Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

РОЗВИТОК УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У СТАРШОКЛАСНИКІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ЦИФРОВІЗАЦІЇ ОСВІТИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Імшеницька Ольга Володимирівна
Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент Таточенко Володимир Іванович
Рецензент: Перегняк Г.Є., директорка Херсонської гімназії № 13 Херсонської міської ради

Івано-Франківськ – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування актуальності теми дослідження. На сьогодні в суспільстві існують розвинені технології дуже високого рівня, що вимагають від спеціалістів значної частини професій мати достатньо високий рівень математичної підготовки, а також володіти різноманітними математичними методами. Серед математичних методів наукового дослідження досить широкого застосування набув метод математичного моделювання. Цей метод використовується також і як один із методів навчального пізнання в закладах загальної середньо освіти. Математичне моделювання – це метод дослідження реальних систем шляхом побудови математичних моделей, що описують їх поведінку. Модель допомагає зрозуміти та передбачити, як система функціонує за різних умов. Цей метод використовують у науці, техніці, економіці та інших сферах для вирішення складних задач. Фундаторами вже сучасної методології математичного моделювання були такі видатні вчені, як Глушков В.М., Гнеденко Б.В., Колмогоров А.М. та інші [5, 14]. Методисти та математики, розробляючи методи математичного моделювання та впроваджуючи їх в різних галузях науки і техніки, прийшли в 70-х–80-х роках минулого століття до думки стосовно необхідності застосування цього методу і в процесі навчання здобувачів середньої освіти, а розвиток інформаційно-комунікаційних технологій лише підсилив потребу такого процесу.

На сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти, в рамках особистісно-орієнтованого навчання та рівневої і профільної диференціації, проблема впровадження методу математичного моделювання в процесі навчання математики здобувачів старшої школи набула особливої гостроти. У шкільній математиці метод математичного моделювання використовується для вирішення різноманітних прикладних задач. Так, в алгебрі цей метод застосовується для розв'язування задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь (наприклад, задачі на рух, роботу, пропорції), для моделювання реальних ситуацій за допомогою лінійних і квадратних рівнянь. В курсі геометрії старшої школи метод математичного моделювання використовується при розв’язуванні задач на площі та об'єми геометричних фігур (наприклад, моделювання площі полів чи об'ємів контейнерів), а також може бути залучений при використання геометричних моделей для розв'язку прикладних задач на вимірювання. Крім цього, даний метод використовується при розгляді певних тем шкільної математики, зокрема, при розгляді функцій та їх графіків (моделювання залежностей між величинами за допомогою лінійних, квадратичних, експоненційних функцій (наприклад, ріст населення, фінансові розрахунки), використання графіків для візуалізації і прогнозування трендів у реальних задачах); при вивченні елементів теорії ймовірностей і статистики (моделювання випадкових подій і обчислення ймовірностей, аналіз даних, побудова статистичних моделей, що допомагає робити прогнози та приймати рішення); при вивченні тригонометрії (моделювання коливальних процесів (наприклад, рух маятника або хвильові процеси), застосування тригонометричних функцій для вирішення задач у фізиці чи інженерії).

Мета роботи – розкрити питання розвитку умінь математичного моделювання старшокласників в процесі навчання математики.

Об'єкт дослідження: методика навчання математики в старших класах ЗЗСО. ***Предмет дослідження:*** процес розвитку умінь математичного моделювання в умовах цифровізації овіти.

Мета і предмет дослідження визначили такі ***завдання дослідження*****:**

- проаналізувати науково-методичну літературу з окресленої теми дослідження та розглянути особливості понять моделі та методу математичного моделювання;

- розкрити питання стосовно місця прикладних задач в шкільному курсі математики та визначити ключові підходи у формуванні вміння застосовувати математичне моделювання під час їх розв’язання;

- розглянути методичні особливості розвитку умінь математичного моделювання старшокласників в процесі навчання математики в умовах цифровізації освіти.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були розглянуті практичні рекомендації стосовно застосування цифрових інструментів для розвитку умінь математичного моделювання здобувачів. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу здобувачами вищої освіти та вчителями закладів середньої освіти.

Для розв’язанні поставлених завдань дослідження були застосовані наступні ***методи***: теоретичний аналіз методичної та психолого-педагогічної літератури з теми дослідження, вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів загальноосвітніх закладів.

Дослідження виконувалось в межах теми науково-дослідної роботи кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики в умовах цифровізації вищої освіти» (державний реєстраційний номер 0123U103793).

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ присвячено теоретичним аспектам проблеми дослідження. Зокрема, в ньому розглянуто аналіз науково-методичної літератури з питання розкриття поняття моделі та особливості методу математичного моделювання. В другому розділі розкрито питання прикладної спрямованості шкільного курсу математики. Третій розділ присвячений методичним рекомендаціям стосовно розвитку умінь матемематичного моделювання старшокласників із залученням різноманітних цифрових інструментів.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Математичне моделювання як метод пізнання

Математика – це наука про модель світу. У математиці розглядають не просто певні конкретні поняття, а й різноманітні моделі явищ, об'єктів, які існують навколо, а також процесів, які відбуваються навколо нас. Вивчають, розпочинаючи з найбільш простих моделей, наприклад, розглядають вектор як модель сили (механічної або фізичної), первісну – як модель швидкості зміни процесу та ін.

Математичне моделювання – це процес створення абстрактних математичних моделей для опису реальних явищ, систем чи процесів. Воно полягає у використанні математичних інструментів, таких як рівняння, функції, матриці, щоб відобразити складні явища через спрощені, але інформативні формули. Цей метод дозволяє вивчати, аналізувати та прогнозувати поведінку систем у різних галузях, таких як фізика, економіка, біологія, екологія, інженерія та інші науки.

Моделювання дозволяє ідеалізувати й абстрагувати реальність, фокусуючи увагу на ключових елементах процесу, і за допомогою аналізу отримувати цінну інформацію про закономірності системи або прогнозувати її поведінку.

Математичне моделювання як окремий метод наукового пізнання не має одного конкретного засновника, оскільки воно розвивалося протягом століть у межах різних галузей науки.

Ісаак Ньютон (XVII століття) – один із перших вчених, який застосував математичне моделювання у фізиці. Його закони механіки та гравітації є прикладами використання математичних моделей для опису фізичних явищ [10]. Він заклав фундамент для подальшого розвитку фізичних моделей.

П'єр-Симон Лаплас і Леонард Ейлер також зробили вагомий внесок у розвиток математичного моделювання, особливо в галузі механіки, астрономії та ймовірнісної теорії.

Відомий математик Карл Гаусс застосував математичні методи для вирішення астрономічних задач, що стало важливим кроком у розвитку математичного моделювання [16].

У сучасному вигляді, методологія математичного моделювання активно розвивалася в XX столітті з розвитком комп'ютерних технологій і числових методів, що дозволило застосовувати складні моделі в реальних наукових і технічних задачах.

Різні дослідники трактують математичне моделювання залежно від своєї наукової сфери та мети використання моделей. Розглянемо основні підходи до розуміння математичного моделювання:

1. *Фізичний підхід*.

У галузі фізики математичне моделювання зазвичай трактують як «спосіб побудови абстрактних моделей реальних фізичних процесів за допомогою рівнянь, що описують фізичні закони» [9]. Наприклад, моделі руху планет або теплопровідності матеріалів. Для фізиків модель – це математична репрезентація законів природи.

2. *Економічний підхід*.

Економісти використовують математичне моделювання для опису і прогнозування економічних процесів, таких як зростання ВВП, інфляція, ціноутворення, ринки праці тощо. Дослідники, такі як Джон фон Нейман і Оскар Моргенштерн, використовували моделі для аналізу взаємодій економічних агентів і прийняття рішень в умовах невизначеності (теорія ігор [21]).

3. *Біологічний підхід*.

В біології математичні моделі допомагають зрозуміти процеси росту популяцій, епідемій, еволюції тощо. Алфред Лотка і Віто Вольтерра розробили моделі популяційної динаміки, відомі як "модель Лотки-

Вольтерра" [13], що використовується для вивчення взаємодії хижаків і жертв.

4. *Комп'ютерне моделювання*.

У контексті розвитку комп'ютерних наук математичне моделювання набуло нового значення як симуляція складних систем. Джон фон Нейман зробив великий внесок у розвиток комп'ютерного моделювання, що стало основою для багатьох сучасних методів, включаючи моделювання кліматичних систем, систем штучного інтелекту та обчислювальної біології.

5. *Інженерний підхід*.

Інженери використовують математичне моделювання для оптимізації процесів та створення ефективних технічних систем. Наприклад, у механіці рідин чи термодинаміці інженери моделюють процеси для розробки нових конструкцій, машин, будівель тощо.

6. *Соціальні науки*.

У соціології математичне моделювання використовується для опису соціальних процесів і поведінки великих груп людей, наприклад, моделі соціальної взаємодії, моделі поширення інформації або епідемій у суспільстві. Соціальні вчені також використовують методи теорії ігор для моделювання колективних дій.

Математичне моделювання є універсальним методом, який по-різному трактують у різних науках. У фізиці та інженерії це переважно точні моделі реальних процесів, тоді як в економіці чи соціології моделі можуть мати ймовірнісний або наближений характер, але все одно є важливими інструментами для аналізу систем і прийняття рішень.

Математичне моделювання є потужним інструментом для пізнання складних явищ та систем, який використовується в багатьох науках – від фізики до економіки та біології. Розглянемо декілька ключових моментів, які можна сказати про математичне моделювання як метод пізнання:

1. *Абстрагування реальних процесів*. Математичне моделювання

дозволяє спрощувати ідеальні моделі реальних явищ шляхом абстрагування від незначних деталей і фокусування на ключових характеристиках. Це дає змогу аналізувати системи на глибшому рівні, не впливаючи на точність висновків щодо їхньої поведінки.

2. *Прогнозування та експерименти*. Моделі можна використовувати для прогнозування майбутніх подій або поведінки систем. Наприклад, моделюючи динаміку погодних систем, можна передбачати зміни погоди. Це особливо цінно в ситуаціях, де реальні експерименти складно або неможливо провести.

3. *Аналіз складних систем*. Математичні моделі дають змогу досліджувати системи, які важко піддаються безпосередньому емпіричному спостереженню. Наприклад, моделі в економіці допомагають досліджувати взаємодії багатьох чинників, таких як попит, пропозиція, інфляція тощо.

4. *Узагальнення знань*. Створюючи математичні моделі, дослідники можуть формулювати узагальнення і висновки, що охоплюють багато різних аспектів досліджуваної системи. Це дозволяє отримати універсальні знання, застосовні до широкого кола явищ.

5. *Ітераційність та вдосконалення моделей*. Процес моделювання є ітераційним. Спочатку створюється базова модель, яка згодом може бути вдосконалена завдяки експериментальним даним або новим знанням про систему. Це робить математичне моделювання «динамічним методом пізнання, що постійно еволюціонує» [7].

6. *Перевірка гіпотез*. Математичні моделі також використовуються для перевірки теоретичних гіпотез. Якщо модель правильно описує реальний процес і її прогнози збігаються з експериментальними даними, це є підтвердженням правильності початкових припущень.

7. Міждисциплінарний підхід. Математичне моделювання об’єднує різні галузі науки. Воно дозволяє використовувати математичні методи для дослідження явищ у фізиці, біології, соціології, екології тощо. Це сприяє

розвитку нових напрямів наукового пізнання.

Отже, математичне моделювання є універсальним і ефективним інструментом пізнання, який дає змогу спрощувати складні реальні системи, прогнозувати їх поведінку, перевіряти гіпотези і формулювати загальні висновки.

1.2. Модель та моделювання

Під *моделлю* в математиці мають на увазі «спеціально створений або підібраний об'єкт, який відтворює усі властивості об'єкта, що досліджується» [10].

У філософії поняття *модель* (від фр. Modele – зразок) означає уявний образ (схему, опис та ін.) довільного об'єкта. Це поняття служить для вираження ставлення між людськими знаннями про об'єкти та безпосередньо цими об'єктами.

Модель – це певний спосіб пізнання світу, головний та єдиний інструмент для вирішення тих завдань, що виникають перед людиною, це інструмент наукових досліджень [17].

Поняття «модель» є багатозначним і використовується в різних контекстах. Загалом, модель – це спрощене уявлення чи опис складної системи, явища або процесу, що використовується для його вивчення, прогнозування або розуміння. Розглянемо кілька різних поглядів на трактування цього поняття.

