ПИТАННЯ ЗДІЙСНЕННЯ ЗАМІНИ ЗМІННИХ В ІНТЕГРАЛІ РІМАНА

Самойленко В. Г.,
к. ф.-м. н., доцент,
Григор'єва В. Б.
к. п. н.,
Гнєдкова О. О.,
к. п. н.,
Котова О. В.
к. ф.-м. н., доцент,
Херсонський державний університет,
Херсон, Україна

Вступ. Професійна підготовка з математики передбачає, відповідно, двосторонні процеси викладання та навчання професійно значимих знань, умінь та навичок, формування та оволодіння системою відповідних потреб і мотивів, розвиток та саморозвиток особистості студента закладу у процесі здобуття математичної освіти. Проблема професійної підготовки студентів у процесі навчання математичного аналізу є багатоаспектною. Тому одна із актуальних на сьогодні проблем – через призму професійно-педагогічної спрямованості навчання, виходячи із специфіки математичного аналізу як розділу науки та навчальної дисципліни, розкрити його можливості у процесі вдосконалення професійної підготовки студентів.

Мета роботи. Основна мета роботи – розкрити математичний аспект заміни змінних в інтегралі Рімана для функцій, заданих на метричних просторах, зокрема, і в кратних інтегралах.

Матеріали та методи. Усюди нижче (без додаткових застережень) будемо припускати, що (X,ρ) – обмежений метричний простір, $\Re$ – вихідна алгебра на X, на якій задана міра, $\widetilde{\Re}$ – алгебра вимірних за Жорданом множин; $B(X)$ – σ-алгебра вимірних множин за Борелем, а $L(X)$ $\left(L(X)\supset\widetilde{\Re}\right)$– σ-алгебра вимірних множин за Лебегом; μ – міра Лебега на $L(X)$, побудована за вихідною мірою і є її продовженням (Березанський, 1990).

Розбиттям P множини X назвемо довільну систему $\{P_i\}_{i=1}^n$ підмножини X, що задовольняє наступним умовам: а) $P_i \in \widetilde{\Re}$, $i = 1,\ldots, n$; б) $\bigcup_{i=1}^n P_i = X$, $\mu(P_i \cap P_j) = 0$, $i \neq j$; в) $\mu(P_i) > 0$; $i = 1,2,\ldots, n$.

Число $\lambda(P) = \max_{i=1,\ldots,n} d(P_i)$ – параметр розбиття, де $d(P_i)$ діаметр множини P_i $\left(d(P_i) = \sup_{x,x' \in P_i} \rho(x,x')\right)$. При цьому, будемо припускати, що вихідна алгебра $\Re$ і міра такі, що виконується умова: $\forall \delta > 0$ існує розбиття P таке, що $\lambda(P) < \delta$. Відмітимо, що ця умова виконується всюди нижче в усіх конкретних ситуаціях.

Нехай на X визначена функція $f : X \to R^1$. *Інтегральною сумою* $\sigma(f,(P,\xi))$, для функції f та розбиття з обраними точками (P,ξ) $\left(\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \xi_i \in P_i\right)$, будемо називати суму $\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\mu(P_i)$. Число I називається *інтегралом Рімана* від функції f на множині X з мірою μ, а сама функція інтегрованою за Ріманом на множині X з мірою μ, якщо: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon)$, $\forall (P,\xi)$, $\lambda(P) < \delta$ $|I - \sigma(f,(P,\xi))| < \varepsilon$, незалежно від обраних точок ξ.

Введемо позначення $I = (R)\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,(P,\xi))$. Усі властивості інтеграла Рімана виконуються стандартно. Розглянемо заміну змінних в інтегралі в загальному випадку. Нехай, як і вище, дано простір (X,ρ), з вихідною алгеброю $\Re$. Якщо на $\widetilde{\Re}$ (алгебра кубованих множин) задана міра μ, то з її допомогою можна ввести міру $\nu(E) = \int_E \varphi(x)d\mu(x)$, де $\varphi > 0$ інтегрована на X по мірі μ функція, а $E \in \widetilde{\Re}$.

Будемо говорити, що розбиття P – зв'язне та замкнене, якщо P_i - зв'язні, замкнені множини $i = 1,2,\ldots,n$. Якщо $\forall \delta > 0$ існує зв'язне, замкнене розбиття P простору X таке, що $\lambda(P) < \delta$, то будемо говорити, що X допускає зв'язні, замкнені розбиття.

Теорема. Нехай X – компактний простір, що допускає зв'язні, замкнені розбиття, а $\varphi(x)$ - неперервна функція. Якщо $f(x): X \to R^1$ і неперервна, то $\int\limits_X f(x)d\nu(x) = \int\limits_X f(x)\varphi(x)d\mu(x)$.

