Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Самойленко В.Г., Григор'єва В.Б., Гнєдкова О.О., Котова О.В. Особливості здійснення заміни змінних в інтегралі Рімана в курсі математичного аналізу при підготовці майбутніх вчителів математики. Фізико-математична освіта. 2021. Випуск 1(27). С. 82-88.

Samoylenko V., Hryhorieva V., Hniedkova O., Kotova O. Peculiarities of variables replacement in the Rieman integral in the mathematical analysis course in future teachers of mathematics training. Physical and Mathematical Education. 2021. Issue 1(27). P. 82-88.

DOI 10.31110/2413-1571-2021-027-1-013
УДК 372.851.2

В.Г. Самойленко
Херсонський державний університет, Україна
Samoylenko1@ukr.net
В.Б. Григор'єва
Херсонський державний університет, Україна
vb.grigorieva@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7388-4287
О.О. Гнєдкова
Херсонський державний університет, Україна
gnedkova84@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5194-2194
О.В. Котова
Херсонський державний університет, Херсон, Україна
olga-kotova@ukr.net
ORCID: 0000-0002-5533-3844

ОСОБЛИВОСТІ ЗДІЙСНЕННЯ ЗАМІНИ ЗМІННИХ В ІНТЕГРАЛІ РІМАНА В КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

АНОТАЦІЯ

В статті розглядаються особливості введення заміни змінних в інтегралі Рімана у процесі викладання курсу математичного аналізу на педагогічних спеціальностях вищих навчальних закладів.

Формулювання проблеми. *У зв'язку з тим, що на даний час середня загальноосвітня та професійна освіта вступили у принципово новий етап свого розвитку, характерними рисами якого є розбудова освіти на основі нових прогресивних концепцій, запровадження у навчально-виховний процес сучасних педагогічних та інформаційних технологій, науково-методичних досягнень, особливо актуальною постає проблема вдосконалення професійної підготовки вчителів математики. Математичний аналіз має провідне значення у підготовці майбутніх вчителів математики. В статті на прикладі розгляду конкретного питання даного курсу визначені математичні аспекти, які стосуються особливостей викладання матеріалу з урахуванням тих вимог, що висуваються нині до процесу підготовки фахівців у галузі освіти. Розглянуто питання заміни змінних в інтегралі Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою, зокрема, і в кратних інтегралах.*

Матеріали і методи. *Загальні методи математичного аналізу та аналіз математичної літератури щодо обчислення кратних інтегралів та інтегралу Рімана із застосуванням методу заміни змінних, аналіз та узагальнення власного педагогічного досвіду та педагогічного досвіду провідних вчителів та науковців.*

Результати. *В роботі розглянуто авторський підхід щодо здійснення заміни змінних в інтегралі в загальному випадку, заміни змінних в інтегралі Рімана по відрізку, а також для кратних інтегралів від функцій, заданих на метричних просторах з мірою.*

Висновки. *Підхід, розглянутий в статті, має певні переваги, які пояснюються тим, що кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли вписуються в дану схему та одержуються в якості прикладів при відповідному виборі простору та міри. Саме тому такий підхід при підготовці майбутніх вчителів математики сприяє професійній орієнтації навчання математичного аналізу.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *математичний аналіз, функція, задана на метричному просторі з мірою, інтеграл Рімана, інформаційні технології, змінна.*

ВСТУП

Постановка проблеми. Професійна підготовка майбутніх учителів математики передбачає, відповідно, двосторонні процеси викладання та навчання професійно значимих знань, умінь та навичок, формування та оволодіння системою відповідних потреб і мотивів, розвиток та саморозвиток особистості студента педагогічного закладу у процесі здобуття математичної освіти, результатом якого буде готовність до професійної діяльності у загальноосвітньому закладі. Проблема професійної підготовки студентів у процесі навчання математичного аналізу є багатоаспектною. Тому одна із актуальних на сьогодні проблем – через призму професійно-педагогічної спрямованості навчання, виходячи із специфіки математичного аналізу як розділу науки та навчальної дисципліни, розкрити його можливості у процесі вдосконалення професійної підготовки вчителів математики. Ми зупинимось на математичному аспекті заміни змінних в інтегралі Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою.