1. *Модель як спрощене представлення реальності*.

Це найбільш загальне розуміння моделі, що підходить для різних галузей знань. Модель відображає ключові елементи певної системи, але абстрагується від незначних деталей. Моделі можуть бути фізичними (макети), математичними (рівняння), концептуальними (схеми, діаграми) чи комп'ютерними (симуляції).

Основні особливості:

- Спрощення: модель не копіює реальність точно, вона лише відображає найважливіші аспекти.

- Абстракція: виділяються ключові параметри та взаємозв'язки, що впливають на систему.

- Орієнтація на ціль: моделі створюються для вирішення конкретних завдань, таких як прогнозування, аналіз або оптимізація.

2. *Модель як математична чи фізична абстракція*.

У математиці та фізиці модель – це набір рівнянь або інших формальних правил, які описують поведінку системи. Наприклад, модель Ньютона описує рух тіл у класичній механіці за допомогою законів механіки [16]. У фінансовій математиці моделі використовуються для опису процесів, наприклад, ціноутворення на ринку.

Основні аспекти:

- Математичні моделі використовують формули для опису кількісних залежностей.

- Фізичні моделі можуть бути реальними об'єктами або прототипами, що використовуються для тестування.

3. *Модель як інструмент у науках про управління*.

У таких дисциплінах, як економіка, соціологія та управління, моделі застосовуються для прогнозування поведінки людей, ринків або організацій [8]. Вони допомагають приймати рішення, імітуючи реальні процеси.

Приклади:

- Економічні моделі прогнозують ринкові тенденції на основі попиту та пропозиції.

- Моделі прийняття рішень використовуються для планування і стратегічного управління в бізнесі.

4. *Моделі у комп'ютерних науках та штучному інтелекті*.

У сфері IT моделі часто використовуються для створення алгоритмів і систем, які можуть імітувати розумову або фізичну діяльність. Це можуть бути моделі машинного навчання, нейронні мережі тощо [6].

Основні напрямки:

- Моделі даних використовуються для представлення структур баз даних.

- Моделі машинного навчання використовують для навчання програм на основі даних з метою прогнозування або класифікації.

5. *Філософський аспект моделі*.

У філософії модель може сприйматися як інструмент пізнання, спосіб уявлення реальності або теоретичної конструкції. Моделі можуть бути частиною метафізичних теорій або ж мати епістемологічну роль, допомагаючи структурувати знання.

Основні погляди:

- Онтологічний підхід: моделі розглядаються як частина реальності.

- Епістемологічний підхід: моделі є лише інструментами для наближення до істини.

6. *Модель як приклад або шаблон*.

У буденному житті модель може означати зразок або ідеал для наслідування. Наприклад, ми говоримо про «модель поведінки» або «модель для наслідування». У моделюванні процесів та проектуванні це також означає прототип чи еталон для реалізації.

Узагальнюючи, можна сказати, що моделі використовуються в різних контекстах для того, щоб краще зрозуміти, описати чи прогнозувати складні системи та явища. Трактування поняття моделі залежить від галузі знань, але загальним є її роль як інструменту спрощення та аналізу реальності.

Розрізняють предметні та розумові моделі.

Предметні моделі бувають трьох видів:

1) моделі, які відображають просторові особливості об’єктів;

2) моделі, які мають певну фізичну подібність з оригіналом;

3) математичні та кібернетичні моделі.

Розумові моделі поділяють на:

1) образно-іконічні (малюнки тощо);

2) знакові моделі.

Останні вимагають спеціальної інтерпретації, бо без неї вони втрачають усі функції моделей. Знакові моделі є відображенням зв'язків і відношень між певними знаками.

Метод побудови математичних моделей полягає в «створенні абстрактного опису реальної системи або явища у вигляді математичних рівнянь, функцій чи інших математичних структур» [12]. Основна мета цього методу – зрозуміти, пояснити або спрогнозувати поведінку складних систем на основі математичних принципів.

Процес побудови математичних моделей складається з кількох етапів:

1. *Формулювання проблеми*.

Спершу необхідно чітко визначити, яке явище чи процес потрібно дослідити. Це може бути, наприклад, динаміка популяції тварин, економічний процес або фізична система. На цьому етапі важливо сформулювати мету дослідження, зокрема які саме характеристики системи важливо зрозуміти або передбачити.

2. *Вибір основних змінних та параметрів*.

Далі потрібно визначити ключові змінні та параметри, що описують досліджуване явище. Це можуть бути величини, які впливають на систему, або характеристики, що описують її стан. Наприклад, у моделюванні зростання популяції це можуть бути кількість особин, швидкість росту, смертність тощо.

3. *Спрощення та ідеалізація*.

Реальні системи часто дуже складні, тому для створення моделі потрібно зробити певні спрощення. Наприклад, не всі фактори, що впливають на систему, будуть враховані. Ідеалізація дозволяє виділити основні аспекти процесу та ігнорувати другорядні фактори, що не мають вирішального впливу на результат.

4. *Вибір математичної форми моделі*.

На цьому етапі вибираються математичні інструменти для опису системи. Це можуть бути:

- алгебраїчні рівняння для статичних моделей;
- диференціальні рівняння для динамічних процесів;
- стохастичні моделі для випадкових процесів;
- матричні методи для моделювання мережевих взаємодій тощо.

Вибір математичного підходу залежить від типу задачі та властивостей системи.

5. *Побудова математичної моделі*.

Використовуючи вибрані змінні та параметри, будується система рівнянь або математичних відношень, що описує поведінку системи. Наприклад, для моделі зростання популяції може бути використане рівняння логістичного зростання, яке описує залежність чисельності популяції від часу.

6. *Аналіз та верифікація моделі*.

Після побудови моделі необхідно її перевірити на реальних даних або шляхом аналітичного аналізу. Це включає:

- Аналіз розв'язків: шукаються аналітичні чи числові рішення рівнянь моделі.
- Перевірка адекватності: чи відповідає поведінка моделі реальним процесам? Наприклад, чи збігаються прогнози моделі з експериментальними чи спостережуваними даними?

7. *Корекція та уточнення моделі*.

Якщо модель не відповідає реальним даним, її необхідно коригувати. Можливо, потрібно врахувати додаткові змінні чи параметри, змінити математичну форму рівнянь або переробити початкові припущення. Процес уточнення моделі може бути ітераційним.

8. *Прогнозування та застосування моделі*.

Коли модель перевірена й коректна, її можна використовувати для прогнозування поведінки системи в майбутньому або для розуміння її внутрішніх механізмів. Прогнозування допомагає приймати рішення в управлінні системами, наприклад, в економіці, екології, інженерії тощо.

9. *Інтерпретація результатів*.

На завершальному етапі отримані результати аналізуються і тлумачаться у контексті реальної системи. Важливо переконатися, що висновки є зрозумілими і можуть бути використані для вирішення реальних проблем або для прийняття рішень.

Метод побудови математичних моделей полягає в послідовному процесі: від формулювання проблеми до аналізу й перевірки моделей на адекватність, з метою створення абстрактної, спрощеної, але точної і корисної репрезентації реального процесу або системи.

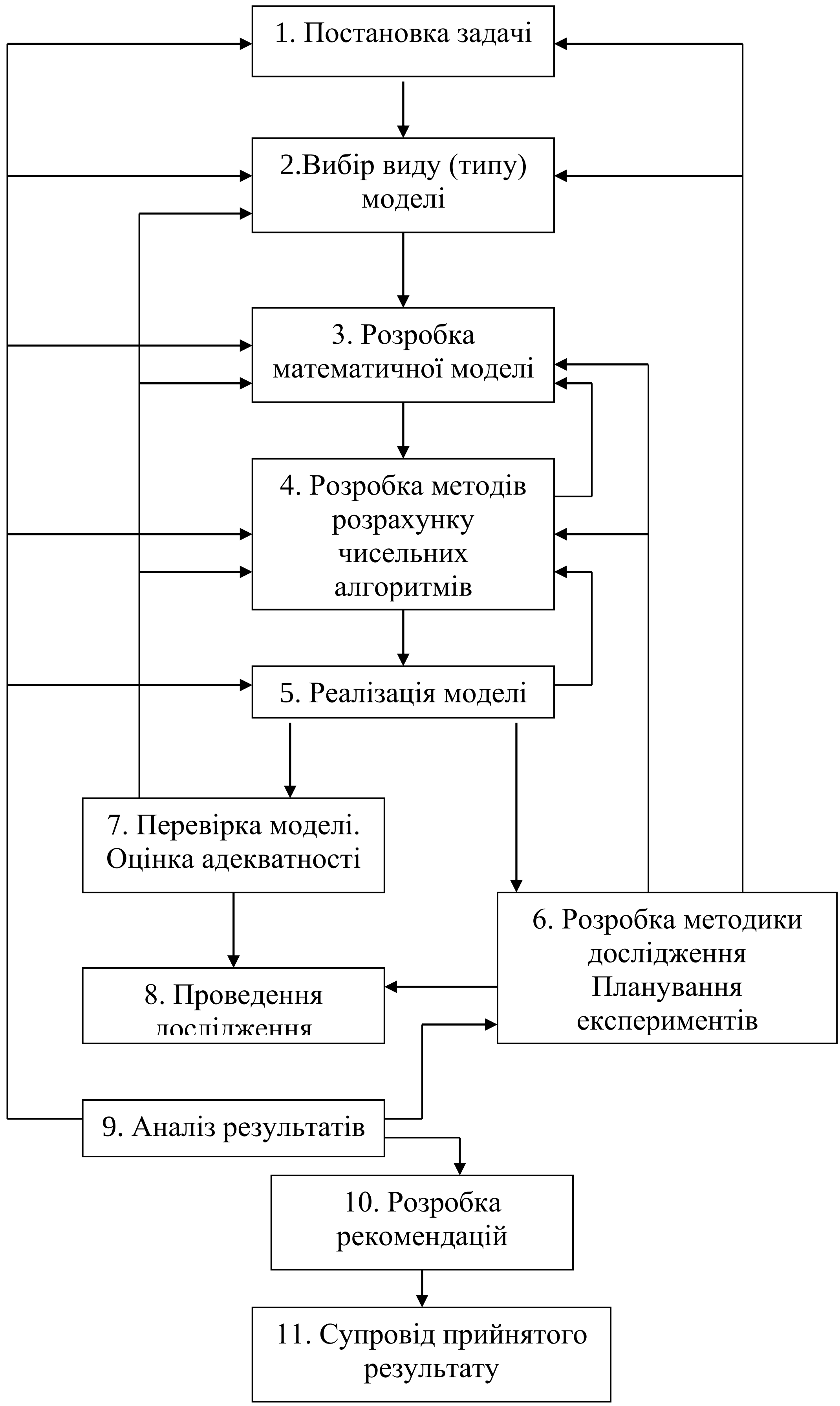
Поняття моделі завжди пов’язане в науці із застосуванням методу моделювання. Між системою, яка моделює процес, та оригіналом має існувати певна подібність, яка може виражатися в схожості фізичних характеристик оригіналу та системою, яка його моделює, або в схожості функцій, які здійснюють оригінал та модель, або в тотожності їх поведінки. Під час моделювання застосовуються різні форми аналогії, аналізу (поділ об’єкта на певні складові частини) і синтезу (поєднання отриманих результатів). Велике значення в процесі моделювання набувають процедури ідеалізації та абстрагування.

Ідеалізація – це певний розумовим процес створення так званих ідеалізованих предметів (це граничний випадок, який не має реалізації в дійсності) або формулювання ідеалізованих гіпотез.

Абстрагування – це розумова дія, яка спрямована на виокремлення в предметах та явищах суттєвого та несуттєвого. Тобто, в процесі абстрагування вдається спростити картину явища, що розглядається, і вивчити його ніби в «чистому вигляді» [17]. Взагалі, для математики характерним є багатоступінчате абстрагування.

Все вище сказане відноситься й до математичного моделювання.

Етапи математичного моделювання



На схемі чітко прослідковуються численні зворотні зв'язки – звернення до попередніх етапів після здійснення аналізу проміжних та остаточних результатів моделювання. Це є характерним для прикладних досліджень [15]. В ході проведення експерименту відбувається уточнення постановки задач, її формалізація, припущення, здійснюється удосконалення обчислювальних алгоритмів.

