МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Поспілько Світлана Олександрівна

Керівник кандидатка педагогічних наук,
старша викладачка
Григор’єва Валентина Борисівна
Рецензент доцентка кафедри природничо-наукової підготовки Херсонської державної морської академії, кандидатка педагогічних наук Спичак Тетяна Сергіївна

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Тригонометрія – це розділ елементарної математики, який широко використовується в астрономії, фізиці, топографії, медицині, архітектурі тощо. Тому зрозуміло, що певні частинні питання тригонометрії, зокрема, дослідження тригонометричних функцій, побудова їх графіків, розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей, доведення певних тригонометричних тотожностей та обчислення виразів, які містять тригонометричні функції, входять до програми вступних іспитів з математики до закладів вищої освіти. Зміст та організація процесу вивчення математики у сучасній школі побудовані з урахуванням компетентнісного підходу [30], за яким результатом навчання є здатність здобувачів застосовувати свої знання на практиці. В шкільному курсі алгебри та початків аналізу вивченню тригонометричного матеріалу приділяється значна увага, проте складність вивчення його полягає у певних розбіжностях між досить великим обсягом матеріалу та невеликою кількістю годин, що відводяться на його вивчення. Звісно, що в класах з поглибленим вивченням математики навчальних годин на вивчення тригонометрії заплановано більше, проте ця тема все одна залишається досить складною для опанування її здобувачами.

Одним із питань тригонометрії у шкільному курсі математики є питання вивчення обернених тригонометричних функцій. Обернені тригонометричні функції або аркфункції – це певний тип трансцендентних функцій, під час вивчення яких відбувається розвиток логічного мислення. Це пов’язано з тим, що при обчисленні значень цих функцій здобувачам необхідно застосовувати вміння проводити досить громіздкі та складні обчислення та перетворення виразів, але важливо при цьому не загубитися у достатньо великій кількості формул тригонометрії. Методичні особливості вивчення аркфункцій визначаються навіть назвою цих функцій – вони є оберненими до тригонометричних функцій, а тому звідси і виникає значна кількість досить складних формул. Загальна теорія обернених тригонометричних функцій є дзеркальним відображенням теорії тригонометричних функцій, оскільки для детального вивчення аркфункцій слід вивчити властивості та основні співвідношення для тригонометричних функцій, що становить цілий розділ в курсі алгебри. Як відомо, тригонометричні функції, які вивчаються в 10-11 класах, необхідні для опису різноманітних властивостей кутів трикутників, періодичних функцій, детальне вивчення тригонометричних функцій формує у здобувачів універсальні навчальні дії та особистісні результати навчання. Вивчення аркфункцій значно полегшує роботу з одиничним колом, на якому досить наочно зрозуміло алгоритм знаходження значень як тригонометричних, так і обернених до них функцій.

Багато науковців та методистів відмічають певні типові складнощі у здобувачів при вивченні обернених тригонометричних функцій та невміння застосовувати отримані знання при розв’язуванні прикладних задач. Саме тому питання вивчення аркфункцій в сучасній школі є досить актуальним на сьогодні.

Мета даної роботи полягає у розгляді питання про властивості обернених тригонометричних функцій та можливості застосування цих властивостей при розв’язуванні різноманітних задач.

Об’єктом дослідження виступає теорія функцій, а ***предметом*** дослідження – клас обернених тригонометричних функцій.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** роботи:

1. Розглянути властивості обернених функцій та обернених тригонометричних функцій, зокрема.

2. Розглянути основні тотожності, пов’язані з аркфункціями, які встановлюють взаємозв’язки між ними та між аркфункціями та тригонометричними функціями .

3. Розкрити питання застосування властивостей обернених тригонометричних функцій до розв’зування рівнянь, нерівностей та інших видів завдань.

Основні ***методи***, що використовувалися в дослідженні – це метод оберненого перетворення, а також методи розв’язування нерівностей.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були систематизовані основні співвідношення між аркфункціями та тригонометричними функціями, що можуть бути використані при розв’язуванні задач. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл при викладанні відповідних тем в школі.

Дослідження було виконано в межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні положення, які стосуються теорії обернених функцій. Зокрема, в ньому розглянуто поняття оберненої функції та властивості та графіки обернених тригонометричних функцій. В другому розділі здійснено огляд основних співвідношень, пов’язаних з оберненими тригонометричними функціями. Третій розділ носить прикладний характер та містить значну добірку прикладів на застосовування аркфункцій, що можуть бути запропоновані на факультативних заняттях з математики для здобувачів старших класів шкіл з поглибленим вивченням математики.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ФАКТИ З ТЕОРІЇ ОБЕРНЕНИХ ФУНКЦІЙ

1.1. Поняття оберненої функції

Нехай задана функція $y = f(x)$, з областю визначення $D(f)$ та множиною значень $E(f)$. Відомо [11], що для кожного значення x_0 з області визначення функції можна знайти відповідне значення $y_0 \in E(f)$; y_0 називають *образом* x_0 при відображенні f, а x_0 – *прообразом* при цьому відображенні.

Нерідко доводиться розв'язувати обернену задачу – за даним значенням функції y_0 знаходити відповідне значення аргументу x_0. Якщо кожному значенню функції відповідає одне певне значення аргументу, можна висловити обернену залежність значень аргументу від значень функції. У такому разі таку функцію називають *оборотною*.

Якщо для функції $y = f(x)$ для кожного значення аргументу з області визначення $D(f)$ відповідає одне певне значення функції з множини значень функції $E(f)$, а для кожного значення функції з множини значень функції $E(f)$ відповідає одне певне значення аргументу з області визначення функції $D(f)$, то функцію $y = f(x)$ ще називають *взаємно однозначною* (або ще ін'єктивною функцією, або ін'єкцією). Підкреслимо ще раз, що якщо функція $y = f(x)$ приймає кожне своє значення y тільки при одному значенню x, то цю функцію називають *оборотною*.

Наприклад, функція $y = 3x – 1$ оборотна, тому що кожне значення y приймає при єдиному значенні аргументу x. Це значення можна знайти, розв'язуючи рівняння $y = 3x – 1$ відносно x. Функція $y = x^2$ не є оборотною, так як, наприклад, значення $y = 4$ вона приймає при $x = – 2$ і при $x = 2$.

Нехай $y = f(x)$ – оборотна функція, тобто з рівності $y = f(x)$ можна однозначно виразити x через y. Тоді кожному y з множини значень функції відповідає одне певне значення x з області її визначення, таке, що $y = f(x)$.

Ця відповідність визначає функцію x від y, яку позначимо $x = g(y)$. У зв'язку з тим, що аргумент функції прийнято позначати через x, поміняємо місцями x та y. Отримаємо: $y = g(x)$. Функцію $y = g(x)$ називають *оберненою* до функції $y=f(x)$.

Легко зрозуміти, що функція, обернена до даної, єдина, якщо вона існує [16]. Тому її позначення однозначно пов'язується з позначенням вихідної функції: обернена до f функція позначається через f^{-1} за аналогією з позначенням числа, оберненого до даного (a і a^{-1}).

З визначення оберненої функції випливає, що область визначення оберненої функції збігається з множиною значень вихідної функції, а множина значень оберненої функції збігається з областю визначення вихідної функції.

Приклад 1.1. Знайти функцію, обернену до функції $y = 4x + 7$.

Розв’язуючи це рівняння відносно x, отримуємо: $\mathrm{x} = \frac{1}{4}(\mathrm{y} - 7)$. В останній рівності поміняємо місцями x і y : $\mathrm{y} = \frac{1}{4}(\mathrm{x} - 7)$. Функція $\mathrm{y} = \frac{1}{4}(\mathrm{x} - 7)$ є оберненою до функції $y = 4x + 7$.

Приклад 1.2. Знайти функцію, обернену до функції $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}-1}$.

Позначивши $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}-1}$, маємо $D\ (f) = (-\infty; 1)\cup(1; +\infty)$; $E\,(f) =(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$. Графік цієї функції зображено рисунку 1.1.

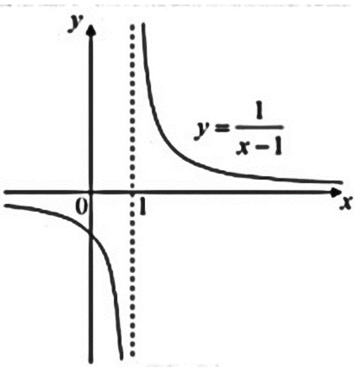


Рис. 1.1

Для знаходження оберненої до f функції f^{-1} рівність $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}-1}$, що задає f , розв'язуємо відносно x, тобто виражаємо x через y: $\mathrm{x} = 1 + \frac{1}{\mathrm{y}}$. Таким чином,

$f^{-1}(\mathrm{y}) = 1 + \frac{1}{\mathrm{y}}$: $D\,(f^{-1})$ = $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; $E\,(f^{-1})$ =$(-\infty; 1)\cup(1; +\infty)$.

Бачимо, що $D\,(f)= E\,(f^{-1})$, $E\,(f)= D\,(f^{-1})$.

Відповідно до прийнятих позначень у рівності $\mathrm{x} = 1 + \frac{1}{\mathrm{y}}$ поміняємо місцями x і y. Отримаємо $\mathrm{y} = 1 + \frac{1}{\mathrm{x}}$. Графік цієї оберненої функції зображений на рисунку 1.2.

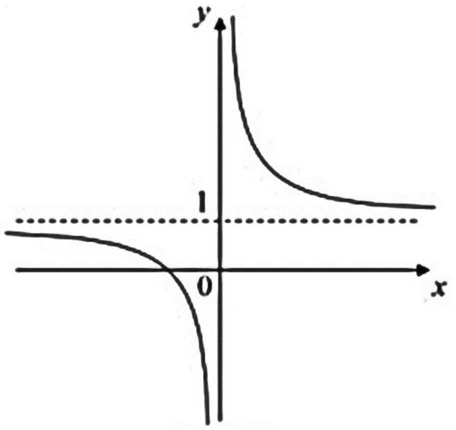


Рис. 1.2

Якби ми не міняли місцями x і y, то графік оберненої функції був би зображений на рисунку 1.1, але слід було б поміняти місцями назви осей: вісь Oy була б віссю абсцис, а вісь Ox – віссю ординат. Але так склалося, що зазвичай x і y міняють місцями і роблять це для того, щоб зберегти відомі ролі осей координат.

Графік вихідної функції $y=f(x)$ і графік оберненої до неї функції $y = g(x)$ пов'язані дуже витончено: якщо ми з рівності, що задає вихідну функцію, виразимо x через y, а потім поміняємо місцями x і y та зобразимо графіки вихідної та оберненої до неї, то ці графіки виявляться симетричними відносно прямої $y = x$ (бісектриси першого та третього координатних кутів) [8]. Проілюструємо цю властивість графіків на прикладі графіка $y = 3^x$ і графіка оберненої до неї функції $y = \log_3 x$ (рис. 1.3).

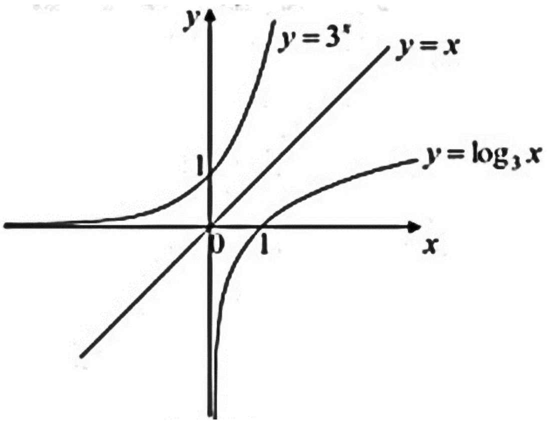


Рис. 1.3

Теорема 1.1. Монотонна функція є оборотною.

Нехай, наприклад, функція *y = f(x)* зростає, і нехай y_0 – її деяке значення в точці x_0, тобто $y_0 = f(x_0)$. Тоді якщо x належить області визначення функції, то при $x > x_0$ виконується нерівність $f(x) > f(x_0) = y_0$, а при $x < x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0) = y_0$. Отже, значення y_0 функція, що розглядається, приймає тільки в одній точці і тому вона є оборотною.

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає і тому є оборотною. Оберненою до неї є функція $y = \sqrt[3]{x}$.

Якщо вихідна функція зростає, то і зворотна функція також зростає, якщо вихідна функція спадає, то і зворотна до неї функція також спадає.

Отже, для існування функції, зворотної до цієї, ми повинні вимагати здійсненності властивості ін'єктивності, рівносильної строгої монотонності.

1.2. Обернені тригонометричні функції

Застосуємо міркування, наведені в пункті 1.1, до тригонометричних функцій.

