Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-034-2-001 УДК 372.851

ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІЧНИХ ЗАСОБІВ

Катерина ВАЛЬКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
katerynavalko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9746-018X
Валерій КУЗЬМИЧ ✉
Херсонський державний університет, Херсон, Україна
vikuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8150-3456
Людмила КУЗЬМИЧ
Херсонський державний університет, Херсон, Україна
lvkuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6727-9064
Олександр САВЧЕНКО
Херсонський державний університет, Херсон, Україна
savchenko.o.g@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-4687-5542

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У даній роботі розглядаються питання, що стосуються методики вивчення геометричних властивостей метричних просторів. Ці питання з необхідністю виникають під час засвоєння студентами основних понять теорії метричних просторів. Складність у розумінні цих понять виникає внаслідок відсутності, у більшості випадків, їх геометричної інтерпретації, або ж відповідної візуалізації. Для побудови геометричної інтерпретації понять прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору пропонується будувати відповідні аналоги у двовимірному та тривимірному арифметичних евклідових просторах. Для візуалізації цих понять пропонується використати динамічне геометричне середовище GeoGebra 3D. Такий підхід дозволяє продемонструвати як схожість окремих геометричних понять метричного простору з відповідними поняттями геометрії Евкліда, так і продемонструвати випадки їх «неевклідовості».*

Матеріали і методи. *Для виконання дослідження використовувалось динамічне геометричне середовище GeoGebra 3D, програмний засіб обчислення об'єму тетраедра за довжинами його ребер, а також графічні засоби побудови зображень.*

Результати. *Наведені у даній роботі приклади геометричної інтерпретації та візуалізації взаємного розміщення точок метричного простору сприяють більш глибокому та усвідомленому сприйняттю і розумінню студентами основ теорії метричних просторів.*

Висновки. *Метрична геометрія дає можливість розглядати геометрію Евкліда та неевклідові геометрії з однієї точки зору. Аналогія окремих співвідношень між точками метричного простору з відповідними співвідношеннями у геометрії Евкліда дає можливість прослідкувати зміну характерних геометричних властивостей простору при зміні його метрики. Застосування спеціальних графічних можливостей відповідних програмних засобів дозволяє не лише візуалізувати взаємне розміщення точок метричного простору, але і прослідкувати його зміну при зміні точки спостереження цього розміщення. Візуалізація геометричних властивостей метричних просторів сприяє більш глибокому та усвідомленому сприйняттю і розумінню студентами основ теорії метричних просторів.*

INTERPRETATION OF MUTUAL LOCATION OF POINTS OF METRIC SPACE BY HELP OF GRAPHIC MEANS

Kateryna VALKO
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
katerynavalko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9746-018X
Valerii KUZMICH ✉
Kherson State University, Kherson, Ukraine
vikuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8150-3456
Liudmyla KUZMICH
Kherson State University, Kherson, Ukraine
lvkuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6727-9064
Oleksandr SAVCHENKO
Kherson State University, Kherson, Ukraine
savchenko.o.g@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-4687-5542

ABSTRACT

Formulation of the problem. *This paper considers issues related to the method of studying the geometric properties of metric spaces. These questions necessarily arise when students learn the basic concepts of the theory of metric spaces. Difficulty in understanding these concepts arises due to the lack, in most cases, of their geometric interpretation, or appropriate visualization. To build a geometric interpretation of the concepts of rectilinear and flat placement of points of metric space, it is proposed to build appropriate analogs in two-dimensional and three-dimensional arithmetic Euclidean spaces. To visualize these concepts, it is proposed to use a dynamic geometric environment GeoGebra 3D. This approach allows us to demonstrate both the similarity of individual geometric concepts of metric space with the corresponding concepts of Euclidean geometry and to demonstrate cases of their "non-Euclidean".*

Materials and methods. *The study used the dynamic geometric environment GeoGebra 3D, a software tool for calculating the volume of a tetrahedron along the lengths of its edges, as well as graphical tools for constructing images.*