Постановка задачі є першим етапом моделювання. Наведемо декілька висловлювань з цього приводу видатних математиків.

«Прикладний математик має вміти не тільки й не стільки розв'язувати задачі, скільки формулювати їх. Сформулювати задачу на мові математики – це означає набагато більше, ніж на половину її розв'язати» (Грекова І. [4]).

«Плідно працюючого аналітика відзначає здатність правильного формулювання проблем» (Хатч Л. [26])

Проблема постановки задачі сприймається іноді як стан незадоволеності. Ситуація стає проблемою, якщо розвиток певної системи або плин якого-небудь процесу не призводять до бажаного результату.

Відомий наступний розподіл часу за окремим етапами моделювання:

- постановка задачі – 40-50%,
- розробка моделі – 20-30 %,
- експеримент, аналіз результатів – 20-30 % [10].

Математична постановка (або формалізація) створення математичної моделі є кінцевим етапом постановки задачі. Математична модель розпочинається з того моменту, коли будується система аксіом, що описує не лише сам об'єкт, але й деяку супровідну алгебру, тобто сукупність правил, які визначають допустимі операції над об'єктом. При здійсненні формалізації задачі мають бути визначені функціональні залежності, які пов'язують між собою змінні та параметри моделі. Формалізація задачі досить суттєво залежить від інформації про досліджуваний об'єкт, завдання дослідження, вид моделі, яка створюється.

Для забезпечення адекватності моделі в ході її розробки передбачаються наступні види контролю [17]:

1) король розмінностей: порівнювати та додавати можна тільки величини однакової розмірності;

2) контроль порядків: виділення основних та уточнення складових;

3) контроль характеру залежності між змінними;

4) контроль граничних умов;

5) контроль математичної замкненості, з’ясування того, чи має взагалі розв’язок задача, як вона подана у вигляді моделі;

6) контроль відповідності значень змінних їх фізичному змісту, знаки і величини моделі не повинні суперечити можливим значенням модельованих фізичних величин.

Під час аналізу обчислювального експерименту необхідно:

1) переконатися в тому, що результати експерименту повністю зрозумілі якісно, тобто не суперечать здоровому глузду, та кількісно;

2) повернутися до висунутих припущень, уточнити можливі впливи гіпотез на результат. За необхідності провести додаткові розрахунки;

3) оцінити точність отриманих результатів; у випадку, якщо подібні оцінки заздалегідь не були заплановані, потрібно їх розробити.

РОЗДІЛ 2
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики

Головне завдання системи прикладних задач – це підсилення прикладної спрямованості шкільного курсу математики.

Безумовно, сучасний курс шкільної математики пропонує досить широку кількість теоретичного матеріалу високого рівня науковості. Але майже зовсім обділяється увагою прикладна математика. А вона є досить важливою і для якості засвоєння матеріалу, і для його кількості.

Розв’язання даної проблеми може бути правильно побудована вчителем методика добору і наповненості прикладними задачами шкільного курсу математики та підвищення уваги до окремо взятої задачі. Це суттєво посилить прикладну спрямованість шкільного курсу математики.

Визначимося в термінології, зокрема, що ми будемо розуміти під прикладною спрямованістю.

«Прикладна спрямованість навчання математики – це орієнтація змісту методів навчання на застосування математики в техніці і суміжних науках, в професійній діяльності, в побуті» [19].

«У педагогічних дослідженнях прикладна спрямованість математики розуміється як змістовний та методологічний зв'язок шкільного курсу з практикою, що передбачає формування в учнів умінь, необхідних для розв’язування засобами математики прикладних задач» [14].

Враховуючи те, що в основі їх розв’язування лежить математичне моделювання, можна зробити висновок, що для реалізації прикладної спрямованості слід організувати навчання здобувачів елементам моделювання, які, з погляду дидактики, є безпосереньо навчальні дії, виконання яких відбувається в процесі розв’язання задач.

Прикладна спрямованість навчання математики містить у собі і політехнічну спрямованість навчання, зокрема, реалізацію зв’язків з такими курсами, як фізика, хімія, географія, екологія; широке використання інформаційних технологій та забезпечення комп’ютерної грамотності здобувачів, формування їх математичного стиля мислення.

Досить тісно з поняттям прикладної спрямованості пов’язане і поняття практичної спрямованості. Розмежуємо їх, скориставшись термінологією в [19].

«Практична спрямованість навчання математики – це спрямованість змісту методів навчання та розв’язування задач та вправ з метою формування у школярів навичок самостійної діяльності математичного характеру» [19].

В процесі реального навчання прикладна та практична спрямованість функціонують разом. Так, формування графічних, обчислювальних та вимірювальних навичок – це ті задачі, які розв’язуються завдяки практичної спрямованості навчання. Проте без вільного володіння цими навичками неможливо розв’язати навіть найпростіші прикладні задачі.

Розвиток прикладних математичних навичок у здобувачів передбачає формування цілого комплексу навичок і вмінь. Ось основні з них, які допоможуть їм застосовувати математику на практиці та зрозуміти її значущість у реальному житті:

1. *Аналітичне мислення*:

- Аналіз математичних задач і ситуацій, уміння виділяти ключові моменти та суттєві деталі.

- Логічне мислення – здобувачі повинні навчитися будувати умовиводи, а також аргументувати свої відповіді та перевіряти правильність розв’язання задач.

- Критичне мислення – оцінка результатів і способів розв’язання для вибору найбільш оптимального підходу.

2. *Навички вирішення проблем*:

- Постановка задачі – формулювання математичних задач на основі реальних ситуацій, розуміння, як застосовувати математику для вирішення повсякденних проблем.

- Складання плану вирішення задачі – вибір відповідних методів, алгоритмів або стратегій.

- Гнучкість у вирішенні задач – здатність адаптуватися до нових умов, знаходити різні шляхи для розв'язання однієї і тієї ж задачі.

3. *Робота з математичними моделями*:

- Моделювання реальних ситуацій за допомогою математичних моделей: здобувачі мають навчитися будувати, інтерпретувати і використовувати математичні моделі для пояснення або прогнозування явищ.

- Інтерпретація результатів – вміння пояснити результати обчислень, віднести їх до реальних обставин і оцінити практичне значення.

4. *Навички роботи з даними*:

- Збір, аналіз та обробка даних – здобувачі повинні навчитися збирати необхідну інформацію, аналізувати дані та робити висновки на їх основі.

- Візуалізація даних – створення графіків, діаграм, таблиць для наочного подання інформації.

- Оцінка ймовірностей та статистичних показників – базові навички статистики та теорії ймовірностей, які допоможуть в аналізі реальних ситуацій.

5. *Навички роботи з інформаційними технологіями*:

- Використання математичних програм (як Excel, GeoGebra, Python) для вирішення складних обчислень та побудови графіків.

- Програмування та алгоритміка – розуміння основ алгоритмів, логіки програмування, що допоможе в автоматизації процесів вирішення математичних задач.

6. *Уміння працювати з просторовими уявленнями та геометричними об'єктами*:

- Геометрична інтуїція – вміння уявляти геометричні об'єкти, вимірювати їх, робити обчислення об'ємів і площ, а також вирішувати просторові задачі.

- Орієнтація в просторі – розв'язання задач, пов'язаних з координатними системами, векторами та переміщеннями.

7. *Самостійне та колективне навчання*:

- Робота в команді – вміння працювати в групі, разом обговорювати та вирішувати математичні задачі.

- Самостійна робота – здатність самостійно знаходити необхідну інформацію, аналізувати її та формулювати свої висновки.

8. *Формування математичної культури*:

- Точність у записах і розрахунках – чітке дотримання математичної нотації, охайність у записах.

- Систематизація знань – розуміння зв'язку між різними темами, що допомагає використовувати набуті знання в нових умовах.

Формування цих навичок допоможе здобувачім зрозуміти, що математика – це не лише набір формул, а потужний інструмент для вирішення реальних проблем. Тож, у процесі навчання важливо акцентувати увагу на практичних застосуваннях, стимулювати критичне мислення, а також активно використовувати інформаційні технології.

2.2. Прикладні задачі та їх функції

В шкільній практиці до задач в широкому сенсі відносять не тільки текстові, сюжетні задачі, а й різного характеру вправи, приклади [6].

«Математична задача – будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень або запитання, рівносильне такій вимозі» [2].

Прикладні задачі з математики – це такий тип математичних задач, до яких висуваються додаткові вимоги. В різних джерелах наводяться різні означення прикладної задачі. Прикладні задачі є з одного боку метою, а з іншого – рушійною силою розвитку математики. Їх можна пропонувати на різних етапах навчання.

Дуже важливо відмежувати прикладні задачі від практичних. Для цього сформулюємо означення практичної задачі.

Практична задача – це задача, що формує навички самостійної діяльності суто математичного характеру [11].

Можна розглянути практичні задачі з погляду підготовки до розв’язування іншого класу задач. У такому випадку вони повинні формувати певні вміння, які будуть необхідні під час розв’язування прикладної задачі. Отже, ці два класи задач є нерозривною системою, і в свою чергу повинні гармонійно включатися у сукупність задач всього шкільного курсу математики.

Прикладні задачі з математики виконують кілька важливих функцій у навчальному процесі. Вони не лише допомагають засвоїти теоретичні знання, але й розвивають низку навичок, необхідних для реального життя. *Основні функції прикладних задач* наступні:

1. *Мотиваційна функція*:

- Залучення інтересу до предмета: прикладні задачі показують здобувачам, як математика пов'язана з повсякденними ситуаціями та професійною діяльністю, роблячи навчання більш захопливим і мотивуючим.

- Розуміння практичної цінності: здобувачі бачать, як математичні знання можуть бути використані для розв'язання реальних проблем, що спонукає їх до глибшого вивчення.

2. *Розвивальна функція*:

- Розвиток критичного мислення: прикладні задачі вчать аналізувати проблеми, виокремлювати головне, оцінювати різні підходи до вирішення та прогнозувати результати.

- Розвиток навичок вирішення проблем: здобувачі вчаться формулювати задачі, аналізувати умови та шукати оптимальні шляхи розв'язання, що допомагає розвинути навички вирішення проблем.

- Формування творчих навичок: нестандартні та нетипові прикладні задачі стимулюють здобувачів думати креативно, що також розвиває їхні аналітичні здібності.

3. *Навчальна функція*:

- Закріплення теоретичних знань: прикладні задачі допомагають здобувачам зрозуміти та закріпити математичні поняття і формули в контексті їх застосування.

- Інтеграція знань: розв'язання прикладних задач часто вимагає поєднання знань з різних розділів математики (алгебри, геометрії, статистики тощо), що сприяє комплексному засвоєнню матеріалу.

- Формування нових вмінь: здобувачі вчаться працювати з математичними моделями, використовувати формули та робити обчислення, що закладає основи прикладного використання математики.

4. *Практична функція*:

- Розвиток навичок роботи з реальними даними: здобувачі вчаться збирати, обробляти та аналізувати дані, що є важливим у багатьох професійних сферах.

- Ознайомлення з математичними моделями: при вирішенні прикладних задач здобувачі знайомляться з методами математичного моделювання, вчаться будувати моделі для різних ситуацій і користуватися ними.

- Формування навичок прийняття рішень: прикладні задачі часто потребують аналізу і вибору оптимального рішення, що розвиває в здобувачів здатність приймати зважені рішення на основі обчислень і даних.

5. *Виховна функція*:

- Формування відповідальності та точності: прикладні задачі привчають здобувачів до акуратності, точності та відповідальності, адже будь-яка помилка у розрахунках може призвести до невірного рішення.

- Розвиток самостійності: вирішення прикладних задач, особливо тих, що мають різні підходи, привчає до самостійного мислення і самостійної роботи над задачами.

- Сприяння роботі в команді: багато прикладних задач ефективно вирішуються у співпраці, що навчає здобувачів комунікації, вмінню обговорювати і відстоювати власні рішення та працювати в команді.

6. *Контролююча функція*:

- Оцінка рівня засвоєння знань: завдяки прикладним задачам вчитель може оцінити, наскільки здобувачі розуміють матеріал, чи здатні вони застосовувати свої знання у нестандартних ситуаціях.

- Перевірка вмінь застосування математики: розв'язання прикладних задач показує, чи можуть здобувачі використовувати математичні знання не лише теоретично, а й на практиці.

