запитує у здобувачів (за списком у журналі) про розмір їхнього одягу і записує відповіді на дошці. У результаті утворюється, наприклад, така послідовність чисел:38 34, 34, 36, 36, 38, 36, 34, 36, 38, 40, 40, 38, 36, 36, 36, 38, 36, 36, 40, 34, 34, 34, 36, 38, 38, 36, 38, 38, 36.

За такою послідовністю можна легко визначити розмір одягу кожного із здобувачів (наприклад, п'ятий за списком учень класу носить одяг 36 розміру, двадцятий учень - 40 розміру), але не можна визначити загальні закономірності для всього класу в цілому. Учитель пропонує здобувачам підрахувати, як часто трапляється той чи інший розмір, результати записати у таблицю і побудувати відповідну стовпцеву діаграму

Потреба пропедевтики вивчення початків теорії ймовірностей в основній школі не викликає сумніву. У 5-6 класах вже є необхідність готувати здобувачів до знайомства з класичним означенням імовірності, з відомими теоремами додавання та множення ймовірностей [16]. На самих перших етапах навчання слід надати пояснення здобувачам стосовно поняття випадкової події як такої події, яка може відбутися або не відбутися в ході певного випробування, а ймовірність цієї події слід розуміти саме як можливість, шанс.

Задача 2.1. Підкинемо гральний кубик. Ти виграєш, якщо на верхній грані кубика випаде 6 очок. Який у тебе шанс виграти з одного підкидання?

Розв'язання. Під час підкидання кубика на верхній грані може випасти або 1, або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок. Тобто існує 6 різних можливостей появи певного числа очок. Виграшною є тільки одна з шести. Отже, шанс на виграш становить 1 до 6. Це можна записати так: 1:6. При цьому кажуть, що 1шанс виграти дорівнює — 1/6.

В задачі ішлося про деяку подію. У цьому випадку відбувалося певне випробування — підкидався гральний кубик. Кожне з випробувань мало деяку кількість наслідків, результатів випробування, а подія, яка розглядалася («випало 6 очок»), могла відбутися, а могла і не відбутися.

Вивчення елементів теорії ймовірностей продовжується в шостому класі, як одне із питань теми «Відношення і пропорції».

Під час вивчення цієї теми необхідно:

- сформулювати зміст теорії ймовірностей як розділу математики;
- увести поняття досліду та події яка є результатом проведення дослідів;
- запропонувати класичне означення ймовірності як числової характеристики настання події.

Обчислення ймовірностей подій, що є основним питанням на цьому етапі вивчення елементів теорії ймовірностей, доцільно показати на задачах, об’єкти яких – числа. Важливо застосовувати ознаки подільності, що сприяє повторенню навчального матеріалу та успішному закріпленню нової теми [21].

Подальше вивчення елементів теорії ймовірностей та математичної статистики відбувається вже у 9-му класі з подальшим поглибленням у 11-му класі. Вивчення тем курсу можна здійснювати з використанням посібника «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» з 9-го класу.

2.2. Місце теми у шкільному курсі математики

Вивчення елементів теорії ймовірностей розпочинається в 6 класі (в темі «Відношення та пропорції» вивчається поняття випадкової події, імовірності випадкової події). В класах з поглибленим вивченням математики у 9-му класі в темі «Елементи прикладної математики» продовжується вивчення елементів теорії ймовірностей, тепер вже на формальній основі. Необхідною базою для цього є вивчення саме елементів комбінаторики. При розгляді цієї теми досить важливою є інтерпретація введених ймовірнісних та статистичних характеристик, їх пояснення безпосередньо в практичному плані. Потрібно зазначити, що тематика розділів “Елементи комбінаторики» «Початки теорії ймовірностей» та «Елементи статистики», як правило, є достатньо складною для сприйняття. Тому надважливим є розгляд необхідної кількості задач та прикладів, а також певних історичних відомостей, що стосувалися історії становлення теорії ймовірностей (задача Д’Аламбера, дослідження Б. Паскаля [3]). При цьому при розгляді цих відомостей належну увагу необхідно приділити коректному формулюванню опису одержаних частинних результатів та вірному підрахунку загальної кількості результатів та кількості сприятливих подій.

Що стосується матеріалу теми в 11 класі, то розподіл за навчальною програмою приблизно наступний.

Рівень стандарту.

Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики – 10 годин.

Академічний рівень.

Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики – 12 годин.

Рівень профільної підготовки.

Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики – 15 годин.

Програмами *поглибленого вивчення* математики можуть бути такими: Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики – 25 годин.

Навчально-методичне забезпечення вивчення математики в 11-х класах

Навчання математики у 11 класах загальноосвітніх навчальних закладів здійснюватиметься за наступними підручниками:

Рівень стандарту:

1) «Математика (рівень стандарту)» (автори Бурда М.І., Колесник Т.В., Мальований Ю.І., Тарасенкова Н.І. [4]);

2) «Математика (рівень стандарту)» (автори Бевз Г.П., Бевз В.Г [6]);

3) «Математика (рівень стандарту)» (автори Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О. Л., Сліпенко А.К. [2]).

Академічний і профільний рівні:

1) «Алгебра (академічний рівень, профільний рівень)» (автори Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Номіровський Д.А. [16]);

2) «Алгебра (академічний рівень, профільний рівень)» (автори Нелін Є.П., Долгова О.Є. [19]);

3) «Алгебра (академічний рівень, профільний рівень) (автори Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. [25]);

4) «Алгебра (академічний рівень, профільний рівень)» (автори Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. [3]).

Мета вивчення елементів комбінаторики, ймовірності, статистики

Вивчення даної змістової лінії передбачає формування наступних видів діяльності:

- перебір або обчислення такої кількості конфігурацій елементів, яка задовольняє заздалегідь заданим властивостям;
- побудова найпростіших ймовірнісних моделей для конкретних реальних процесів та явищ;
- аналіз емпіричних даних, що містить у собі самостійний збір даних, проведення експериментів, кількісну обробку зібраного статистичного матеріалу, статистичні висновки за результатами обробки.

Перелічені види діяльності, власне кажучи, стосуються комбінаторики, ймовірності, статистики. Ці види діяльності пов'язані між собою та спрямовані на навчання учнів аналізу даних.

Комбінаторика – важливий розділ математики, знання якого необхідно представникам різноманітних галузей. З комбінаторними задачами працюють фізики, хіміки, біології, лінгвісти, спеціалісти по кодам. Комбінаторні методи лежать в основі розв'язування багатьох задач теорії ймовірності.

Головною метою вивчення елементів комбінаторики в школі є «формування спеціального типу мислення – саме комбінаторного, формування у здобувачів тих видів діяльності, які пов'язані з перебором та обчисленням конфігурацій елементів, які задовольняють певним умовам» [13].