Results. *The examples of geometric interpretation and visualization of mutual placement of points of metric space given in this work promote deeper and more conscious perception and understanding by students of the basics of the theory of metric spaces.*

Conclusions. *Metric geometry makes it possible to consider Euclidean geometry and non-Euclidean geometries from one point of view. The analogy of individual relations between the points of metric space with the corresponding relations in Euclidean geometry makes it possible to trace the change in the characteristic geometric properties of space when its metric changes. The use of special graphical capabilities of the corresponding software allows not only to visualize the mutual location of the points of the metric space but also to track its change when changing the observation point of this location. Visualization of geometric properties of metric spaces contributes to a deeper and more conscious perception and understanding by students of the basics of the theory of metric spaces.*

Для цитування:
Валько К., Кузьмич В., Кузьмич Л., Савченко О. Інтерпретація взаємного розміщення точок метричного простору за допомогою графічних засобів. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 34. № 2. С. 7-11. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-034-2-001
Валько, К., Кузьмич, В., Кузьмич, Л., & Савченко, О. (2022). Інтерпретація взаємного розміщення точок метричного простору за допомогою графічних засобів. *Фізико-математична освіта*, 34(2), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001

For citation:
Valko, K., Kuzmich, V., Kuzmich, L., & Savchenko, O. (2022). Interpretation of mutual location of points of metric space by help of graphic means. *Physical and Mathematical Education*, 34(2), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001
Valko, K., Kuzmich, V., Kuzmich, L., & Savchenko, O. (2022). Interpretatsiia vzaiemnoho rozmishchennia tochok metrychnoho prostoru za dopomohoiu hrafichnykh zasobiv [Interpretation of mutual location of points of metric space by help of graphic means]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 34(2), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001

✉ Corresponding author

КЛЮЧОВІ СЛОВА: відстань між точками; метричний простір; метрична геометрія; динамічне геометричне середовище GeoGebra 3D; прямолінійне розміщення точок.

KEYWORDS: distance between points; metric space; metric geometry; dynamic geometric environment GeoGebra 3D; rectilinear placement of points.

ВСТУП

Постановка проблеми. З метричними просторами студенти закладів вищої освіти вперше знайомляться у курсі математичного аналізу при вивченні n-вимірного евклідового простору. Пізніше, у курсі функціонального аналізу, метричні простори вивчаються більш детально, у тісному зв'язку з нормованими та топологічними просторами. Однією із перепон у розумінні нових фактів теорії метричних просторів є складність їх геометричної інтерпретації. Наприклад, дуже важко уявити собі одиничну сферу, на якій безліч точок віддалені одна від одної на сталу відстань. Подібних прикладів у просторах з різною метрикою досить багато. Вони значною мірою перешкоджають адекватному засвоєнню відповідних властивостей метричних просторів. Більше того, зі зміною метрики простору, який складається з одних і тих самих елементів (точок), співвідношення між цими елементами можуть істотно змінитись. Наприклад, чотири точки, що є вершинами квадрату у двовимірному арифметичному евклідовому просторі, при зміні метрики простору можуть стати прямолінійно розміщеними і не бути плоско розміщеними. Наведені приклади є лише невеликою частиною фактів, які можуть викликати неоднозначне сприйняття студентами властивостей метричних просторів, та стати на перешкоді їх засвоєння.