Розглянемо функцію $y = sin\ x$. Її графік наведено на рисунку 1.4.

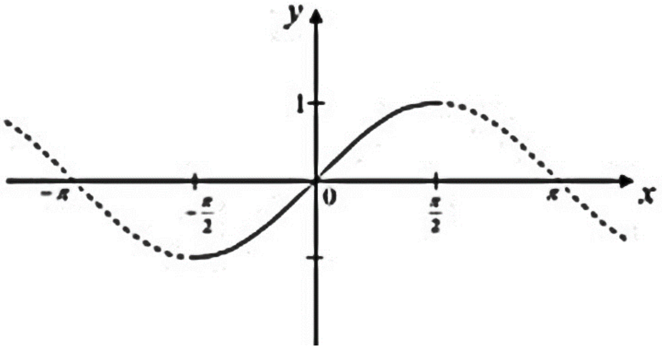


Рис. 1.4

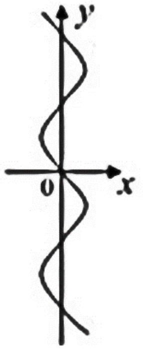


Рис. 1.5

Функція $y = sinx$ не монотонна (вона кусково монотонна [12]). Якщо до цієї функції на всій області визначення ($D(sin) = (-\infty; +\infty)$) визначити обернену функцію, то остання буде багатозначною (одному значенню аргументу відповідає більше одного значення функції, в даному випадку нескінченно багато значень функції). Цю багатозначну функцію позначають $y = arcsin\ x$ та її графік зображений малюнку 1.6.

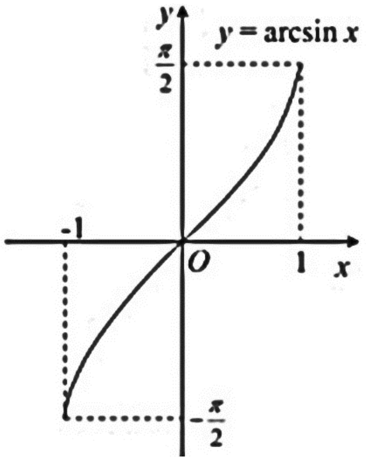


Рис. 1.6

Обмежимо область визначення функції $y = sinx$ проміжком $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, на якому функція монотонно зростає (на рис. 1.4 графік функції $y = sinx$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ виділено суцільною лінією). На цьому проміжку існує обернена функція, яку називають *арксинусом* і позначають $y = \arcsin x$, графік її зображений на малюнку 1.6.

Дамо визначення і опишемо властивості функції $y = \arcsin x$.

arcsin$a$ – це таке число (кут, дуга) x, що:

1.sin x = a;

2. $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Оскільки arcsin a однозначно визначений для будь-якого $a \in [-1;1]$, то можна говорити про функцію y = arcsin x, область визначення якої – відрізок $[-1;1]$. Тобто:

$$\text{y} = \arcsin x\text{ ,якщо } \sin y = x \text{ і} -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}. \qquad (1.1)$$

З даного означення випливають дві тотожності:

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (-1 \le x \le 1), \qquad (1.2)$$

$$\arcsin(\sin y) = y \quad (-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}). \qquad (1.3)$$

Основні властивості функції $y = \arcsin x$:

а) вона визначена на відрізку $1 \le x \le 1$;

б) значення функції змінюються від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тобто $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ і є неперервною та обмеженою;

в) функція є непарною: arcsin(– x) = – arcsin x;

г) функція обертається в нуль при x = 0, тобто arcsin 0 = 0;

д) функція набуває додатних значень (arcsin x > 0) при $0 < x \le 1$, і від'ємних значень (arcsin x < 0) – при $-1 \le x \le 0$;

е) функція є строго зростаючою, тобто з нерівностей $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$ випливає, що $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$;

ж) екстремумів функція не має, оскільки вона строго монотонна;

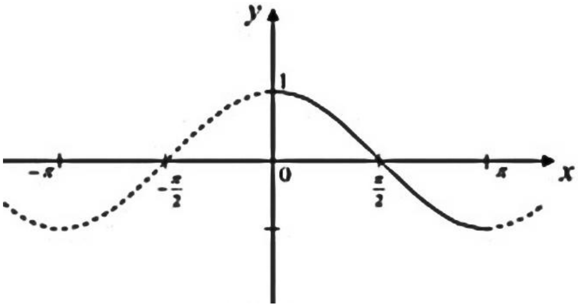
з) найбільше значення M = $\frac{\pi}{2}$ функція приймає при x = 1, найменше значення $m = -\frac{\pi}{2}$ – при x = – 1;

к) на проміжку (–1; 0) графік функції опуклий, а на проміжку (0; 1) – вгнутий [5], так як

$$\arcsin\frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_1}{2}, \text{ якщо } -1 < x_1 < x_2 < 0,$$

$$\arcsin\frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_1}{2}, \text{ якщо } 0 < x_1 < x_2 < 1.$$

Розглянемо функцію $y = cosx$. Її графік зображено на рисунку 1.7.



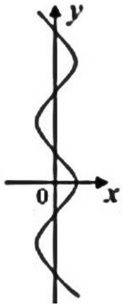


Рис. 1.7 *Рис.* 1.8

Якщо до цієї функції на всій області визначення ($D(\cos)=(-\infty;+\infty)$) визначити обернену функцію, то остання буде багатозначною. Цю багатозначну функцію позначають y = arccos x та її графік зображений на рис. 1.9.

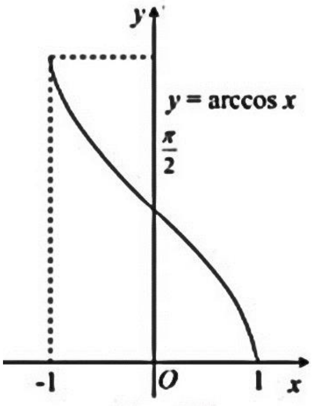


Рис. 1.9

Обмежимо область визначення функції y = cos x проміжком $[0; \pi]$, на якому функція монотонно спадає (на рис. 1.7 графік функції y = cos x на проміжку $[0, \pi]$ виділено суцільною лінією). На цьому проміжку існує обернена функція, яку називають *арккосинус* і позначають arccos x, графік її зображений на рисунку 1.9.

Дамо означення та опишемо властивості функції у = arccos x. arccos a – це таке число (кут, дуга) x, що:

1. cos $x = a$;
2. $x \in [0; \pi]$.

Оскільки arccos a однозначно визначений для будь-якого $a \in [-1; 1]$, можна говорити про функцію y = arccos x, область визначення якої відрізок $[-1; 1]$. Тобто

$$y = \arccos x,\ \text{якщо}\ \cos y = x\ \text{і}\ 0 \le y \le \pi. \qquad (1.4)$$

З означення випливає, що:

$$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \le x \le 1), \qquad (1.5)$$

$$\arccos(\cos y) = y \quad (0 \le y \le \pi). \qquad (1.6)$$

Основні властивості функції $y = \arccos x$:

а) вона визначена на відрізку $-1 < x < 1$;

б) значення функції змінюються від 0 до π, тобто $0 \le \arccos x \le \pi$, і є неперервною та обмеженою [6];

в) функція задовольняє умові $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ (тобто вона не є парною або непарною);

г) функція обертається на нуль при $x = 1$, тобто $\arccos 1 = 0$;

д) функція додатна ($\arccos x > 0$) при $-1 \le x < 1$ (від’ємних значень не має);

е) функція є строго спадною, тобто з нерівностей $-1 \le x_1 \le x_2 < 1$ випливає, що $\arccos x_1 > \arccos x_2$;

ж) найбільше значення $M = \pi$ функція набуває при $x = -1$, а найменше значення $m = 0$ – при $x = 1$;

з) на проміжку (– 1; 0) графік функції вгнутий, а на проміжку (0;1) – опуклий, так як

$$\arccos\frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2},\ \text{якщо}\ -1 < x < 0\ ,$$

$$\arccos\frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2},\ \text{якщо}\ 0 < x < 1\ .$$

Розглянемо функцію $y = \text{tg}\ x$. Її графік зображено на рисунку 1.10.

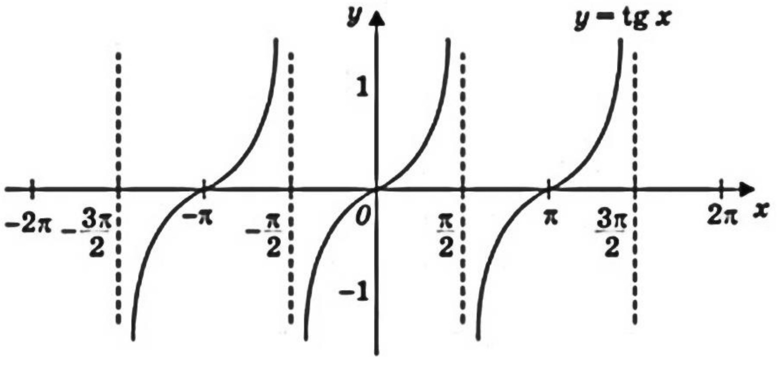
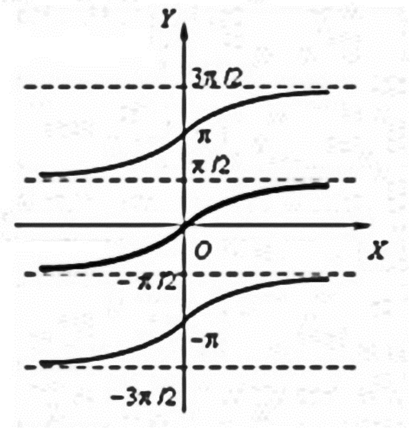


Рис. 1.10

На всій області визначення функції y = tg x (D(tg) = $(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n \in Z$)) ця функція не монотонна (вона кусково монотонна). Якщо до цієї функції на всій області визначення визначити оберенену, то остання буде багатозначною. Цю багатозначну функцію позначають y = arctg x. Графік цієї функції зображено на рисунку 1.11.



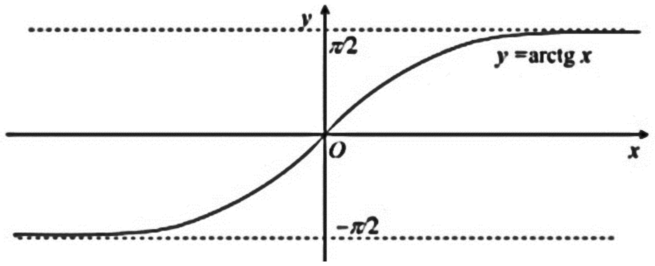


Рис. 1.11 *Рис*. 1.12

Виділимо проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ на якому функція y = tg x монотонно зростає [7]. На цьому проміжку для функції y = tg x існує обернена функція, яку називають *арккотангенс* і позначають y = arcctg x. Її графік зображений на рисунку 1.12.

Дамо означення та опишемо властивості функції y = arctg x. arctg a – це таке число (кут, дуга) x, що:

1. tg $x = a$;

2. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки arctg a однозначно визначений для будь-якого a ∈ R, можна говорити про функцію y = arctg x, областю визначення якої є вся числова пряма. Тобто

$$y = \text{arctg}\, x, \text{ якщо } \text{tg}\, y = x \text{ і } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \qquad (1.7)$$

Відповідно до означення

$$\text{tg}\,(\text{arctg}\, x) = x \ \ (-\infty < x < +\infty), \qquad (1.8)$$

$$\text{arctg}\,(\text{tg}\, y) = y \ \ (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}). \qquad (1.9)$$

Основні властивості функції y = arctg x:

а) вона визначена при всіх дійсних значеннях x, тобто $-\infty < \mathrm{x} < +\infty$;

б) значення функції змінюються від –$-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тобто $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \mathrm{x} < \frac{\pi}{2}$, і є неперервною та обмеженою;

в) функція є непарною: arctg (– x) = – arctg x;

г) функція перетворюється на нуль при x = 0, тобто arctg 0 = 0;

д) функція набуває додатних значень (arctg x > 0) при $0 < x < +\infty$ і від'ємних (arctg x < 0) при $-\infty < x < 0$;

е) функція є строго зростаючою, тобто з нерівності $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$ випливає нерівність arctg $\mathrm{x}_1 < \operatorname{arctg} \mathrm{x}_2$;

ж) найбільшого та найменшого значень функція не має [9];

з) на проміжку $-\infty < x < 0$ графік функції вгнутий, а на проміжку $0 < x < +\infty$ – опуклий, так як як

$$\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2}{2} < \frac{\operatorname{arc}tg\,\mathrm{x}_1 + \operatorname{arctg}\mathrm{x}_2}{2}, \text{ якщо } -\infty < x < 0,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2}{2} > \frac{\operatorname{arc}tg\,\mathrm{x}_1 + \operatorname{arctg}\mathrm{x}_2}{2}, \text{ якщо } 0 < x < +\infty.$$

Розглянемо функцію y = ctg x. Її графік зображено на рисунку 1.13.