В результаті вивчення цього розділу здобувач має можливість навчитися:

- ✓ знаходити кількість варіантів вибору певної множини елементів із даної сукупності, коли при цьому вибір здійснюється з поверненням або без повернення до сукупності, коли результати цього вибору або залежать від послідовності витягування елементів із сукупності, або не залежать;
- ✓ визначати число способів розподілу сукупності різних або схожих між собою предметів на певну кількість груп;
- ✓ застосовувати найпростіші комбінаторні схеми для розрахунку ймовірності події у класичній її моделі;
- ✓ використовувати найважливіші комбінаторні ідеї з метою моделювання конкретних реальних процесів та явищ.

Головна мета вивчення елементів теорії ймовірностей та елементів статистики – це побудова та застосування математичних моделей явищ, що враховують вплив випадку, аналіз результатів, одержаних за допомогою ймовірнісних моделей.

В результаті вивчення цього розділу здобувач має вміти:

- ✓ знаходити ймовірність події за відносною її частотою та обернено: оцінювати певні числові характеристики випадкової величини, використовуючи їх вибіркові характеристики; знаходити ймовірність події, використовуючи її означення та найпростіші властивості;
- ✓ обчислювати за законом розподілу випадкової величини її математичне сподівання ;
- ✓ використовувати імовірнісні моделі для оцінки ризику або шансу у найпростіших випадках.

Досвід закордонних та вітчизняних методистів свідчить про те, що ознайомлення здобувачів з елементами комбінаторики, ймовірності, статистики доцільно, а також можливо починати ще з початкової школи [11]. Фактично на усіх етапах навчання формуються одній й ті ж самі види діяльності, проте це відбувається на різних рівнях та різними засобами. Розглянемо зміст навчання для кожного етапу навчання.

Початкова школа

Комбінаторика. Ігрові комбінаторні задачі, що розв’язуються безпосереднім перебором можливих варіантів.

Ймовірність. Формування таких понять, як «напевно», «ніколи», «можливо так, можливо ні». Якісна оцінка шансів настання тієї чи іншої події.

Статистика. Проведення експериментів, реєстрація результатів цих експериментів, зображення їх, наприклад, у вигляді таблиць, і їх інтерпретація. Читання таблиць, зокрема таблиць розмірами 2х2.

5-6 класи

Комбінаторика. Розв'язування комбінаторних задач перебором можливих варіантів.

Ймовірність. Достовірна, неможлива, випадкова події. Порівняння шансів настання випадкових подій на основі інтуїтивних міркувань, на класичній, статистичній засадах, за допомогою геометричних міркувань.

Статистика. Збір, реєстрація статистичних даних, зображення їх у вигляді таблиць, діаграм. Читання таблиць і діаграм. Проведення експериментів.

9 клас, 11 клас

Курс “Теорія ймовірностей та математична статистика” є ознайомленням в з основами математичного апарату, необхідного для розв’язування теоретичних та практичних задач економічного, соціологічного та ситуаційного змісту [15].

В процесі засвоєння курсу здобувач повинен навчитись вільно оперувати поняттями математичної статистики та теорії ймовірностей.

Курс повинен сприяти формуванню в учнів діалектико-матеріалістичного світогляду, розвитку їх розумових здібностей, прививати вміння точної логічно мислити, аргументувати свої твердження, розвивати абстрактне мислення, творчу та просторову уяву, сприяти підвищенню наукової і, зокрема, математичної культури

Викладення даного курсу передбачає:

- розвиток логічного мислення;
- володіння основними методами дослідження математичних задач;
- вироблення вміння практичного застосування фундаментальних математичних методів для розв’язку економічних задач;
- вироблення вміння оцінити отриманий результат за допомогою статистичних методів.

Курс "Теорія ймовірностей і математична статистика” повинен стати математичною базою для вивчення спеціальних економічних дисциплін, інструментом для розв’язування багатьох економічних задач. Він містить теми, які є цілком новими для здобувачів, але засвоєння яких вимагає ґрунтовного володіння всіма темами, розглянутими в курсі "Математика”.

Для забезпечення постійного характеру засвоєння знань доцільно впроваджувати поточні та підсумкові контролі.

Самостійна робота здобувачів складається з виконання та написання рефератів (або контрольних робіт) з тем, виділених в робочих програмах для самостійного вивчення, підготовки до практичних занять і до всіх видів контролю.

Теоретичний курс повинен супроводжуватись добре підготовленими демонстраціями, наочними матеріалами, сучасними засобами навчання (відеотехніка, комп’ютери) для ефективної передачі та засвоєння знань.

Практичні заняття в першу чергу повинні бути зорієнтовані на покращення розуміння суті теоретичного матеріалу та його застосування при вирішенні задач і проблем. Неабияке значення має і можливість більш поглибленого та детального розгляду окремих тем, які в обраній учнями майбутній спеціальності матимуть вирішальну роль.

РОЗДІЛ 3
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ШКОЛІ

3.1. Методичні рекомендації до навчання елементів комбінаторики, ймовірності, статистики в 5-6 класах

Стрижнем, який зв'язує нову змістову лінію зі шкільним курсом математики, є метод математичного моделювання. Це тому, що ймовірнісно-статистичний матеріал може істотно використовуватися під час навчання учнів математичного моделювання – найважливішого виду математичної діяльності.

Розглянутий зміст навчання комбінаторики учнів 5-6 класів дає змогу зробити висновок: «Навчати комбінаторики потрібно через задачі» [5]. Це означає, що за допомогою задач формуються уявлення про види конфігурацій елементів, які задовольняють певні умови. На основі розв'язування типових задач формуються загальні прийоми розв'язування різних типів задач. Далі вони ілюструються на наступних задачах і, якщо дозволяють умови навчання, узагальнюються під час розгляду ситуацій у загальному вигляді. Отже, теоретичний матеріал вивчається як узагальнення конкретних задач; формування комбінаторних ідей, міркувань здійснюється в процесі розв'язування задач. У ході ігор, спостережень, проведення опитувань, експериментів, обробки їх результатів учень приходить до висновку про випадковий характер багатьох явищ і процесів, про необхідність обчислювати цю випадковість. Це й визначає мотив вивчення ймовірності. Щоб навчитися оцінювати шанси, обчислювати ймовірність того, що подія відбудеться, використовуючи класичне означення, потрібно вміти здійснювати перебір або підраховуванні кількості варіантів здійснення тієї чи іншої дії. Тому ми звичайним чином приходимо до необхідності розглядати елементи комбінаторики. При такому підході система вправ має містити не тільки суто комбінаторні задачі, але й імовірнісні. Тим самим у процесі навчання повертаємось до розгляду імовірнісних задач, що сприяє міцності набуття вмінь їх розв'язувати.

Навчання комбінаторики доцільно починати з розгляду методу перебору розв'язування комбінаторних задач з невеликими значеннями параметрів.

1. Перебір варіантів можна використати, щоб з'ясувати, чи є вибір елементів упорядкованим чи невпорядкованим.

2. Перебір варіантів можна використати для розвитку навичок самоконтролю.