Аналіз актуальних досліджень. Початки інтегральних методів простежуються в працях Архімеда, який користувався ними при розв'язуванні багатьох геометричних задач та доведенні теорем. Вдосконалення методів Архімеда, створення інтегрального числення та його розвиток здійснювалися в роботах Кеплера, Кавальєрі, Торрічеллі, Паскаля, Ферма, Валліса, Роберваля, Барроу, Ньютона, Лейбніца, братів Якоба і Іоганна Бернуллі, Ейлера, Коші, Рімана. Різні причини спонукали математиків займатися інтегралом. Зокрема, для Рімана таким джерелом були тригонометричні ряди: визначений інтеграл з'явився у нього при розв'язуванні задачі про розкладання довільної функції в тригонометричний ряд (Березанський, 1990). Для подальших узагальнень інтеграла всередині самої математики повинні були скластися умови, які допускають це. Такі умови створила розроблена в кінці XIX ст. і початку XX ст. теорія множин, з найважливішим поняттям міри множини (Давидов, 1991). Виникли нові поняття – інтеграл Лебега, а також узагальнений інтеграл Рімана.

Основна мета статті – розкрити питання заміни змінних в інтегралі Рімана для функцій, заданих на метричних просторах з мірою, зокрема, і в кратних інтегралах.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Усюди нижче (без додаткових застережень) будемо припускати, що (X,ρ) – обмежений метричний простір, $\Re$ – вихідна алгебра на *X*, на якій задана міра, $\tilde{\Re}$ – алгебра вимірних за Жорданом множин; $B(X)$ – σ-алгебра вимірних множин за Борелем, а $L(X)$ $\left(L(X)\supset\tilde{\Re}\right)$– σ-алгебра вимірних множин за Лебегом; μ – міра Лебега на $L(X)$, побудована за вихідною мірою і є її продовженням (Березанський, 1990).

Розбиттям P множини *X* назвемо довільну систему $\{P_i\}_{i=1}^n$ підмножини *X*, що задовольняє наступним умовам:

а) $P_i \in \tilde{\Re}$, *i* = 1,…, *n*.

б) $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = X$, $\mu(P_i \cap P_j) = 0$, $i \neq j$;

в) $\mu(P_i) > 0$; *i* = 1,2,…, *n*.

Число $\lambda(P) = \max_{i=1,\dots,n} d(P_i)$ – параметр розбиття, де $d(P_i)$ діаметр множини P_i $\left(d(P_i) = \sup_{x,x'\in P_i} \rho(x,x') \right)$.

При цьому, будемо припускати, що вихідна алгебра $\Re$ і міра такі, що виконується умова: $\forall\delta > 0$ існує розбиття *P* таке, що $\lambda(P) < \delta$. Відмітимо, що ця умова виконується всюди нижче в усіх конкретних ситуаціях.

Нехай на *X* визначена функція $f: X \to R^1$. *Інтегральною сумою* $\sigma(f,(P,\xi))$, для функції *f* та розбиття з обраними точками (P,ξ) $\left(\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in P_i\right)$, будемо називати суму $\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(P_i)$. Число *I* називається *інтегралом Рімана* від функції *f* на множині *X* з мірою μ, а сама функція інтегрованою за Ріманом на множині *X* з мірою μ, якщо: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon),\ \forall(P,\xi),\ \lambda(P) < \delta\ \ |I - \sigma(f,(P,\xi))| < \varepsilon$, незалежно від обраних точок ξ.

Введемо позначення $I = (R)\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,(P,\xi)).$ Усі властивості інтеграла Рімана виконуються стандартно. Більш детально по це можна дізнатися в (Самойленко, Григор'єва, 2019).

