рекомендовать их применение в научных исследованиях и при изучении курсов физики в высших и средних специальных учебных заведениях, а также в школах.

ЗАМІНА ЗМІННИХ В ІНТЕГРАЛІ РІМАНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ЗАДАНІ НА МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ З МІРОЮ

Самойленко Валерій Георгійович,
к. ф.-м. н., доцент,
Григор'єва Валентина Борисівна,
к. пед. н., ст. викладач,
Херсонський державний університет,
м. Херсон, Україна

Вступ. Проблема професійної підготовки студентів у процесі навчання математичного аналізу є багатоаспектною. Одна із актуальних проблем – розкрити можливості математичного аналізу в справі вдосконалення професійної підготовки вчителів математики. Ми зупинимося на питанні заміни змінних в інтегралі Рімана.

Мета роботи. Мета роботи полягає у розкритті питання заміни змінних в інтегралі Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою.

Матеріали та методи. Виклад матеріалу заснований на підході, який використовує елементи топології та функціонального аналізу. Це дозволяє викладати матеріал за принципом: від загального до частинного. Крім того, такий підхід набагато спрощує доведення ряду властивостей, а також більш яскраво демонструє причинно-наслідкові зв'язки матеріалу, який викладається.

Результати та обговорення. Усюди нижче будемо припускати, що (X, ρ) – обмежений метричний простір, $\Re$ – вихідна алгебра на X, на якій задана міра, $\tilde{\Re}$ – алгебра вимірних за Жорданом множин; $B(X)$ – σ-алгебра вимірних множин за Борелем, а $L(X)$ $\left(L(X)\supset\widetilde{\Re}\right)$ – σ-алгебра вимірних множин за Лебегом; μ – міра Лебега на $L(X)$, побудована за вихідною мірою і є її продовженням. Нехай на X визначена функція $f: X\to R^1$. *Інтегральною сумою* $\sigma(f,(P,\xi))$ для функції f та розбиття з обраними точками (P,ξ) $\left(\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i\in P_i\right)$ будемо називати суму $\sigma(f,(P,\xi))=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\mu(P_i)$. Число I називається *інтегралом Рімана* від функції f на множині X з мірою μ, а сама функція – інтегрованою за Ріманом на множині X з мірою μ, якщо: $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)$, $\forall(P,\xi)$, $\lambda(P)<\delta$ $|I-\sigma(f,(P,\xi))|<\varepsilon$, незалежно від обраних точок ξ. Введемо позначення

$$I=(R)\int_X f(x)d\mu(x)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,(P,\xi)).$$

Нехай, як і вище, дано простір (X,ρ), з вихідною алгеброю $\Re$. Якщо на $\widetilde{\Re}$ (алгебра кубованих множин) задана міра μ, то з її допомогою можна ввести міру $\nu(E)=\int_E\varphi(x)d\mu(x)$, де $\varphi>0$ – інтегрована на X по мірі μ функція, а $E\in\widetilde{\Re}$.

Будемо говорити, що розбиття P – зв'язне та замкнене, якщо P_i – зв'язні, замкнені множини $i=1,2,\ldots,n$. Якщо $\forall\delta>0$ існує зв'язне, замкнене розбиття P простору X таке, що $\lambda(P)<\delta$, то будемо говорити, що X допускає зв'язні, замкнені розбиття.

Теорема. Нехай X – компактний простір, що допускає зв'язні, замкнені розбиття, а $\varphi(x)$ – неперервна функція. Якщо $f(x): X\to R^1$ і неперервна, то

$$\int_X f(x)d\nu(x)=\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x).$$

Доведення.