3. Іноді безпосередній перебір варіантів є ледь не єдиним способом розв'язування задачі або її частини.

Як і для інших складових імовірнісно-статистичної змістової лінії, так і для комбінаторної складової, є три шляхи навчання учнів: на уроках математики; на уроках з інших предметів; за рахунок варіативної частини навчального плану.

Розв'язування комбінаторних задач у 5-6 класах

Формування комбінаторного мислення є важливим завданням впровадження ймовірнісно-статистичної змістової лінії у шкільну освіту. Воно має формуватися неперервно за наступними етапами [7]:

1) пропедевтичний етап, що охоплює початкову школу та 5-6 класи;

2) основний етап (7-9 класи);

3) завершальний етап (10-11 класи).

На першому етапі головним методом розв'язування комбінаторних задач є перебір варіантів. Суттєвим обмеженням методу перебору варіантів є невеликі значення параметрів, які розглядаються в комбінаторній задачі.

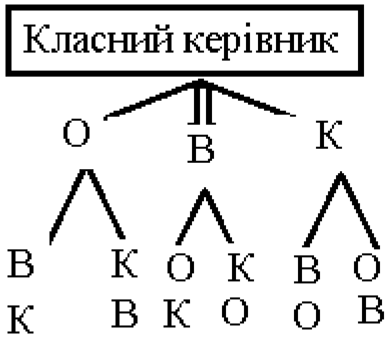
У 5 класі учнів знайомлять із задачами на комбінації. Розглядаються способи розв’язування задач з пошуком розв’язків у вигляді схем, таблиць або за допомогою дерева можливих варіантів.

Задача № 1. *Однокласниці Олена, Валентина та Катерина чергують по школі. Скількома способами класний керівник може розставити дівчинок по одній на кожному з трьох поверхів школи?*

Розв’язання.

Під час розв’язування комбінаторних задач важливо розглянути (перебрати) усі випадки. Тому процес перебору бажано зробити зручним і наочним.

Наприклад, розв’язання задачі про розподіл чергувань можна проілюструвати за допомогою такої схеми: (враховуючи поверхи)



Ця схема дає змогу записати шість комбінацій, кожна з яких відповідає одному варіанту розподілу чергування: ОВК, ОКВ, ВОК, ВКО, КВО, КОВ.

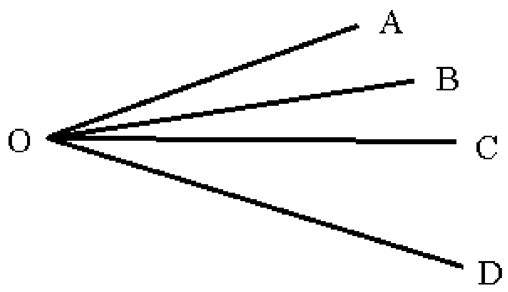
Зображена схема нагадує перевернуте дерево. Тому її називають деревом можливих варіантів.

Відповідь: 6 варіантів.

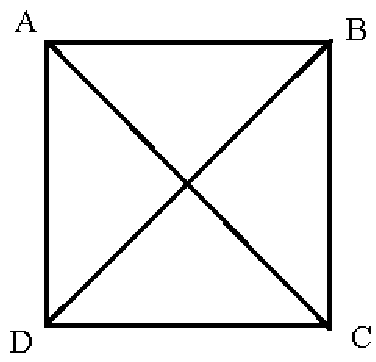
Задача № 2. *Скільки кутів зображено на рисунку?*

Розв’язання.

Позначення будь-якого кута, зображеного на рисунку, складається з трьох букв, другою з яких обов’язково є буква О, а дві інші вибирають із букв A, B, C, D. Тому шукана кількість кутів дорівнює кількості способів вибрати з букв A, B, C, D дві букви.



При розв'язуванні цієї задачі можна скористатися такою наочною схемою.



Розглянемо чотири точки, позначені буквами A, B, C, D . Тоді кількість відрізків, що сполучають кожні дві точки, дорівнює кількості кутів, зображених на рисунку. Наприклад, відрізку AC на рисунку 2 відповідає кут AOC на рисунку 1, відрізку BC — кут BOC. І навпаки, кожному куту на рисунку1 відповідає певний відрізок на рисунку 2.

На рисунку 2 можна провести всього шість відрізків. Отже, шукана кількість кутів дорівнює шести.

Задача № 3. За допомогою схем, подібних до тієї, що зображено на рисунку 2, можна розв'язувати низку задач. За допомогою цієї схеми розв'яжіть таку задачу.

*При зустрічі чотири приятелі потиснули один одному руки. Скільки разом було зроблено рукостискань? (*Відповідь: 6.*)*

Задача № 4. *Туристи подорожують до гірського озера. Перший етап подорожі можна подолати на електропотязі або на автобусі, другий — на човнах, велосипедах або пішки. Скільки існує можливих способів здійснення подорожі?*

Розв'язання.

Перший етап можна подолати двома способами, а другий – трьома. Отже, всього існує

$2·3 = 6$ способів.

Задача № 5. *Маємо три квітки, ромашка, троянда, фіалка і три вазони: білий, сірий, коричневий. Скількома способами можна посадити квіти?*

Розв'язання.

Складемо таблицю:

Білий	Р	Р	Т	Т	Ф	Ф
Сірий	Т	Ф	Р	Ф	Р	Т
Коричневий	Ф	Т	Ф	Р	Т	Р

Відповідь: 6 способів.

Задачу можна розв’язати, застосовуючи спосіб дерева можливих варіантів.

Задачі з підручника Математика 5 клас (А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір) [19].

Задача № 650. *Запишіть усі двоцифрові числа, у записі яких використовуються тільки цифри 1, 2 і 3 (цифри в числі можуть повторюватися).*

Розв'язання.

При розв’язуванні цієї задачі можна скористатися способом перебору можливих варіантів:

11 22 33

12 21 31

13 23 32

Відповідь: 9 чисел.

Задача № 652. *Віслюк Іа має три надувні кульки: червону, зелену та жовту. Він хоче подарувати по одній кульці своїм друзям: Вінні-Пуху*

П'ятачку і Кролику. Скільки варіантів зробити подарунки своїм друзям є у віслюка Іа?

Задача № 654. *У футбольному турнірі беруть участь команди 5 «А», 5 «Б» і 5 «В» класів. Скільки існує способів розподілу першого і другого місць серед цих команд?*

Задачу можна розв'язати способом перебору можливих варіантів.

Таблиця (спосіб перебору)

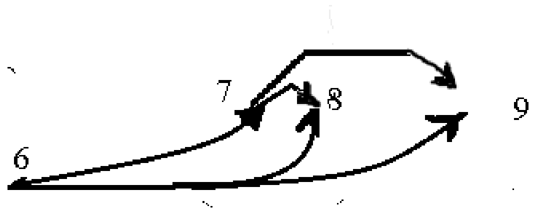
5-А	1	1	2	2	0	0
5-Б	2	0	1	0	1	2
5-В	0	2	0	1	2	1

Відповідь: 6 способів.