Прикладні задачі – це потужний інструмент, який не лише полегшує засвоєння теоретичних знань, а й готує здобувачів до реального світу, де математика застосовується для вирішення широкого спектра практичних завдань. Вони формують навички, необхідні для подальшого навчання, роботи та повсякденного життя.

2.3. Математичне моделювання в шкільному курсі математки

Математичне моделювання є важливим елементом шкільного курсу математики, оскільки воно «допомагає здобувачам зрозуміти, як застосовувати математичні знання для розв’язання реальних проблем» [7]. У процесі навчання математики моделювання виступає як місток між абстрактною теорією та її практичним застосуванням. Розглянемо основні аспекти, які визначають роль математичного моделювання у шкільному курсі:

1. *Формування прикладних навичок*.

Математичне моделювання дозволяє здобувачам навчитися застосовувати математику для аналізу й розв’язання проблем з реального світу. Це допомагає їм побачити практичну цінність математичних знань і розвинути навички, необхідні для майбутнього навчання та роботи в різних сферах: від природничих і технічних наук до економіки та соціології.

2. *Інтеграція знань із різних розділів математики*.

Моделювання вимагає комплексного підходу та використання знань з різних розділів математики, таких як алгебра, геометрія, тригонометрія, статистика тощо. Здобувачі навчаються комбінувати різні інструменти й методи, що допомагає їм систематизувати та краще зрозуміти вивчений матеріал.

3. *Розвиток аналітичного та критичного мислення*.

У процесі моделювання здобувачі вчаться формулювати завдання, аналізувати умови, визначати найбільш важливі фактори та будувати математичні моделі. Це стимулює розвиток критичного мислення, вміння ставити правильні питання та аргументувати свої висновки. Також здобувачі розвивають аналітичні навички, оскільки кожен крок моделювання вимагає обдуманих рішень і аналізу результатів.

4. *Підготовка до подальшого навчання та професійної діяльності*.

Моделювання є важливою частиною багатьох професій, де необхідно використовувати математичний апарат для прогнозування, аналізу даних і прийняття рішень. Навички моделювання, отримані в шкільному курсі математики, створюють основу для подальшого навчання, особливо у природничих, технічних і економічних спеціальностях.

5. *Засіб активізації навчання*.

Використання моделювання у шкільному курсі математики стимулює інтерес здобувачів, оскільки вони бачать реальне застосування своїх знань і мають змогу розв'язувати нетипові та цікаві задачі. Це робить навчання динамічнішим та орієнтованим на практичне використання знань.

6. *Розвиток вмінь самостійного навчання та дослідження*.

Моделювання передбачає велику частину самостійної роботи, адже здобувачам потрібно самостійно формулювати задачі, будувати моделі та інтерпретувати результати. Це сприяє розвитку навичок самонавчання і дослідження, що є корисним у навчанні та житті.

7. *Формування цілісного уявлення про математику*.

Завдяки моделюванню здобувачі розуміють, що математика – це не лише набір формул і абстрактних понять, а інструмент для пізнання й аналізу навколишнього світу. Моделювання допомагає здобувачам бачити взаємозв'язок між математикою та іншими науками, такими як фізика, хімія, біологія та економіка.

Математичне моделювання займає значне місце в шкільному курсі математики, оскільки воно сприяє формуванню у здобувачів прикладних навичок, системного мислення, здатності до аналізу та інтеграції знань з різних галузей. Це важливий інструмент, що дозволяє їм зрозуміти значущість математики та готує їх до вирішення складних проблем у реальному світі.

РОЗДІЛ 3
МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ У СТАРШОКЛАСНИКІВ НАВИЧОК МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

3.1. Перше знайомство здобувачів з методом математичного моделювання

Знайомство здобувачів з методом математичного моделювання на перших уроках варто проводити у простій і доступній формі, використовуючи приклади з повсякденного життя та реальних ситуацій. Це допоможе їм зрозуміти основи методу, а також зацікавить їх у вивченні математики.

Розглянемо основні кроки для знайомства з методом математичного моделюванняє

1. *Введення поняття моделі*.

Розпочати варто з пояснення, що таке математична модель, навіщо її використовують і як вона допомагає в реальному житті. Здобувачі мають зрозуміти, що моделювання – це «спрощене представлення реальної ситуації, яке дозволяє її аналізувати та приймати рішення» [12].

2. *Поетапне знайомство з процесом моделювання*:

- Формулювання задачі: визначення проблеми та умов задачі.
- Створення математичної моделі: перетворення реальних умов у математичні рівняння чи нерівності.
- Розв’язання моделі: знаходження математичного рішення, яке відповідає сформульованій задачі.
- Інтерпретація результату: пояснення отриманих результатів у контексті початкової проблеми.
- Перевірка і корекція: якщо модель не зовсім відповідає реальній ситуації, внести корективи.

3. *Прості приклади для практики*.

На перших уроках варто використовувати прості, інтуїтивно зрозумілі задачі. Нижче наведено кілька прикладів задач, які добре підходять для початкового знайомства з моделюванням.

Приклади задач для першого знайомства з моделюванням

1. Задача про рух (відстань, швидкість, час).

Ситуація: двоє друзів домовилися зустрітися в певному місці, яке знаходиться на відстані 100 км. Один із них їде зі швидкістю 60 км/год, інший – 80 км/год. Питання: через скільки часу вони зустрінуться?

Модель:

- Ввести змінні для швидкостей і відстані.

- Побудувати рівняння, що пов’язує швидкість, відстань і час.

- Розв’язати рівняння та інтерпретувати отриманий результат.

2. Задача про оптимізацію витрат.

Ситуація: у кафе продаються каву і чай. Кава коштує 3 грн, а чай – 2 грн. Учень має 20 грн і хоче купити напої так, щоб їх було якомога більше.

Модель:

- Ввести змінні для кількості чашок кави та чаю.

- Скласти нерівності, що відображають обмеження бюджету.

- Розв’язати задачу та проаналізувати оптимальний варіант (максимізацію кількості напоїв).

3. Задача про статистику та ймовірність (кидання монети).

Ситуація: припустимо, що монету підкидають 10 разів. Яка ймовірність, що орел випаде 5 разів?

Модель:

- Ввести кількість підкидань і бажану кількість випадань орла.

- Використати поняття ймовірності та комбінаторики.

- Розв’язати задачу, обчисливши ймовірність за допомогою біноміального розподілу.

4. Задача про життєві ситуації (упаковка коробок).

Ситуація: потрібно упакувати 120 книжок у коробки так, щоб у кожній коробці було не більше ніж 10 книжок. Скільки коробок необхідно для цього?

Модель:

- Ввести кількість книжок та максимальну місткість однієї коробки.

- Скласти рівняння, яке допоможе знайти мінімальну кількість коробок.

- Розв’язати задачу та інтерпретувати отриманий результат.

5. Задача про площі (розподіл земельної ділянки).

Ситуація: у здобувачів є ділянка землі розміром 1000 м². Їм потрібно виділити частину під садок, частину під город, решту – під будівництво. Скільки площі виділити під кожну частину, якщо відомо, що садок має займати не більше 20% всієї ділянки, а город – не менше 30%?

Модель:

- Ввести змінні для площ садка, городу та будівель.

- Скласти нерівності для відсоткових обмежень і знайти можливі варіанти розподілу.

- Інтерпретувати розв’язок у контексті задачі.

Поради для вчителя:

- Використовуйте знайомі ситуації: обирайте задачі, які відображають повсякденні ситуації, щоб здобувачі могли інтуїтивно зрозуміти, як формулювати моделі.

- Розглядайте різні підходи: показуйте, як одна і та ж задача може бути розв’язана різними методами.

- Інтерактивність і групова робота: нехай здобувачі обговорюють свої ідеї в парах або групах. Це допоможе їм мислити творчо і впевнено підходити до нових задач.

На перших уроках важливо забезпечити здобувачам позитивний досвід моделювання, щоб вони не боялися експериментувати та пробувати різні підходи.

3.2. Поетапне формування у здобувачів навичок математичного моделювання

Побудова математичної моделі прикладної задачі

Щоб навчити здобувачів будувати модель для прикладної задачі з математики, вчителю важливо систематично підходити до цього процесу та створити зрозумілий і послідовний алгоритм для здобувачів. Ось кілька методичних рекомендацій, які допоможуть ефективно організувати навчання:

1. Почати з простих, зрозумілих задач: розпочинати слід із задач, які можна легко співвіднести з реальним життям. Наприклад, задачі про швидкість і відстань, фінансові розрахунки, прості відсоткові обчислення. Це допоможе здобувачам зрозуміти базові кроки побудови моделей і уникнути складнощів на початкових етапах.

2. Розбити процес на етапи та пояснити їх:

- Запропонувати здобувачам алгоритм побудови математичної моделі, розбивши його на послідовні кроки:

  - Аналіз умови задачі: здобувачі мають чітко зрозуміти, про що йдеться в задачі, які дані їм потрібні та що потрібно знайти.

  - Введення змінних: вчити здобувачів правильно позначати невідомі значення змінними, що робить умову задачі компактною і зрозумілою.

  - Складання математичних виразів та рівнянь: пояснити, як з використанням змінних формулювати математичні рівняння, нерівності або функції.

  - Розв’язання та інтерпретація результатів: показати, як знайти розв'язок та повернути його до контексту задачі.

  - Перевірка коректності моделі: навчити здобувачів перевіряти адекватність отриманого результату та, за необхідності, уточнювати модель.

3. Пояснювати важливість кожного етапу: на кожному етапі вчитель має пояснювати значення і роль цього кроку в моделюванні, щоб здобувачі розуміли, навіщо вони його виконують. Важливо наголосити, що модель може потребувати уточнень та змін, адже не завжди першочергова спроба точно відповідає всім умовам задачі.

4. Навчити розрізняти важливу та другорядну інформацію: на прикладах задач пояснити, як виділяти основні умови задачі і відкидати другорядну інформацію. Використання кольорових маркерів або схем для виділення ключових частин задачі може допомогти здобувачам краще структурувати інформацію.

5. Навчити формулювати змінні та константи: запропонувати здобувачам детально пояснити, що означає кожна змінна і кожна константа в задачі. Наприклад, у задачі про рух змінні можуть означати швидкість, відстань, час. Важливо навчити учнів задавати такі змінні відповідно до умови.

6. Показати різні приклади побудови моделей: розглянути декілька задач, які можна розв'язати різними методами, або задачі з варіативними умовами. Це розвиває гнучкість мислення та вчить здобувачів не боятися використовувати різні підходи в побудові моделей.

7. Створити ситуацію для командної роботи та обговорення: поділити здобувачів на групи для обговорення і спільного вирішення задач з побудовою моделей. Командна робота стимулює обмін ідеями та допомагає здобувачам побачити різні точки зору на вирішення однієї і тієї ж задачі. Нехай кожна група презентує свою модель, обґрунтовує її, а інші групи висловлюють свої міркування щодо неї.

8. Залучити сучасні технології: використання програм, таких як GeoGebra, Excel або Wolfram Alpha, може допомогти здобувачам будувати та візуалізувати моделі. Залучення технологій полегшує побудову моделей і допомагає зобувачам побачити наочні результати своїх розрахунків, наприклад, у вигляді графіків.

9. Завдання на самостійну роботу: давати здобувачам домашні завдання або проєкти, де вони зможуть самостійно розробити математичну модель для реальних ситуацій, наприклад, оптимізація розподілу бюджету, планування подорожі або розрахунок площі ділянки.

10. Розбір типових помилок: на уроках доцільно звертати увагу на типові помилки, яких здобувачі можуть припускатися при побудові моделей. Наприклад, помилки при введенні змінних, формулюванні рівнянь або інтерпретації результатів. Розгляд таких прикладів допоможе здобувачам уникати помилок у майбутньому і краще розуміти процес моделювання.

Методичний підхід до навчання математичного моделювання включає поетапну роботу над простими задачами, розбір кожного етапу, командну взаємодію, використання технологій та поступове ускладнення завдань. Такий підхід сприяє усвідомленому засвоєнню здобувачами алгоритму побудови моделей і допомагає їм вільно застосовувати його для вирішення прикладних задач.

Після побудови здобувачами математичної моделі прикоданої задачі значно простіше виділити основні об’єкти і величини в умові та співвідношеннях між ними. Але це вже більш складна розумова операція. Слід чітко відмежовувати об’єкти від величин. При цьому ще раз потрібно пояснити здобувачам, що розуміється під цими поняттями.