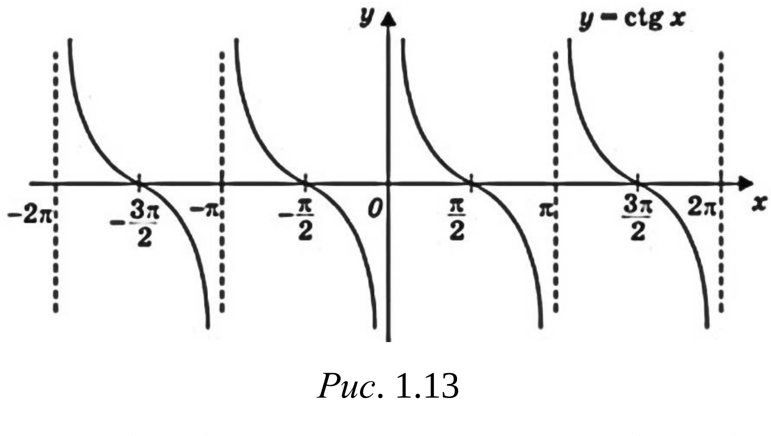


Рис. 1.13

На всій області визначення функції ctg$x$ ($D(ctg)$ = (πn; $\pi(n$+1), де $n \in$ Z)) не монотонна і якщо для неї визначити обернену функцію, вона знову таки буде багатозначна. Її позначають y = arcctg x. Графік цієї функції зображено на рисунку 1.15.

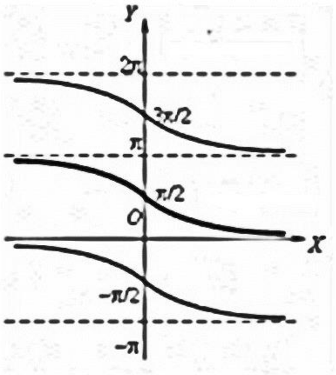


Рис. 1.14

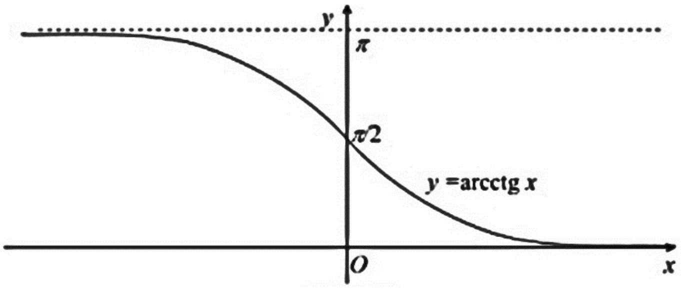


Рис. 1.15

Виділимо проміжок $(0; \pi)$, на якому функція y = ctg x монотонно спадає. Для неї на цьому проміжку існує обернена функція, яку називають *арккотангенс* і позначають y = arcctg x. Її графік зображено на рисунку 1.15.

Дамо означення та опишемо властивості функції y = arcctg x. arcctg$a$ – це таке число (кут, дуга) x, що:

1. ctg $x = a$;

2. $x \in (0; \pi)$.

Оскільки arcctg a однозначно визначений для будь-якого $a \in R$, можна говорити про функцію y = arcctg x, областю визначення якої є вся числова пряма.

Тобто

$$y = \text{arcctg}\, x, \text{ якщо } \text{ctg}\, y = x \text{ і } 0 < y < \pi. \qquad (1.10)$$

Згідно з означенням

$$\text{ctg}\,(\text{arcctg}\, x) = x, \qquad (1.11)$$

$$\text{arcctg}\,(\text{ctg}\, y) = y. \qquad (1.12)$$

Основні властивості функції y = arcctg x:

а) вона визначена при всіх дійсних значеннях x , тобто $-\infty < \text{x} < +\infty$;

б) значення функції змінюються від 0 до π, тобто $0 <$ arcctg $x < \pi$, і є неперервною і обмеженою;

в) для функції arcctg x має місце тотожність arcctg (– x) = π −

$\operatorname{arcctg} x,$ тобто властивості парності або непарності функція не має;

г) нулів функція не має [8];

д) при всіх значеннях x $(-\infty < x < +\infty)$ функція приймає додатні значення ($\operatorname{arcctg} x > 0$);

є) функція є строго спадною, тобто з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$;

ж) найбільшого і найменшого значень функція не має;

з) на проміжку (-∞;0) графік функції – опуклий, а на проміжку (0;+∞) – вгнутий, так як

$$\operatorname{arcctg} \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\operatorname{arcc}tg\, x_1 + \operatorname{arcctg} x_2}{2}, \text{ якщо } -\infty < x < 0,$$

$$\operatorname{arcctg} \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\operatorname{arcc}tg\, x_1 + \operatorname{arcctg} x_2}{2}, \text{ якщо } 0 < x < +\infty.$$

Аналогічним чином вводяться функції арксеканс ($y = \operatorname{arcsec} x$) і арккосеканс ($y = \operatorname{arccosec} x$). Але ці дві обернені тригонометричні функції вживаються мало, тому ми не будемо на них зупинятися.

Обернені тригонометричні функції називають ще *круговими функціями* або *аркфункціями* (остання назва від латинської arc - дуга).

Підкреслимо, що обернені тригонометричні функції однозначні, неперервні та їх властивості випливають з властивостей тригонометричних функцій (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Функція	Область визначення	Множина значень	Ділянка монотонності
$\arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$	зростає
$\arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$[0;\pi]$	спадає
$\operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$	зростає
$\operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$(0;\pi)$	спадає

Значення обернених тригонометричних функцій для деяких значень аргумента приведені в таблицях 1.2 і 1.3.

Таблиця 1.2

Аргумент	Функція	
	$\arcsin x$	$\arccos x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

Таблиця 1.3

Аргумент	Функція	
	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	π
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$	0

0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0

Вперше спеціальні символи для обернених тригонометричних функцій використав Д. Бернуллі [17], сучасні позначення були введені у 1772 р. К. Шерфером і Ж. Лагранжем [6].

РОЗДІЛ 2

ТОТОЖНОСТІ, ПОВ’ЯЗАНІ З ОБЕРНЕНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

2.1. Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

Розглянемо формули перетворення однієї оберненої тригонометричної функції в іншу. Доведемо, що

$$\arcsin x \ = \ \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad (2.1)$$

якщо $0 < x < 1$.

Доведення.

Позначимо $\arcsin x = a$; тоді $\sin a = x$ і, так як $0 < x < 1$, то $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Знаючи $\sin a = x$, знайдемо $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-x^2}$, тобто $cos\ a = \sqrt{1-x^2}$ при $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Застосовуючи формулу $(\arccos(\cos y) = y(0 \le y \le \pi)$ [7]), отримаємо

$\arccos(\cos a) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ або $a = \arccos\sqrt{1-x^2}$, тобто

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} \quad (0 < x < 1). \qquad (2.2)$$

Знайдемо $\operatorname{tg} a = \frac{sin\ a}{cos\ a} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ або $\operatorname{tg} a = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $0 < a < \frac{\pi}{2}$. За формулою $(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ [10]) знаходимо:

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ або $a = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, тобто

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1). \qquad (2.3)$$

Нарешті, знайдемо $\operatorname{ctg} a = \frac{cos\ a}{sin\ a} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ або $\operatorname{ctg} a = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Тоді, застосовуючи формулу $(\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ [5]), знаходимо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} a) = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ або $a = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, тобто

$$\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (0 < x < 1)\,. \qquad (2.4)$$

При перетвореннях обернених тригонометричних функцій формули (2.2), (2.3), (2.4) або тотожності (2.1) зручно отримувати з прямокутного трикутника *ABC,* катет *BC* якого дорівнює x, гіпотенуза *AB* дорівнює 1 $(0 < x < 1)$ і гострий кут ∠ABC дорівнює a (рис 2.1).

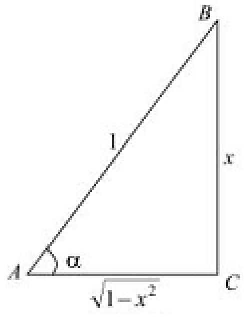


Рис. 2.1

Тоді другий катет трикутника (за теоремою Піфагора) буде дорівнювати $\sqrt{1-x^2}$. З цього трикутника знаходимо $\sin a = x$, $\cos a = \sqrt{1-x^2}$, $\operatorname{tg} a = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\operatorname{ctg} a = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Так як $0 < a < \frac{\pi}{2}$, то

$$a = \arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Аналогічно тотожності (2.1) доводяться тотожності:

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad (2.5)$$

якщо $0 < x < 1$.

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, \qquad (2.6)$$

якщо $0 < x < +\infty$.

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \qquad (2.7)$$

якщо $0 < x < +\infty$.

Для обернених тригонометричних функцій виконуються наступні тотожності:

I. $sin(arcsin\,y) = y, \quad -1 \le y \le 1;$

$cos(arccos\,y) = y, \quad -1 \le y \le 1;$

$tg(arctg\,y) = y, \quad -\infty < y < +\infty;$

$ctg(arcctg\,y) = y, \quad -\infty < y < +\infty.$

II. $arcsin(sin\,x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2};$

$arccos(cos\,x) = x, \quad 0 \le x \le \pi;$

$arctg(tg\,x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$

$arcctg(ctg\,x) = x, \quad 0 < x < \pi.$

III. $arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| < 1;$

$arctg\,x + arcctg\,x = \frac{\pi}{2}, \quad x - \text{будь} - \text{яке число}.$

IV. $arcsin(-a) = -arcsin\,a;$

$arccos(-a) = \pi - arccos\,a;$

$arctg(-a) = -arctg\,a;$

$arcctg(-a) = \pi - arcctg\,a.$

V. $sin(arccos\,x) = \sqrt{1 - x^2};$

$cos(arcsin\,x) = \sqrt{1 - x^2};$

$sin(arctg\,x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$

$tg(arcsin\,x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

$$\arcsin x + \arcsin y =$$
$$= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \text{якщо } xy \le 0 \text{ або } x^2 + y^2 \le 1; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \text{якщо } x > 0, y > 0\ i\ x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \text{якщо } x < 0, y < 0\ i\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}, \tag{2.8}$$

$$\arcsin x - \arcsin y =$$
$$= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \text{якщо } xy \ge 0 \text{ або } x^2 + y^2 \le 1; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \text{якщо } x > 0, y < 0\ i\ x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \text{якщо } x < 0, y > 0\ i\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\arccos x + \arccos y =$$

$$= \begin{cases} \arccos(xy\ -\ \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})), \text{якщо } x+y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(xy\ -\ \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})), \text{якщо } x+y < 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$\arccos x - \arccos y =$$

$$= \begin{cases} -\arccos(xy\ +\ \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})), \text{якщо } x \geq y; \\ \arccos(xy +\ \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})), \text{якщо } x < y. \end{cases} \qquad (2.11)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \text{якщо } xy \leq 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \text{якщо } x > 0\ i\ xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \text{якщо } x < 0\ i\ xy > 1. \end{cases} \qquad (2.12)$$

$$\operatorname{arctg} x\ -\ \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x\ -\ y}{1+xy}, \text{якщо } xy > -1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{x\ -\ y}{1+xy}, \text{якщо } x > 0\ i\ xy < -1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x\ -\ y}{1+xy}, \text{якщо } x < 0\ i\ xy < -1. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Формули подвоєння обернених тригонометричних функцій і ділення їх на два

Нехай треба перетворити $2\arccos x\ (-1 \leq x \leq 1)$. Позначимо $a = 2\arccos x$ і знайдемо

$$\cos a = \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1,$$

тобто

$$\cos a = 2x^2 - 1,$$

звідки

$$\arccos(\cos a) = \arccos(2x^2 - 1). \qquad (****)$$

Якщо $0 \leq x \leq 1$, то $0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$ і $0 \leq a \leq \pi$; тоді за формулою

$(\arccos(\cos y) = y\ (0 \leq y \leq \pi)[4])$

$$\arccos(\cos a) = a$$

тобто тотожність (****) приймає вигляд $a =\ \arccos(2x^2 - 1)$, або

$$2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Якщо $-1 \leq x < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \arccos x \leq \pi$ і $\pi < a \leq 2\pi$ або $0 < a -$

$\pi < \pi$; так як $\cos a = -\cos(a - \pi)$, то отримуємо

$$\arccos(\cos a) = \arccos\big(-\cos(a - \pi)\big) = \pi - \arccos\big(\cos(a - \pi)\big) =$$

$$= \pi - a + \pi = 2\pi - a.$$

Тоді тотожність (****) приймає вигляд

$$2\pi - a = \arccos(2x^2 - 1),$$

звідки $a = 2\pi - \arccos(2x^2 - 1)$, або

$$2\arccos x = 2\pi - \arccos(2x^2 - 1) \quad (-1 \le x < 0).$$

Таким чином,

$$2\arccos x = \begin{cases} \arccos\,(2x^2 - 1) \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 2\pi - \arccos(2x^2 - 1) \text{при } -1 \le x < 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Зауваження 2.1. Отримати цю формулу можна й іншим способом. З умови, що $\cos a = 2x^2 - 1$, отримуємо

$$a = \pm\arccos(2x^2 - 1) + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2 ..$$

Аналогічно доводяться співвідношення:

$$2\arcsin x =$$

$$= \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2}) \text{ якщо } |x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \pi - \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2}) \text{ якщо } \frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1; \\ -\pi - \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2}) \text{ якщо } -1 \le x < -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \qquad (2.15)$$

$$2\,\mathrm{arctg}\, x = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\frac{2x}{1 - x^2} \text{ якщо } |x| < 1; \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{2x}{1 - x^2} \text{ якщо } x > 1; \\ -\pi + \mathrm{arctg}\frac{2x}{1 - x^2} \text{ якщо } x < -1. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Зауваження 2.2. Формули (2.14), (2.15) і (2.16) отримуються з формул (2.8), (2.10) і (2.12), якщо в них вложити $y = x$.