Задача № 658. *Скільки двоцифрових чисел можна записати за допомогою цифр 6, 7, 8 і 9 так, щоб цифри були записані в порядку зростання?*

Розв'язання.

Спосіб перебору: 67; 68; 69; 78; 79; 89. Або за допомогою схеми:



Відповідь: 6 чисел.

Задача № 660. *Скільки існує двоцифрових чисел, сума цифр яких дорівнює 5?*

Розв'язання.

Застосуємо спосіб перебору :

Цифри: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Двоцифрові числа із сумою цифр 5: 14; 41; 23; 32; 50

Відповідь: 5 чисел.

Задача № 664. *Скільки існує різних прямокутників, периметри яких дорівнюють 24 см, а довжини сторін є натуральними числами?*

Розв'язання.

Р = 24 см.

Р = 2(a+b), тоді a+$в$ = 12 см.

Спосіб перебору:

а	1	2	3	4	5	6
в	11	10	9	8	7	6

Відповідь: 6 прямокутників.

Задача № 668. *Команді пропонують футболки зеленого, червоного та синього кольорів та шорти білого і жовтого кольорів. Скільки способів обрати форму?*

Розв'язання.

1) Спосіб перебору:

Футболка	з	з	ч	ч	с	с
Шорти	б	ж	б	ж	б	ж

2) Спосіб дерева можливих варіантів

Б-З-Ж;

Б-С-Ж;

Відповідь: 6 способів.

Задача № 670. *У загоні космонавтів є три пілоти та два інженери. Скільки існує способів скласти екіпаж з одного пілота й одного інженера?*

Розв'язання.

Спосіб перебору:

P_1	P_1	P_2	P_2	P_3	P_3
J_1	J_2	J_1	J_2	J_1	J_2

Відповідь: 6 способів.

Задача № 672. *У записі 1*2*3*4 замість кожної зірочки можна поставити знак «+» або «.». Чому дорівнює найбільше значення виразу, яке можна отримати?*

Розв'язання.

Спосіб перебору:

$1+2+3+4=10$ $\quad$ $1\cdot2+3+4=9$

$1+2+3\cdot4=15$ $\quad$ $1\cdot2\cdot3+4=10$

$1+2\cdot3\cdot4=25$ $\quad$ $1\cdot2+3\cdot4=14$

$1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ $\quad$ $1+2\cdot3+4=11$

Отже, найбільше значення виразу буде 25.

3.2. Вивчення поняття випадкової події та її ймовірності

У 6 класі учні знайомляться з першими поняттями теорії ймовірностей.

Подія – умова яка може відбутися або не відбудеться.

Випадкова подія - не залежить від обставин (лотерея).

Ймовірність випадкової події як відношення подій що сприяють очікуваному результату до загальної кількості усіх можливих випадків.

Вірогідна подія – ймовірність якої дорівнює 1.

Малоймовірна подія – дуже мала дробова величина.

Рівноможливі події – що мають рівні ймовірності.

Неможливі події – ймовірність якої дорівнює 0.

Задачі з підручника Математика 6 клас (А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір) [20.]

Задача № 803. *Наведіть приклади випадкових подій.*

Розв'язання.

1) Отримав 12 балів з математики.
2) Виграв у лотерею «Лото-забава».
3) Став переможцем Всеукраїнської олімпіади з математики.

Задача № 804. *Наведіть приклади подій, які, на вашу думку, є:*

1) малоймовірними; 2) дуже ймовірними.

Розв'язання.

1) *Малоймовірними є події:*

- ✓ Я поїду на чемпіонат світу з футболу.
- ✓ У травні випаде сніг.
- ✓ В січні розквітнуть проліски.

2) *Дуже ймовірними є події:*

- ✓ Я закінчу 6 клас і перейду до 7 класу.
- ✓ На день народження я отримаю подарунок.
- ✓ Влітку я буду з друзями купатися на морі.

Задача № 807. *Чи всі рівноймовірні події мають ймовірність що дорівнює* ½?

Розв'язання.

Ні, наприклад кидання кубика. Імовірність того , що випаде цифра 1(2, 3, 4, 5 або 6) дорівнює 1/6.

Задача № 808. *Наведіть приклади рівноможливих подій.*

Відповідь: Рівноможливі події – сонце, дощ; вітер і тиша; орел і решка

Задача № 810. *Яка ймовірність того, що при одному підкиданні грального кубика випаде така кількість очок, що дорівнює:*

1) двом; 3) непарному числу;

2) п'яти; 4) числу, яке кратне 6?

Розв'язання.

Відповідь: 1) 1/6; 2) 1/6; 3) ½ ; 4) 1/6.

Задача № 812. *Щоб здати екзамен з математики, потрібно вивчити 30 білетів. Учень вивчив 25 білетів Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один білет, він отримає оцінку 12 балів?*

Розв'язання.

Всього: 30 білетів. Вивчив учень бездоганно 25 білетів. Ймовірність високого балу Р(А)=25/30= 5/6.

Відповідь: 5/6;

Задача № 815. *У класі 12 дівчаток і 17 хлопців. Один учень спізнився до школи. Яка ймовірність того, що це: 1) був хлопчик; 2) була дівчинка?*

Відповідь: 1) 17/29; 2) 12/29.

Задача № 816. *Три грані кубика пофарбували в червоний колір, а решта у синій. Знайти ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде червона грань?*

Розв'язання.

Куб має 6 граней. Три грані кубика – сині, три – червоні. Ймовірність що при киданні кубика випаде червона грань дорівнює 3/6 = ½.

Задача № 817. *Дві грані кубика пофарбували в чорний колір, а решта у білий. Знайти ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде: 1) чорна грань; 2) біла грань?*

*Відповідь:*1) 1/3; 2) 2/3.

Задача № 819. *У коробці 19 карток, пронумерованих від 1 до 19. З коробки навмання витягнули одну картку. Знайти ймовірність того, що на ній записане число:*

1) 12; 5) кратне 3; 9) у записі якого є цифра 9;

2) 21; 6) кратне 7; 10) у записі якого є цифра 1;

3) парне; 7) просте; 11) у записі якого відсутня цифра 5;

4) непарне; 8) двоцифрове; 12) сума цифр якого ділиться націло на 5;

13) при діленні якого на 7 остача дорівнює 5;

14) у запису якого відсутня цифра 1?

*Відповідь:*1)1/19; 2) 0; 3) 9/19; 4) 10/19; 5) 6/19; 6) 2/19;7) 8/19 8) 10/19; 9) 2/19; 10) 11/19; 11) 11; 12) 2/19; 13)2/19; 14) 8/19

Задача №8 25. *Картки з номерами 1, 2, 3 поклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з непарними номерами опиняться поряд?*

Розв'язання.

Розглянемо усі можливі пари способом перебору:

(1;2;3) ; (3;1;2) ; (2;3;1) ; (2;1;3) – сприятливі.