Аналіз актуальних досліджень. Матеріал роботи значною мірою можна віднести до предмету метричної геометрії (Berger, 2009; Burago et al., 2001), бурхливий розвиток якої останнім часом зумовлений численними застосуваннями у сфері високих технологій, інженерії та інших галузях науки і техніки. Характерною особливістю метричної геометрії є те, що вона спирається лише на поняття відстані між точками і властивості множини дійсних чисел. Це значно обмежує унаочнення її результатів, але з іншого боку, це розширює і узагальнює класичні поняття геометрії Евкліда. Метрична геометрія дає можливість розглядати геометрію Евкліда та неевклідові геометрії з однієї точки зору. Методику вивчення елементів метричної геометрії студентами закладів вищої освіти, використання прикладних графічних комп'ютерних засобів для унаочнення результатів математичних досліджень, розглядали ряд авторів, зокрема, унаочнення основних понять сферичної геометрії вивчалось у роботах Lénárt I. та Rybak A. (2017), Lénárt I. (2020). Унаочнення розв'язків нерівностей за допомогою системи комп'ютерної математики Maple розглядалось у роботі Філер З. та Чуйков А. (2021), методичні аспекти впровадження елементів метричної геометрії у шкільний курс математики вивчались у роботах Следзинский И. (1973), Kuz'mich V. та Kuzmich L. (2021).

Мета статті. Метою статті є висвітлення способів геометризації деяких властивостей метричних просторів, та їх візуалізації. На наш погляд, це сприятиме більш глибокому засвоєнню студентами основних понять теорії метричних просторів, зокрема, властивостей та співвідношень, що мають геометричний зміст.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Матеріал дослідження був отриманий за результатами читання відповідного спецкурсу студентам спеціальності «014.04 Середня освіта. Математика», магістерського рівня освіти. Для динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D використовувались спеціальні формули розрахунку координат вершин тетраедра за довжинами його ребер.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На початку наведемо деякі основні поняття та факти, що відносяться до теорії метричних просторів. Зокрема, відстанню ρ між двома елементами x_i та x_j множини X називають дійсну невід'ємну функцію $\rho(x_i, x_j)$, яка задовольняє умову комутативності: $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_j, x_i)$, та умову нерівності трикутника: $\rho(x_i, x_j) \le \rho(x_i, x_k) + \rho(x_k, x_j)$ для довільних точок x_i, x_j, x_k цього простору (Канторович та Акилов, 1977). Таку множину називають метричним простором з метрикою ρ, і позначають (X, ρ).

Способи введення відстані між точками простору (способи метризації) можуть бути різноманітними (Деза та Деза, 2008). Від способу метризації простору значною мірою залежать його геометричні властивості (геометрія простору). У подальшому будемо розглядати кілька класичних просторів, метризація яких базується на простих поняттях, і які легко проілюструвати навіть на матеріалі шкільного курсу математики (Kuz'mich & Kuzmich, 2021).

– Множина упорядкованих груп з n дійсних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де відстань між будь-якими двома сукупностями $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ знаходиться за формулою:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

є метричним простором, який називають n-вимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^n (Колмогоров та Фомін, 1974; Давидов, 1979).

– Розглянемо множину неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Ця множина стає метричним простором (Колмогоров та Фомін, 1974; Давидов, 1979), якщо за відстань між двома функціями $f(t)$ і $g(t)$ множини взяти число:

$$\rho(f, g) = \max_{t\epsilon[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Такий простір позначають $C_{[a,b]}$.

– Якщо на множині неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій за відстань між двома функціями $f(t)$ і $g(t)$ взяти число:

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt,$$

то ця множина стає метричним простором, який позначають C_L (Давидов, 1979).

Тепер розглянемо поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Для зручності подальших записів будемо використовувати позначення: $\rho(x_i, x_j) = \rho_{ij}$ і вважати, що усі розглядувані точки метричного простору різні, тобто значення відстані між ними завжди додатне. Кажуть (Каган, 1963), що три точки x_i, x_j, x_k метричного простору розміщені прямолінійно у цьому просторі, якщо виконується рівність: $\rho(x_i, x_k) = \rho(x_i, x_j) + \rho(x_j, x_k)$, або коротше: $\rho_{ik} = \rho_{ij} + \rho_{jk}$. Деяку множину точок метричного простору будемо називати прямолінійно розміщеною, якщо кожні три точки цієї множини прямолінійно розміщені у цьому просторі.

