Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

НАЙВІДОМІШІ НЕКЛАСИЧНІ ДОВЕДЕННЯ У СУЧАСНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Клименко Ірина Олександрівна
Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко Олександр Григорович
Рецензент докторка педагогічних наук, кандидатка фізико-математичних наук, професорка кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
Літвінова М.Б.

Івано-Франківськ — 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. У сучасній математичній освіті та дослідницькому середовищі роль некласичних доказів стає все більш важливою, створюючи виклики традиційним методам математичних міркувань і вирішення проблем.

Сучасна математична освіта стикається з проблемою подолання розриву між класичним математичним мисленням і сучасними обчислювальними методами. Інтегруючи ці добре відомі питання в шкільну програму, ми вирішуємо нагальну потребу в розвитку розуміння здобувачами освіти традиційних математичних міркувань і сучасних методів доведення.

Також це дослідження є особливо важливим у контексті триваючої цифровізації і зростаючого значення обчислювального мислення в математичній освіті. Він спрямований на необхідність підготовки студентів до майбутнього, в якому традиційні методи і методи обчислювальної математики співіснують і доповнюють один одного. Крім того, ця робота сприяє поточній дискусії про природу доказів у сучасній математиці, оскільки комп'ютерні докази стають все більш поширеними. Вивчаючи ці некласичні докази, ми можемо отримати уявлення про мінливий ландшафт математичної перевірки і доказів.

Пов'язуючи історичні події з сучасними освітніми потребами та надаючи практичні інструменти оцінювання, він заповнює важливу прогалину в поточній математичній освіті, одночасно сприяючи ширшій дискусії про природу математичних доказів у сучасному світі.

Математична освіта продовжує розвиватися, із технологічним прогресом змінюються освітні проблеми.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Кваліфікаційну роботу (проєкт) виконано відповідно до тематичного плану науково-дослідної роботи кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, напрям наукового пошуку: «Формування професійної компетентності майбутніх учителів математики в умовах цифровізації вищої освіти», номер державної реєстрації 0123U103793.

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження історико-теоретичних матеріалів, їх узагальнення та інтеграція у сучасний навчальний математичній простір за допомогою певних практичних задач і розробка завдань для перевірки засвоєного матеріалу.

Досягнення зазначеної мети потребувало виконання ряду наступних **завдань**:

– дослідження певних тем з історії математики для послідовного і структурованого розпису з метою виявлення напрямів, які можуть бути корисними при представленні теми здобувачам освіти;
– проаналізувати некласичні доведення у сучасній математиці розглянутих тем для глибшого розуміння суті питань;
– підбір відповідних до знань, умінь і навичок завдань та їх детальний розбір, щоб допомогти розібратись в темі та показати приклад напряму міркувань здобувачів освіти.

Об'єктом дослідження є процес інтегрування певних тем у процес математичної освіти.

Предметом дослідження є теоретичні, практичні та методологічні аспекти інтегрування певних тем у навчальний процес математики.

Методи дослідження: теоретичний аналіз історичної, математично-дослідницької та методологічної літератури з теми дослідження, вивчення та узагальнення математично-педагогічного досвіду.

Наукова новизна одержаних результатів. Створено комплексну систему навчання некласичним математичним доказам у шкільній програмі, яка базується на поєднанні сучасних методів навчання та історичного контексту. Методику викладання складних математичних понять було вдосконалено завдяки використанню візуалізацій та інтерактивних компонентів. Теоретичне значення дослідження полягає в системному зборі знань про некласичні методи та створення методичної основи їх викладання в школі.

Практичне значення одержаних результатів. Аналіз історичного розвитку математичних проблем показує еволюцію математичного мислення і методів доведення, що сприяє нашому розумінню певних математичних аспектів. Це дослідження спрямоване на нагальну потребу в інноваційних підходах у сучасній математичній освіті, воно показує як складі математичні концепції можна використати та ефективно включити у шкільну програму. А відібрані завдання дають конкретні матеріали для допомоги в оцінюванні здобувачів освіти та подолання розриву між теоріє та практикою.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було написано і опубліковано статті для: конференція «Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» на базі Херсонського державного університету у 2024 році; «Магістерські студії» Херсонський державний університет 2024 рік; VIII Міжнародна науково-практична конференція у Львові 16-18.09.2024.

Публікації:

1. Клименко І.О. Задача Кеплера про найщільніше пакування куль/ Клименко І.О. // Конф. «Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» — 2024.
2. Клименко І.О. Ознайомлення учнів закладів середньої освіти з гіпотезами Ґольдбаха/ Клименко І.О. // Магістерські Студії Херсонського державного університету — 2024.

3. Клименко І.О. Проблема чотирьох фарб як інструмент для розвитку математичних здібностей у старшокласників/ Клименко І.О. // VIII Міжнародна науково-практична конференція — 2024. URL: https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-perspectives-of-contemporary-science-theory-and-practice-16-18-09-2024-lviv-ukrayina-arhiv/

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1
НЕКЛАСИЧНІ ДОВЕДЕННЯ В СУЧАСНІЙ МАТЕМАТИЦІ

1.1. Проблема чотирьох фарб.