(1;2;3) ; (1;3;2) ; (2;1;3) (2;3;1) (3;1;2) (3;2;1) – усі можливі.

Ймовірність того, що картки з непарними номерами опиняться поруч дорівнює 4/6 =2/3.

*Відповідь:*2 /3.

Задача № 826. *У коробці лежать 2 сині кулі та декілька червоних. Скільки червоних куль у коробці, якщо ймовірність того, що обрана навмання куля:*

1) виявиться синьою, дорівнює 2/5;

2) виявиться червоною, дорівнює 4/5?

Розв'язання.

1) у коробці 3 червоних , так як синіх кульок було 2;

2) червоних кульок 8, так, як синіх було 2.

*Відповідь:*1) 3 червоних; 2) 8 червоних.

Задача № 827. *Грані кубика пофарбовано у два кольори: синій і жовтий(кожну грань в один колір). Ймовірність того, що випаде синя грань, дорівнює 2/3, а що жовта – 1/3. Скільки всього синіх та скільки жовтих граней у куба?*

Розв'язання.

Синіх граней – 4, а жовтих – 2, так як всього 6 граней у куба.

4/6=2/3, а 2/6 = 1/3.

Відповідь: 4 синіх, 2 жовті.

Задача № 827. *У коробці 3 зелені і 6 синіх куль. Яке найменше число куль потрібно витягнути навмання, щоб ймовірність того, що серед вийнятих куль хоча б одна буде зеленого кольору, дорівнювала 1?*

Відповідь: найменшу кількість треба вийняти 7 куль, тоді одна буде обов'язково зеленого кольору.

3.3. Система завдань для гуртків та факультативів з математики

Наведемо систему завдань, що може бути запропонована здобувачам під час вивчення елементів теорії ймовірностей та математичної статистики в школі.

1. *Запишіть всі тризначні числа цифрами 1, 2 і 3 без повторення. Скільки таких чисел?*

Розв'язання.

Запишемо числа в порядку зростання: 123, 132, 213, 231,312, 321. Тут виписані всі числа, що задовольняють умові завдання, без пропусків і повторень. На перше місце ми поставимо будь-яку з трьох цифр, на друге місце можна поставити тільки одну з двох, що залишилися, тобто є 3*2 = 6 можливостей зайняти два перших місця. У кожному з цих шести випадків третє місце займе цифра що залишилася. Всього таким чином можна скласти тільки 6 тризначних чисел.

Відповідь:6.

2. *Кинули два гральних кубика. На першому випало число - 2 , на другому – 6. Скількома різними способами може випасти на двох кубиках число 8?*

Розв'язання.

Розглянемо варіанти, коли може випасти число 8:

1) 2 і 6; 2) 3 і 5; 3) 4 і 4, 4) 5 і 3; 5) 6 і 2.

Відповідь: 5.

3. *Вісім друзів вирішили провести турнір з шашок так, щоб кожен зіграв з кожним одну партію. Скільки партій буде зіграно?*

Розв'язання.

Кожен гравець повинен зіграти по 7 партій. Розглянемо випадки, коли гравці не повторюються. Перший повинен зіграти 7 партій (з 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 гравцями), другий - 6 партій (з 3, 4, 5, 6, 7, 8 гравцями), третій - 5 партій (з 4 , 5, 6, 7, 8 гравцями), четвертий - 4 партії (з 5, 6, 7, 8 гравцями), п'ятий - 3 партії (з 6, 7, 8 гравцями), шостий - 2 партії (з 7, 8 гравцями), сьомий - 1 партія (з 8-м гравцем).

Звідси, кількість партій: 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28.

Відповідь: 28.

4. *У кафе пропонують два перші страви: борщ, розсольник – і чотири друга страви: , сосиски, пельмені, гуляш, котлети. Вкажіть усі можливі обіди з двох страв, що може замовити відвідувач. Проілюструйте відповідь, побудувавши дерево можливих варіантів.*

Відповідь: 8 обідів.

5. *У коробці 3 червоних, 3 жовтих, 3 зелених кулі. Витягуємо навмання 4 кулі. Які з наступних подій неможливі, які - випадкові, а які - достовірні:*

A = {всі вийняті кулі одного кольору};

B = {всі вийняті кулі різних кольорів};

C = {серед вийнятих куль є кулі різних кольорів};

D = {серед вийнятих є кулі всіх трьох кольорів}.

Розв'язання.

Подія A – неможлива: не можна вийняти з коробки чотири кулі одного кольору, так що в ній тільки по три кулі кожного кольору.

Подія B – теж неможлива: кулі в коробці трьох кольорів, а виймаємо чотири.

Подія C – достовірна: адже всі чотири кулі, як ми вже з'ясували не можуть бути одного кольору, тому серед них обов'язково є кулі хоча б двох кольорів.

Подія D – випадкова.

6. *Стадіон має 4 входи: А, В, С і Д. Знайдіть усі можливі шляхи, якими відвідувач може зайти через один вхід і вийти через інший. Скільки існує таких способів?*

Розв'язання.

Відвідувач може увійти через один з чотирьох входу, а вийти через один з трьох, що залишилися, тобто є 4*3 = 12 способів.

Відповідь: 12 способів.

7. *З села Зелене в село Червоне ведуть три дороги, а з села Червоне в село Жовте - чотири дороги. Скількома способами можна потрапити з села Зелене в село в село Жовте через Червоне?*

Розв'язання.

У село Червоне із села Зеленого можна потрапити трьома способами. А з Червоного в Жовте - 4 способами. Отже, 3*4 = 12 (способів).

Відповідь: 12 способів.

8. *В магазині «Все для чаю» є в наявності п'ять різних чашок та 3 різних види блюдець. Скількома способами можна купити чашку з блюдцем?*

Розв'язання.

Оберемо чашку. До комплекту з нею можна обрати будь-яке з трьох наявних блюдець. Тому існують три різні комплекти, які мають вибрану чашку. Оскільки чашок всього 5, то кількість різних комплектів дорівнює $5\cdot3=15$.

Відповідь: 15 способів.

9. *В магазині "Все для чаю" є в наявності п'ять різних видів чашок, 3 різних видів блюдець та 4 види чайних ложок. Скількома способами можна придбати комплект, який складається з чашки, блюдця та ложки?*

Розв'язання.

Оберемо будь-який з 15 комплектів по аналогії з попередньою задачею. Його можна доповнити ложкою чотирма різними способами. Тому загальна кількість можливих комплектів дорівнює (15·4 = 5·3·4 = 60).

Відповідь: 60 способів.

10. *Кожну клітинку квадратної таблиці 2x2 можна пофарбувати в чорний або білий колір. Скільки існує різних розфарбувань цієї таблиці?*

Відповідь: $2^4 = 16$.