Під кутом, що утворений трьома точками x_i, x_j, x_k метричного простору, будемо розуміти упорядковану трійку цих точок: (x_i, x_j, x_k) і позначати $\angle(x_i, x_j, x_k)$, при цьому, точку x_j будемо називати вершиною кута, а пари точок (x_i, x_j) і (x_j, x_k) – його сторонами (Kuz'mich, 2019). За числову характеристику φ кута (кутову характеристику) природно взяти величину косинуса кута трикутника, що знаходиться з формули косинусів у геометрії Евкліда (Александров, 1948; Kuz'mich, 2019):

$$\varphi(x_i, x_j, x_k) = \frac{\rho^2(x_i,x_j)+\rho^2(x_j,x_k)-\rho^2(x_i,x_k)}{2\rho(x_i,x_j)\rho(x_j,x_k)},$$

або коротше:

$$\varphi_{ijk} = \frac{\rho_{ij}^2+\rho_{jk}^2-\rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}}. \tag{1}$$

Таким чином означена кутова характеристика дає можливість не лише отримати умову прямолінійного розміщення трьох точок метричного простору: $\varphi_{ijk}^2 = 1$, але і умову «лежати між» для цих точок (Dovgoshei & Dordovskii, 2009). Зокрема, точка x_j «лежить між» точками x_i і x_k (або є внутрішньою для точок x_i, x_j, x_k), якщо виконується рівність: $\varphi_{ijk} = -1$, якщо ж виконується рівність $\varphi_{ijk} = 1$, то можна казати, що точка x_j «лежить поза» точками x_i і x_k (або є зовнішньою, чи крайньою, для точок x_i, x_j, x_k).

За допомогою кутової характеристики можна означити плоске розміщення точок метричного простору (Kuz'mich, 2019). Чотири точки x_1, x_2, x_3, x_4 метричного простору (X, ρ) будемо називати плоско розміщеними у цьому просторі, якщо виконується рівність:

$$1 + \varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0. \tag{2}$$

Рівність (2) у геометрії Евкліда, фактично, означає рівність нулю об'єму тетраедра, вершини якого розміщені в точках x_1, x_2, x_3, x_4. Якщо кожні чотири точки деякої множини метричного простору плоско розміщені у цьому просторі, то цю множину називатимемо плоско розміщеною у даному просторі.

Не дивлячись на схожість понять прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору з відповідними поняттями геометрії Евкліда вони не завжди співпадають. Зокрема, з прямолінійного розміщення чотирьох точок метричного простору не завжди слідує їх плоске розміщення у цьому просторі.

На відміну від геометрії Евкліда, геометрична інтерпретація основних понять метричної геометрії викликає певні труднощі, оскільки доводиться окремі факти, що не мають місця у геометрії Евкліда, зображати у двовимірному чи тривимірному евклідових просторах. Наведемо декілька прикладів такої інтерпретації.

Приклад 1. На відрізку $[0; 1]$ розглянемо чотири функції: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$, $y_4 = 1 - x$. Якщо розглядати функції y_1, y_2, y_3, y_4 у якості точок простору $C_{[0,1]}$, то за метрикою цього простору відстані між ними будуть:

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 1.$$

У геометрії Евкліда такі точки утворюють правильний тетраедр з одиничною довжиною ребер. Отже, щоб інтерпретувати взаємне розміщення цих чотирьох точок у просторі $C_{[0,1]}$ потрібно від їх інтерпретації у просторі R^2 перейти до простору R^3. Для зручності позначимо точки y_1, y_2, y_3, y_4, відповідно, буквами A, B, C, S. Виберемо певну орієнтацію тетраедра у просторі R^3. Для цього при зображенні трикутника ABC точку A помістимо у початок координат, точку B – на додатній половині осі OX, точку C – на додатній половині площини XOY, точку S – на додатній половині простору XYZ (рис. 1).