Розглянемо заміну змінних в інтегралі в загальному випадку. Нехай, як і вище, дано простір (X,ρ), з вихідною алгеброю $\Re$. Якщо на $\tilde{\Re}$ (алгебра кубованих множин) задана міра μ, то з її допомогою можна ввести міру $\nu(E) = \int_E \varphi(x)d\mu(x)$, де $\varphi > 0$ інтегрована на *X* по мірі μ функція, а $E \in \tilde{\Re}$.

Будемо говорити, що розбиття *P* – зв'язне та замкнене, якщо P_i - зв'язні, замкнені множини $i = 1,2,\dots,n$. Якщо $\forall\delta > 0$ існує зв'язне, замкнене розбиття *P* простору *X* таке, що $\lambda(P) < \delta$, то будемо говорити, що *X* допускає зв'язні, замкнені розбиття.

Теорема. Нехай *X* – компактний простір, що допускає зв'язні, замкнені розбиття, а $\varphi(x)$ – неперервна функція. Якщо $f(x): X \to R^1$ і неперервна, то $\int_X f(x)d\nu(x) = \int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)$.

Доведення. В силу неперервності $f \cdot \varphi$ вона інтегрована на *X* по мірі μ. Отже, інтеграли існують, доведемо рівність. Для довільного зв'язного, замкненого розбиття *P* з обраними точками ξ множини *X* маємо

$\sum_i f(\xi_i)\nu(P_i)=\sum_i f(\xi_i)\varphi(\overline{\xi}_i)\mu(P_i)$, де $\overline{\xi}_i \in P_i$ та існують згідно з теоремою про середнє, а $\xi_i \in P_i$ – довільні обрані точки. Оскільки $\xi_i \in P_i$ – довільні, покладемо $\xi_i = \overline{\xi}_i$, тоді

$$\sigma_\nu\left(f,\left(P,\overline{\xi}\right)\right)=\sum_i f\left(\overline{\xi}_i\right)\nu(P_i)=\sum_i f\left(\overline{\xi}_i\right)\varphi\left(\overline{\xi}_i\right)\mu(P_i)=\sigma_\mu\left(f,\left(P,\overline{\xi}\right)\right),$$

де зліва та справа знаходяться інтегральні суми для функцій $f, f\cdot\varphi$ та мір ν і μ відповідно. Враховуючи, що $f, f\cdot\varphi$ інтегровані функції, переходячи у рівності до границі при $\lambda(P)\to 0$ отримаємо

$$\int_X f(x)d\nu(x)=\int_X f(x)\varphi(x)d\mu(x).$$

Зауваження. Теорема справедлива, якщо $f(x)$ обмежена та неперервна за виключенням множини точок міри Лебега 0 і виконуються умови теореми Лебега.

Розглянемо наступну ситуацію. Нехай дано компактний простір (X,ρ). Крім того, дано простір $(Y,\overline{\rho})$ і гомеоморфізм $\psi(x): X\to Y$. Тоді на *Y* індукуємо алгебру $\wp=\{\psi(E)\mid E\in\widetilde{\Re}\}$ $\widetilde{\Re}$ – алгебра кубованих множин.

На $\wp$ розглянемо міру ν: $\nu(\psi(E))=\int_E \varphi(x)d\mu(x)$, де $E\in\widetilde{\Re}$. $\varphi(x): X\to R^1$ – додатна неперервна функція.

Теорема. Нехай *X* – компактна множина, яка допускає зв'язні, замкнені розбиття. Якщо $f(y): Y\to R^1$ неперервна, то $\int_Y f(y)d\nu(y)=\int_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x)$.

Доведення. Оскільки ψ гомеоморфізм $X\to Y$, то міра ν задає міру на *X*, тобто $\forall E\in\widetilde{\Re}$ $\overline{\nu}(E)=\nu(\psi(E))=\int_E \varphi(x)d\mu(x)$, і в силу неперервності $f(\psi(x))$ вона інтегрована на *X* з мірою $\overline{\nu}$. Тому, в силу попередньої теореми,

$$\int_X f(\psi(x))d\overline{\nu}(x)=\int_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x).$$

З іншого боку, для довільного розбиття $P=\{P_i\}_{i=1}^n$ множини *X*, $\{\psi(P_i)\}$ буде розбиттям Y і отримаємо $\sum_{i=1}^n f(\psi(\xi_i))\overline{\nu}(P_i)=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\nu(\psi(P_i))$.

