В. Г. Самойленко, В. Б. Григор'єва
Херсонський державний університет
Херсон, Україна
vb.grigorieva@gmail.com

ОСОБЛИВОСТІ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛУ РІМАНА У НАВЧАННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Професійна підготовка майбутніх учителів математики передбачає двосторонні процеси викладання та навчання, формування професійно значимих знань, умінь та навичок, оволодіння системою відповідних потреб і мотивів, розвиток та саморозвиток особистості студента педагогічного закладу в процесі здобуття математичної освіти, результатом якого буде готовність до професійної діяльності у закладах середньої освіти. Проблема професійної підготовки студентів у процесі навчання математичного аналізу є багатоаспектною. Тому одна із актуальних нині проблем – через призму професійно-педагогічної спрямованості навчання, виходячи зі специфіки математичного аналізу як розділу науки та навчальної дисципліни, розкрити його можливості в контексті вдосконалення професійної підготовки майбутніх учителів математики. Ми зупинимося на математичному аспекті введення поняття інтегралу Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою.

Усюди нижче (без додаткових застережень) будемо припускати, що (X,ρ) – обмежений метричний простір, $\Re$ – вихідна алгебра на *X*, на якій задана міра, $\widetilde{\Re}$ – алгебра вимірних за Жорданом множин; $B(X)$ – σ-алгебра вимірних множин за Борелем, а $L(X)$ $\left(L(X)\supset\widetilde{\Re}\right)$– σ-алгебра вимірних множин за Лебегом; μ – міра Лебега на $L(X)$, побудована за вихідною мірою і є її продовженням [1].

Нехай на *X* визначена функція $f: X\to R^1$. *Інтегральною сумою* $\sigma(f,(P,\xi))$, для функції *f* та розбиття з обраними точками (P,ξ) $\left(\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i\in P_i\right)$, будемо називати суму $\sigma(f,(P,\xi))=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(P_i)$. Число *I* називається *інтегралом Рімана* від функції *f* на множині *X* з мірою μ, а сама функція інтегрованою за Ріманом на множині *X* з мірою μ, якщо: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon),\ \forall(P,\xi),\ \ \lambda(P)<\delta\ \ |I-\sigma(f,(P,\xi))|<\varepsilon$, незалежно від обраних точок ξ. Введемо позначення $I=(R)\int_X f(x)d\mu(x)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,(P,\xi))$.

Теорема (*необхідна умова інтегрованості*). Нехай $f\colon X\to R^1$ інтегрована на *X* за мірою μ, тоді *f(x)* обмежена на множині *X*.

Властивості та необхідна і достатня умова існування інтегралу Рімана співпадають з класичними властивостями інтегралу Рімана [2], доведення яких можна обговорити в даній ситуації.

Нехай (X,ρ) – компактний простір, алгебра $\Re$ і міри задані на *X* такі, що $B(X)\subset L(X)$. Крім того, будемо припускати, що міра Лебега μ, яка побудована на вихідній мірі, задовольняє умови:

1. $\forall x\in\mathrm{X},\quad \{x\}\in B(X)\subset L(X),\quad \mu(\{x\})=0;$
2. $\forall a\in\mathrm{X},\quad \forall\alpha,R\ \ \mu(S(a,\alpha R))\le \mathrm{K}(\alpha)\mu(S(a,R))$, де $S(a,R)=\{x\mid x\in\mathrm{X}, \rho(a,x)<R\}$;
3. Якщо $A\in L(X)$ і $\mu(A)=0$, то $\forall\varepsilon>0$ існує не більш ніж зчисленна система відкритих куль, яка є покриттям *A*, сума мір яких менше ε.

Відмітимо, що дані умови виконуються для міри Лебега в R^n, (при цьому $k\ (\alpha)$ залежить тільки від розмірності n і коефіцієнту гомотетії α), а також і в інших ситуаціях.

Теорема (*Лебега*). Нехай X – компактний простір; $f: X \to R^1$ обмежена на X і μ задовольняє вказаним умовам. Для того, щоб $f(x)$ була інтегрована на X необхідно і достатньо, щоб вона була неперервна на X за винятком множини точок міри Лебега 0.

Теорема. Нехай $f(x,y)$ інтегрована на області D і $\forall x \in [a,b]$ існує $I(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, тоді $I(x)$ інтегрована на $[a,b]$ і $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Все викладене вище справедливе, якщо φ_1 і φ_2 – кусково-неперервні. Для того, щоб в цьому переконатися, достатньо область розбити на скінчену кількість областей вказаного виду і скористатися властивістю інтегралу [2].

Теорема. Нехай $f(x): X \to R^1$ – неперервна, тоді Φ – кубована множина в $X \times [0,M]$ і $\upsilon(\Phi) = \int\limits_X f(x)d\mu(x)$.

Література

1. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Р. Ус, З.Г. Шефтель. – К. : Вища Школа, 1990. – 600 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3-х ч. / М.О. Давидов. – К. : Вища школа, 1991. – 648 с.

Анотація. Самойленко В.Г., Григор'єва В.Б. Особливості введення поняття інтегралу Рімана при викладанні математичного аналізу майбутнім вчителям математики. *В статті на прикладі розгляду конкретного питання даного курсу визначені математичні аспекти, які стосуються особливостей викладання матеріалу з урахуванням тих вимог, що висуваються нині до процесу підготовки фахівців в галузі освіти. Розглянуто введення поняття інтегралу Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою.*

Ключові слова: *математична підготовка майбутніх вчителів математики, математичний аналіз, функція, задана на метричному просторі з мірою, інтеграл Рімана.*

Summary. Samoylenko V.G., Hryhorieva V.B. Features of the introduction of Riman integral concept at the mathematical analysis for future teachers of mathematics. *The article deals with the methodical features of the introduction of the concept of the Riemann integral in the course of teaching the course of mathematical analysis in the pedagogical specialty. We consider the introduction of the concept of the Riemann integral for functions given on metric spaces with measure.*

Keywords*: mathematical preparation of future teachers of mathematics, mathematical analysis, function given on metric space with measure, Riemann integral.*

Аннотация. Самойленко В.Г., Григорьева В.Б. Особенности введения понятия интеграла Римана при преподавании математического анализа будущим учителям математики. *В статье на примере рассмотрения конкретного вопроса данного курса определены математические аспекты, касающиеся особенностей преподавания материала с учетом требований, предъявляемых сегодня к процессу подготовки специалистов в области образования. Рассмотрено введение понятия интеграла Римана для функций, заданных на метрических пространствах с мерой.*

Ключевые слова: *математическая подготовка будущих учителей математики, математический анализ, функция, заданная на метрическом пространстве с мерой, интеграл Римана.*