У процесі аналізу величин також можна застосовувати схему 3.1 або ввести записи в звичайній формі.

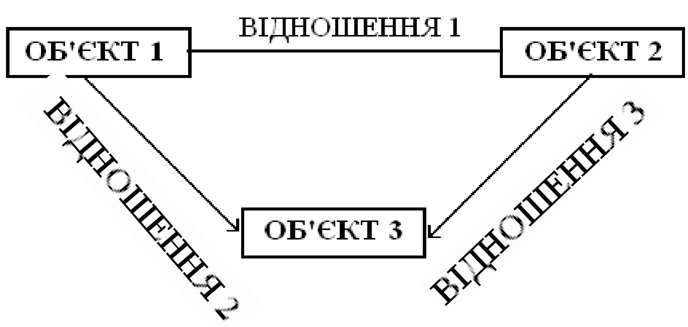


Схема 3.1

Дуже важливим є відділення відомих величин від невідомих. В задачах з алгебри вже на цьому етапі ввести змінні, якщо задачу планується розв’язувати рівнянням.

Всі ці операції, крім введення невідомої змінної, у подальшому можна буде проводити в усній формі.

Аналіз побудованої моделі та отриманих розв’язків – це важливий етап математичного моделювання, який допомагає здобувачам усвідомити правильність або хиби у своїй роботі. Учителю корисно акцентувати увагу на критичному перегляді моделі та результатів, щоб навчити здобувачів комплексно оцінювати якість свого розв’язання.

Наведемо кілька рекомендацій для ефективного аналізу моделей та розв’язків:

1. *Перевірка відповідності моделі умовам задачі*:

- Підказки для здобувачів: попросіть їх оцінити, чи враховує модель усі умови задачі, чи всі змінні та константи визначені правильно, чи не пропущені важливі елементи.

- На що звернути увагу вчителю: зверніть увагу, чи розуміють здобувачі, як умова задачі пов’язана з обраною математичною структурою (рівняннями, нерівностями, функціями). Якщо ні, допоможіть зосередитись на деталях.

2. *Перевірка логічності та реалістичності моделі*:

- Підказки для здобувачів: запропонуйте здобувачам розглянути, чи є створена модель логічною та чи відповідає реальним умовам задачі. Наприклад, чи є реалістичними значення змінних або параметрів.

- На що звернути увагу вчителю: якщо здобувачі допускають нереалістичні допущення, поясніть, чому модель не може працювати в реальному контексті, і покажіть, як виправити помилку.

3. *Аналіз простоти та оптимальності моделі*:

- Підказки для здобувачів: запропонуйте перевірити, чи можна спростити модель, чи є зайві складності, або чи можна замінити її на простішу модель, яка також задовольняє умови задачі.

- На що звернути увагу вчителю: поясніть здобувачам, що більш складна модель не завжди є кращою, і покажіть на прикладі, як спрощення може полегшити розв’язання, не втрачаючи точності.

4. *Перевірка обчислень та логічних переходів у розв’язках*:

- Підказки для здобувачів: попросіть здобувачів ретельно перевірити кожен крок розв’язання, звернувши увагу на правильність обчислень і логічних переходів.

- На що звернути увагу вчителю: зверніть увагу, чи розуміють здобувачі, як кожен обчислювальний крок пов’язаний із побудованою моделлю. Якщо у них виникають труднощі, поясніть зв’язки між частинами моделі та розв’язанням.

5. *Порівняння результатів із реальним контекстом задачі*:

- Підказки для здобувачів: запропонуйте порівняти результати розв’язків із реальним контекстом задачі. Чи мають результати сенс у реальній ситуації?

- На що звернути увагу вчителю: якщо здобувачі не впевнені, чи є результат реалістичним, допоможіть їм на прикладах оцінити результат з точки зору життєвих ситуацій.

6. *Проведення оцінки чутливості моделі*:

- Підказки для здобувачів: запропонуйте здобувачам змінити деякі параметри моделі та подивитися, як це вплине на результат. Це допоможе зрозуміти, чи є модель чутливою до певних змін і наскільки вона надійна.

- На що звернути увагу вчителю: покажіть здобувачам на прикладах, як зміна одного параметра може вплинути на результат, і поясніть, чому важливо враховувати стабільність моделі.

7. *Оцінка точності та можливих джерел помилок*:

- Підказки для здобувачів: обговоріть із здобувачами, чи можуть бути помилки в розв’язанні та які з них суттєво впливають на кінцевий результат.

- На що звернути увагу вчителю: навчіть здобувачів знаходити потенційні джерела помилок, як-от наближення або округлення, неправильні допущення або помилки в обчисленнях, та пояснюйте, як їх уникати.

8. *Висновки та рекомендації щодо покращення моделі*:

- Підказки для здобувачів: запропонуйте їм зробити висновок про доцільність і точність моделі, подумати, які додаткові фактори можна було б урахувати, або що можна покращити.

- На що звернути увагу вчителю: зверніть увагу, чи бачать здобувачі можливі шляхи покращення, та допоможіть їм сформулювати пропозиції щодо уточнення або розширення моделі.

Покроковий аналіз дозволить здобувачам краще зрозуміти значення моделювання та розвине їхню здатність критично оцінювати свою роботу, що стане їм у нагоді як у навчанні, так і в життєвих ситуаціях.

Робота над алгоритмом розв'язування, узагальненою та оберненою задачами

У процесі виділення загальної схеми розв'язування задачі (алгоритму) слід працювати для початку усно, а потім записувати. Учителю потрібно наголосити, що розв'язування задачі починається з її аналізу. Це має бути зафіксовано в схемі. Якщо наступних етапів не передбачено, то дану схему слід повторити декілька разів, в іншому випадку це буде зроблено під час побудови системи задач, що розв'язуються за таким алгоритмом, та роботи над узагальненою задачами.

Побудова системи задач, що розв'язуються даним способом, є досить складним завданням для здобувачів. Можливий варіант, коли вчитель сам пропонує їм перелік таких задач, але розширений задачами іншого типу. Здобувачам слід обрати задачі, які можна розв'язувати за даним алгоритмом. Далі можна запропонувати їм самостійно поповнити складену систему. При цьому вчителю необхідно зауважити, що більш цікавими є задачі, які підібрані не за аналогією, але розв'язуються за даним алгоритмом.

Якщо клас до цього моменту не мав досвіду роботи з такими завданнями, то вчителю слід спочатку самому показати загальність задач такої схеми та обов'язково зробити акцент на «межах застосування даного алгоритму та прийомах їх відшкодування, які можуть полягати у звуженні класу задач» [22].

Інтерпретуємо сказане за допомогою схеми 3.2. Кожний прямокутник – це клас задач, а той, що міститься в ньому, – його підклас. Побудувати їх можна, прослідковуючи алгоритм і ставлячи вимогу (критерій). Задачі, що потрапили в заштриховану область, задовольняють усі критерії і є задачами, що розв'язуються за допомогою даного алгоритму.

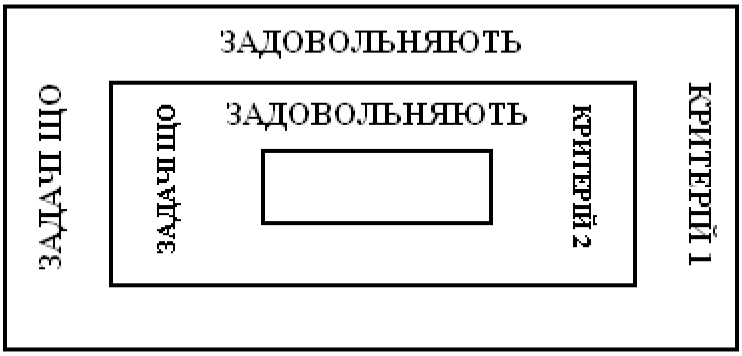


Схема 3.2

Далі бажано побудувати узагальнену задачу. Це досить складна операція, але вона є дуже корисною в розвитку розумових здібностей учнів. При цьому слід порекомендувати здобувачам звернутися не лише до системи окремих задач, але і до підготовчої роботи над базовою задачею, що допоможе зробити для них більш зрозумілою умову узагальненої задачі. Проте не слід зводити її до умови базової задачі, в якій замість числових даних взято буквені.

Завершення роботи із узагальненою задачею слід провести у вигляді з'ясування алгоритму її розв'язування та дослідження одержаних розв'язків. При цьому можна спиратись на вже розв'язані задачі даного типу. Операцію побудови оберненої задачі, алгоритму її розв’язування та дослідження розв’язків слід провести як на базовій, так і на узагальненій задачі.

Роботу над узагальненою та оберненою задачами в класі з відповідною підготовкою можна дати на самостійне опрацювання, але з обов’язковою перевіркою. Ця перевірка надасть учителю корисну інформацію про рівень логіко-математичного мислення здобувачів.

Виділимо загальну схему розв’язування задачі.

1. Коротко сформулюємо умову задачі.
2. Виділимо об’єкти задачі, відношеннями між ними є взаємодії з певними силами.
3. Проаналізуємо величини: сили й співвідношення між ними.
4. Виділимо ті співвідношення, які будуть потрібні при розв’язуванні задачі, попередньо зробивши малюнок.
5. Сформулюємо геометричну задачу, яка була б моделлю даної задачі.
6. Проаналізуємо геометричні елементи, які в ній фігурують, згадаємо відомі співвідношення між ними.
7. Виберемо з них необхідні і розв’яжемо задачу.
8. Проаналізуємо правильність відповіді з формального погляду, дослідивши її, враховуючи екстремальну вимогу задачі, знайдемо екстремальне значення елемента.
9. Сформулюємо остаточну відповідь.

Якщо в класі є здобувачі, які розв’язували задачу іншими методами, то обов’язково слід відмітити цих здобувачів, надати їм можливість продемонструвати власний варіант для всього класу. Якщо він виявиться нераціональним, зробити тактовні зауваження й поради. Взагалі досить цінними є прикладні задачі, які можна розв’язати кількома способами.

Наведемо приклади задач зі шкільного курсу математики, для яких можна створити математичну модель у вигляді рівняння або системи рівнянь.

1. *Задача про покупку товарів*: учень купує кілька ручок та зошитів за відомими цінами, маючи обмежену суму грошей. Необхідно визначити, скільки ручок та зошитів він може купити. (*Модель*: лінійне рівняння).

2. *Розрахунок витрат на поїздку*: в автобусі з учнями витрачається певна кількість палива на кожен кілометр. Знаючи вартість палива і довжину шляху, знайти загальні витрати на пальне. (*Модель*: лінійне рівняння).

3. *Задача про швидкість і відстань*: два автомобілі вирушають одночасно з різних міст назустріч один одному. Відомо відстань між містами та швидкість кожного авто. Коли вони зустрінуться? (*Модель*: система рівнянь).

4. *Задача про заробіток на роботі*: учень працює після школи, заробляючи фіксовану ставку та відсоток від продажів. Необхідно визначити, скільки йому потрібно продати, щоб заробити певну суму. (*Модель*: лінійне рівняння).

5. *Задача на змішування розчинів*: змішують два розчини різної концентрації, щоб отримати розчин із заданою концентрацією. Скільки потрібно взяти кожного розчину? (*Модель*: система лінійних рівнянь).

6. *Задача про вік*: якщо сума віків батька і дитини дорівнює певному числу, а різниця віків відома, то скільки років кожному? (*Модель*: система рівнянь).

7. *Задача про поїздки на велосипеді*: два учні вирушають у подорож на велосипедах із різних точок у протилежних напрямках. Скільки часу їм потрібно, щоб подолати певну відстань? (*Модель*: система рівнянь).

8. *Задача про продаж фруктів*: мама купила яблука і груші, заплативши за кожен вид фруктів відому суму. Скільки було куплено кожного виду фруктів? (*Модель*: система рівнянь).

9. *Задача про фінансову економію*: учень зберігає гроші на кишенькові витрати, додаючи певну суму кожного тижня. Скільки він

заощадить через кілька місяців? (*Модель*: лінійне рівняння).

10. *Задача про розклад поїздів*: два поїзди вирушають з однієї станції в різний час, маючи різну швидкість. Скільки часу знадобиться кожному, щоб прибути на іншу станцію? (*Модель*: система рівнянь).