При $\lambda(P)\to 0$ інтегральна сума зліва збігається до $\int_X f(\psi(x))d\overline{\nu}(x)$, а інтегральна сума справа до $\int_Y f(y)d\nu(y)$ ($\lambda(\psi(P))\to 0$, так як ψ – гомеоморфізм компактного простору $X\to Y$). Таким чином, отримаємо (при переході до границі) $\int_X f(\psi(x))d\overline{\nu}(x)=\int_Y f(y)d\nu(y)$. Враховуючи раніше доведену рівність маємо:

$$\int_Y f(y)d\nu(y)=\int_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x).$$

Розглянемо заміну змінних в інтегралі Рімана по відрізку. Нехай $\psi(x): X\to Y$ гомеоморфізм, $\Re$ – вихідна алгебра в *X*, а $\wp=\psi(\Re)$ в *Y*. Припустимо, що в *X* задана міра μ, а в *Y* – ν. Крім того $\Re$ – алгебра, яка складається із множин виду $E=\bigcup_{i=1}^n P_i$, де P_i - зв'язні і попарно не перетинаються. Нехай на *X* визначена невід'ємна, обмежена функція $\varphi: X\to R^1$, яка інтегрована на *X.*

Теорема. Якщо для будь-якої зв'язаної множини $B\in\Re$ $\nu(\psi(B))=\int_B \varphi(x)d\mu(x)$, то $\forall A\in\widetilde{\Re}$, $\upsilon(\psi(A))=\int_A \varphi(x)d\mu(x)$.

Доведення. Оскільки φ – неперервна, то вона інтегрована на $A\subset X$ $(A\subset\widetilde{\Re})$. Покажемо спочатку, що якщо $A\in\widetilde{\Re}$, то $\exists k>0$ таке, що $\nu(\psi(A))\le k\mu(A)$. Оскільки *A* вимірна за Жорданом (Березанський, 1990), то $\forall\varepsilon>0$ $\exists E\in\Re$, таке що $A\subset E$ і $\mu(E)-\mu(A)<\varepsilon\mu(A)$.

$$\nu(\psi(A))\le\nu(\psi(E))=\nu\left(\bigcup_{i=1}^n\psi(P_i)\right)=\sum_{i=1}^n\nu(\psi(P_i))=\sum_{i=1}^n\int_{P_i}\varphi(x)d\mu(x)\le M\sum_{i=1}^n\mu(P_i)=M\mu(E)<M(1+\varepsilon)\mu(A),$$

де $M=\sup_X|\varphi(x)|$. Для довільного $\varepsilon>0$ і $A\in\widetilde{\Re}$ $\exists E_\varepsilon\in\Re$ ($\exists E_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^n P_i$, P_i - зв'язні і попарно не перетинаються), $\mu(E_\varepsilon\setminus A)<\varepsilon$.

$$\left|\nu(\psi(A))-\int_A\varphi(x)d\mu(x)\right|\le|\nu(\psi(A))-\nu(\psi(E_\varepsilon))|+\left|\nu(\psi(E_\varepsilon))-\int_{E_\varepsilon}\varphi d\mu\right|+$$

$$+\left|\int_{E_\varepsilon}\varphi d\mu(x)-\int_A\varphi d\mu(x)\right|\le\nu(\psi(E_\varepsilon\setminus A))+\sum_{i=1}^{n}\left|\nu(\psi(P_i))-\int_{P_i}\varphi d\mu(x)\right|+\left|\int_{E_\varepsilon\setminus A}\varphi d\mu(x)\right|\le$$
$$\le k\mu(E_\varepsilon\setminus A)+M\mu(E_\varepsilon\setminus A)<(k+M)\varepsilon$$

Оскільки нерівність виконується для будь-якого $\varepsilon>0$, то $\upsilon(\psi(A))=\int_A\varphi(x)d\mu(x)\quad\forall A\in\tilde{\Re}$.