Таке розташування точок y_1, y_2, y_3, y_4 можна підтвердити, також, використавши означення плоского розміщення точок метричного простору. Для цього обчислимо за формулою (1) кутові характеристики для кутів, які утворюють точки y_1, y_2, y_3, y_4 у просторі $C_{[0,1]}$:

$$\varphi_{213} = \varphi_{214} = \varphi_{314} = \frac{\rho_{12}^2+\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} = \frac{1^2+1^2-1^2}{2\cdot 1\cdot 1} = 0{,}5.$$

Підставивши ці значення у формулу (2) отримаємо:

$$1 + \varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 1 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 - (0{,}5)^2 - (0{,}5)^2 - (0{,}5)^2 \neq 0.$$

Отже, точки y_1, y_2, y_3, y_4 не є плоско розміщеними у просторі $C_{[0,1]}$.

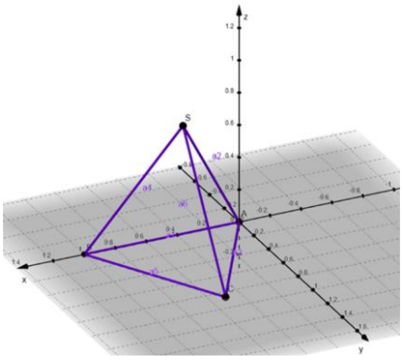

Рис. 1. Розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 простору $C_{[0,1]}$ у системі координат простору R^3

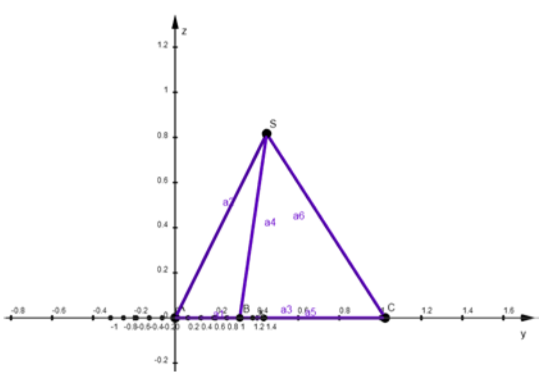

Рис. 2. Розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 при повороті системи координат

Зображення на Рисунку 1 отримано за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D. Щоб зобразити точки у цьому середовищі необхідно задати їх координати. Для цього, за допомогою формули Юнгіуса об'єму тетраедра через довжину його ребер, були розраховані координати вершин A, B, C, S тетраедра (Валько та ін., 2021). У цьому середовищі можна поворотом системи координат візуально впевнитись у тому, що точки y_1, y_2, y_3, y_4 дійсно не є плоско розміщеними. Систему координат повернемо таким чином, щоб точки A, B, C, S можна було спостерігати з точки, що знаходиться на площині XOY (рис. 2).

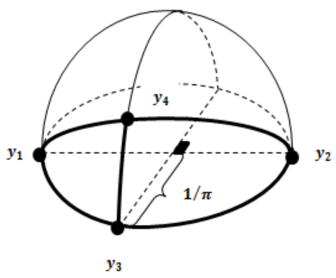

Рис. 3. Інтерпретація розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 простору C_L у просторі R^3

Якщо розглядати функції y_1, y_2, y_3, y_4 у якості точок простору C_L, то за метрикою цього простору відстані між ними будуть:

$$\rho_{12} = 1; \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0{,}5.$$

При таких відстанях між цими точками, їх взаємне розміщення не можна зобразити у геометрії Евкліда. Вони не можуть лежати на одній прямій (точки y_1, y_3, y_4 утворюють рівносторонній трикутник). Ці точки не можуть лежати у одній площині, оскільки точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно ($\rho_{13} + \rho_{23} = \rho_{12}$), а також точки y_1, y_2, y_4 розміщені прямолінійно ($\rho_{14} + \rho_{24} = \rho_{12}$), тому точки y_3 і y_4 повинні співпадати, хоча відстань між ними додатна. Крім того, з точок y_1, y_2, y_3, y_4 не можна побудувати тетраедр, оскільки при будь якій орієнтації три його вершини будуть прямолінійно розміщені.