В силу неперервності $f\cdot\varphi$ вона інтегрована на X по мірі μ. Отже, інтеграли існують. Доведемо рівність. Для довільного зв'язного, замкненого розбиття P з обраними точками ξ множини X маємо $\sum_i f(\xi_i)\nu(P_i)=\sum_i f(\xi_i)\varphi(\overline{\xi}_i)\mu(P_i)$, де $\overline{\xi}_i\in P_i$ та існують згідно з теоремою про середнє, а $\xi_i\in P_i$ – довільні обрані точки. Оскільки $\xi_i\in P_i$ – довільні, покладемо

$\xi_i = \overline{\xi}_i$, тоді $\sigma_\nu\left(f,\left(P,\overline{\xi}\right)\right) = \sum_i f\left(\overline{\xi}_i\right)\nu(P_i) = \sum_i f\left(\overline{\xi}_i\right)\varphi\left(\overline{\xi}_i\right)\mu(P_i) = \sigma_\mu\left(f,\left(P,\overline{\xi}\right)\right)$, де зліва та справа – інтегральні суми для функцій $f, f\cdot\varphi$ та мір ν і μ відповідно. Враховуючи, що $f, f\cdot\varphi$ – інтегровані функції, переходячи у рівності до границі при $\lambda(P)\to 0$ отримаємо $\int\limits_X f(x)d\nu(x) = \int\limits_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)$.

Розглянемо наступну ситуацію. Нехай задано компактний простір (X,ρ). Крім того, задано простір $(Y,\overline{\rho})$ і гомеоморфізм $\psi(x): X\to Y$. Тоді на Y індукуємо алгебру $\wp = \{\psi(E) \mid E\in\widetilde{\Re}\}$, $\widetilde{\Re}$ – алгебра кубованих множин. На $\wp$ розглянемо міру ν: $\nu(\psi(E)) = \int\limits_E \varphi(x)d\mu(x)$, де $E\in\widetilde{\Re}$, $\varphi(x): X\to R^1$ – додатна неперервна функція.

Теорема. Нехай X – компактна множина, яка допускає зв'язні, замкнені розбиття. Якщо $f(y): Y\to R^1$ неперервна, то $\int\limits_Y f(y)d\nu(y) = \int\limits_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x)$.

Доведення.

Оскільки ψ – гомеоморфізм $X\to Y$, то міра ν задає міру на X, тобто $\forall E\in\widetilde{\Re}$ $\overline{\nu}(E) = \nu(\psi(E)) = \int\limits_E \varphi(x)d\mu(x)$, і в силу неперервності $f(\psi(x))$ вона інтегрована на X з мірою $\overline{\nu}$. Тому, в силу попередньої теореми $\int\limits_X f(\psi(x))d\overline{\nu}(x) = \int\limits_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x)$. З іншого боку, для довільного розбиття $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ множини X $\{\psi(P_i)\}$ буде розбиттям Y і отримаємо $\sum\limits_{i=1}^n f(\psi(\xi_i))\overline{\nu}(P_i) = \sum\limits_{i=1}^n f(\eta_i)\nu(\psi(P_i))$.

При $\lambda(P)\to 0$ інтегральна сума зліва збігається до $\int\limits_X f(\psi(x))d\overline{\nu}(x)$, а інтегральна сума справа до $\int\limits_Y f(y)d\nu(y)$ $(\lambda(\psi(P))\to 0$, так як ψ – гомеоморфізм компактного простору $X\to Y$). Отже, отримаємо (при переході до границі) $\int\limits_X f(\psi(x))d\overline{\nu}(x) = \int\limits_Y f(y)d\nu(y)$. Враховуючи раніше доведену рівність, маємо:

$$\int\limits_Y f(y)d\nu(y) = \int\limits_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x).$$

Зауваження. При описаному вище означенні $\nu(\psi(E))$ $(\forall E\in\widetilde{\Re})$, якщо X –

компактна і зв'язна, а $B(x)\subset L(x)$, то для $\forall x\in X$ отримаємо

$$\varphi(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\nu(\psi(\overline{S}(x,\delta)))}{\mu(\overline{S}(x,\delta))}=\frac{d\upsilon}{d\mu}(x)$$

Рівність з теореми можна записати у вигляді:

$$\int_Y f(y)d\nu(y)=\int_X f(\psi(x))\frac{d\nu}{\partial\mu}(x)d\mu(x),$$

де $\psi: X\to Y$ – гомеоморфізм; $\nu(\psi(E))=\int_E\varphi(x)d\mu(x)$, $E\in\widetilde{\Re}(X)$, $\varphi(x)\geq 0$ і неперервна на X.