Розглянемо наступну ситуацію. Нехай дано компактний простір (X,ρ). Крім того, дано простір $(Y,\overline{\rho})$ і гомеоморфізм $\psi(x): X \to Y$. Тоді на Y індукуємо алгебру $\wp = \{\psi(E) \mid E \in \widetilde{\Re}\}$ $\widetilde{\Re}$ – алгебра кубованих множин. На $\wp$ розглянемо міру ν: $\nu(\psi(E)) = \int\limits_E \varphi(x)d\mu(x)$, де $E \in \widetilde{\Re}$. $\varphi(x): X \to R^1$ – додатна неперервна функція.

Теорема. Нехай X - компактна множина, яка допускає зв'язні, замкнені розбиття. Якщо $f(y): Y \to R^1$ неперервна, то $\int\limits_Y f(y)d\nu(y) = \int\limits_X f(\psi(x))\varphi(x)d\mu(x)$.

Розглянемо заміну змінних в інтегралі Рімана по відрізку. Нехай $\psi(x): X \to Y$ гомеоморфізм, $\Re$ - вихідна алгебра в X, а $\wp = \psi(\Re)$ в Y. Припустимо, що в X задана міра μ, а в Y – ν. Крім того $\Re$ - алгебра, яка складається із множин виду $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, де P_i - зв'язні і попарно не перетинаються. Нехай на X визначена невід'ємна, обмежена функція $\varphi: X \to R^1$, яка інтегрована на X.

Теорема. Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$, а $\psi(t): [\alpha,\beta] \to [a,b]$ неперервно-диференційована, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і строго монотонна. Тоді $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\psi'(t)dt$.

Результати та обговорення. Розглянемо питання про заміну змінних в інтегралі Рімана в кратних інтегралах. Нехай $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ неперервно-диференційовані функції і $\psi(\xi,\eta) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ гомеоморфізм з $X = [a,b) \times [c,d)$ на $Y = \psi(X) \subset R^2$.

Відмітимо, що будь-яка точка $(x,y) \in Y$ характеризується однозначно точкою $(\xi,\eta) \in X$, тому для будь-якої точки з Y відповідні ξ,η називаються *криволінійними координатами*.

В якості вихідної алгебри $\Re$ на X розглянемо алгебраїчну оболонку множин виду $[\alpha,\beta) \times [\gamma,\tau)$, а міра μ в X і ν в Y – стандартні міри Лебега на площині (площа). Розглянемо множину $\Delta = [\xi,\xi+\delta] \times [\eta,\eta+\delta]$ – квадрат з вершиною (ξ,η). Змінна точка відрізка P_1P_2 має вид $(\xi+t\delta,\eta)$, $t\in[0,1]$ і переходить в змінну точку $\psi(\xi+t\delta,\eta)=(x(\xi+t\delta,\eta),y(\xi+t\delta,\eta))=\psi(\xi,\eta)+\psi'(\xi,\eta)\cdot(t\delta,0)+0(\delta)$ дуги $P_1'P_2'=\psi(P_1P_2)$.

Далі, враховуючи вигляд похідної відображення, отримаємо

$$\psi(\xi+t\delta,\eta)=(x,y)+\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\delta\\ 0\end{pmatrix}+0(\delta)=(x,y)+\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)t\delta,\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)t\delta\right)+0(\delta)=$$

$$=(x,y)+t\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\xi},\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\delta+0(\delta),\qquad 0(\delta)=(0_1(\delta),0_2(\delta)).$$

З іншого боку, змінна точка на векторі $\overline{P_1'P_2'}$ має координати:

$$(x,y)+t(x(\xi+\delta,\eta)-x(\xi,\eta),y(\xi+\delta,\eta)-y(\xi,\eta))=(x,y)+$$

$$+t\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi+\theta\delta,\eta)\delta,\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi+\theta\delta,\eta)\delta\right)=(x,y)+t\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)+0_1(\delta),\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)+0_2(\delta)\right)\delta=$$

$$=(x,y)+t\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta),\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right)\delta+0(\delta^2),\qquad 0\le\theta\le 1$$

Таким чином, відстань між відповідними змінними точками дуги $P_1'P_2'$ і вектора $\overline{P_1'P_2'}$ є $0(\delta)$. Отже, відстань від змінної точки на дузі $P_1'P_2'$ до відрізка $P_1'P_2'$ буде $0(\delta)$. Таким чином, площа $S_{P_1'P_2'}$ фігури, обмеженої дугою $P_1'P_2'$ і відрізком $P_1'P_2'$, менша $0(\delta)\cdot\left\|\overline{P_1'P_2'}\right\|_Y=0(\delta)\left\|\overline{\psi(P_1)\psi(P_2)}\right\|_Y=0(\delta^2)$ (оскільки $\psi(\xi,\eta)$ неперервно-диференційована функція, то

$$\left\|\overline{\psi(P_1)\psi(P_2)}\right\|_Y=\sqrt{|x(\xi+\delta,\eta)-x|^2+|y(\xi+\delta,\eta)-y|^2}\le k\delta,$$

де $k>\sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right|^2+\left|\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\right|^2}$).