Теорема. Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$, а $\psi(t):[\alpha,\beta]\to[a,b]$ неперервно-диференційована, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і строго монотонна. Тоді $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\psi'(t)dt$.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Доведення наведених вище тверджень та основних результатів, що стосуються заміни змінних в інтегралі Рімана в кратних інтегралах, про які буде йти мова далі, є авторськими. Практичне значення такого підходу полягає в тому, що в дану схему повністю вписуються кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли. При цьому усі звичайні приклади одержуються при відповідному виборі простору та міри.

Розглянемо питання про заміну змінних в інтегралі Рімана в кратних інтегралах.

Нехай $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ неперервно-диференційовані функції і $\psi(\xi,\eta)=(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ гомеоморфізм з $X=[a,b)\times[c,d)$ на $Y=\psi(X)\subset R^2$.

Відмітимо, що будь-яка точка $(x,y)\in Y$ характеризується однозначно точкою $(\xi,\eta)\in X$, тому для будь-якої точки з *Y* відповідні ξ,η називаються *криволінійними координатами*.

В якості вихідної алгебри $\Re$ на *X* розглянемо алгебраїчну оболонку множин виду $[\alpha,\beta)\times[\gamma,\tau)$, а міра μ в *X* і ν в *Y* – стандартні міри Лебега на площині (площа).

Розглянемо множину $\Delta=[\xi,\xi+\delta]\times[\eta,\eta+\delta]$ – квадрат з вершиною (ξ,η). Змінна точка відрізка P_1P_2 має вид $(\xi+t\delta,\eta)$, $t\in[0,1]$ і переходить в змінну точку $\psi(\xi+t\delta,\eta)=(x(\xi+t\delta,\eta),y(\xi+t\delta,\eta))=\psi(\xi,\eta)+\psi'(\xi,\eta)\cdot(t\delta,0)+0(\delta)$ дуги $P_1'P_2'=\psi(P_1P_2)$.

Далі, враховуючи вигляд похідної відображення, отримаємо

$$\psi(\xi+t\delta,\eta)=(x,y)+\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial x}{\partial\eta}\\\frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\delta\\0\end{pmatrix}+0(\delta)=(x,y)+\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)t\delta,\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)t\delta\right)+0(\delta)=$$
$$=(x,y)+t\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\xi},\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\delta+0(\delta),\qquad 0(\delta)=(0_1(\delta),0_2(\delta)).$$

З іншого боку, змінна точка на векторі $\overline{P_1'P_2'}$ має координати:

$$(x,y)+t(x(\xi+\delta,\eta)-x(\xi,\eta),y(\xi+\delta,\eta)-y(\xi,\eta))=(x,y)+$$
$$+t\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi+\theta\delta,\eta)\delta,\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi+\theta\delta,\eta)\delta\right)=(x,y)+t\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)+0_1(\delta),\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)+0_2(\delta)\right)\delta=$$
$$=(x,y)+t\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta),\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right)\delta+0(\delta^2),\qquad 0\le\theta\le1$$

Таким чином, відстань між відповідними змінними точками дуги $P_1'P_2'$ і вектора $\overline{P_1'P_2'}$ є $0(\delta)$. Отже, відстань від змінної точки на дузі $P_1'P_2'$ до відрізка $P_1'P_2'$ буде $0(\delta)$. Таким чином, площа $S_{P_1'P_2'}$ фігури, обмеженої дугою $P_1'P_2'$ і відрізком $P_1'P_2'$, менша $0(\delta)\cdot\left\|\overline{P_1'P_2'}\right\|_Y=0(\delta)\left\|\overline{\psi(P_1)\psi(P_2)}\right\|_Y=0(\delta^2)$ (оскільки $\psi(\xi,\eta)$ неперервно-диференційована функція, то

$$\left\|\overline{\psi(P_1)\psi(P_2)}\right\|_Y=\sqrt{|x(\xi+\delta,\eta)-x|^2+|y(\xi+\delta,\eta)-y|^2}\le k\delta,$$

де $k>\sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right|^2+\left|\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right|^2}$).