11. *До кролика в гості прийшли друзі: Віні-Пух, П'ятачок і Ослик Іа. Скількома способами він зможе розсадити друзів на стільці синього, червоного та жовтого кольорів.*(Відповідь: 6)

12. *Космічний корабель "Циклон" спустився на невідому Планету X зірки V сузір'я Центаври. Планета була розділена океанами на три материки і на ній жили живі істоти. Кожен материк висунув 3-ох своїх представників для того, щоб летіти з кораблем на Землю. Представників 1-го материка кличуть Ман, Зап, Сан, 2-го: Пин, Фин, Шип, 3-го: Хир, Кир Дир. Але на "Циклопі" не вистачає анабіозних ван для 9-ти чоловік. Він може взяти лише 3-х. Скількома способами іноплanетяни можуть вибрати делегацію із 3-х істот?*

Відповідь: 3*3*3=27. (Для учнів малюємо граф "Делегація").

13. *Команда космічного корабля «Пошук» повинна складатися із командира, пілота і лікаря. Є три кандидатури на місце командира (К1 , К2, К3), три на місце пілота (ПІ, П2, П3) і два на місце лікаря (Л1,Л2). При вивченні питання про психологічну сумісність членів екіпажу з'ясувалося, що: К1 - несумісний з П2 і Л 1, К2 - несумісний з П3, К3 - несумісний з П3 і Л2, П2 - несумісний з Л2, П3 - несумісний з Л1. Скільки варіантів екіпажу можливо?*

Відповідь: 7 способів.

14. *Жахливі грабіжники Кнопка і Скріпка вирішили викрасти із сейфа золотий ключик Буратіно. Для того, щоб відкрити замок вхідних дверей їм потрібно підібрати двохзначний код. Причому відомо, що двері зачиняє Буратіно. який поки що знає 4-ри цифри: 1,2,3,4. Скільки варіантів доведеться перебрати Кнопці і Скріпці, щоб проникнути в: дім? (відповідь А] = 4^2 = 16 (Для учнів побудова графу). Проникнути в будинок півділа. Кнопці і Скріпці треба ще відкрити і сейф. Але сейф зачиняє папа Карло, а він знає всі цифри. Скільки двохзначних кодів треба перебрати грабіжникам, щоб відкрити сейф?*

Відповідь: 100.

15. *Четверо друзів народилися в один день, тому кожного року вони обмінюються подарунками. Скільки всього подарунків дарять хлопці?*

Розв'язання.

4×3=12 подарунків.

Відповідь: 12.

16. *У турнірі брали участь 6 футбольних команд. Кожна з кожною зіграли по одній грі. Скільки ігор вони зіграли?*

Розв'язання.

І спосіб: 6×5:2=15;

ІІ спосіб: 5+4+3+2+1=15.

17. *В одній вазі лежить 5 яблук, а в другій 8 мандаринів. Скількома способами можна вибрати або яблуко, або мандарин?*

Розв'язання.

Одне яблуко можна вибрати п'ятьма способами, а один мандарин 8 способами. Тоді яблуко, або мандарин можна вибрати 5 + 8 способами.

Відповідь: 13.

18. З міста А у місто В ведуть три різні шляхи. З міста В у місто С ведуть два різні шляхи. Скількома способами можна добратися з міста А до міста С?

Відповідь: 6 способів.

19. *На вершину деякої гори ведуть 7 стежинок. Скількома способами турист зможе піднятися та спуститися з цієї гори?*

Відповідь:7•7 = 49.

20. *На вершину деякої гори ведуть 7 стежинок. Скількома способами турист зможе піднятися та спуститися з гори, але при цьому різними шляхами?*

Відповідь: 7• 6 = 42.

21. *Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр 1,7,4, якщо при цьому цифри можуть повторюватись?*

Розв'язання.

3 x 3 = 9 (на перше місце обрати цифру можна трьома способами, на друге місце так само цифру можна обрати теж трьома способами).

Це числа: 11, 14, 17, 41, 44, 47, 71, 74, 77.

Відповідь: 9.

22. *Скільки двозначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 9, 7,0, якщо при цьому цифри можуть повторюватись?*

Розв'язання.

2 x 3 = 6 (оскільки нуль не може стояти на першому місці). Це числа: 99, 97, 90, 79, 77, 70.

Відповідь: 6.

23. В класі навчаються 25 здобувачів. Скільки існує способів обрати командира класу та його заступника?

Розв'язання.

25 x 24 = 600

Відповідь: 600.

24. *Під час розіграшу першості деякої країни з футболу учать беруть 16 команд. Скільки способів існує для розподілу між ними золотої та срібної медалей?*

Розв'язання.

16 x 15 = 240.

Відповідь: 240.

Завдання підвищеної складності

Задача 1. Алфавіт племені Мумбо-Юмбо складається з трьох букв А, В та С. Слово в них – це будь-яка послідовність, що містить не більше чотирьох . Скільки слів в мові племені Мумбо-Юмбо?

Розв'язання.

Вказівка. Потрібно окремо порахувати, скільки є одно-, два-, три-, а також чотири-літерних слів.

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120.$$

Відповідь: 120.

Задача 2. До футбольної команди (11 чоловік) треба обрати капітана та його заступника. Скільки існує способів це зробити?

Розв'язання.

Капітаном може стати будь-хто з 11 футболістів. Після того, як оберуть капітана, на роль заступника зможуть претендувати 10 чоловік, що залишилися. Отже, всього є $11 \cdot 10 = 110$ різних варіантів виборів.

Відповідь: 110 способів.

Задача 3. Скільки існує способів зробити трикольоровий прапор, який складається з горизонтальних смуг однакової ширини, якщо в наявності є матерія шести різних кольорів?

Розв'язання.

Колір для виготовлення самої верхньої смуги прапору можна обрати шістьма різними способами. Потім для вибору середньої смуги прапору залишається п'ять можливих кольорів, а потім для нижньої смуги прапора – чотири різні кольори. Таким чином, прапор можна зробити $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способами.

Відповідь: 120 способів.

Задача 4. Скільки існує способів виставити на шахову дошку білу та чорну тури таким чином, щоб вони не побили одна одну?

Розв'язання.

Білу туру можна розмістити на будь-яку одну з 64 клітинок. Незалежно від свого розташування вона буде бити 15 клітинок (включно з полем, на якому вона стоїть). Тому залишається 49 клітинок, на які можна поставити чорну туру. Таким чином, всього $64 \cdot 49 = 3136$ різних способів.

Відповідь: 3136 способів.

Задача 5. Скількома способами можна поставити на шахову дошку білого і чорного королів так, щоб вийшла допустима правилами гри позиція?

Розв'язання.

Білого короля можна поставити на будь-яке з 64 полів. Але кількість полів, котрі він при цьому буде бити, залежить від його розташування. Тому необхідно розглянути три випадки:

а) якщо білий король стоїть в кутку (кутків всього 4), то він б'є 4 поля (включаючи те, на якому стоїть), і залишаються 60 полів, на які можна поставити чорного короля;

б) якщо білий король стоїть на кінці дошки, але не в кутку (таких полів - 24), то він б'є 6 полів, і для чорного короля залишається 58 можливих полів;

в) якщо ж білий король стоїть не на кінці дошки (таких полів - 36), то він б'є 9 полів, і для чорного короля залишається 55 можливих полів.