Замінимо чотирикутник $P_1'P_2'P_3'P_4'$ на паралелограм, що побудований на векторах $\overline{P_1'P_2'}=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)\delta,\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\delta\right)+0(\delta)$ і $\overline{P_1'P_4'}=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}(\xi,\eta)\delta,\frac{\partial y}{\partial\eta}(\xi,\eta)\delta\right)+0(\delta)$, площу якого позначимо через S_{np}. Будемо мати $S_{P_1'P_2'P_3'P_4'}=S_{np}+0(\delta)^2$ і

$$S_{\psi(P_1P_2P_3P_4)}=S_{np}+0(\delta)^2=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}\delta^2+0(\delta)^2.$$

Позначимо матрицю $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\\ \frac{\partial x}{\partial\eta}(\xi,\eta) & \frac{\partial y}{\partial\eta}(\xi,\eta)\end{pmatrix}=I(\xi,\eta)$. Тоді

$S_{\psi(P_1P_2P_3P_4)} = |I(\xi,\eta)| S_{P_1P_2P_3P_4} + 0(\delta)^2$. Нехай $X \supset E = [\alpha,\beta]\times[\gamma,\tau]$, тоді

$$E = \bigcup_{i,j=0}^{k-1,m-1}\left[\alpha+\frac{i}{n},\alpha+\frac{i+1}{n}\right]\times\left[\gamma+\frac{j}{n},\gamma+\frac{j+1}{n}\right] = \bigcup_{ij} G_{ij} \quad (0 \le j \le m = [n(\tau-\gamma)],$$

$0 \le i \le k = [n(\beta-\alpha)]$).

Розглянемо відображення $\psi : X \to Y$, тоді $\psi(E) \subset R^2$ і $\psi(G_{ij})$ – образ квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$, вище ми показали, що $\upsilon(\psi(G_{ij})) = \left|I\left(\alpha+\frac{1}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{ij}) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Розглянемо суму

$$\sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\upsilon(\psi(G_{ij})) = \sum_{i,j}^{k-1,m-1}\left|I\left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{ij}) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot km =$$
$$= \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\left|I\left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{ij}) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot n^2(\beta-\alpha)(\tau-\gamma).$$

Крім того, оскільки $|I(\xi,\eta)|$ – неперервна функція на $E \subset X$, то вона інтегрована на E. Отже $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)$, $\forall P$, $\lambda(P)<\delta$ $\left|\left(\iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta\right) - \sigma(|I|,(P,(\xi,\eta)))\right| < \varepsilon$, $\forall(\xi,\eta)$.

Нехай $n > N(\varepsilon)$, де N таке, що $\frac{\sqrt{2}}{N} < \delta$, тоді для розбиття $P_G = \{G_{ij}\}_{i,j=0}^{k-1,m-1}$ множини E виконується оцінка $\left|\iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \sigma(|I|,(P_G(\xi,\eta)))\right| < \varepsilon$, $\forall(\xi,\eta)$, так як $\lambda(P_G) = \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$. Враховуючи, що $\sigma(|I|,P_G(\xi,\eta)) = \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\left|I\left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{i,j})$ (в даному випадку точки $(\xi_i,\eta_j) = \left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right) \in G_{i,j}$) отримаємо $\forall n > N$

$$\left|\iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\left|I\left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{i,j})\right| < \varepsilon$$

Крім того, враховуючи рівність $\nu(\psi(E)) = \nu\left(\psi\left(\bigcup_{i,j=0}^{k-1,m-1}G_{i,j}\right)\right) = \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\nu(\psi(G_{i,j}))$, а також рівність раніш отриману будемо мати

$$\left|\nu(\psi(E)) - \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta\right| \le \left|\iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\left|I\left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{i,j})\right| +$$
$$+\left|\nu(\psi(E)) - \sum_{i,j=0}^{k-1,m-1}\left|I\left(\alpha+\frac{i}{n},\gamma+\frac{j}{n}\right)\right|\mu(G_{i,j})\right| < \varepsilon + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot n^2.$$

Спрямовуючи $n\to\infty$ отримаємо, що $\forall\varepsilon>0$ $\left|\iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta - \upsilon(\psi(E))\right| \le \varepsilon$, тобто $\nu(\psi(E)) = \iint_E |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta.$

Висновки. Переваги розглянутого підходу щодо здійснення заміни змінних в інтегралі Рімана пояснюються тим, що кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли повністю вписуються в наведену у статті схему та одержуються, таким чином, в якості прикладів при відповідному виборі простору та міри. Більш детально з результатами дослідження можна ознайомитися у (Самойленко, 2021).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Березанский Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Р. Ус, З. Г. Шефтель. – К. : Вища Школа, 1990. – 600 с.
2. Зорич В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М.: МЦНМО, 2002. – 476 с.
3. Самойленко В.Г., Григор'єва В.Б., Гнєдкова О.О., Котова О.В. Особливості здійснення заміни змінних в інтегралі Рімана в курсі математичного аналізу при підготовці майбутніх вчителів математики // Фізико-математична освіта: науковий журнал. Вип. 1 (27). Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет; редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. Суми: [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2021. – С.82 – 88.