Аналогічно площі $S_{P_1'P_4'}$, $S_{P_2'P_3'}$, $S_{P_3'P_4'}$ фігур, що утворені відповідними дугами і відрізками дорівнюють $0(\delta)^2$, отже $S_{\psi(P_1P_2P_3P_4)}=S_{P_1'P_2'P_3'P_4'}+0(\delta)^2$, ($P_1P_2P_3P_4$, $P_1'P_2'P_3'P_4'$ – чотирикутники). Відмітимо, що вектори $\overline{P_1P_2}$ і $\overline{P_4P_3}$ мають координати:

$$\overline{P_1'P_2'}=\psi(\xi+\delta,\eta)-\psi(\xi,\eta)=(x(\xi+\delta,\eta)-x(\xi,\eta),y(\xi+\delta,\eta)-y(\xi,\eta))=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta),\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right)\delta+0(\delta)$$

$$\overline{P_4' P_3'} = \psi(\xi+\delta,\eta+\delta) - \psi(\xi,\eta+\delta) = \left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}\delta + \frac{\partial x}{\partial \eta}\delta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi}\delta + \frac{\partial y}{\partial \eta}\delta\right) -$$

$$-\left(x + \frac{\partial x}{\partial \eta}\delta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta}\delta\right) + 0(\delta) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta), \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)\right)\delta + 0(\delta)$$

Тобто вектор $\overline{P_1' P_2'}$ відрізняється від вектора $\overline{P_4' P_3'}$ на $0(\delta)$, аналогічно вектор $\overline{P_1' P_4'}$ від $\overline{P_2' P_3'}$ відрізняється на $0(\delta)$.

Замінимо чотирикутник $P_1' P_2' P_3' P_4'$ на паралелограм, що побудований на векторах $\overline{P_1' P_2'} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta)\delta, \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)\delta\right) + 0(\delta)$ і $\overline{P_1' P_4'} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta)\delta, \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)\delta\right) + 0(\delta)$, площу якого позначимо через $S_{пр}$. Аналогічно рівності площ, що отримана вище, будемо мати $S_{P_1' P_2' P_3' P_4'} = S_{пр} + 0(\delta)^2$ і

$S_{\psi(P_1P_2P_3P_4)} = S_{пр} + 0(\delta)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \delta^2 + 0(\delta)^2$, (площа паралелограма, побудованого на векторах; треба врахувати, що $\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|, \left|\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right| \le k$).

Позначимо матрицю $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) & \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = I(\xi,\eta)$. Тоді $S_{\psi(P_1P_2P_3P_4)} = |I(\xi,\eta)| S_{P_1P_2P_3P_4} + 0(\delta)^2$

Нехай $X \supset E = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\tau]$, тоді

$E = \bigcup_{i,j=0}^{k-1,m-1} \left[\alpha + \frac{i}{n}, \alpha + \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\gamma + \frac{j}{n}, \gamma + \frac{j+1}{n}\right] = \bigcup_{ij} G_{ij}$ ($0 \le j \le m = [n(\tau-\gamma)]$, $0 \le i \le k = [n(\beta-\alpha)]$).

Розглянемо відображення $\psi : X \to Y$, тоді $\psi(E) \subset R^2$ і $\psi(G_{ij})$ – образ квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$, вище ми показали, що $\upsilon(\psi(G_{ij})) = \left| I\left(\alpha + \frac{1}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{ij}) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Розглянемо суму

$$\sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \upsilon(\psi(G_{ij})) = \sum_{i,j}^{k-1,m-1} \left| I\left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{ij}) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot km =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \left| I\left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{ij}) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot n^2 (\beta-\alpha)(\tau-\gamma).$$

Крім того, оскільки $|I(\xi,\eta)|$ – неперервна функція на $E \subset X$, то вона інтегрована на *E*. Отже $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$, $\forall P$, $\lambda(P) < \delta$ $\left| \left(\iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta \right) - \sigma(|I|, (P,(\xi,\eta))) \right| < \varepsilon$, $\forall(\xi,\eta)$.