Таким чином, всього маємо $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способів розміщення королів.

Відповідь: 3612 способів.

Задачі для самостійного розв'язання

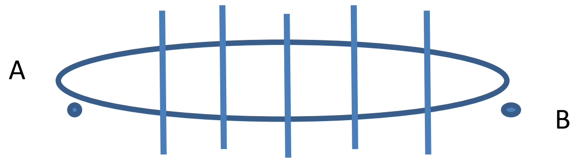
Правило добутку

1. Скільки існує двоцифрових чисел?

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти так, щоб будь-які сусідні цифри були різні?

3.Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри з яких різні, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися: а) з цифри 1, в) із запису «34»?

4. Скількома способами можна проїхати з пункту А в пункт В?



5. На одній з бічних сторін трикутника вибрано n точок, на іншій – m, що не співпадають з вершинами. Кожну вершину при основі трикутника з'єднали прямими з цими точками на протилежній стороні. На скільки частин розіб'ється трикутник?

Правило суми

1**.** Туриста зацікавили 5 маршрутів у Криму і 7 маршрутів у Карпатах. Скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут ?

2. Скільки трицифрових або двоцифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 0, 2, 4, 5, 7 без повторень?

Перестановки без повторень

1. Скількома способами 7 учнів можуть сформувати чергу в їдальні?

2. Скількома способами можна розмістити 8 глядачів у кінотеатрі з 8 місць?

3. Скількома способами можна розмістити 4 книги на полиці?

4. Скількома способами можна впорядкувати множину {1,2,…,2n} так, щоб непарні числа залишились на непарних місцях, а парні – на парних?

5. Іванко , Оленка, Катерина, Василь та Микола сідають на лавочку в парку. Скількома способами діти можуть сісти на лавочку, щоб двоє з них (Іванко й Оленка) сиділи поруч?(Задачу розв'язати двома способами)

Розміщення без повторень

1. Скількома способами можна розмістити 4 учня на 25 стільцях?

2. В класі 29 учнів. Скількома способами можна обрати старосту та його заступника?

3. В змаганнях приймають участь 17 учнів. Скількома способами можуть розподілитися золота, срібна та бронзова нагороди?

4. До диспечера таксопарку надійшло одночасно 3 замовлення від двох готелів: два замовлення на різний час від готелю «Славутич» і одне – від готелю «Дніпро». Скільки існує різних способів розподілу 7 наявних у таксопарку вільних таксі за цими замовленнями?

Комбінації без повторень

1. Скількома способами можна розбити 28 учнів на 2 команди?

2. В 2-ох коробках 7 олівців та 9 ручок. Скількома способами можна вибрати 2 олівця та 3 ручки?

3. В кошику 10 кульок. З них 6 білих. Скількома способами можна вибрати 7 кульок так, щоб:

а). 4 з них були білі?, в). хоча б 1 з них була біла?

4. Знайдіть кількість діагоналей опуклого десятикутника.

5. Скільки підмножин існує в множині з n елементів?

6. Скільки п’ятицифрових чисел, усі цифри з яких різні, можна скласти з цифр 1, 2, 4, 7, 9? Задачу розв’яжіть за правилом добутку.

7. Скільки п’ятицифрових чисел, усі цифри з яких різні, можна скласти з цифр 1, 2, 4, 7, 9?

8. Скількома способами можна розмістити 8 глядачів в кінотеатрі з 8 місць? Задачу розв’яжіть за правилом добутку.

9. В класі 29 учнів. Скількома способами можна обрати старосту та його заступника?

10. В змаганнях приймають участь 17 учнів. Скількома способами можуть розподілитися золота, срібна та бронзова нагороди? Задачі розв'яжіть за правилом добутку.

11. Скільки існує семицифрових чисел, сума цифр яких парна?

12. Скільки існує парних семицифрових чисел?

13. При повороті аркуша на 180^0:

0 $\leftrightarrow$ 0,

1 $\leftrightarrow$ 1,

8 $\leftrightarrow$ 8,

9 $\leftrightarrow$ 6,

інші цифри втрачають зміст. Знайти кількість семицифрових чисел, що

а) при повороті не змінюються, б) не втрачають зміст.

14. Скількома способами з 15 осіб можна вибрати а) делегацію з 2 осіб, б) представника, заступника.

Обчислення ймовірностей подій за допомогою формул та правил комбінаторики

Задача 1.1. Хлопчик грається розрізною азбукою з 10 карток (зверху однакових на колір і дотик), на звороті яких написано букви "М", "А", "Т", "Е", "М", "А", "Т", "И", "К", "А". Він картки змішує, витягує декілька з них і розкладає навмання в ряд. Знайти ймовірність того, що

- при витягуванні чотирьох карток отримається слово "МАМА" (подія A);
- при витягуванні трьох карток отримається слово "МАТ" (подія B);
- при витягуванні трьох карток отримається слово "ПАТ" (подія C);
- при витягуванні десяти карток отримається слово "МАТЕМАТИКА" (подія D).

Задача 1.2. У ліфті 6 пасажирів, ліфт зупиняється на 11-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі?

Задача 1.3. З 6 однакових карток розрізної азбуки: "а", "е", "м", "н", "о", "р" навмання вибирають 4 картки й складають їх в ряд по рядку, яка ймовірність отримати при цьому слово "море"?

Задача 1.4. Букви розрізної абетки „л", „р", „в", „е", „о", „с" розкладають випадковим порядком у ряд. Яка ймовірність того, що у будь-якому місці ряду отримається слово „лев"?

Задача 1.5. П'ятеро дітей сідають на лавочку в парку. Яка ймовірність, що двоє з них (Іванко й Оленка) сидітимуть поруч?

Задача 1.6. Бібліотекар викладає на полицю 9 книг. Яка ймовірність того, що три певні книги будуть стояти поряд?

Задача 1.7. На 6 однакових картках написано букви "А", "В", "К", "М","О", "С". Картки змішують і розкладають навмання в ряд. Яка ймовірність того, що отрималося слово "МОСКВА"?

Задача 1.8. Кожну букву, що входить у слово "вдосконалення" виписано на окрему картку. Яка імовірність того, що після ретельного перемішування й виймання п'яти карток отримаємо слово "скеля"?

Задача 1.9. У лотереї з 50 квитків 8 виграшних. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання придбаних квитків два будуть виграшними?

Задача 1.10. Яка ймовірність вгадати 5 номерів у лотереї „Спортлото" 5 із 36?

Задача 1.11. У ящику 36 деталей, 9 з них – браковані. Обчислити ймовірність того, що серед 7 взятих навмання деталей 3 буде бракованих.