Можна побудувати інтерпретацію такого розміщення, використавши сферу у просторі R^3. Розмістимо точки y_1, y_2, y_3, y_4 на півсфері радіуса $\frac{1}{\pi}$. За відстань між парою точок на півсфері візьмемо довжину дуги великого півкола, яка з'єднує ці точки (Рис. 3).

При такій інтерпретації, точки y_1 і y_2 будуть кінцями діаметра великого кола, довжина якого дорівнює дві одиниці, а точки y_3 і y_4 будуть лежати на серединах двох півкіл, що з'єднують точки y_1 і y_2. Причому, точки y_1, y_3, y_4, а також точки y_2, y_3, y_4, будуть утворювати рівносторонні сферичні трикутники.

Приклад 2. На відрізку $[0; 1]$ розглянемо наступні функції: $y_1 = x$, $y_2 = -x$, $y_3 = -x + 1$, $y_4 = x - 1$. У роботі Kuz'mich V. та Kuzmich L. (2021) показано, що функції y_1, y_2, y_3, y_4, як точки простору $C_{[0,1]}$, прямолінійно розміщені у цьому просторі. Особливістю такого розміщення є те, що кожна з цих точок «лежить між» деякими двома з них. У геометрії Евкліда серед чотирьох прямолінійно розміщених точок дві з них обов'язково будуть «крайніми», а дві – «внутрішніми» (Каган, 1956). Більше того, на відміну від геометрії Евкліда, точки y_1, y_2, y_3, y_4 не будуть плоско розміщеними у цьому просторі. Дійсно, знайдемо відстані між цими точками за метрикою простору $C_{[0,1]}$:

$$\rho_{12} = 2; \rho_{13} = 1; \rho_{14} = 1; \rho_{23} = 1; \rho_{24} = 1; \rho_{34} = 2.$$

За формулою (1) знаходимо числові характеристики кутів, які мають своєю вершиною, наприклад, точку y_1:

$$\varphi_{213} = \frac{\rho_{12}^2+\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} = \frac{2^2+1^2-1^2}{2\cdot 2\cdot 1} = 1; \varphi_{214} = \frac{\rho_{12}^2+\rho_{14}^2-\rho_{24}^2}{2\rho_{12}\rho_{14}} = \frac{2^2+1^2-1^2}{2\cdot 2\cdot 1} = 1; \varphi_{314} = \frac{\rho_{13}^2+\rho_{14}^2-\rho_{34}^2}{2\rho_{13}\rho_{14}} = \frac{1^2+1^2-2^2}{2\cdot 1\cdot 1} = -1.$$

Ці значення підставимо у ліву частину формули (2):

$$1 + \varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) - 1^2 - 1^2 - (-1)^2 \neq 0.$$

Отже, точки y_1, y_2, y_3, y_4 не є плоско розміщеними у просторі $C_{[0,1]}$.

Якщо запропонувати студентам навести геометричну інтерпретацію Прикладу 2 у просторі R^2, то це може викликати у них складнощі, оскільки у цьому просторі пряма лінія завжди належить площині. Однак, така інтерпретація можлива, якщо за відстань між точками у просторі $C_{[0,1]}$ взяти довжину деякої дуги лінії, що з'єднує образи цих точок у просторі R^2. Наприклад, щоб продемонструвати у просторі R^2 взаємне розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4, розмістимо їх на колі радіуса $\frac{2}{\pi}$, а за відстань між парою цих точок можна взяти довжину меншої з двох дуг кола, які з'єднують ці точки (Рис. 4).

