АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКУ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Котова Ольга Володимирівна,
к.ф.-м.н., доцент
Плоткін Яків Давидович,
к.ф.-м.н., доцент
Херсонський державний університет
м. Херсон, Україна

Вступ. У Банаховому просторі E розглянемо крайову задачу

$$\frac{d\,x_{\mathcal{E}}}{dt} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}} x_{\mathcal{E}}(t) + \mathcal{E} f(t), \qquad x_{\mathcal{E}}(0) = x_{\mathcal{E}}(b),\ \ b > 0, \qquad (1)$$

де $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}_{\mathcal{E}}, \mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}^k\, \mathcal{B}_k,\ n \geq 1,\ \mathcal{E} \in (0, \mathcal{E}_0]$ – малий параметр.

Диференціальному рівнянню в (1) відповідає сингулярно збурена півгрупа $T_{\mathcal{E}}(t)$ з інфінітезимальним оператором $\frac{1}{\mathcal{E}}\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$.

Нехай оператори $\mathcal{A}_0$ і $\mathcal{B}_0$ діють у Банаховому просторі E і задовольняють наступним умовам:

а) $\mathcal{A}_0$ – замкнений щільно визначений оператор, породжуючий рівномірно обмежену півгрупу $T_0(t)$ класу (C_0) обмежених операторів, діючих в E, і звідно-оборотний в ослабленому сенсі:

$$E = \mathcal{N}(\mathcal{A}_0) \oplus \mathcal{R}^C(\mathcal{A}_0), \qquad (2)$$

де $\mathcal{R}^C(\mathcal{A}_0)$ означає замикання множини значень $\mathcal{R}(\mathcal{A}_0)$ оператора $\mathcal{A}$ в топології норми простору E, $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0)$ – ядро оператора $\mathcal{A}_0$.

в) $\mathcal{B}_k$ – замикаючі оператори такі, що $\mathcal{A}_\mathcal{E} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}_\mathcal{E}$ – є як і $\mathcal{A}_0$ інфінітезимальним оператором напівгрупи класу $(\mathcal{C}_0)$ рівномірно обмежених операторів в E.

Через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B}_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(\mathcal{B}_n)$ позначимо область визначення оператора $\mathcal{A}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} > 0$.

Мета роботи. Провести асимптотичний аналіз розв'язку сингулярно збуреної двоточкової крайової задачі у банаховому просторі.

Матеріали та методи. Очевидно, що область визначення $\mathcal{D}$ оператора $\mathcal{A}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} > 0$ всюди щільна в E.

Відомо, що якщо $\mathrm{T}_0(\mathrm{t})$ – рівномірно обмежена півгрупа класу $(\mathcal{C}_0)$ така, що існує оператор Π_0 ($\Pi_0 \neq 0$), який задовольняє умові

$$s - \lim_{t\to\infty} T_0(t) = \Pi_0, \qquad (3)$$

тоді інфінітезимальний оператор $\mathcal{A}_0$ цієї півгрупи задовольняє умові а).

Для оператора $\mathcal{A}_0$, який задовольняє умові а), існує узагальнений обернений $\mathcal{R}_0 = (\mathcal{A}_0 + \Pi_0)^{-1} - \Pi_0$, де Π_0 – проектор на $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0)$, визначений розкладом (2).

Розглянемо крайову задачу

$$x'(t) = \mathcal{A}x(t) + f(t), \qquad x(0) = x(b), \ b > 0, \quad (4)$$

де $\mathcal{A}$ – лінійний оператор, діючий в E з щільною областю визначення $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $f(t)$ – неперервна на $[0, b]$ функція, що приймає значення в E.

Означення. Функція $x(t)$ називається розв'язком крайової задачі (4), якщо:

1) значення функції $x(t)$ належать області визначення оператора $\mathcal{A}$ для всіх $t \in [0, b]$;

2) у кожній точці $t \in [0, b]$ існує неперервна за нормою похіднах $x'(t)$ функції $x(t)$;

3) рівність $x'(t) = \mathcal{A}x(t) + f(t)$ виконується для всіх $t \in [0, b]$;

4) $x(0) = x(b)$.

В роботі використано методи теорії сингулярно збурених півгруп операторів.

Результати та обговорення.

Лема 1. Нехай $\mathcal{A}$ є інфінітезимальним оператором півгрупи $T(\mathrm{t})$ класу (C_0). Якщо функція $\varphi(t) = (\mathcal{I} - T(b))^{-1} f(t)$ задовольняє одній з двох умов:

1) значення $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ і функція $\mathcal{A}\varphi(t)$ неперервна на $[0, b]$;

2) функція $\varphi(t)$ неперервно диференційована на $[0, b]$, тоді крайова задача (4) має єдиний розв'язок

$$x(t) = \int_0^t T(t-r)\varphi(r)dr + \int_t^b T(b+t-r)\varphi(r)dr. \quad (5)$$

Лема 2. Якщо оператор $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ має рівномірно по $\mathcal{E} \in [0, \mathcal{E}_0]$ обмежений зворотний $\mathcal{C}_\mathcal{E}^{-1}$, то існує сильна границя

$$s - lim_{\mathcal{E}\to 0}\, \mathcal{C}_\mathcal{E}^{-1} = \Pi_0 \mathcal{H}_0 \Pi_0 + Q_0\,,$$

де $\mathcal{H}_0$ – нульове інваріантне розширення оператора $(\Pi_0\text{-}\mathcal{U}_0(b))^{-1}$ з $\mathcal{N}(\mathcal{A}_0)$ на весь простір E, $Q_0 = \mathcal{I} - \Pi_0$.