11. *Задача на відсотки*: учень хоче купити певний товар у кредит. Скільки він переплатить за товар через певний час за відомою відсотковою ставкою? (*Модель*: лінійне рівняння).

12. *Задача про зниження і підвищення цін*: ціна товару знизилася на певний відсоток, а потім піднялася на інший відсоток. Якою стала нова ціна? (*Модель*: лінійне рівняння).

13. *Задача про рух річкою*: човен рухається вгору і вниз по річці з певною швидкістю. Знайти швидкість течії річки, якщо відомі часи на дорогу вгору і вниз. (*Модель*: система рівнянь).

14. *Задача про оренду автомобіля*: вартість оренди автомобіля включає фіксовану суму за день та додаткову оплату за кожен кілометр. Скільки коштуватиме оренда на певну кількість кілометрів? (*Модель*: лінійне рівняння).

15. *Задача про розподіл витрат*: кілька друзів орендують кімнату на відпочинку і ділять витрати пропорційно кількості днів. Скільки кожен має сплатити? (*Модель*: лінійне рівняння).

16. *Задача про змішування добрив*: для створення суміші добрив треба змішати два види добрив у певній пропорції. Скільки потрібно взяти кожного виду для отримання бажаної концентрації? (*Модель*: система рівнянь).

17. *Задача про підсумкові оцінки*: учень має оцінки за кілька завдань і хоче дізнатися, яку оцінку йому необхідно отримати на фінальному іспиті, щоб досягти певного середнього балу. (*Модель*: лінійне рівняння).

18. *Задача про рівномірний рух по колу*: рухаючись по колу зі швидкістю, учень хоче дізнатися, скільки кілометрів він подолає за певний час. (*Модель*: лінійне рівняння).

19. *Задача про кількість учнів у класі*: у школі є кілька класів, у яких кількість учнів залежить від середнього розміру класу. Знаючи кількість учнів і класів, скільки учнів у кожному класі? (*Модель*: система рівнянь).

20. *Задача про відсотковий приріст населення*: чисельність населення зростає щороку на певний відсоток. Скільки становитиме населення через певну кількість років? (*Модель*: рівняння експоненційного зростання).

Ці задачі дозволяють здобувачам побудувати математичні моделі для розв’язання реальних або гіпотетичних ситуацій, використовуючи рівняння та системи рівнянь. Це чудова практика для розвитку навичок математичного моделювання і логічного мислення.

Також наведемо приклади задач прикладного та економічного змісту для здобувачів, в яких можна застосувати метод математичного моделювання на уроках математики. Ці задачі прості для розуміння і розв’язання, але водночас показують практичну користь математики.

1. *Розрахунок витрат на шкільну екскур*сію: створити модель для розрахунку загальної вартості поїздки з урахуванням витрат на транспорт, харчування і квитки.

2. *Оптимізація розкладу занять*: розробити модель, яка дозволяє оптимально розподілити час для різних предметів і гуртків, щоб уникнути перевантаження учнів.

3. *Аналіз успішності класу*: моделювати середній бал з кожного предмета, визначити вплив додаткових занять на загальну успішність.

4. *Моделювання росту кишенькових грошей*: побудувати модель, яка показує, як змінюється сума кишенькових грошей протягом року, враховуючи щотижневі витрати і можливі заощадження.

5. *Прогноз погоди для шкільного проекту*: використовуючи дані про температуру і опади за попередні тижні, спрогнозувати погоду на наступний тиждень.

6. *Розрахунок вартості навчальних матеріалів*: створити модель, яка визначає загальну вартість підручників, зошитів і канцелярського приладдя для кожного класу.

7. *Задача на економію води вдома*: моделювати щомісячне споживання води у сім'ї, визначити можливу економію за допомогою зменшення витрат.

8. *Прогнозування висоти рослин у шкільному проекті*: побудувати модель росту рослин у класі, враховуючи частоту поливу та доступ до світла.

9. *Моделювання руху автобуса*: розрахувати, скільки часу займе дорога до школи з урахуванням зупинок, швидкості руху та заторів.

10. *Розрахунок шкільного бюджету на місяць*: створити модель, яка показує витрати школи на комунальні послуги, харчування та приладдя для навчання.

11. *Оптимізація розміщення книжок у бібліотеці*: модель для розподілу книжок за категоріями і полицями для швидшого доступу.

12. *Моделювання накопичення кишенькових грошей*: здобувачі можуть спрогнозувати, скільки грошей вони зможуть накопичити до кінця року, якщо відкладатимуть певну суму щотижня.

13. *Аналіз споживання електроенергії в школі*: побудувати модель для обчислення споживання електрики і можливих шляхів економії.

14. *Розрахунок витрат на покупку шкільної форми*: визначити середню вартість форми для учнів класу і розглянути варіанти економії, наприклад, при покупці кількох комплектів.

15. *Моделювання швидкості обертання шкільної каруселі*: розрахувати оптимальну швидкість, щоб вона була безпечною для дітей.

16. *Прогноз результатів спортивного змагання*: вивчивши попередні результати учасників, створити модель для оцінки ймовірного переможця.

17. *Аналіз поведінки знижок у магазинах*: створити модель, яка допоможе зрозуміти, наскільки можна зекономити на покупках під час

знижок.

18. *Задача на оптимізацію часу на домашні завдання*: розробити модель розподілу часу на різні предмети, щоб ефективно виконати домашні завдання без перевантаження.

19. *Моделювання руху м’яча у спортивних іграх*: здобувачі можуть проаналізувати траєкторію м’яча під різними кутами та з різною силою кидка.

20. *Прогноз заробітку від шкільного ярмарку*: розробити модель для оцінки прибутків від продажу на ярмарку з урахуванням витрат і ціни товарів.

Ці задачі допомагають здобувачам застосувати математичне моделювання на практиці, розвивають логічне мислення, а також демонструють практичну корисність математики в житті.

Формування вміння застосовувати математичне моделювання у здобувачів під час навчання математики можна досягти через декілька ключових підходів:

1. Використання реальних прикладних задач: здобувачі мають бачити, як математика використовується у житті. Завдання, що ілюструють реальні ситуації (економіка, фізика, екологія), допоможуть їм побачити практичність математичного моделювання.

2. Розвиток проєктної діяльності: включення в навчальний процес проєктів, де здобувачі працюють над моделюванням конкретних проблем або ситуацій. Наприклад, вони можуть досліджувати екологічні проблеми в своєму регіоні, моделюючи забруднення води або ґрунту, використовуючи математичні моделі.

3. Поступове ускладнення завдань: починати з простих моделей, що базуються на базових поняттях (лінійні рівняння, пропорції), і поступово переходити до складніших (нелінійні рівняння, системи рівнянь). Це допомагає зобувачам поступово розвивати вміння аналізувати складніші ситуації.

4. Інтеграція міжпредметних зв’язків: залучення інших предметів, таких як фізика, економіка, інформатика, для показу, як математичні моделі застосовуються в інших галузях. Наприклад, під час вивчення законів фізики здобувачі можуть використовувати математичні рівняння для моделювання руху або електричних процесів.

5. Використання інформаційних технологій: використання програмного забезпечення для моделювання та обчислень (наприклад, Excel, GeoGebra, Wolfram Alpha). Це дозволяє здобувачам не тільки будувати математичні моделі, а й аналізувати дані, будувати графіки та розв’язувати рівняння. Наприклад, вони можуть побудувати модель для аналізу фінансових трендів або зробити прогноз розвитку епідемії за допомогою інструментів для аналізу даних.

6. Групові роботи та дискусії: спільна робота над моделюванням у групах допомагає здобувачам краще зрозуміти процес та поділитися ідеями. Дискусії щодо різних підходів до розв'язання проблем формують критичне мислення. Це дозволяє розвивати навички колективного мислення, що необхідні для роботи в реальних життєвих ситуаціях.

7. Формування вміння інтерпретувати результати: важливо не тільки вміти будувати моделі, а й аналізувати отримані результати, робити висновки та пропонувати рекомендації. Наприклад, після моделювання економічних процесів, здобувачі повинні пояснити, що означають отримані числа, як їх можна використовувати для прийняття рішень.

8. Залучення дослідницьких задач: здобувачі можуть ставити дослідницькі питання і самостійно шукати шляхи їх розв’язання через математичне моделювання. Це стимулює творче мислення.

Щоб ефективно навчити здобувачі застосовувати математичне моделювання, важливо робити акцент на практичності завдань, міжпредметних зв'язках, активній діяльності учнів та використанні сучасних технологій. Це допоможе їм побачити зв’язок між математикою і реальним життям та розвинути необхідні навички для майбутнього.

3.3. Розвиток умінь математичного моделювання здобувачів в умовах цифровізації освіти

У сучасних умовах дистанційне навчання стало невід'ємною частиною освітнього процесу, і саме цифровізація освіти грає ключову роль в успішному його впровадженні. Використання цифрових технологій дозволяє створювати інтерактивні та зручні для учнів формати навчання, які можна адаптувати під індивідуальні потреби [4]. Віртуальні класи, інтерактивні презентації та тестування значно полегшують процес засвоєння матеріалу й роблять навчання доступнішим для кожного.

Цифрові інструменти також дозволяють вчителям краще організувати процес навчання та відстежувати прогрес здобувачів. Наприклад, завдяки онлайн-платформам, як-от Google Classroom або Zoom, вчителі можуть надавати навчальні матеріали, перевіряти роботи та проводити обговорення в режимі реального часу, що забезпечує гнучкість та оперативний зворотний зв'язок. Це допомагає здобувачам не лише здобувати знання, але й розвивати відповідальність і самоорганізацію – навички, важливі у цифровому світі.

Крім того, цифровізація відкриває доступ до світових освітніх ресурсів, що дає змогу здобувачам вивчати найактуальнішу інформацію з різних галузей. Віртуальні музеї, наукові бібліотеки, відеолекції від провідних експертів — усе це сприяє більш глибокому розумінню предметів і мотивації до навчання. Таким чином, цифровізація в освіті допомагає не лише адаптуватися до нових умов, але й розвиває глобальне мислення, необхідне у сучасному суспільстві.

Опанування здобувачами методу математичного моделювання під час уроків математики з використанням цифрових інструментів можна організувати в кілька етапів, спираючись на інтерактивні й практичні ресурси. Такий підхід дозволить учням глибше зрозуміти сам принцип моделювання та його застосування на практиці, розвиваючи при цьому навички роботи з математичними інструментами.

1. *Візуалізація задач і побудова моделі*.

Почати можна з використання програм для візуалізації, таких як GeoGebra, Desmos або Wolfram Alpha [6, 18]. На цьому етапі здобувачі можуть побачити, як математичні рівняння та функції працюють у графічному вигляді. Здобувачі самостійно або в групах створюють моделі за допомогою цих інструментів, будуючи графіки, що ілюструють реальні задачі, наприклад, рух об’єктів, зміни температури або фінансові розрахунки. Це дає можливість наочно побачити зв'язок між теорією і практикою.

2. *Аналіз даних і побудова математичних рівнянь*.

Наступний крок – робота з даними та їх аналіз за допомогою програм, таких як Microsoft Excel або Google Sheets. Здобувачі можуть збирати реальні дані (наприклад, погоди, фінансових показників або спортивної статистики) та досліджувати їх, використовуючи побудову діаграм і трендів. Ці інструменти дозволяють легко створювати лінії тренду та прогнози, допомагаючи здобувачам зрозуміти, як на основі даних можна будувати рівняння моделі. Вони вчаться описувати та передбачати поведінку об'єктів через математичні залежності.

3. *Практичне застосування моделювання через симуляції*.

На завершальному етапі важливо залучити здобувачів до симуляцій, щоб вони могли застосувати побудовані моделі. Онлайн-ресурси, як-от PhET Interactive Simulations, дозволяють їм взаємодіяти з віртуальними симуляціями фізичних, біологічних та економічних процесів. Наприклад, моделюючи рух об’єкта під впливом різних сил, здобувачі можуть використовувати свої математичні моделі для передбачення результатів. Така практика допомагає їм зрозуміти важливість математичного моделювання для вирішення реальних проблем і мотивує до подальшого вивчення математики та її застосувань.

Для залучення цифрових інструментів у розв’язуванні прикладних задач вчителю корисно врахувати кілька методичних рекомендацій, які допоможуть інтегрувати технології у навчальний процес ефективно та цікаво.

1. Вибір інструментів, що відповідають меті уроку.