Формули ділення обернених тригонометричних функцій на два:

$$\tfrac{1}{2}\arcsin x = \qquad (2.17)$$

$$= \begin{cases} \arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ -\arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{якщо } -1 \le x < 0. \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\arccos x = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \ \text{якщо } -1 \le x \le 1. \qquad (2.18)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}} & \text{якщо } x \ne 0. \\ 0, \ \text{якщо } x = 0. \end{cases} \qquad (2.19)$$

При розв’язанні будь-яких задач, пов’язаних з аркфункціями, потрібно використовувати їх повні означення:

$$y = \arcsin x \iff |x| \le 1, |y| \le \frac{\pi}{2} \ i \sin y = x;$$

$$y = \arccos x \iff |x| \le 1, 0 \le y \le \pi \ i \cos y = x;$$

$$y = \operatorname{arctg} x \iff x - \text{будь} - \text{яке}, |y| < \frac{\pi}{2} \ i \operatorname{tg} y = x;$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \iff x - \text{будь} - \text{яке}, 0 < y < \pi \ i \operatorname{ctg} y = x;$$

З цих означень і загального поняття оберненої функції з очевидністю випливають наступні вісім тотожностей [24]:

$$\sin(\arcsin x) = x, |x| \le 1;$$

$$\arcsin(\sin x) = x, |x| \le \frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\arccos x) = x, |x| \le 1;$$

$$\arccos(\cos x) = x, 0 \le x \le \pi;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in R;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in R;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, 0 < x < \pi.$$

Перелічені тотожності відкривають перелік формул взаємодії аркфункцій і тригонометричних функцій. Продовжуючи цей перелік, розв’яжемо тепер наступні задачі.

Довести тотожності (задачі 2.1-2.3).

Задача 2.1. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, |x| \leq 1.$

Доведення.

Стандартним методом розв’язування задач з аркфункціями є перехід від аркусів до тригонометричних функцій. В нашому конкретному випадку цей метод реалізується наступним чином. Нехай $\arccos x = y$. Тоді $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$ $і$ $x = \cos y$. Тепер зобразимо $\sin y$ через x:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \ \Rightarrow\ |\sin y| \ = \sqrt{1-\cos^2 y} \ \ = \sqrt{1-\mathrm{x}^2}.$$

Оскільки $0 \leq y \leq \pi$, маємо $\sin y \geq 0$, тобто $|\sin y| = \sin y$ і, отже, $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. Згадавши, що $y = \arccos y$, отримуємо

$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1-x^2}.$$

Задача 3.2. $\sin(\operatorname{arctg} x) \ = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Доведення.

Нехай $\operatorname{arctg} x = y$. Тоді $|y| < \frac{\pi}{2}$ $і$ $x = \operatorname{tg} y$. Знову виражаємо $\sin y$ через x:

$$x = \frac{\sin y}{\cos y} \ \Leftrightarrow\ \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = x \ \Leftrightarrow\ \sin y = x\sqrt{1-\sin^2 y} \ \Leftrightarrow\ x\sin y \ \geq 0$$

і

$$\sin^2 x = x^2(1-\sin^2 y) \ \Leftrightarrow\ x \cdot \sin y \ \geq 0$$

і

$$\sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow \sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Задача 2.3. $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

Доведення.

Нехай $\operatorname{arcctg} x = y$. Тоді $0 < x < \pi$ і $x = \operatorname{ctg} y$. Виразимо $\sin y$ через x:

$$x = \frac{\cos y}{\sin y} \Leftrightarrow |x| = \frac{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin y} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1-\sin^2 y}{\sin^2 y} \Leftrightarrow \sin^2 y = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$|\sin y| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

і оскільки $\sin y > 0$ в силу $0 < x < \pi$, маємо $|\sin y| = \sin y$, звідки $\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, і $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розглянемо тепер приклади, в яких треба спростити даний вираз. Це, в принципі, задачі на доведення тотожностей, але відрізняються вони тим, що в них вказана лише ліва частина тотожності. Праву частину її, тобто саму тотожність, і слід знайти. Отже, в задачах 2.4 і 2.5 треба спростити даний вираз B і вказати обмеження для x, y, якщо вони є, при яких справедливе отримане твердження.

Задача 2.4. $B = \sin(\arcsin x + \arcsin y)$.

Розв'язання.

Застосовуючи формулу синуса суми [26] і зазначені вище тотожності при $|x| \le 1, |y| \le 1$, отримуємо:

$$B = \big(\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y)\big) + \big(\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y)\big) =$$

$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Відповідь: $B = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ $|x| \le 1, |y| \le 1$.

Задача 2.5. $B = \sin(\frac{1}{2}\arcsin x)$.

Розв'язання.

Не складно зрозуміти, що якщо нам вдасться знайти таке y, що $\arcsin x = 2\arcsin y\ (*)$, то тоді $B = \sin(\frac{1}{2} \cdot 2\arcsin y) = y$. Тому розглянемо рівність (*) як рівняння відносно y, сприймаючи x в якості константи або даної величини. Тоді $|x| \le 1$ і, оскільки $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$, маємо $|2\arcsin y| \le \frac{\pi}{2}$, звідки $|\arcsin y| \le \frac{\pi}{4}$, що рівносильно нерівності $y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, в рівності (*) візьмемо синус від лівої і правої частин:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(2\arcsin y), x =$$

$$= 2(\sin\arcsin y)(\cos\arcsin y) \Leftrightarrow x = 2y\sqrt{1-y^2}.$$

З останньої рівності випливає, що x і y мають один й той самий знак і $x^2 = 4y^2(1-y^2)$. Розв’язуючи це біквадратне відносно y рівняння [14], отримаємо $(y^2)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{2}$ і, так як $y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $y^2 \le \frac{1}{2}$, можна сказати, що $y^2 = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}$. Звідси $y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$, і, оскільки x, y одного знаку, рівність (*) приймає вигляд

$$\arcsin x = \begin{cases} 2\arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ -2\arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{якщо} - 1 \le x \le 0. \end{cases}$$

$$\textit{Відповідь}: B = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, \text{якщо } 0 \le x \le 1; \\ \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, \text{якщо } -1 \le x \le 0; \end{cases}$$

Для зручності використання всіх доведених вище тотожностей, можна записати їх в таблицю (табл. 2.1), з якої, наприклад, тотожність із задачі 2.1 одержується наступним чином: в першому стовпці таблиці вибираємо $\sin a$, а він стоїть в першому рядку; рухаємось по цьому рядку до клітинки, що розташована в стовпці, в самій верхній клітинці якого стоїть значення a, тобто arccos x; в цій клітинці права частина тотожності із задачі 2.1 і умова, за якої вона виконується: $\sqrt{1-x^2}, |x| \le 1$.

Таблиця 2.1

a *f(a)*	arcsin *x*	arccos *x*	arctg *x*	arcctg *x*
sin *a*	$x, \lvert x\rvert \le 1$	$\sqrt{1-x^2}, \lvert x\rvert \le 1$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos *a*	$\sqrt{1-x^2}, \lvert x\rvert \le 1$	$x, \lvert x\rvert \le 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg *a*	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert \le 1$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\lvert x\rvert \le 1, x \ne 0$	x	$\frac{1}{x}, x \ne 0$

ctg a	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \lvert x\rvert$ ≤ 1 $x \neq 0$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x\rvert$ ≤ 1	$\frac{1}{x}, x \neq 0$	x

2.2. Обчислення значень виразів, що містять тригонометричні функції, і доведення числових рівностей

Зазвичай розглядають три типи задач, пов’язаних з числовими значеннями виразів, що містять аркуси [29]:

«Обчислити числове значення виразу *B*»;

«Чи вірно те, що (значення виразу *B* дорівнює *a*)?»;

«Значення виразу *B* подати у вигляді значення даної аркфункції».

Розглянемо приклади розв’язування задач усіх трьох типів.

Обчислити числове значення виразу *B* у задачах 2.6-2.11.

Задача 2.6. $B = \sin(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17})$.

Розв’язання.

Застосовуючи формулу синуса суми і відповідні тотожності з таблиці 2.1 отримуємо:

$$B = \left(\sin\arcsin\frac{3}{5}\right)\left(\cos\arcsin\frac{8}{17}\right) + \left(\cos\arcsin\frac{3}{5}\right)\left(\sin\arcsin\frac{8}{17}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{64}{289}} + \sqrt{1-\frac{9}{25}} \cdot \frac{8}{17} = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{17} + \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{17} = \frac{77}{85}.$$

Відповідь: $\frac{77}{85}$.

Задача 2.7. $B = \sin\,(2\arccos\frac{1}{4})$.

Розв’язання.

Аналогічно попередньому

$$B = 2\left(\sin\arccos\frac{1}{4}\right)\left(\cos\arccos\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{1-\frac{1}{16}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

Задача 2.8. $B = \arcsin\sin 2$.

Розв'язання.

Зрозуміло, ми можемо застосувати загальну формулу. Застосовуємо стандартний прийом переходу від аркфункцій до тригонометричних функцій:

$$\arcsin\sin 2 = a \Leftrightarrow \sin\arcsin\sin 2 = \sin a, |a| \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin 2 = \sin a, |a| \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = a_n = (-1)^n 2 + n\pi, |a| \le \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки $a_1 = -2 + \pi, 0 < 2 - \pi < \frac{\pi}{2}$ і значення арксинусу єдине при даному значенні аргументу, покладемо, що і $a = a_1$.

Відповідь: $-2 + \pi$.

Задача 2.9. $B = \arccos\cos 5$.

Розв'язання.

Поступаємо аналогічно до розв'язування попередньої задачі. Нехай $\arccos\cos 5 = a$. Взявши косинус від обох частин останньої рівності, отримуємо $\cos 5 = \cos a, 0 \le a \le \pi$. Звідси $a = a_k = 5 + 2\pi k$ або $a = \beta_i = -5 + 2\pi l$ при $0 \le a \le \pi$. Очевидно, $a_k < 0$ при $k \le -1$ та $k \ge 0$. Отже, серед чисел a_k немає шуканого значення B. Далі бачимо, що $\beta_i = -5 + 2\pi$ і $0 < -5 + 2\pi < \pi,$ тобто $a = \beta_i$.

Відповідь: $-5 + 2\pi$.

Задача 2.10. $B = \arcsin(\cos(2\,\mathrm{arcctg}(\sqrt{2} - 1)))$.

Розв'язання.

Що стосується виразів, подібних B, тобто виразів, у яких потрібно обчислити значення аркфункцій від виразів з аркусами, нерідко розв'язання можна побудувати, вміло надавши відповідну роль «внутрішньому» аркусу. Нехай $\mathrm{arcctg}(\sqrt{2} - 1) = a$. Тоді $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ і ми можемо скористатися відповідними тотожностями з таблиці 2.1. Отже,

$$B = \arcsin(\cos 2a) = \arcsin(\cos^2 a - \sin^2 a) =$$

$$= \arcsin\left(\left(\cos \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)\right)^2 - \left(\sin \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)\right)^2\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1+(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{1+(\sqrt{2}-1)^2}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}$.