Позначимо

$$\mathcal{g}_\mathcal{E}(t)(\cdot) = -\frac{1}{\mathcal{E}}\mathcal{B}_\mathcal{E}\mathcal{V}_0\left(\frac{t}{\mathcal{E}}\right)(\cdot) - \mathcal{B}_2(\mathcal{E})\mathcal{U}_0(t)(\cdot) + \frac{1}{\mathcal{E}}\int_0^t \mathcal{B}_\mathcal{E}\mathcal{V}_0\left(\frac{t-s}{\mathcal{E}}\right)\mathcal{B}_1\mathcal{U}_1(s)(\cdot)ds,$$

де $\mathcal{B}_2(\mathcal{E}) = \sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{E}^k\mathcal{B}_{k+1}$, і додатково до умов а), в) припустимо, що виконано наступну умову для $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ і $f(r)$:

с) $\mathcal{g}_\mathcal{E}(t)f(r) \in \mathcal{D}$ для довільних t і r з відрізка $[0, b]$,

$\mathcal{G}_{\mathcal{E}}(b)\Pi_0\mathcal{H}_0(\int_0^t \mathcal{U}_0(t-r)f(r)dr + \int_t^b \mathcal{U}_0(\mathcal{D}+t-r)f(r)dr) \in \mathcal{D}, \ \ t \in [0,b]$, $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}\mathcal{G}_{\mathcal{E}}(t)f(r)$ неперервна по t на відрізку $[0,b]$ при $\forall r \in [0,b]$, $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}\mathcal{G}_{\mathcal{E}}(t)\Pi_0\mathcal{H}_0(\int_0^s \mathcal{U}_0(s-r)f(r)dr + +\int_s^b \mathcal{U}_0(b+s-r)f(r)ds)$ неперервна зліва по t в точці b при $\forall s \in [0,b]$.

Теорема. Нехай виконані умови леми 2 і $f(t)$ неперервно диференційована на відрізку $[0,b]$. Якщо:

1. Функції $\mathcal{R}_0\mathcal{B}_1\mathcal{U}_0(t)f(r)$, $\mathcal{B}_k\mathcal{V}_0(t)f(r)$, $k=\overline{1,n}$, $\mathcal{B}_k\mathcal{U}_0(t)f(r)$, $k=\overline{2,n}$; $\int_0^t \mathcal{B}_k\mathcal{V}_0(s)f(r)ds$ неперервні по t на відрізку $[0,b]$ при $\forall r \in [0,b]$.

2. Функції

$$\mathcal{R}_0\mathcal{B}_1\mathcal{A}_1\mathcal{U}_0(t)\,\mathcal{H}_0(\int_0^s \mathcal{U}_0(s-r)f(r)dr + \int_s^b \mathcal{U}_0(b+s-r)f(r)dr),$$

$$\mathcal{B}_k\mathcal{U}_0(t)\mathcal{H}_0(\int_0^s \mathcal{U}_0(s-r)f(r)dr + +\int_s^b \mathcal{U}_0(b+s-r)f(r)dr),\ k=\overline{2,n};$$

$$\mathcal{H}_0\left(\int_0^x \mathcal{U}_0(x-r)f(r)dr + \int_x^b \mathcal{U}_0(b+x-r)f(r)dr\right)ds,\ \ k=\overline{1,n},$$

неперервні зліва по t в точці b при $\forall x \in [0,b]$.

3. $\int_0^\infty \| \mathcal{B}_k\mathcal{V}_0(t)f(r) \| \, dt < \infty$ при $\forall r \in [0,b]$, то є рівномірним по $t \in [0,b]$ при $\mathcal{E} \to 0$ розв'язок крайової задачі (1)

$$x_\delta(t) = \Pi_0\mathcal{H}_0(\int_0^t \mathcal{U}_0(t-r)f(r)dr + \int_t^b \mathcal{U}_0(b+t-r)f(r)dr) + \mathcal{O}(\mathcal{E}). \quad (6)$$

Висновки. В роботі методами теорії сингулярно збурених півгруп операторів проведено асимптотичний аналіз розв'язку сингулярно збуреної двоточкової крайової задачі у банаховому просторі. Основні результати сформульовано в теоремі. В умовах теореми для функції Гріна $G_{\mathcal{E}}(t,r)$ крайової задачі (1) має місце наступна асимптотична рівність

$$G_{\mathcal{E}}(t,r) = G_0(t,r)f(r) + \mathcal{O}(\mathcal{E}), \qquad \mathcal{E} \to 0,$$

Де $G_0(t,r) = \begin{cases} \Pi_0\mathcal{H}_0\mathcal{U}_0(t-r) + \mathcal{V}_0\left(\frac{t-r}{\mathcal{E}}\right), & 0 \le r \le t \le b, \\ \Pi_0\mathcal{H}_0\mathcal{U}_0(b+t-r) + \mathcal{V}_0\left(\frac{b+t-r}{\mathcal{E}}\right), & 0 \le t \le r \le b. \end{cases}$