Нехай $n > N(\varepsilon)$, де N таке, що $\frac{\sqrt{2}}{N} < \delta$, тоді для розбиття $P_G = \{G_{ij}\}_{i,j=0}^{k-1,m-1}$ множини *E* виконується оцінка $\left| \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \sigma(|I|, (P_G(\xi,\eta))) \right| < \varepsilon$, $\forall(\xi,\eta)$, так як $\lambda(P_G) = \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$.

Враховуючи, що $\sigma(|I|, P_G(\xi,\eta)) = \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \left| I\left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{i,j})$ (в даному випадку точки $(\xi_i, \eta_j) = \left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right) \in G_{i,j}$) отримаємо $\forall n > N$

$$\left| \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \left| I\left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{i,j}) \right| < \varepsilon$$

Крім того, враховуючи рівність $\nu(\psi(E)) = \nu\left(\psi\left(\bigcup_{i,j=0}^{k-1,m-1} G_{i,j}\right)\right) = \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \nu(\psi(G_{i,j}))$, а також рівність раніш отриману будемо мати

$$\left| \nu(\psi(E)) - \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta \right| \le \left| \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \left| I\left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{i,j}) \right| +$$

$$+ \left| \nu(\psi(E)) - \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1} \left| I\left(\alpha + \frac{i}{n}, \gamma + \frac{j}{n}\right)\right| \mu(G_{i,j}) \right| < \varepsilon + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot n^2.$$

Спрямовуючи $n \to \infty$ отримаємо, що $\forall \varepsilon > 0$ $\left| \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \upsilon(\psi(E)) \right| \le \varepsilon$, тобто $\nu(\psi(E)) = \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta$.

Нехай $E \in \Re$ і зв'язна, тоді $\overline{E}$ може бути представлено у вигляді скінченого об'єднання замкнених прямокутників E_i таких, що $\overset{\circ}{E}_i \cap \overset{\circ}{E}_j = \varnothing$, $i \ne j$, тобто $\mu(E_i \cap E_j) = 0$. Оскільки на кожній E_i рівність виконується, то вона виконується і на $\overline{E}$ (тут треба враховувати, що $\nu(\psi(E_i) \cap \psi(E_j)) = 0$ $i \ne j$, оскільки $\psi(E_i) \cap \psi(E_j)$ частина границі, тобто кусково-неперервна крива у R^2).

Отже $\nu(\psi(E)) = \nu(\psi(\overline{E})) = \iint_{\overline{E}} |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta = \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta$.

ОБГОВОРЕННЯ

Згідно (Самойленко, Григор'єва, 2019) $\forall A \in \widetilde{\Re}(X)$, $\nu(\psi(A)) = \iint_A |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta$. Оскільки стандартна міра Лебега на площині задовольняє умовам теореми Лебега, то справедливе твердження.

Нехай задане гомеоморфне відображення $\psi : R^n \to R^n$, тобто $x_i = x_i(\xi_1,...,\xi_n)$, де x_i неперервна разом із усіма похідними $\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ у деякій області $\Delta \subset R^n$, що взаємно-однозначно відображається гомеоморфізмом ψ в $D \subset R^n$.

Будемо припускати, що Δ і *D* – обмежені і кубовані, тоді враховуючи, що для стандартних мір Лебега в R^n виконуються умови теореми Лебега, буде справедлива теорема.