Той факт, що точки y_1, y_2, y_3, y_4 не є плоско розміщеними у просторі $C_{[0,1]}$ зручно проілюструвати, як і у Прикладі 1, на півсфері радіуса $\frac{2}{\pi}$ у просторі R^3 (Рис. 5).

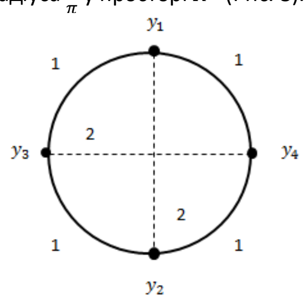

Рис. 4. Інтерпретація прямолінійного розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 простору $C_{[0,1]}$ у просторі R^2

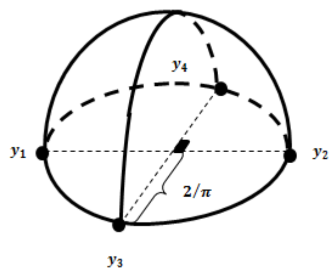

Рис. 5. Інтерпретація розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 простору $C_{[0,1]}$ у просторі R^3

При такій інтерпретації, точки y_1 і y_2, а також точки y_3 і y_4, будуть, відповідно, кінцями двох взаємно перпендикулярних діаметрів великого кола, довжина якого дорівнює чотири одиниці.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати роботи вказують на те, що візуалізація геометричних властивостей метричних просторів сприяє більш глибокому та усвідомленому сприйняттю і розумінню студентами основ теорії метричних просторів. Аналогія окремих співвідношень між точками метричного простору з відповідними співвідношеннями у геометрії Евкліда дає можливість прослідкувати зміну характерних геометричних властивостей простору при зміні його метрики. Застосування спеціальних графічних можливостей відповідних програмних засобів дозволяє не лише візуалізувати взаємне розміщення точок метричного простору, але і прослідкувати його зміну при зміні точки спостереження цього розміщення. Подальші розвідки слід спрямувати на встановлення співвідношень паралельності і перпендикулярності множин точок у метричних просторах та їх візуалізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров, А.Д. (1948). *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*. Москва-Ленинград: ОГИЗ.
2. Давидов, М.О. (1979). *Курс математичного аналізу*. *Частина 3*. Київ: Вища школа.
3. Деза, Е. & Деза, М. (2008). *Энциклопедический словарь расстояний*. Москва: Мир.
4. Каган, В.Ф. (1956). *Основания геометрии*. *Часть 2*. Москва-Ленинград: Гостехиздат.
5. Каган, В.Ф. (1963). *Очерки по геометрии*. Москва: Издательство Московского университета.
6. Канторович, Л.В., & Акилов, Г.П. (1977). *Функциональный анализ*. Москва: Наука.
7. Колмогоров, А.М., & Фомін, С.В. (1974). *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*. Київ: Вища школа.
8. Валько, К.В., Кузьмич, В.І., Кузьмич, Л.В., & Савченко О.Г. (2021). Моделювання взаємного розміщення точок метричного простору. *Прикладні питання математичного моделювання, Херсонський національний технічний університет*, 4(2.1), 48-57.
9. Следзинский, И.Ф. (1973). *Формирование понятий расстояния и метрического пространства у учащихся общеобразовательной средней школы* [Автореф. дис. канд. пед. наук, Київський державний педагогічний інститут ім. О.М. Горького].
10. Філєр, З.Ю., & Чуйков, А.С. (2021). Методика пошуку комплексних розв'язків нерівностей способом нев'язки. *Фізико-математична освіта*, *5*(31), 73-78. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-011.
11. Berger, M. (2009). *Geometry I*. Springer.
12. Burago, D., Burago, Y., & Ivanov, S. (2001). *A course in metric geometry*. AMS.
13. Dovgoshei, A.A., & Dordovskii D.V. (2009). Betweenness relation and isometric imbeddings of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, *61*(10), 1556-1567.
14. Kuz'mich, V.I. (2019). Geometric properties of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, *71*(3), 435-454. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01656-1.
15. Kuz'mich, V.I., & Kuzmich, L.V. (2021). Elements of non-Euclidean geometry in the formation of the concept of rectilinear placement of points in schoolchildren. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840, 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012004.