Перший крок – це визначити завдання, яке учні мають вирішити, і обрати відповідні цифрові інструменти. Наприклад, для математичного аналізу даних підходять Google Sheets або Excel, для побудови графіків та функцій – Desmos або GeoGebra. Якщо мета уроку – вивчення статистики чи прогнозів, доцільно залучити спеціальні платформи для візуалізації даних, як-от Tableau Public [28]. Також варто переконатися, що учні мають базові навички роботи з обраними інструментами або провести короткий вступний інструктаж.

2. Створення практичних завдань із реального життя.

Здобувачам буде легше зацікавитися, якщо прикладні задачі базуватимуться на реальних ситуаціях. Рекомендується використовувати задачі, пов’язані з повсякденним життям здобувачів наприклад, задачі з економіки (розрахунок вартості покупок, процентів на банківській карті) чи екології (зміна клімату на основі даних про температуру). Використання платформ для збору та обробки даних дозволяє здобувачам не лише вирішувати математичні задачі, але й розвивати критичне мислення, аналізуючи різні аспекти проблеми. Це підвищує їхню мотивацію, оскільки знання стають відчутними.

3. Організація роботи в групах з елементами проектної діяльності.

Для більш ефективного засвоєння матеріалу можна організувати роботу в групах або провести заняття у форматі проектної діяльності. Наприклад, одна група учнів може збирати дані, інша – будувати моделі, а третя – презентувати результати та робити висновки. Цифрові інструменти, такі як Jamboard або Miro, допоможуть здобувачам співпрацювати й обмінюватися ідеями в режимі реального часу. Це навчить їх взаємодіяти, ділитися відповідальністю та застосовувати знання для досягнення спільної мети, а також підвищить зацікавленість і впевненість у використанні технологій.

Наведемо кілька прикладів прикладних задач з математики, а також відповідні програми, які допоможуть здобувачам не лише розв'язати ці задачі, а й візуалізувати їх рішення для кращого розуміння.

1. Задача на прогнозування вартості покупок (економічна задача).

Приклад задачі: уявімо, що учні мають розрахувати вартість покупки з урахуванням знижок, податку або інших змінних. Наприклад, розрахувати, скільки буде коштувати набір товарів з різними знижками на кожен товар, або спрогнозувати, як зміниться вартість покупки за умов інфляції на певний відсоток.

Програма для розв'язання: Google Sheets або Excel дозволяють здобувачам застосовувати формули для обчислення знижок, процентів та податків, а також використовувати діаграми для візуалізації змін у вартості. За допомогою цих інструментів здобувачі можуть налаштовувати автоматичний перерахунок вартості при зміні параметрів, що дозволяє легко досліджувати вплив різних факторів.

2. Задача на моделювання руху (задача з фізики та математики).

Приклад задачі: розрахувати траєкторію руху об'єкта, наприклад, м'яча, кинутого під кутом. Здобувачі можуть визначити швидкість, кут кидка і обчислити, як далеко він полетить, скільки часу буде в польоті та на яку висоту підніметься.

Програма для розв'язання: GeoGebra або Desmos дозволяють побудувати графік траєкторії, вводячи рівняння руху. У GeoGebra можна створити динамічну модель, де здобувачі бачать, як змінюються параметри траєкторії при зміні кута або початкової швидкості. Це допомагає зрозуміти взаємозв'язок між фізичними і математичними параметрами руху.

3. Задача на статистику і аналіз даних (соціальна або екологічна проблема).

Приклад задачі: аналіз даних про погоду в певному регіоні протягом року для виявлення трендів та прогнозу. Наприклад, здобувачі можуть збирати дані про середньодобову температуру або кількість опадів за останні кілька років і побудувати прогноз на наступний рік.

Програма для розв'язання: Google Sheets, Excel або Tableau Public добре підходять для аналізу великих обсягів даних та візуалізації. За допомогою таблиць можна будувати графіки, діаграми, лінії тренду, щоб показати коливання температури та опадів. Tableau надає можливості для інтерактивної візуалізації даних, що дозволяє наочно продемонструвати кліматичні зміни.

4. Задача на оптимізацію (логістична задача).

Приклад задачі: оптимізація маршруту доставки для мінімізації витрат на паливо. Наприклад, знайти найкоротший шлях між кількома містами, щоб мінімізувати час і витрати на перевезення.

Програма для розв'язання: Google Maps API або інструменти на основі Python (наприклад, бібліотеки для розв'язання задач оптимізації, такі як NetworkX). Google Maps дозволяє створювати маршрути, розраховувати відстані між пунктами та демонструвати найоптимальніший шлях. Вчитель може також залучити Microsoft Excel для розрахунку витрат, часу і відстані, використовуючи формули.

Такі задачі з цифровими інструментами допомагають здобувачам краще розуміти, як математика застосовується для вирішення реальних життєвих ситуацій, і розвивають навички роботи з даними та інструментами аналізу.

Цифровізація освіти значно сприяє розвитку у здобувачів вміння застосовувати математичне моделювання завдяки впровадженню інноваційних технологій, які роблять навчання інтерактивним, візуалізованим і доступним. Ось як саме цифрові технології допомагають у цьому процесі:

1. Використання спеціалізованих програм для моделювання: програмне забезпечення (GeoGebra, MATLAB, Wolfram Alpha, Excel) дозволяє здобувачам створювати та аналізувати математичні моделі реальних процесів, працювати з графіками, рівняннями, статистикою. Це дає можливість легко візуалізувати складні математичні обчислення та інтерпретувати результати. Наприклад, здобувачі можуть моделювати економічні процеси, змінювати параметри моделей та бачити їх вплив на результат.

2. Симуляції та віртуальні лабораторії: віртуальні симуляції дозволяють здобувачам експериментувати з різними математичними моделями в реальному часі. Це може бути моделювання фізичних процесів, таких як рух тіл, зміни температур або фінансових процесів, як-от зміна відсоткових ставок. Віртуальні лабораторії дозволяють проводити досліди в безпечному цифровому середовищі, що допомагає здобувачам краще зрозуміти абстрактні математичні концепції.

3. Адаптивне навчання та онлайн-платформи: онлайн-платформи (Coursera, Khan Academy, Edmodo [29, 32]) та інтерактивні підручники пропонують персоналізовані навчальні плани, де здобувачі можуть вирішувати задачі на математичне моделювання в індивідуальному темпі. Це сприяє глибшому розумінню матеріалу і розвитку навичок через адаптивні вправи. Адаптивні системи аналізують помилки здобувачів і пропонують додаткові пояснення або задачі для закріплення.

4. Колективна робота та спільні проєкти через цифрові платформи: хмарні сервіси (Google Workspace, Microsoft Teams) надають можливість здобувачам працювати над математичними моделями в команді. Це дозволяє співпрацювати онлайн, обмінюватися ідеями та разом вирішувати складні задачі. Здобувачі можуть разом моделювати складні процеси, наприклад, екологічні або економічні проблеми, використовуючи дані з різних джерел і разом аналізуючи їх.

5. Доступ до великого обсягу даних для аналізу: цифрові технології забезпечують здобувачів доступом до великої кількості реальних даних, які можна використовувати для математичного моделювання. Це можуть бути статистичні дані про економіку, екологію або демографію, які учні можуть аналізувати і створювати власні моделі. Наприклад, здобувачі можуть аналізувати дані про зміни клімату або прогнозувати розвиток певної економічної ситуації.

6. Візуалізація та 3D моделювання: візуалізаційні інструменти* дозволяють здобувачам бачити результати своїх моделей у вигляді графіків, діаграм, 3D моделей, що робить абстрактні математичні концепції зрозумілішими і наочнішими. Наприклад, вони можуть візуалізувати математичні функції в 3D-просторі або моделювати складні геометричні фігури.

7. Розширений доступ до навчальних матеріалів: цифровізація дозволяє здобувачам мати доступ до різноманітних навчальних ресурсів у будь-який час. Це можуть бути відео, інтерактивні завдання, моделі, тести, які сприяють глибшому вивченню математичного моделювання. Онлайн-платформи часто містять інтерактивні курси, що поетапно пояснюють різні аспекти математичного моделювання.

8. Штучний інтелект (ШІ) та машинне навчання: інструменти на базі ШІ допомагають здобувачам працювати з великими даними, аналізувати їх та будувати складні моделі. Машинне навчання дає можливість здобувачам зрозуміти, як математичні моделі використовуються для прогнозування і прийняття рішень на основі даних. Наприклад, здобувачі можуть створювати моделі для прогнозування попиту на певні продукти або для аналізу трендів у соціальних мережах.

9. Інтерактивні заняття та гейміфікація: інтерактивні елементи навчання і гейміфікація можуть зробити процес математичного моделювання більш цікавим та залучати здобувачів. Використання навчальних ігор або симуляцій мотивує їх вивчати складні концепції через

гру. Наприклад, гейміфіковані платформи можуть включати завдання, що потребують використання моделей для вирішення реальних проблем.

Цифровізація освіти робить математичне моделювання доступнішим і ефективнішим для здобувачів. Завдяки цифровим технологіям вони можуть працювати з реальними даними, використовувати спеціалізоване програмне забезпечення, спільно розв'язувати завдання, а також отримувати візуальні результати своїх моделей, що сприяє глибшому розумінню і застосуванню математики у реальному житті.

Залучення цифрових інструментів при розв'язуванні прикладних задач з математики сприяє розвитку в здобувачів низки важливих навичок та поліпшує загальне розуміння математики, роблячи її більш цікавою та актуальною.

1. Покращення візуалізації та глибшого розуміння математичних концепцій.

Цифрові інструменти, такі як GeoGebra, Desmos або Tableau, дозволяють здобувачам візуалізувати математичні процеси, як-от побудову графіків функцій, аналіз статистичних даних або моделювання руху. Завдяки цьому здобувачі можуть "побачити" математику в дії, що значно полегшує розуміння абстрактних понять. Такий підхід робить вивчення математичних принципів наочним, допомагаючи здобувачам зрозуміти їх застосування у реальних ситуаціях.

2. Розвиток навичок критичного мислення та аналізу даних.

Робота з прикладними задачами та цифровими інструментами дає здобувачам можливість навчитися збирати, аналізувати й інтерпретувати дані. Наприклад, при дослідженні задач на статистику чи оптимізацію, здобувачі вчаться оцінювати значення даних, знаходити тренди та робити прогнози. Це розвиває навички критичного мислення, вміння помічати закономірності, аналізувати великі масиви даних та робити обґрунтовані висновки – навички, що мають велике значення в сучасному світі.

3. Формування практичних навичок роботи з технологіями.

Використання цифрових інструментів в навчанні математики готує здобувачів до життя у технологічно розвиненому світі. Вони набувають досвіду роботи з програмами для аналізу та моделювання, що знадобляться їм у майбутньому, як у професійній діяльності, так і в побуті. Крім того, це допомагає їм адаптуватися до швидкого розвитку технологій, розвиваючи їх цифрову грамотність. Здобувачі, які використовують такі інструменти, набувають впевненості у своїх здібностях застосовувати технології для вирішення різноманітних завдань.

ВИСНОВКИ

Узагальнюючи результати проведеного дослідження, можна відмітити наступні положення. Математичне моделювання – це процес створення абстрактних математичних моделей для опису реальних явищ, систем чи процесів. Воно полягає у використанні математичних інструментів, таких як рівняння, функції, матриці, щоб відобразити складні явища через спрощені, але інформативні формули. Цей метод дозволяє вивчати, аналізувати та прогнозувати поведінку систем у різних галузях, таких як фізика, економіка, біологія, екологія, інженерія та інші науки. Моделювання дозволяє ідеалізувати й абстрагувати реальність, фокусуючи увагу на ключових елементах процесу, і за допомогою аналізу отримувати цінну інформацію про закономірності системи або прогнозувати її поведінку.

Формування вміння застосовувати математичне моделювання у здобувачів під час навчання математики можна досягти через декілька ключових підходів:

1. Використання реальних прикладних задач: здобувачі мають бачити, як математика використовується у житті. Завдання, що ілюструють реальні ситуації (економіка, фізика, екологія), допоможуть їм побачити практичність математичного моделювання.

2. Розвиток проєктної діяльності: включення в навчальний процес проєктів, де здобувачі працюють над моделюванням конкретних проблем або ситуацій.