Теорема. Нехай $f(x_1,...,x_n)$ інтегрована на області $D \subset R^n$, тоді

$$\int_D \dots \int f(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \underset{\Delta}{\dots} \int f(x_1(\xi_1,\dots,\xi_n),\dots,x_n(\xi_1,\dots,\xi_n)) \times$$
$$\times |I(\xi_1,\dots\xi_n)| d\xi_1 \dots d\xi_n,$$

де $I(\xi_1,...\xi_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} (\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Наслідок. Якщо $n = 3$, *D* і Δ – кубовані і обмежені $\psi(\xi,\eta,\zeta) : D \to \Delta$ неперервно-диференційований гомеоморфізм, $f(x,y,z) : D \to R^1$ та інтегрована на D, то

$$\iiint_D f(x,y,z) dxdydz = \iiint_\Delta f(x(\xi,\eta,\zeta),\dots,y(\xi,\eta,\zeta)) |I(\xi,\eta,\zeta)| d\xi d\eta d\zeta.$$

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Переваги розглянутого підходу щодо здійснення заміни змінних в інтегралі Рімана пояснюються тим, що кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли повністю вписуються в наведену у статті схему та одержуються, таким чином, в якості прикладів при відповідному виборі простору та міри. Саме тому такий підхід при підготовці майбутніх вчителів математики сприяє професійній орієнтації навчання математичного аналізу.

Список використаних джерел

1. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Р. Ус, З. Г. Шефтель. – К. : Вища Школа, 1990. – 600 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3-х ч. / М.О. Давидов. – К. : Вища школа, 1991. – 648 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2002. – 476 с.
4. Самойленко В.Г., Григор'єва В.Б. Особливості введення поняття інтегралу Рімана під час викладання математичного аналізу учителям математики // Науковий часопис національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи – Випуск 68: збірник наукових праць/ м-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М.П. Драгоманова – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2019. – С.176 – 182.

References

1. Berezanskyy Y. M. (1990). Funktsyonalnyy analyz. K.: Vyshcha Shkola, 600 p. [in Ukrainian].
2. Davydov M. O. (1991). Kurs matematychnoho analizu. K.: Vyshcha shkola, 648 p. [in Ukrainian].
3. Zorych V. A. (2002). Matematycheskyy analyz. M.: MTSNMO, 476 p. [in Ukrainian].
4. Samoylenko V.H., Hryhoryeva V.B. (2019). Osoblyvosti vvedennya ponyattya intehralu Rimana pid chas vykladannya matematychnoho analizu uchytelyam matematyky. *Scientific journal of NPU named after M.Drahomanov,* 68, 176 – 182. [in Ukrainian].

PECULIARITIES OF VARIABLES REPLACEMENT IN THE RIEMAN INTEGRAL IN THE MATHEMATICAL ANALYSIS COURSE IN FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS TRAINING

V.G. Samoylenko, V.B. Hryhorieva, O.O. Hniedkova, O.V. Kotova
Kherson State University, Ukraine

Abstract. *The article considers the peculiarities of variables substitution introduction in the Riemann integral in the teaching of mathematical analysis in pedagogical specialties of higher educational institutions.*

Problem formulation. *Due to the fact at present secondary and vocational education have entered a fundamentally new stage of its development, the characteristic features of which are the development of education on the basis of new progressive concepts, the introduction into the educational process of modern pedagogical and information technologies, scientific methodological achievements, the problem of improvement of the professional training of mathematics teachers is especially relevant. Mathematical analysis has a great importance in future mathematics teachers learning. The article on the example of consideration of a specific issue of this course identifies the mathematical aspects related to the peculiarities of material teaching, taking into account the current requirements for learning process. The question of replacing variables in the Riemann integral for functions given on metric spaces with measure, in particular, in multiple integrals, is considered.*

Materials and methods. *General methods of mathematical analysis and analysis of mathematical literature on the calculation of multiple integrals and the Riemann integral using the method of substituting variables, analysis and generalization of own pedagogical experience and pedagogical experience of leading teachers and scientists were used.*

Results. *The paper considers the author's approach to replacement of variables in the integral in the general case, the replacement of variables in the Riemann integral by a segment, as well as for multiple integrals of functions given on metric spaces with measure.*

Conclusions. *The approach discussed in the article has certain advantages, which are explained by the fact that multiples, surface and curvilinear integrals fit into this scheme and are obtained as examples with the appropriate choice of space and measure. That is why this approach in the learning of future mathematics teachers contributes to the professional orientation of teaching mathematical analysis.*

Keywords: *mathematical analysis, function given on a metric space with measure, Riemann integral, information technologies, variable.*