Нехай $\psi(x): X\to Y$ – гомеоморфізм, $\Re$ – вихідна алгебра в X, а $\wp=\psi(\Re)$ в Y. Припустимо, що в X задана міра μ, а в Y – ν. Крім того, $\Re$ – алгебра, яка складається із множин виду $E=\bigcup_{i=1}^{n}P_i$, де P_i – зв'язні і попарно не перетинаються (що виконується в усіх доповненнях). Нехай на X визначена невід'ємна, обмежена функція $\varphi: X\to R^1$, яка інтегрована на X.

Теорема. Якщо для будь-якої зв'язної множини $B\in\Re$ $\nu(\psi(B))=\int_B\varphi(x)d\mu(x)$, то $\forall A\in\widetilde{\Re}$, $\upsilon(\psi(A))=\int_A\varphi(x)d\mu(x)$.

Доведення.

Оскільки φ – неперервна, то вона інтегрована на $A\subset X$ $\left(A\subset\widetilde{\Re}\right)$. Покажемо спочатку, що якщо $A\in\widetilde{\Re}$, то $\exists k>0$ таке, що $\nu(\psi(A))\leq k\mu(A)$. Оскільки A вимірна за Жорданом, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists E\in\Re$, таке що $A\subset E$ і $\mu(E)-\mu(A)<\varepsilon\mu(A)$.

$$\nu(\psi(A))\leq\nu(\psi(E))=\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n}\psi(P_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\nu(\psi(P_i))=\sum_{i=1}^{n}\int_{P_i}\varphi(x)d\mu(x)\leq M\sum_{i=1}^{n}\mu(P_i)=M\mu(E)<M(1+\varepsilon)\mu(A),$$

де $M=\sup_X|\varphi(x)|$. Для довільного $\varepsilon>0$ і $A\in\widetilde{\Re}$ $\exists E_\varepsilon\in\Re$ ($\exists E_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^{n}P_i$, P_i – зв'язні і попарно не перетинаються), $\mu(E_\varepsilon\setminus A)<\varepsilon$.

$$\left|\nu(\psi(A))-\int_A\varphi(x)d\mu(x)\right|\leq\left|\nu(\psi(A))-\nu(\psi(E_\varepsilon))\right|+\left|\nu(\psi(E_\varepsilon))-\int_{E_\varepsilon}\varphi d\mu\right|+$$

$$+\left|\int_{E_\varepsilon}\varphi d\mu(x)-\int_A \varphi d\mu(x)\right|\le \nu(\psi(E_\varepsilon \setminus A))+\sum_{i=1}^{n}\left|\nu(\psi(P_i))-\int_{P_i}\varphi d\mu(x)\right|+\left|\int_{E_\varepsilon\setminus A}\varphi d\mu(x)\right|\le$$
$$\le k\mu(E_\varepsilon \setminus A)+M\mu(E_\varepsilon \setminus A)<(k+M)\varepsilon$$

Оскільки нерівність виконується для будь-якого $\varepsilon>0$, то $\upsilon(\psi(A))=\int_A \varphi(x)d\mu(x)\ \ \forall A\in\widetilde{\Re}$.

Теорема. Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$, а $\psi(t):[\alpha,\beta]\to[a,b]$ – неперервно-диференційовна, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і строго монотонна. Тоді $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\psi'(t)dt$.

Висновки. Наведений метод викладання відрізняється від класичного, з яким можна познайомитися в будь-якій книзі з математичного аналізу. Ми маємо надію, що комбінація даного матеріалу з класичним викладанням поглибить знання студентів.

ПРИМЕНЕНИЕ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ

Уразбаева К.Т.
Казахский гуманитарно- юридический
инновационный университет
г.Семей, Республика Казахстан

Любой инновационный процесс затрагивает цели, структуру, задачи, технологию и человеческие ресурсы организации. Эти внутренние переменные связаны друг с другом, например, внедрение компьютеров в учебный процесс повлечет за собой изменения и в профессионально-квалификационной