Задача 1.12. З 28 кісточок доміно випадково вибираються дві. Яка ймовірність того, що з них можна скласти "ланцюжок" відповідно до правил гри?

ВИСНОВКИ

В ході виконання дипломної роботи були виконані наступні завдання:

1) проаналізовано психолого-педагогічну, навчальну, математичну і методичну літературу, яка має відношення до проблеми дослідження та вивчено сучасний стан навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в основній школі. При цьому були досліджені підручники, за якими можливе викладання теми «Початки теорії ймовірності та елементи математичної статистики» в школі;

2) виявлено психолого-педагогічні умови та основні методичні вимоги, які висуваються до структури та змісту теоретичного матеріалу та системи задач з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики. сформулювати зміст теорії ймовірностей як розділу математики. Тож до основними вимогами є введення поняття досліду та події яка є результатом проведення дослідів і запропонувати класичне означення ймовірності як числової характеристики настання події. Щодо системи задач, то вона повинна відбиратись за принципами доступності, прикладної спрямованості, міжпредметних зв'язків, диференціації навчання, послідовного наростання труднощів, експериментально-дослідницького принципу. Задачі не повинні містити попередньо не засвоєних учнями понять і відношень;

3) проаналізовано мотиви вивчення теорії ймовірностей та початків математичної статистики в основній школі. Виявлено, що тема дослідження відіграє важливу роль у розвитку мислення та має важливе, ні з чим незрівнянне значення для математичної освіти ймовірностей. Особливим мотиваційним аргументом стало те, що висновки теми «Елементи прикладної математики» знаходять застосування у повсякденному житті, науці, техніці тощо(теорії надійності, теорії масового обслуговування, теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії

стрільби, теорії похибок, медичній і технічній діагностиках, радіолокаційній техніці).

4) виявлено проблеми навчання та вивчення теорії ймовірностей і вступу до статистики в основній школі , що привело до думки про те, що система вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики повинно, безумовно, мати прикладну спрямованість, диференційовану реалізацію і особисто орієнтований підхід. Це означає, що при вивченні теоретичного матеріалу, і особливо при формуванні навичок та умінь, необхідно використовувати змістові прикладні задачі, в тому числі і міжпредметного змісту. При цьому доцільним може виявитись проблемний виклад, евристична бесіда, експериментально-дослідницький методи. Разом з тим, не можна недооцінювати пояснювально-ілюстративний та репродуктивний методи, які забезпечують фонд дійових знань. Серед організаційних форм найбільш вдалим є лекційно-практична форма навчання, фронтальні і особливо групові організаційні форми під час формування навичок і умінь.

Також при виконанні дипломної роботи було виконано завдання уточнення мети і завдання вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, розроблено адекватний зміст навчального матеріалу.

Отже, в ході дослідження розв’язані всі поставлені завдання і мета досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей [Текст]: Уч. пособие для студ. втузов. / Г.И. Агапов. – М.: ВШ, 1986. – 80 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посіб. - К.: ЦУЛ, 2002. - 448 с.
3. Бевз Г. П. Математика: Проб, підруч. для 9 кл. серед, шк - К.: Освіта, 1994.- 176 с.
4. Бевз Г.П. Методика розв‘язування стереометричних задач. – К.: Рад. шк., 1988. – 190 с.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Навчальний посібник. –Київ: Вища школа, 1989. – 367 с.
6. Бевз *Г.* П.Алгебра: Підруч. для 9 кл. серед, шк. - К.: Освіта, 2006. - 176 с.
7. Бевз *Г.* П.Алгебра: Підруч. для 7-9 кл. серед, шк. - К.: Освіта, 1997. - 324 с.
8. Біляніна О.Я., Кінащук Н.Л., Черевко І.М. Алгебра: 8 кл.: підручник для загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2008
9. Венецкий И.Г. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]. / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – М.: Статистика, 1975. - 264 с.
10. Вивальнюк Л.М., Соколенко О.І., Боровик В.Н. та ін. Математика: Навч. видання. Посібник для факультативних занять у 9 кл. К.: Освіта, 1993.
11. Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І. Алгебра: Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2002.
12. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1985.-205 с.

13. Жалдак М. /., Кузьміна Н. М.', Берлинська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика. З елеметами інформаційної технології,- К.: Вища шк., 1995.-210 с.

14. Закон України “Про загальну середню освіту”, Київ, 1999 р.

15. Каніовська І.Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах: Навч. посіб. - 2-ге вид., виправл. і доп. - К.: Політехніка, Періодика, 2004. - 156 с.

16. Колмогоров А.М., Абрамов О.М., Вейц Б.Ю., Івашев-Мусатов О.С., Івлєв Б.М., Шварцбурд С.І. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник для 9-10 кл. серед. шк. К.: Рад. шк., 1986

17. Колмогоров А.М., Абрамов О.М., Вейц Б.Ю., Івашев-Мусатов О.С., Івлєв Б.М., Шварцбурд С.І. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник для 10 і 11 кл. серед. шк – 6-е вид. К.: Рад. шк.,1991.

18. Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М. Алгебра: Підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2017.

19. Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М. Алгебра: Підручник для 9 класу. Тернопіль: Підручники і посібники, 2009.

20. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

21. Ланков О.В. До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики. - К.: Рад шк., 1953.- 176 с.

22. Лукавецький В., Маланюк М.*П.*, Литвиненко Г.М. Завдання з алгебри для 9 кл.: Навч.-метод. посібник. - К.: Рад. шк., 1983.- 88 с.

23. Нелин Е.П., Долгова О.Е. Алгебра, 11 класс: учебник для общеобразоват. учеб. заведений: академ. уровень, профил. уровень. Х.: Гимназия, 2011

24. Приймак В.І., Голубник О.Р. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. - 556 с.

25. Рогановский Н. М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для пед. ин-тов.- Минск: Виш. шк., 1990.- 266 с.

26. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. - 2-е вид., перероб., доп. - К.: Знання, 2007. - 556 с.

27. Слепкань З.И. Методика преподавания алгебри и начал анализа. – К.: Рад. шк., 1978. – 224 с.

28. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. Методическое пособие. – Київ: Рад. шк., 1983. – 192 с.

29. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

30. Слепкань 3.1. Елементи комбінаторики. Початки теорії ймовірностей / В кн. Математика. Посібник для факультативних занять у 10 кл. За ред. проф. І.Є Шиманського,- К.: Рад. школа, 1970.-302 с.

31. Урок математики в школі / За ред. Г.П. Бевза. – К.: Рад. шк., 1977. – 158 с.

32. Фридман Д. М., Турецкий Е. Н,, Стеценко В. Я. Как научиться решать задачи: Беседы о решении математических задач: Пособие для учащихся,- М.: Просвещение, 1979.- 160с.

33. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе,- М.: Педагогика, 1983.- 160 с.

34. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. - 2-ге вид., переробл. і доп. - К.: Вища школа, 1994. - 192 с.