Задача 2.11. Чи вірно, що $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$?

Розв'язання.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, рівність, що перевіряється, справедлива тоді і тільки тоді, коли вірна рівність $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}$. Очевидно, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$. Обчислимо тангенс лівої частини рівності, що перевіряється:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{tg}\operatorname{arctg} 3}{1 - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} 2\,\operatorname{tg}\operatorname{arctg} 3} = \frac{2+3}{1-6} = -1.$$

Таким чином, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \frac{3\pi}{4}$ (*). Якщо, за означенням арктангенса,

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi, \operatorname{arctg} 2 > \frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 3 > \frac{\pi}{4},$$

отримуємо $\frac{\pi}{2} < a\mathrm{rctg}\, 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi$.

Помітивши, що $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$ і на проміжку $(-\frac{\pi}{2}; \pi)$ функція $y = \operatorname{tg} x$ взаємно однозначна [17], одержуємо, що з рівності (*) випливає рівність $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: так.

Задача 2.12. Чи вірно, що $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1))) = \frac{\pi}{6}$?

Розв'язання.

Вираз, що стоїть ліворуч, схожий на вираз *B* завданні 2.10. Тому спробуємо обчислити значення лівої частини та порівняти його з $\frac{\pi}{6}$. Це обчислення можна здійснити за схемою розв'язання зазначеної задачі. Ми, проте, для набуття досвіду підемо дещо іншим шляхом. Нехай $a = \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$. Взявши тангенс від обох частин останньої рівності, отримаємо $\operatorname{tg} a = \sqrt{2} - 1, |a| < \frac{\pi}{2}$, звідки, через додатний косинус на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ [3], отримуємо

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}, \text{тобто } \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \sqrt{2} - 1$$

Звідси піднесемо до квадрату обидві частини цього рівняння та отримаємо стосовно $\sin^2 a$ $\sin^2 a = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ та $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Отже,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

і $\arccos(\cos(2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1))) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: ні.

Задача 2.13. Чи вірно, що $\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$?

Розв'язання.

Тут, як і в попередніх прикладах, можна було визначити значення лівої частини, користуючись відомою формулою [9], але ми продемонструємо інший хід міркувань. Припустимо, що відповідь на поставлене питання позитивна. Тоді $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$. Звідси

$$\left(\sin \arcsin \frac{1}{2}\right)\left(\cos \arcsin \frac{1}{3}\right) - \left(\cos \arcsin \frac{1}{2}\right)\left(\sin \arcsin \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} * \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$2 = 12,$$

чого не може бути. Отже, наше твердження є неправильним.

Відповідь: ні.

Задача 2.14. Значення виразу $\arcsin(-\frac{4}{5})$ представити у вигляді значення арккосинусу.

Розв'язання.

Можна скористатися відомими формулами, але, проте, наведемо незалежне розв'язання, що використовує лише означення. Нехай $\arcsin(-\frac{4}{5}) = a$. Тоді, взявши синус від обох частин останньої рівності, отримаємо $\sin a = -\frac{4}{5}, |a| \leq \frac{\pi}{2}$. Тепер зрозуміло, що для розв'язання задачі достатньо знайти $\cos a$, вважаючи з $|a| \leq \frac{\pi}{2}$, що $\cos a > 0$. Тому

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a \Leftrightarrow \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos a = \frac{3}{5}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно a, отримаємо $a = \pm\arccos\frac{3}{5} + 2k\pi, k \in Z$. Серед отриманих можливих значень лише два, а саме $\pm\arccos\frac{3}{5}$, належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Залишилося відмітити, що $\arcsin(-\frac{4}{5}) < 0$ і тому $a = -\arccos\frac{3}{5}$.

Відповідь: $-\arccos\frac{3}{5}$.

Задача 2.15. Обчисліть $\mathrm{tg}(5\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$

Розв'язання.

Оскільки $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, завдання зводиться до підрахунку $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}$. Це число дорівнює $\mathrm{tg}(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -1$.

Відповідь: -1.

Задача 2.16. Відомо, що $\mathrm{ctg}\, a = 1$. Порівняйте

$$\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin a - \frac{1}{4}}\right) \text{ та } \frac{19\pi}{24}.$$

Розв'язання.

Якщо $\mathrm{ctg}\, a = 1$, то $a = \frac{\pi}{4} + \pi n$ для деякого цілого числа n. Тоді $\sin a = (-1)^n \sin\frac{\pi}{4} = (-1)^n * \frac{\sqrt{2}}{2}$ Відповідно перше число дорівнює

$\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\,(-1)^n * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}}\right)$. Якщо n – парне, то під знаком радикалу стоїть від'ємне число $-\frac{5}{4}$. Тому цей випадок неможливий. Якщо ж n – непарне, то під знаком радикалу стоїть додатне число $\frac{3}{4}$. У цьому випадку перше число дорівнює

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{24} > \frac{19\pi}{24}.$$

Відповідь: $\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin a - \frac{1}{4}}\right) > \frac{19\pi}{24}$.

Задача 2.17. Знайдіть усі натуральні n, що задовольняють умові

$$\frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)}{2} \le \frac{\pi}{n}.$$

Розв'язання.

Оскільки числа 3 і $2 + \frac{5}{\sqrt{3}}$, очевидно, більші, ніж $\sqrt{3}$, а $y = \operatorname{arctg} x$ — монотонно зростаюча функція [26], можна гарантувати справедливість нерівностей

$$\frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg}3 < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{3} < arctg\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Тоді й середнє арифметичне цих чисел, тобто число

$$A = \frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)}{2},$$

лежить в інтервалі $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки $A > 0$, вихідну рівність можна переписати як: $n \ge \frac{\pi}{A}$.

З наведеної оцінки для A випливає, що $2 < \frac{\pi}{A} < 3$. Тому $n = 1$ або 2.

Відповідь: $n = 1; 2$.

Задача 2.18. Порівняйте числа $\arcsin\frac{5}{7}$ та $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Розв'язання.

Дріб $\frac{5}{7}$ приблизно дорівнює 0.714. Нам відомі значення $\arcsin x$ для наступних «красивих» значень x: $x = \frac{1}{2} = 0{,}5, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}866$. Тому

$$\arcsin\frac{5}{7} \approx \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

З іншого боку, $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0{,}756$. Як показують ці наближення, мабуть,

$$\arcsin\frac{5}{7} > \frac{2}{\sqrt{7}}\,, \qquad (*)$$

Проте за сучасними стандартами математичної строгості неможливо вважати проведені міркування доказом нерівності (*). Справа в тому, що знак ≈ не має точного сенсу. Проте проведені міркування дозволяють висловити розумну гіпотезу

$$\arcsin\frac{5}{7} > \frac{\pi}{4} > \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Доведемо цю подвійну нерівність.

З огляду на визначення числа $\arcsin a$, нерівність $\arcsin\frac{5}{7} > \frac{\pi}{4}$ рівносильна нерівності

$$\sin\frac{\pi}{4} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 49 < 50$$

і тому істинна.

Нерівність $\frac{\pi}{4} > \frac{2}{\sqrt{7}}$ рівносильна нерівності $\pi > \frac{8\sqrt{7}}{7}$, яка невірна, т. я. $\pi > 3{,}1$, а $\frac{8\sqrt{7}}{7} < 3{,}1$.

Останній етап доведення спирається на «відомий» факт: $\pi = 3{,}14\ldots$ [5]. Строге доведення цього результату – досить важке завдання. Тому було б цікаво використати таку оцінку числа π, яку ми могли б суворо обґрунтувати. Для цього розглянемо коло з радіусом $R = 1$ і вписаний у нього правильний 12- кутник. Його сторона дорівнює

$$a = 2\sin 15° = \sqrt{\sin 15°} = 1\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Зрозуміло, що довжина кола, тобто 2π, більша за периметр P_{12} цього 12-кутника: $2\pi > 12 * \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, так що $\pi > (\sqrt{6}-\sqrt{2})$. Число $3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ приблизно дорівнює 3,106, так що цієї оцінки свідомо має вистачити для доведення нерівності $\pi > \frac{8\sqrt{7}}{7}$. Дійсно, ця нерівність випливає з нерівності

$$3(\sqrt{6}-\sqrt{2}) > \frac{8\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow 36(2-\sqrt{3}) > \frac{64}{7} \Leftrightarrow \sqrt{3} < \frac{110}{63} \Leftrightarrow$$

$$11907 < 12100.$$

Відповідь: перше число більше.

РОЗДІЛ 3

ЗАСТОСУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

3.1. Розв'язування рівнянь з аркфункціями

Загальна ідея розв'язування рівнянь з аркфункціями полягає у зведенні їх до найпростіших рівнянь. Найпростіші ж рівняння розв'язуються безпосередньо з означення функцій, які входять до нього. Розглянемо приклади розв'язування різних рівнянь.

Задача 3.1. Розв'язати рівняння $\arccos(2x+1)=\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання.

Оскільки $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$, то за визначенням арккосинусу числа дане рівняння рівносильне рівнянню $2x+1=\cos\frac{3\pi}{4}$, звідки $2x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Задача 3.2. Розв'язати рівняння $2\arcsin^2 x-\arcsin x=6$.

Розв'язання.

Зробивши очевидну заміну $t=\arcsin x$, розв'язуємо отримане квадратне відносно t рівняння і, таким чином, зводимо вихідне рівняння до найпростіших:

$$2t^2-t-6=0, t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4};$$

$$\arcsin x=2, \arcsin x=2, \arcsin x=-\frac{3}{2}.$$

Оскільки за означенням $|\arcsin x|\leq\frac{\pi}{2}$ та $2>\frac{\pi}{2}$, а, $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3}{2}<0$, покладаємо, що перше з двох найпростіших рівнянь коренів не має, а єдиний корінь другого становить відповідь.

Відповідь: $x=\sin\left(-\frac{3}{2}\right)=-\sin\frac{3}{2}$.

Задача 3.3. Розв'язати рівняння

$$\arccos x - \arcsin x - \arccos\left(x\sqrt{3}\right) = 0.$$

Розв'язання.

Готуючись «косинусувати», перепишемо рівняння у вигляді

$$\arccos x - \arcsin x = \arccos\left(x\sqrt{3}\right)$$

та запишемо ОДЗ та обмеження на ліву частину через рівність її $\arccos\left(x\sqrt{3}\right)$: $\begin{cases} |x| \le 1, \\ 0 \le \arccos x - \arcsin x \le \pi \end{cases}$ (*).

Тепер за цих умов отримуємо

$$\cos(\arccos x - \arcsin x) = \cos\arccos\left(x\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow x\left(2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\frac{1}{2}.$$

Ці значення x задовольняють умову $|x| \le 1$. Оскільки, крім того,

$$\arccos 0 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, \arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ та } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi,$$

задовольняють усім обмеженням (*). В результаті отримаємо відповідь.

Відповідь: $x_1 = 0$; $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

Задача 3.4. Розв'язати рівняння $2\,\mathrm{arctg}(2x+1) - \arccos x = 0$.

Розв'язання.

Перепишемо рівняння як $\arccos x = 2\,\mathrm{arctg}(2x+1)$ і запишемо ОДЗ та обмеження на праву частину визначення арккосинусу: $\begin{cases} |x| \le 1, \\ 0 \le \mathrm{arctg}(2x+1) \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ За цих умов отримаємо:

$$\cos\arccos x = \cos 2\,\mathrm{arctg}(2x+1) \Leftrightarrow x = \cos^2 \mathrm{arctg}(2x+1) - \sin^1 \mathrm{arctg}(2x+1) \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(2x+1)^2}} - \frac{2x+1}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} \Leftrightarrow x = \frac{-2x^2-2x}{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Оскільки друге рівняння коренів немає і $x = 0$ задовольняє записаним вище умовам, отримаємо відповідь.

Відповідь: $x = 0$.

Задача 3.5. Розв'язати рівняння $\sin(5\operatorname{arctg} x) = 1$.

Розв’язання.

Розв’язуємо рівняння як найпростіше тригонометричне виду

$$\sin t = 1\colon\ 5\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z, \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in Z.$$

Тепер, перш ніж із цих рівнянь знайти x, взявши тангенс з обох частин рівності, згадаємо, що $|\operatorname{arctg} x| \le \frac{\pi}{2}$ [19]. Тому на цілий параметр k накладаємо обмеження, що забезпечують здійсненність зазначеної умови:

$$\left|\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{5} < \frac{2k\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k < 1.$$

Оскільки $k \in Z$, покладаємо, що $k \in \{-1,0\}$ і, взявши тангенс від обох частин рівності, при цих k рівність $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ отримаємо відповідь.