3. Поступове ускладнення завдань: починати з простих моделей, що базуються на базових поняттях (лінійні рівняння, пропорції), і поступово переходити до складніших (нелінійні рівняння, системи рівнянь). Це допомагає зобувачам поступово розвивати вміння аналізувати складніші ситуації.

4. Інтеграція міжпредметних зв’язків: залучення інших предметів,

таких як фізика, економіка, інформатика, для показу, як математичні моделі застосовуються в інших галузях.

5. Використання інформаційних технологій: використання програмного забезпечення для моделювання та обчислень (наприклад, Excel, GeoGebra, Wolfram Alpha). Це дозволяє здобувачам не тільки будувати математичні моделі, а й аналізувати дані, будувати графіки та розв’язувати рівняння.

6. Групові роботи та дискусії: спільна робота над моделюванням у групах допомагає здобувачам краще зрозуміти процес та поділитися ідеями. Дискусії щодо різних підходів до розв'язання проблем формують критичне мислення. Це дозволяє розвивати навички колективного мислення, що необхідні для роботи в реальних життєвих ситуаціях.

7. Формування вміння інтерпретувати результати: важливо не тільки вміти будувати моделі, а й аналізувати отримані результати, робити висновки та пропонувати рекомендації.

8. Залучення дослідницьких задач: здобувачі можуть ставити дослідницькі питання і самостійно шукати шляхи їх розв’язання через математичне моделювання. Це стимулює творче мислення.

Щоб ефективно навчити старшокласників застосовувати математичне моделювання, важливо робити акцент на практичності завдань, міжпредметних зв'язках, активній діяльності учнів та використанні сучасних технологій. Це допоможе їм побачити зв’язок між математикою і реальним життям та розвинути необхідні навички для майбутнього. Крім цього, більш ефективному розвитку вмінь математичного моделювання сприяє цифровізація освіти, це відбувається завдяки впровадженню інноваційних технологій, які роблять навчання інтерактивним, візуалізованим і доступним. Завдяки цифровим технологіям здобувачів можуть працювати з реальними даними, використовувати спеціалізоване програмне забезпечення, спільно розв'язувати завдання, а також отримувати візуальні результати своїх моделей, що сприяє глибшому розумінню і застосуванню математики у реальному житті. Цифровізація освіти значно сприяє розвитку у здобувачів вміння застосовувати математичне моделювання завдяки впровадженню інноваційних технологій, які роблять навчання інтерактивним, візуалізованим і доступним:

1. Використання спеціалізованих програм для моделювання: програмне забезпечення (GeoGebra, MATLAB, Wolfram Alpha, Excel) дозволяє здобувачам створювати та аналізувати математичні моделі реальних процесів, працювати з графіками, рівняннями, статистикою.

2. Симуляції та віртуальні лабораторії дозволяють здобувачам експериментувати з різними математичними моделями в реальному часі.

3. Онлайн-платформи (Coursera, Khan Academy, Edmodo) та інтерактивні підручники пропонують персоналізовані навчальні плани, де здобувачі можуть вирішувати задачі на математичне моделювання в індивідуальному темпі.

4. Хмарні сервіси (Google Workspace, Microsoft Teams) надають можливість здобувачам працювати над математичними моделями в команді.

5. Цифрові технології забезпечують здобувачів доступом до великої кількості реальних даних, які можна використовувати для математичного моделювання.

6. Візуалізаційні інструменти дозволяють здобувачам бачити результати своїх моделей у вигляді графіків, діаграм, 3D моделей, що робить абстрактні математичні концепції зрозумілішими і наочнішими.

7. Цифровізація дозволяє здобувачам мати доступ до різноманітних навчальних ресурсів у будь-який час. Це можуть бути відео, інтерактивні завдання, моделі, тести, які сприяють глибшому вивченню математичного моделювання.

8. Інструменти на базі ШІ допомагають здобувачам працювати з великими даними, аналізувати їх та будувати складні моделі. Машинне

навчання дає можливість здобувачам зрозуміти, як математичні моделі використовуються для прогнозування і прийняття рішень на основі даних.

9. Інтерактивні елементи навчання і гейміфікація можуть зробити процес математичного моделювання більш цікавим та залучати здобувачів. Використання навчальних ігор або симуляцій мотивує їх вивчати складні концепції через гру.

Цифровізація освіти робить математичне моделювання доступнішим і ефективнішим для здобувачів. Завдяки цифровим технологіям вони можуть працювати з реальними даними, використовувати спеціалізоване програмне забезпечення, спільно розв'язувати завдання, а також отримувати візуальні результати своїх моделей, що сприяє глибшому розумінню і застосуванню математики у реальному житті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко В. А., Леонський В. Д. Інтерактивна дошка SMART та використання її в навчальному процесі // Комп'ютер у школі та сім'ї. 2004, № 8. – С. 20–22.

2. Бевз Г. П. Методи навчання математики: метод. посібник Х.: Видавнича група «Основа», 2003. – 96 с.

3. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.

4. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач / Г.П. Бевз. К.: Рад. шк., 1975. – 240 с.

5. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Зодіак-Еко, 2017. – 272 с.

6. Бонч-Бруєвич Г. Ф. Технічні засоби навчання з використанням інформаційних комп'ютерних технологій: [навч. посіб.] / Бонч-Бруєвич Г. Ф. К. : КМПУ імені Б. Д. Грінченка, 2007. – 44 с.

7. Ботузова Ю. В., Новікова А. О. Використання інтерактивної дошки на уроках математики. Наукові записки. Вип. 168. Серія: Педагогічні науки. Кропивницький: РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. – С. 47−52.

8. Ботузова Ю., Новікова А. Інтерактивна дошка на уроках математики. Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті: збірник матеріалів VI-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет конференції, м. Кропивницький, 19-20 квітня 2018 р. / За відп. ред. М. І. Садового. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2018. – С. 34−36.

9. Возняк Г. М. Математика. Прикладні задачі: від теорії до практики / Г.М. Возняк. Тернопіль: Мандрівець, 2003. – 136 с.

10. Возняк Г.М., Маланюк К.П. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв'язування екстремальних задач: Метод, посібник.

К.: Рад. шк., 1984. – 124 с.

11. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя. К.: Рад. шк., 1989. – 128 с.

12. Глобін О. І. Міжпредметні зв’язки в умовах профільного навчання математики: методичний посібник для вчителів / Глобін. О. І. Київ: Педагогічна думка, 2012. – 88 с.

13. Горчакова І. А. Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / І. А. Горчакова ; Донецький нац. ун-т. К., 2002. – 232 с.

14. Гриб’юк О. О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. – 376 с.

15. Гриб’юк О. О. Реалізація міжпредметних зв’язків в процесі навчання математики з використанням GeoGebra / О.О.Гриб’юк, В.Л.Юнчик. Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті : Матеріали І-ї Міжнародної науково-практичної конференції, 19 – 20 листопада 2015 року) / [редактори-упорядники: І. Зимомря, В. Ільницький]. – Ченстохова – Ужгород – Дрогобич : Посвіт, 2015. – С. 193–197.

16. Гриб’юк О. О., Юнчик В. Л. Розв’язування евристичних задач в контексті STEM-Освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // зб. наук. пр. Випуск 43. Редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2015. – С. 206–218.

17. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text.

18. Ігнатенко М. Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики. – К.: Тираж, 1997. – 300 с.

19. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2017. – 264 с.

20. Кадемія М. Ю. Інтерактивні засоби навчання: навчально-методичний посібник / М. Ю. Кадемія, О. А. Сисоєва. Вінниця: ТОВ «Планер», 2010. – 217 с.

21. Кузьмінський А. І., Омельяненко С. В. Технологія і техніка шкільного уроку: Навчальний посібник. Київ: Знання, 2010. – 335 с.

22. Лабудько С. П. Теорія та методика застосування інтерактивних засобів навчання. Методичні вказівки. Суми : Редакційно-видавничий відділ СОІППО, 2014. – 48 с.

23. Лапінський В.В. Мультимедійна дошка. / В. В. Лапінський, Л.А. Карташова. К.: Шкільний світ, 2011. – 128 с.

24. Левандович В. І. Використання інтерактивних технологій у процесі навчання інформатиці [Електронний ресурс]. Режим доступу : http://videouroki.net/filecom.php?fileid=98657780.

25. Межейнікова Л. С., Швець В. О. Математичні задачі з фінансовим змістом в основній школі. Харків: Видавнича група «Основа», 2004. – 96 с.

26. Мельник Ю. С. Задачі прикладного змісту з фізики у старшій школі. навчально-методичний посібник. – К.: Педагогічна думка, 2013. – 120 с.

27. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2017. – 272 с.

28. Методика застосування технології SMART Board у навчальному процесі: [навч. посіб.] / Г. Ф. Бонч-Бруєвич, В. О. Абрамов, Т. І. Носенко К. : КМПУ імені Б. Д. Грінченка, 2007. – 102 с.

29. Методичні рекомендації щодо організації навчально-виховного

процесу під час проведення навчальних екскурсій та навчальної практики учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Лист МОН № 1/9-61 від 06.02.08 року [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/2617.

30. Мишкіс А. Д. Елементи теорії математичних моделей / А. Д. Мишкіс. 3-е изд., испр. М.: КомКніга, 2007. – 192 с.

31. Нічуговська Л.І. Елементи математичного моделювання в шкільному курсі алгебри. ПостМетодика, 2001. – №4(36). – С. 35–38.

32. Новікова А. О. Психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь і навичок математичного моделювання. Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, м. Кропивницький, 18-19 травня 2018 року /Відповідальний редактор С. П. Величко. Кропивницький: ПП «ЕксклюзивСистем», 2018. – С. 18-19.

33. Новікова А. О. До питання про створення системи прикладних задач з курсу алгебри основної школи. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.–практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. С. 155 – 158.

34. Новікова А. О. Психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь і навичок математичного моделювання. Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, м. Кропивницький, 18-19 травня 2018 року /Відповідальний редактор С. П. Величко. Кропивницький: ПП «ЕксклюзивСистем». 2018. – С. 18-19.

35. Новікова А. О. Використання програмного забезпечення GeoGebra під час розв’язування прикладних задач змістової лінії «Функції та їх графіки». Наукові записки. Вип. 169. Серія: Педагогічні науки. Кропивницький: РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. – С.

112−115.

36. Панченко Л. Л. Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02. К., 2006. – 260 с.

37. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Прус Алла Володимирівна. К., 1997. – 245 с.

38. Рум'янцева К. Є., Вільчинська О. М. Використання економікоматематичних моделей під час вивчення дисциплін математичного циклу «Математика для економістів». Наукові записки. Вип.5. Серія: Проблеми 244 методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. – С. 49–53.

39. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

40. Соколенко Л.О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. К., 1998. – 245 с.

41. Філімонова М. О. Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Філімонова Марія Олександрівна. К., 2015. – 256 с.

42. Хміль Н., Кисельова О. Формування у майбутніх учителів навичок використання інтерактивних дошок в освітньому процесі. Наукові записки. Випуск 7. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2015. – 300 с.

43. Чінчой А. О. Математичне моделювання як засіб здійснення міжпредметних зв'язків курсу алгебри. Наукові записки. Вип. 9. Серія:

Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Ч.1. Кіровоград: РВВ КДПУ імені Володимира Винниченка, 2016. – С. 54-61.

44. Чінчой А. О. Прикладна спрямованість курсу алгебри основної школи. Реалізація наступності в математичній освіті: Реалії та перспективи: збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Одеса, 15-16 вересня 2016 року. Х.: Видво «Ранок», 2016. – С. 129−131.

45. Чінчой А. О. Розв’язування задач міжпредметного змісту методом математичного моделювання. Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали конференції, м. Кіровоград, 27-28 травня 2016 року. / Відповідальний редактор: С.П.Величко. Кіровоград: ПП «Ексклюзив Систем», 2016. – С. 64−66.

46. Швець В. О., Новікова А. О. Математичне моделювання в курсі алгебри під час розв’язування задач на рух. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 20 : збірник наукових праць. К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. – С. 70-76.

47. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний зб. наук. робіт. Донецьк : ТЕАН, 2009. Вип. 32. – С. 16–23.

48. Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modeling: Can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and 250 Application. Vol. 1, No. 1. – С. 45-48.

49. GeoGebra – провідна у світі програма динамічної математики та матеріали в руках учнів та вчителів, студентів та викладачів у всьому світі. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.geogebra.org/about