16. Lénárt, I. (2020). The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 10(8), 2286-2333. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.810171.
17. Lénárt, I., & Rybak, A. (2017). Comparative Geometry in Primary and Secondary School. *In: The Pedagogy of Mathematics: Is There a Unifying Logic?* Johannesburg: Mapungubwe Institute for Strategic Reflection, 107-124.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Aleksandrov, A.D. (1948). *Vnutrennjaja geometrija vypuklyh poverhnostej [Internal geometry of convex surfaces]*. Moskva-Leningrad: OGIZ. (in Russian).
2. Davydov, M.O. (1979). *Kurs matematychnoho analizu. Chastyna 3 [Course of mathematical analysis. Part 3]*. Kyiv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian).
3. Deza, E. & Deza, M. (2008). *Jenciklopedicheskij slovar' rasstojanij [Encyclopedic Dictionary of Distances]*. Moskva: Mir. (in Russian).
4. Kagan, V.F. (1956). *Osnovanija geometrii. Chast' 2 [Foundations of geometry. Part 2]*. Moskva-Leningrad: Gostehizdat. (in Russian).
5. Kagan, V.F. (1963). *Ocherki po geometrii [Geometry essays]*. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta. (in Russian).
6. Kantorovich, L.V., & Akilov, G.P. (1977). *Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]*. Moskva: Nauka. (in Russian).
7. Kolmohorov, A.M., & Fomin, S.V. (1974). *Elementy teoriyi funktsiy i funktsional'noho analizu [Elements of the theory of functions and functional analysis]*. Kyyiv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian).
8. Valko, K.V., Kuz'mych, V.I., Kuzmych, L.V., & Savchenko, O.H. (2021). Modeliuvannia vzaiemnoho rozmishchennia tochok metrychnoho prostoru [Simulation of mutual placement of metric space points]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia, Khersonskyi natsionalnyi tekhnichnyi universytet*, 4(2.1), 48-57. (in Ukrainian).
9. Sledzinskij, I.F. (1973). *Formirovanie ponjatij rasstojanija i metricheskogo prostranstva u uchashhihsja obshheobrazovatel'noj srednej shkoly [Formation of the concepts of distance and metric space in secondary school students]*. Extended abstract of candidate's thesis. KSPI named after A.M. Gorky. (in Ukrainian).
10. Filier, Z.Iu., & Chuikov, A.S. (2021). Metodyka poshuku kompleksnykh rozviazkiv nerivnostei sposobom neviazky [The method of finding complex solutions of inequalities by the method of inconsistency]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 5(31), 73-78. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-031-5-011. (in Ukrainian).
11. Berger, M. (2009). *Geometry I*. Springer.
12. Burago, D., Burago, Y., & Ivanov, S. (2001). *A course in metric geometry*. AMS.
13. Dovgoshei, A.A., & Dordovskii D.V. (2009). Betweenness relation and isometric imbeddings of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 61(10), 1556-1567.
14. Kuz'mich, V.I. (2019). Geometric properties of metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71(3), 435-454. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01656-1
15. Kuz'mich, V.I., & Kuzmich, L.V. (2021). Elements of non-Euclidean geometry in the formation of the concept of rectilinear placement of points in schoolchildren. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840, 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012004
16. Lénárt, I. (2020). The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 10(8), 2286-2333. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.810171
17. Lénárt, I., & Rybak, A. (2017). Comparative Geometry in Primary and Secondary School. *In: The Pedagogy of Mathematics: Is There a Unifying Logic?* Johannesburg: Mapungubwe Institute for Strategic Reflection, 107-124.