Відповідь: $x_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$, $x_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Задача 3.6. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(1 + \cos x) = 0.$$

Розв’язання.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}(1 + \cos x) = \frac{\pi}{4}$$

і, взявши тангенс від обох частин, застосуємо формулу тангенсу різниці:

$$\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{tg}\operatorname{arctg}(1 + \cos x)}{1 + (\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(2 + \cos x))(\operatorname{tg}\operatorname{arctg}(1 + \cos x))} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \cos x - 1 - \cos x}{1 + (2 + \cos x)(1 + \cos x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 + (2 + \cos x)(1 + \cos x) \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in Z.$$

Оскільки жодних обмежень на x немає, знайдені значення і становитимуть відповідь.

Відповідь: $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$.

Задача 3.7. Розв'язати рівняння

$$2(\arcsin x)(\arccos x) - 3\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

Розв'язання.

Це рівняння, маючи жахливий вигляд, розв'язується дуже просто. Знайдемо ОДЗ: $|x| \le 1, x > 0, \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1$. Інакше кажучи, ОДЗ задається системою $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ x \ge 1 \end{cases}$ тобто складається з єдиного значення $x = 1$. Підстановкою переконуємось, що це корінь.

Відповідь: $x = 1$.

Задача 3.8. Розв'язати рівняння $x^2 + 6x\,\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3} - \cos(2\arcsin x) = 0$.

Розв'язання.

Оскільки

$$\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{2}, \cos(2\arcsin x) = \cos^2\arcsin x - \sin^2\arcsin x =$$

$$= \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^2 = 1 - 2x^2 \text{ та } |x| \le 1,$$

наше рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 3x^2 - 6x\sqrt{2} - 1 = 0, \\ |x| \le 1. \end{cases}$ розв'язуючи її, отримуємо $x_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{7}{3}}, |x| \le 1$. Очевидно, $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{7}{3}} > 1$. Покажемо, що від'ємне число $\sqrt{2} - \sqrt{\frac{7}{3}}$ більше -1, звівши нерівність $\sqrt{2} - \sqrt{\frac{7}{3}} > -1$ рівносильними перетвореннями до очевидно правильної нерівності:

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{7}{3}} > -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 > \sqrt{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 3 > \frac{7}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} > -\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $x = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Задача 3.9. Розв'язати рівняння

$$\arccos\left(\frac{1}{2} + \cos\left(\pi * \frac{-x^2+2x+11}{x^2+4x+7}\right)\right) - \frac{2\pi}{3} = 0.$$

Розв’язання.

Визначення числа $\arccos a$ означає, що рівність $x = \arccos a$ рівносильна системі $\begin{cases} \cos x = a, \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Дозволяючи вихідне рівняння щодо $\arccos a$ та застосовуючи це перетворення, ми отримаємо, що вихідне рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \cos\left(\pi * \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7}\right), \\ 0 \le \frac{2\pi}{3} \le \pi. \end{cases}$$

Нерівність системи є вірною числовою нерівністю і тому її можна не враховувати.

Рівняння системи наводиться до виду (т. я. $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$):

$$\cos\left(\pi * \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7}\right) = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$\pi * \frac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 + 4x + 7} = (2n + 1)\pi, n \in Z,$$

$$\Updownarrow$$

$$(n + 1)x^2 + (4n + 1)x + (7n - 2) = 0, n \in Z.$$

Строго кажучи, на останньому етапі перетворення слід додати умову $x^2 + 4x + 7 \ne 0$. Однак дискримінант тричлена $x^2 + 4x + 7$ від’ємний, так що ця умова виконана при всіх значеннях x і тому її можна не вказувати. Рівняння

$$(n + 1)x^2 + (4n + 1)x + (7n - 2) = 0, n \in Z, \qquad (*)$$

насправді є нескінченною сукупністю рівнянь щодо однієї невідомої x. Нова змінна n, що з'явилася в задачі, відіграє роль своєрідного «номеру» рівняння з цієї сукупності.

На перший погляд, усі рівняння виду (*) є квадратними, але це не так. Річ у тім, що рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ – квадратне, якщо член другого ступеня справді присутній, тобто $a \ne 0$ [8]. У цьому разі це означає, що рівняння з «номером» $n = -1$ – лінійне: $-3x - 9 = 0$. Якщо «номер» рівняння (*) не дорівнює -1, то це рівняння дійсно є квадратним. Тому розіб'ємо нескінченну сукупність (*) на сукупність з одного лінійного рівняння $-3x - 9 = 0$ і нескінченну сукупність квадратних рівнянь виду

$$(n+1)x^2 + (4n+1)x + (7n-2) = 0, n \in Z, n \neq 1, \qquad (**)$$

Лінійне рівняння $-3x - 9 = 0$ має єдиний корінь $x = -3$.

Розглянемо тепер довільне квадратне рівняння із сукупності (**). Його дискримінант дорівнює

$$D = -12n^2 - 12n + 9 = -12\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Тричлен $-12n^2 - 12n + 9$ невід'ємний тільки для двох цілих чисел: $n = -1, n = 0$. Перше з них має бути виключене, т. я. ми від початку обмежилися випадком $n \neq 1$. Таким чином, з нескінченної сукупності (**) тільки рівняння, що відповідає $n = 0$, має непусту множину розв’язків. Оскільки для інших значень n відповідні рівняння мають пусту множину розв’язків, вони не роблять жодного вкладу в множину розв’язків сукупності. Інакше кажучи, нескінченна сукупність (**) рівнозначна одному рівнянню:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ або } 1.$$

Відповідь: $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$.

3.2. Розв’язування нерівностей, які містять обернені тригонометричні функції

При розв'язуванні нерівностей застосовують звичайні методи, такі, наприклад, як заміна змінної, розкладання на множники і т. п. [27] Стратегічною метою ходу розв'язання є зведення отриманої нерівності до найпростіших. При цьому ми, як і вище зазначено, будемо широко використовувати означення та властивості аркфункцій, зокрема, властивості монотонності тригонометричних функцій та аркусів, особливо при взятті синусів та косинусів від обох частин нерівності. А саме, ми повинні пам'ятати, що, наприклад, якщо $a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $a<b$, то $sina < sinb$; якщо $a, b \in [0; \pi]$ та $a < b$, то $\cos a > \cos b$ і т. п. [34].

Розглянемо наступні нерівності.

Задача 3.10. Розв'язати нерівність: $\arccos x - \arccos\frac{1}{4} \leq 0$.

Розв'язання.

Готуючись до взяття косинуса від обох частин нерівності, перепишемо нерівність як

$$\arccos x \leq \arccos\frac{1}{4}\ (*)$$

і зауважимо, що ОДЗ: $|x| \leq 1$ і має місце обмеження

$$0 \leq \arccos x \leq \pi, \qquad 0 \leq arccos\frac{1}{4} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки на проміжку $[0;\pi]$ функція $y = \cos x$ взаємно однозначна і строго спадає, нерівність (*) рівносильна нерівності

$$cosarccos\, x \geq cosarccos\, \frac{1}{4}.$$

Звідси $x \geq \frac{1}{4}$ та з урахуванням ОДЗ отримуємо відповідь.

Відповідь: $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$.

Задача 3.11. Розв'язати нерівність: $arcctg^2 x - 5arcctgx + 6 > 0$.

Розв'язання.

Робимо заміну $t = arcctg\, x, 0 < t < \pi$ і розв'язуємо отриману квадратну нерівність:

$$t^2 - 5t + 6 > 0, \qquad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}; t_1 = 3, t_2 = 2; \left[\begin{array}{l} t < 2, \\ t > 3. \end{array}\right.$$

З урахуванням обмежень на t отримуємо 0 < t < 2 або $3 < t < \pi$. Звідси $\left[\begin{array}{l} 0 < arcctg\, x < 2, \\ 3 < arcctg\, x < \pi. \end{array}\right.$ Оскільки на проміжку $(0; \pi)$, функція $y = ctg\, x$ взаємно однозначна і спадає [11], взявши від обох частин котангенс в останній сукупності нерівностей, отримуємо $\left[\begin{array}{l} x > ctg\ 2, \\ x < ctg\ 3. \end{array}\right.$

Відповідь: $x < ctg3, x > ctg2$.

Задача 3.12. Розв’язати нерівність: $log_{1,6}(arctg\ x\ ) > \frac{5}{8} log_x \sqrt[5]{x^8}$.

Розв’язання.

ОДЗ: $x > 0$, $\mathrm{x} \neq 1$. Помітивши, що $log_x \sqrt[5]{x^8} = \frac{8}{5}$, отримаємо

$$log_{1.6}(arctgx) > 1, \text{ звідки } arctg\ x > 1{,}6.$$

Оскільки за визначенням $arctg\ x < \frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2} < 1{,}6$ отримуємо відповідь.

Відповідь: не має розв'язків.

Задача 3.13. Розв’язати нерівність $\arccos x^2 - \arccos x < 0$.

Розв’язання.

ОДЗ: $|x| \leq 1$. Перепишемо нерівність як $\arccos x^2 < \arccos x$. Звідси, взявши косинус від обох частин останньої нерівності, отримаємо:

$$cosarccos\, x^2 < cosarccosx \iff \begin{cases} x^2 > x, \\ |x| \leq 1 \end{cases} \iff -1 \leq x < 0.$$

Відповідь: $-1 \leq x < 0$.

Задача 3.14. Розв’язати нерівність:

$$\arcsin(x^2 - 2x - 2) - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Розв’язання.

ОДЗ: $|x^2 - 2x - 2| \leq 1$. Зауважимо, що $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; перепишемо вихідну нерівність як $\arcsin(x^2 - 2x - 2) > \frac{\pi}{4}$ і візьмемо синус від обох частин цієї нерівності:

$$\sin arc \sin(x^2 - 2x - 2) > \sin\frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} x^2 \quad -2x - 2 > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ |x^2 - 2x - 2| \leq 1 \end{cases}, \iff \frac{\sqrt{2}}{2} < x^2 - 2x - 2 \leq 1.$$

Розв’язуючи цю систему двох квадратних нерівностей, отримуємо відповідь.

Відповідь: $-1 \le x < \frac{2-\sqrt{12+2\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{2+\sqrt{12+2\sqrt{2}}}{2} < x \le 3$.

Задача 3.15. Розв'язати нерівність: $\frac{\arccos(x^2-3x+2)}{8x^2-10x+3} > arctg0$.

Розв'язання.

Оскільки $\arccos t \ge 0$ для будь-якого $t \in [-1; 1]$, наша нерівність з урахуванням рівності $arctg\ 0 = 0$ тотожна системі:

$$\begin{cases} -1 \le x^2 - 3x + 2 < 1, \\ \frac{1}{8x^2-10x+3} > 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{2}, \\ x>\frac{3}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Звідси отримуємо відповідь.

Відповідь: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 3.16. Розв'язати нерівність:

$$log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \sin\frac{9\pi}{2} + \arccos(x^2+y^2) \le 0.$$

Розв'язання.

Оскільки $\sin\frac{9\pi}{2} = 1$, нерівність перепишемо так:

$$log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \arccos(x^2+y^2) \le -1.$$

За означенням $\arccos t \ge 0$ для будь-якого $t \in [-1; 1]$. Тому з останньої нерівності випливає нерівність $log_{\frac{1}{2}}(x+1) \le -1$. Розв'язуючи її, отримуємо $x \ge 1$. З умов ОДЗ вихідної нерівності отримуємо $-1 \le x^2 + y^2 \le 1$, тобто $\begin{cases} x \ge 1, \\ x^2 + y^2 \le 1. \end{cases}$ Звідси $y = 0$ та $x = 1$. Отже, розв'язком вихідної нерівності може бути хіба що пара (1;0). Підстановкою переконуємось, що вона дійсно є розв'язком.

Відповідь: $x = 1, y = 0$.

Задача 3.18. Довести, що якщо x, y, z додатні та

$$arctg\, x + arctg\, y + arctg\, z < \pi,$$

то $x + y + z > xyz$.

Доведення.

Застосуємо прийом переходу до тригонометричних функцій [9]:

$$arctg\, x = \alpha, arct\, y = \beta, arctg\, z = \gamma \Rightarrow x = tg\, \alpha, y = tg\, \beta, z = tg\, \gamma$$

$$\Rightarrow x + y + z - xyz =$$

$$= (tg\, \alpha + tg\, \beta) + (1 - tg\, \alpha\, tg\, \beta)\, tg\, \gamma = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos(\alpha + \beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Оскільки $x > 0, y > 0, z > 0,$ за означенням арктангенса маємо $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \pi]$ та за умовою $< \alpha + \beta + \gamma < \pi$. Звідси

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) > 0, \cos\alpha > 0, \cos\beta > 0, \cos\gamma > 0.$$

Отже

$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} > 0$ і, отже, $x + y + z - xyz > 0$,

тобто $x + y + z > xyz$, що і потрібно було довести.

3.3. Знаходження області визначення, множини значень, найбільшого та найменшого значення аркфункцій

Розглянемо приклади на знаходження області визначення, множини значень, найбільшого та найменшого значення обернених тригонометричних функцій.

Задача 3.19. Знайти область визначення функцій $y = \arcsin\frac{x-1}{3}$.

Розв'язання.

Оскільки функція $y = \arcsin x$ визначена при $-1 \le x \le 1,$ то функція $y = \arcsin\frac{x-1}{3}$ визначена для тих значень x, для яких виконуються нерівності $-1 \le \frac{x-1}{3} \le 1$. Звідси

$$-3 \le x - 1 \le 3, -2 \le x \le 4\ .$$

Відповідь: $-2 \leq x \leq 4$.

Задача 3.20. Знайдіть область визначення обернених тригонометричних функцій:

1) $y = \arcsin(x-2)$; 2) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$; 3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2}$.

Розв'язання.

1) $D(\arcsin\ ) = [-1; 1]$, тому

$$-1 \leq x-2 \leq 1, 1 \leq x \leq 3.\ D(y) = [1; 3].$$

2) $D(\arccos\ ) = [-1; 1]$ і значить

$$-1 \leq \frac{1-2x}{4} \leq 1, -4 \leq 1-2x \leq 4, -5 \leq -2x \leq 3, 2.5 \geq x \geq -1.5,$$

$$-1.5 \leq x \leq 2.5\ .\ D(y) = [-1.5; 2.5].$$

3) Аналогічно,

$$-1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1, -2 \leq x-3 \leq 2, 1 \leq x \leq 5. D(y) = [1; 5].$$

Відповідь: 1)$[1; 3]$; 2)$[1.5; 2.5]$; 3)$[1; 5]$.

Задача 3.21. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\arcsin(log_2 x)}.$$

Розв'язання.

Область визначення цієї функції задається, очевидно, системою нерівностей

$$\begin{cases} x > 0, \\ |log_2 x| \leq 1, \\ \arcsin(log_2 x) \geq 0. \end{cases}$$

Третя нерівність щодо визначення арксинусу рівносильна тому, що $0 \leq log_2 x \leq 1$, і, отже, вказана система рівносильна системі

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Відповідь: $1 \leq x \leq 2$.

Задача 3.22. Знайти область визначення функції

$$y = \arcsin(1 + tg^2 \pi x).$$

Розв'язання.

Тут область визначення задається, очевидно, нерівністю $|1+tg^2\pi x| \leq 1$, рівносильним в силу невід'ємності $tg^2\pi x$ πx рівності $1+tg^2\pi x = 1$. Звідси

$$tg^2\pi x = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi, k \in Z, x = k, k \in Z.$$

Відповідь: $x \in Z$.

Задача 3.23. Скільки цілих чисел у області визначення функції

$$f(x) = \arcsin\frac{1-x}{5} + arccos\frac{x^2+5x+2}{2}?$$

Розв'язання.

Оскільки $D(\arcsin\ ) = [-1;1], D(\arccos\ ) = [-1;1]$, то область визначення цієї функції визначається умовами:

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{1-x}{5} \leq 1, \\ -1 \leq \dfrac{x^2+5x+2}{2} \leq 1; \end{cases} \begin{cases} -5 \leq 1-x \leq 5, \\ -2 \leq x^2+5x+2 \leq 2; \end{cases} \begin{cases} -4 \leq x \leq 6, \\ -5 \leq x \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq -1, \\ x \leq -4; \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

$x \in [-1;0] \cup \{-4\}$. Цілих значень у цій області визначення три: 0, -1 та -4.

Відповідь: три цілих числа.

Задача 3.24. Знайти множину значень функції

$$y = \frac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}(cosx - sinx)\right).$$

Розв'язання.

Перетворимо вираз $\cos x - \sin x$:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Це вираз із змінною має значення $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Помножимо вираз $\cos x - \sin x$, а значить вираз $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ на $\sqrt{0.125} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, отримаємо проміжок, що задає його значення: $[-0.5; 0.5]$.

Візьмемо від останнього виразу арккосинус (враховуємо, що функція $y = \arccos x$ монотонно спадає і неперервна). Отже, маємо:

$$[\arccos 0.5\,; \arccos(-0.5)] = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Домножуючи на $\frac{3}{\pi}$, маємо остаточно $y \in [1; 2]$.

Відповідь: $E(y) = [1; 2]$.

Задача 3.25. Знайти множину значень функції

$$y = \frac{1}{\pi}\arccos(x-5) - |x-2|.$$

Розв'язання.

Визначимо область визначення X функції з умови $|x-5| \le 1$ (за означенням $\arccos(x-5)$ є кут, що належить відрізку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює $(x-5)$. Розв'язуючи нерівність, отримаємо: $-1 \le x-5 \le 1$,, або $4 \le x \le 6$. Таким чином, $X = [4; 6]$. Величина $x-2$ є додатньою при $x \in X$, тому $|x-2| = x-2$. Зауважимо, що лінійна функція $y = ax + b$ є зростаючою, якщо $a > 0$, і спадною, якщо $a < 0$ [15]. Функція $y = \arccos x$ є спадною в області визначення.Функція $y = \frac{1}{\pi}\arccos(x-5)$ є спадною в області визначення.

Тоді функція $y = \frac{1}{\pi}\arccos(x-5) + 2 - x$ є спадною на відрізку $[4; 6]$, як сума спадних функцій. Тому найбільше значення функції дорівнює

$$y(4) = \frac{1}{\pi}\arccos(-1) - 2 = \frac{1}{\pi}\cdot\pi - 2 = 1 - 2 = -1,$$

а найменше

$$y(6) = \frac{1}{\pi}\arccos 1 - 4 = \frac{1}{\pi}\cdot 0 - 4 = -4.$$

Отже, множиною значень функції є відрізок $[-4; -1]$.

Відповідь: $[-4; -1]$.

Задача 3.26. Знайти множину значень функції $y = arcctg\frac{|x|-1}{x+1}$.

Розв'язання.

Область визначення функції $X = (-\infty; -1) \cup$

$(-1;+\infty)$. Визначимо спочатку множину значень функції $y = \frac{|x|-1}{x+1}$. Розглянемо рівняння

$\frac{|x|-1}{x+1} = a$і розв'яжемо його для кожного значення параметра a.

Перепишемо рівняння як $|x| - 1 = a(x+1)$.

При $x \geq 0$ рівняння рівносильне:

$x - 1 = a(x+1)$, або $x(a-1) = -a-1$.

Рівняння немає розв'язків при $a = 1$. При $a \neq 1$ розв'язок $x = -\frac{a+1}{a-1}$ має задовольняти нерівності $x \geq 0$. Розв'язуючи нерівність $-\frac{a+1}{a-1} \geq 0$ методом інтервалів [7], знаходимо $a \in [-1;1)$.

Таким чином, як $x + 1 \neq 0$, то визначаємо, що при $a = -1$ будь-яке $x < 0, x \neq -1$ є розв'язком рівняння. Таким чином, отримуємо, що рівняння $\frac{|x|-1}{x+1} = a$ має розв'язок при $a \in [-1;1)$. Отже, множиною значень функції $y = \frac{|x|-1}{x+1}$ є проміжок $[-1;1)$. Оскільки функція $y = arcctg\ x$ є спадною, то

$$arcctg\ 1 < arcctg \frac{|x|-1}{x+1} \leq arcctg(-1).$$

Оскільки $arcctg 1 = \frac{\pi}{4}$, а $arcctg(-1) = \frac{3\pi}{4}$, то множина значень функції є $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Задача 3.27. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = arctg\sqrt{2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3}.$$

Розв'язання.

Так як для будь-якого дійсного x правильна нерівність $-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$,то

$$-2 \leq 2\cos(x - \frac{\pi}{6}) \leq 2.$$

Тоді

$$1 \leq 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3 \leq 5 \text{ та } 1 \leq \sqrt{2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3} \leq \sqrt{5}.$$

Функція $y = arctg\, t$ є зростаючою у всій області визначення, отже,

$$arctg\, 1 \leq arctg\sqrt{2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3} \leq arctg\, \sqrt{5}.$$

Тому найбільше значення функції є $arctg\, \sqrt{5}$, а найменше $arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $arctg\, \sqrt{5},\ \frac{\pi}{4}$.

3.4. Задачі з параметрами з аркфункціями

Тут ми обмежимося розглядом лише прямих і обернених завдань із параметрами, пов'язаними з рівняннями, що містять аркуси.

Перші два завдання – це розв’язування прямих завдань, у яких потрібно для кожного значення параметра розв'язати рівняння.

Задача 3.28. Розв’язати рівняння: $\arccos x + \arcsin 2a = 0$.

Розв’язання.

ОДЗ: $|x| \leq 1, |2a| \leq 1$. Перепишемо рівняння як $\arccos x = \arcsin(-2a)$ і «прокосинусуємо» його: $x = \sqrt{1 - 4a^2}$. Зрозуміло, що знайдене значення x невід'ємне і для того, щоб воно потрапило в ОДЗ, необхідно вимагати виконання умови $\sqrt{1 - 4a^2} \leq 1$. Звідси $a \leq 0$ та з нерівності $|2a| \leq 1$ отримаємо $a \leq \frac{1}{2}$.

Відповідь: $0 \leq a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{1 - 4a^2}; a < 0, a > \frac{1}{2} \Rightarrow$ коренів немає.

Задача 3.29. Розв’язати рівняння: $arctg\, a + arctg\, \frac{1}{1-x} = 0$.

Розв’язання.

ОДЗ: $x \neq 1$. Перепишемо рівняння як $arctg\, \frac{1}{x-1} = arctg\, a$ і, «протангенсувавши» останнє, отримаємо $\frac{1}{x-1} = a$. Звідси $a \neq 0$ та $x = \frac{a+1}{a}$. Зрозуміло, що $\frac{a+1}{a} \neq 1$ для будь-якого $a \neq 0$, тобто величина $\frac{a+1}{a}$, будучи значенням x, задовольняє умові ОДЗ. Залишилось тоді записати відповідь.

Відповідь: $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{a+1}{4}; a = 0 \Rightarrow$ коренів немає.

Наступні дві задачі – це приклади розв'язання обернених завдань, у яких потрібно знайти всі значення параметра, для яких корені рівняння задовольняють певним умовам.

Задача 3.30. Знайти всі значення параметра a, за яких рівняння $x^2 - \arcsin x - a = 0$ має корені і всі вони додатні.

Розв'язання.

Перепишемо рівняння як $x^2 = \arcsin x + a = 0$ і застосуємо геометричний метод [28]. А саме розглянемо дві функції $f(x) = x^2$ та $g(a, x) = \arcsin x + a$. Зауважимо, що, як легко зрозуміти, величина x_0 буде коренем нашого рівняння при даному значенні a_0 тоді і тільки тоді, коли x_0 – абсциса точки перетину графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(a_0, x)$. Графік першої – парабола з гілками догори. Графіком другої функції виходить з арксинусоїди $y = \arcsin x$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy на $|a_0|$ вгору, якщо $a_0 \geq 0$, і вниз, якщо $a_0 < 0$. Тепер неважко зрозуміти, що зазначені точки перетину будуть існувати і мати додатні абсциси тоді і тільки тоді, коли $\frac{\pi}{2} - 1 \leq a \leq 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} - 1 \leq a \leq 0$.

Задача 3.31. Знайти всі значення параметра a, за яких рівняння $arcsin^2\, x + arccos^2 x + a\pi^2 = 0$ не має коренів.

Розв'язання.

ОДЗ: $|x| \leq 1$; Скористаємося тотожністю

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\,, |x| \leq 1$$

і, зробивши заміну $t = \arcsin x$ отримаємо рівняння

$$t^2 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 + a\pi^2 = 0, |t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Перетворимо його і знайдемо корені:

$$2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}(4a + 1) = 0, t_{1,2} = \frac{\pi \pm \pi\sqrt{-8a - 1}}{4}.$$

Зрозуміло тепер, що отримане рівняння не матиме коренів тоді і тільки тоді, коли

$$-8a - 1 < 0\text{або} \begin{cases} -8a - 1 \geq 0, \\ |t_1| > \frac{\pi}{2}, \\ |t_2| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Перша нерівність дає $a > -\frac{1}{8}$. Розв'яжемо систему. Для цього зауважимо, що вона рівносильна системі

$$\begin{cases} a \leq -\frac{1}{8}, \\ \left|1 + \sqrt{-8a - 1}\right| > 2, \\ \left|1 - \sqrt{-8a - 1}\right| > 2 \end{cases}$$

Оскільки $\left|1 + \sqrt{-8a - 1}\right| \geq \left|1 - \sqrt{-8a - 1}\right|$, достатньо розв'язати лише нерівність $\left|1 + \sqrt{-8a - 1}\right| > 2$, тобто сукупність $\left[\begin{array}{l} \left|1-\sqrt{-8a-1}\right|<2, \\ \left|1+\sqrt{-8a-1}\right|>2. \end{array}\right.$ яка, очевидно, рівносильна нерівності $\sqrt{-8a - 1} > 3$. Розв'язуючи її та враховуючи, що при цьому $a \leq -\frac{1}{8}$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $a \leq -\frac{5}{4}, a \leq -\frac{1}{8}$.

Задача 3.32. Знайдіть усі значення a, при кожному з яких рівняння

$$\sin \arccos(5x) = a + \arcsin \sin(7x - 3)$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання.

Оскільки $0 \leq \arccos t \leq \pi (t = 5x)$, то $\sin \arccos t \geq 0$ та

$$\sin arccos\,(5x) = a + \arcsin \sin(7x - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - cos^2(\arccos 5x)} = a - \arcsin \sin(\pi - 3 + 7x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} = a - \left(\pi - 3 + \tfrac{7}{5}t\right), \qquad (*)$$

оскільки $|t| \leq 1$ і

$$\left|\pi - 3 + \frac{7}{5}t\right| \leq \left|\pi - 3 + \frac{7}{5}\right| = |\pi - 1.6| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Графік лівої частини

$$y = \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + t^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

рівняння (*) є півколом (рис. 3.1), а графік правої частини $y = -\frac{7}{5}t + b$, де $b = a + 3 - \pi$, є пряма.

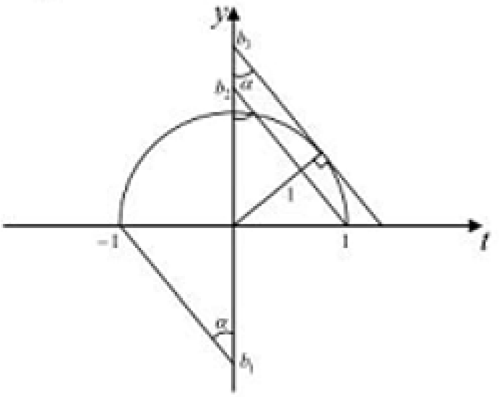


Рис. 3.1

Ці графіки мають рівно одну спільну точку тоді і лише тоді, коли

$$\left[\begin{array}{l} b_1 \leq b < b_2, \\ \quad b = b_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi - 3 + b_1 \leq a < \pi - 3 + b_2, \\ \qquad a = \pi - 3 + b_3, \end{array}\right.$$

де

$$b_1 = -ctg\alpha = -\frac{7}{5}, b_2 = ctg\alpha = \frac{7}{5}, b_3 = \frac{1}{\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{1 + ctg^2\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{5}.$$

Відповідь: $\pi - 3 - \frac{7}{5} \leq a < \pi - 3 + \frac{7}{5}$, $a = \pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}$.

Задача 3.33. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$9a^2 + log_2^2 x + 3\arccos(x-1) - (3a-1)log_2 x^2 - 6a + 1 = 0.$$

Розв'язання.

Перетворимо вихідне рівняння:

$$9a^2 + log_2^2x + 3\arccos(x-1) - (3a-1)log_2x^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_2^2x - 2(3a-1)log_2x + 9a^2 - 6a + 1 + 3\arccos(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log_2^2x - 2(3a-1)log_2x + (3a-1)^2 + 3\arccos(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (log_2x - 3a + 1)^2 + 3\arccos(x-1) = 0.$$

Але оскільки функції $(log_2x - 3a + 1)^2$ і $3\arccos(x-1)$ невід'ємні, отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} log_2x - 3a + 1 = 0, \\ 3\arccos(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Відповідь: Якщо $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; за інших a розв’язків немає.

Задача 3.34. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$$arctg\big((3a-1)sin^2x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1)\sin x + tg(ax - a\pi)\big) - ax + a\pi = 0$$

має рівно три розв’язки.

Розв’язання.

$$arctg\big((3a-1)sin^2x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1)\sin x + tg(ax - a\pi)\big) - ax + a\pi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3a-1)sin^2x - (3a^3 - a^2 + 3a - 1)\sin x + tg(ax - a\pi) = tg(ax - a\pi), \\ -\frac{\pi}{2} < ax - a\pi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3a-1)\sin x\big(\sin x - (a^2 - 1)\big) = 0, \\ |ax - a\pi| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розглянемо три випадки:

1) $a = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{3}|x - \pi| < \frac{\pi}{2}$ – нескінченно багато розв’язків;

2) $a = 0$: $\sin x\,(\sin x - 1) = 0$ – безліч розв’язків;

3) $a \neq 0, a \neq \frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ |x - \pi| < \dfrac{\pi}{2|a|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ |n - 1| < \dfrac{1}{2|a|} \end{cases} -$$

рівно три розв’язки тоді і тільки тоді, коли

$$1 < \frac{1}{2|a|} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq |a| < \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2} < a \leq -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3},\ \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

ВИСНОВКИ

Основна мета вивчення обернених тригонометричних функцій в шкільному курсі математики – це підвищення рівня математичної культури здобувачів та формування в них здатності мислити не за стереотипами; формування вміння розв’язувати завдання, що надають можливість вступати до закладів вищої освіти, в яких математика є профілюючим предметом; виховання здатності приймати самостійні рішення; розвиток зацікавленості до математики.

Тема «Обернені тригонометричні функції» розглядається у 10–11 класах протягом досить невеликої кількості годин суто оглядово, в плані ознайомлення. За цей час розглядаються означення обернених тригонометричних функцій: *y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg x, y = arcctg x*, їх графіки, область визначення та множина значень функцій, властивості монотонності, неперервності, обмеженості, поняття найбільшого та найменшого значення, здобувачі набувають навички тотожних перетворень, які містять аркфункції, основні співвідношення між ними.

В курсі математики обернені тригонометричні функції вважаються доволі складною темою. Задачі з оберненими тригонометричними функціями представляють для здобувачів значні складнощі як у логічному, так і у технічному плані. Це пояснюється тим, що дана тема містить не дуже прості формули, які пов’язують ці функції; вона передбачає виконання громіздких тотожних перетворень виразів, які містять ці функції; вона потребує гарних знань формул тригонометрії та добре розвинутих геометричних умінь, пов’язаних з побудовою графіків функцій. Головна складність полягає у тому, що вивчення обернених тригонометричних функцій завжди викликає складнощі (віднімання складніше за додавання; ділення складніше за множення; добування кореня складніше за піднесення до натурального степеня і т.д.). Вивчення обернених тригонометричних функцій складніше за вивчення тригонометричних функцій.

Для того, щоб оволодіти доволі складним та досить насиченим матеріалом, що стосується аркфункцій, потрібні навички розв’язування різноманітних прикладів, особливо завдань, які носять дослідницький характер. Задачі, пов’язані з оберненими тригонометричними функціями, служать доповненням до тригонометрії, сприяють розвитку гнучкості математичного мислення. Наведений в роботі матеріал практичного характеру, що містить завдання різноманітного плану на застосування властивостей обернених тригонометричних функцій, може бути застосований під час вивчення теми та спрямований на формування у здобувачів стійкого інтересу до математики, розвиток їх математичних здібностей, створення умов для реалізації особистісних можливостей здобувачів, підготовку їх до навчання у закладах вищої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аджиєва А. Тригонометричні рівняння / А. Аджиєва // Математика. Додаток до газети «Перше вересня». – 2001. – № 33.

2. Апостолова Г.В. Геометрія 8 клас: Дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2008. – 278 с.

3. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. ІІ семестр. Академічний рівень // С.П. Бабенко. – Харків: Основа, 2011. – 253 с.

4. Бевз Г.П. Методика викладання математики. / Г.П. Бевз. – К.: Радянська школа, 1999. – 320 с.

5. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике: Кн. для внекласс. чтения: IX-X кл. / Н. Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

6. Вірченко Н. О. Графіки елементарних та спеціальних функцій: довідник / Н. О. Вірченко, І. І. Ляшко. – К.: Наук. думка, 1996. – 582 с.

7. Вишенський В. А. Відношення і функції / В. А. Вишенський. – К. : Вища шк., 1972. – 96 с.

8. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А.Р. Гальперіна, І.О. Золотарьова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2010. – 176 с.

9. Гетманцев В. Д. Математика. Тригонометрія: Посіб. [для слухачів підгот. відділень та вступників до пед. ін-тів] / В.Д. Гетманцев, О.Ф. Саушкін. – К.: Либідь, 1994. – 144 с.

10. Голобородько В.В. Алгебра і початки аналізу. Самостійні і контрольні роботи. / В.В. Голобородько, А.П. Єршова. – К., 2004. – 112 с.

11. Довідник з елементарної математики. Геометрія, тригонометрія, векторна алгебра / за ред. П.Ф. Фільчакова. – 2-е вид. – К.: Наука, 1987. – 439 с.

12. Довідник з елементарної математики, механіки та фізики / Ред. С.Г. Максимова. – К.: Генеза,1996. – 192 с.

13. Житарюк І. В. Методичні особливості викладання теми "тригонометричні функції" у старшій школі / І. В. Житарюк // Наука і освіта. – 2014. – № 1. – С. 127-131.

14. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики – 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова. – К.: Центр навч.-метод. літератури, 2011. – 112 с.

15. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – К.: Генеза, 2018. – 384 с. : іл.

16. Капіносов А.М. Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. Алгебра 10 клас. / А.М. Капіносов. – К.: А.С.К., 1997. – 80 с.

17. Крамор В. С. Тригонометрические функции: система упражнений для самостоят. изучения: Пособие для учащихся / В.С. Руданский, П. А. Михайлов. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 1983. – 159 с.

18. Македонська С.І. Побудова графіків тригонометричних функцій / С.І. Македонська // Математика. – 2003. – Березень (№12) – С.8–11.

19. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: Підруч. для 11кл закладів загальної середньої освіти / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. – 272 с.

20. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10кл закладів загальної середньої освіти / Є.П. Нелін. – Х.: Видавництво «Ранок», 2018. – 328 с.

21. Макарычев Ю. Н. Система изучения элементарных функций в старших классах средней школы: Пособие для учителей / Ю.Н. Макарычев. – М.: Просвещение, 1994. – 219 с.

22. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв’язувати задачі // А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – К.: Генеза, 2008. – 312 с.

23. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018 – 256 с.: іл.

24. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2000. – 336 с.

25. Навчальна програма з математики (Алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Рівень стандарту. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalniprogrami-dlya-10-11-klasiv

26. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalniprogrami-dlya-10-11-klasiv

27. Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

28. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень / Є.П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.: іл.

29. Нелін Є.П. Формування універсальних навчальних дій у курсі алгебри і початків аналізу / Є.П. Нелін, З.І. Кравченко // Журнал «Математика в рідній школі», 2016. – № 6. – С. 7–13.

30. Перебийніс С.М. Тригонометрія у таблицях, схемах та розв’язках. 10 клас / С.М. Перебийніс. – Тернопіль: Мандрівець, 2014. – 80 с.

31. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми / О.П. Пінчук // Наука і сучасність: зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – К.: Логос, 2002. – Том XXXIII. – С.109–116.

32. Погребиський І. Б. Тригонометрія: Посіб. для учителів / І.Б. Погребиський, П.Ф. Фільчаков. – К.: Рад. шк., 1991. – 251 с.

33. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів / В.О. Резуненко, В.О. Ярмак. – Харків: Вид. група «Основа», 2011. – 94 с.

34. Рижков М. О. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 8-11 / М.О. Рижков. – Харків: Вид. група «Основа», 2008. – 96 с.

35. Слєпкань З.І. Збірник завдань для ДПА з математики. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. / З.І. Слєпкань. – Харків: Гімназія, 2002. – 160 с.

36. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.

37. Тригонометрична функція. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://formula.co.ua/uk/content/trigonometric-functions.html

38. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. – Харків: Вид. група «Основа», 2010. – 159 с.

39. Цукарь А.Я. Вправи практичного характеру з тригонометрії / А.Я.Цукарь // Математика в школах України. – 1993. – № 3. – С. 45–50.

40. Шунда Н. Н. Функции и их графики : пособие для учителя. – 2-е изд. – К.: Рад. шк., 1993. – 190 с.