Ця проблема бере свій початок у 1852 році, коли Френсіс Гутри намагався розфарбувати карту тодішньої Англії. Коли він закінчив, то помітив, що йому вистачило усього чотири різних кольори. Він використовував схему за наступною схемою: треба зафарбувати усі графства так, щоб будь-які два сусідніх мали різний колір. Під сусідніми мали на увазі границю не нульової довжини. Якщо довжина кордону не нульова, то кольори областей різні. Якщо області не торкаються один одного або є тільки одна точка в якій вони межують, області можуть бути одного кольору.

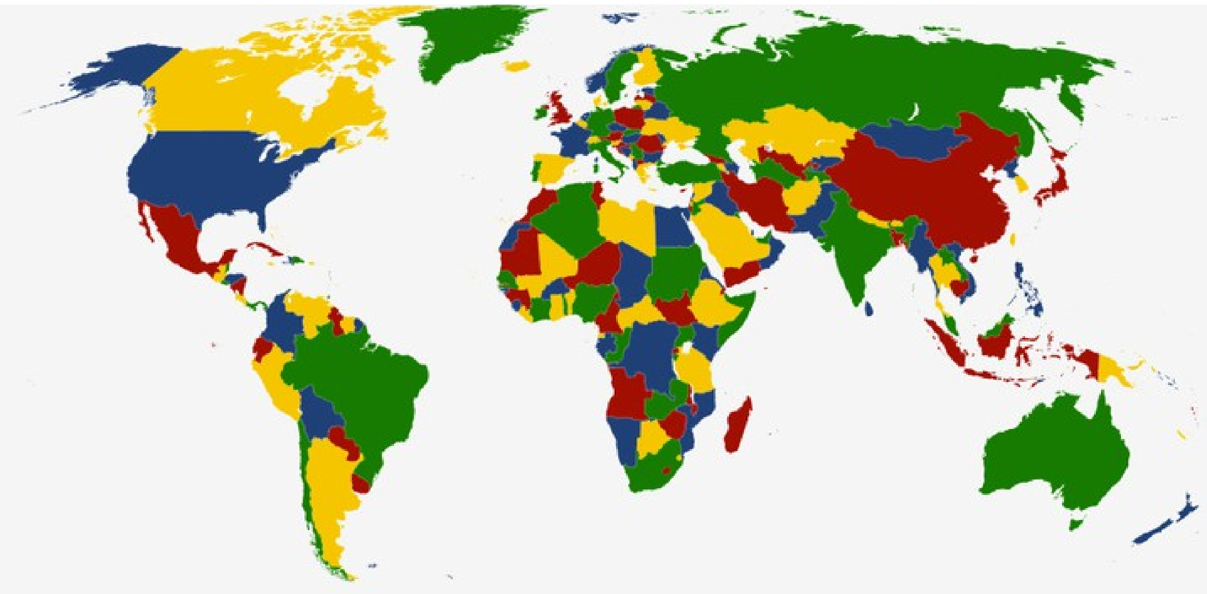


Рис. 1.1. Мапа світу розфарбована у 4-ри кольори.

Він здивувався результату, здавалося б просте твердження, але важко повірити. «Будь-яку карту можна розфарбувати в 4 кольори». Щоб дізнатися: чи не є це твердження про 4 кольори відомою теоремою, Френк звернувся до свого брата Фредеріка Гутрі, а той поділився питанням з колишнім науковим керівником Огастесом де Морганом — британський математик і логік, який сформулював закони Де Моргана і ввів термін «математична індукція», також йому належить цитата: «Рушійна сила математичної творчості — не міркування, а уява».

Але де Морган не знав відповіді на це питання і пішов з ним до ще більш відомого математика — Віл’єма Гамільтона. Його кар'єра включала вивчення геометричної оптики, аналізу Фур'є та кватерніонів, останні з яких зробили його одним із засновників сучасної лінійної алгебри. Він зробив великий внесок у оптику, класичну механіку та абстрактну алгебру. Його робота є фундаментальною для сучасної теоретичної фізики, зокрема його переформулювання механіки Ньютона. Гамільтонова механіка, включаючи її гамілітонову функцію, зараз займає центральне місце як в електромагнетизмі, так і в квантовій механіці.

Рис. 1.2. Меморіальна дошка Quaternion на мосту Брум у Дубліні

У результаті де Морган після невдалих спроб довести твердження самому — розповів про завдання всім знайомим математикам, а ще пізніше це питання було опубліковано в науковому журналі. Двадцять років теорема «гуляла» Лондоном, як цікава задачка для міркування, але математиками всерйоз не сприймалася.

У 1878 р. Артур Кейлі нагадав про задачу на одному зі зборів лондонського математичного товариства — інтерес до проблеми знову прокинувся. Через рік і два з’явилися перші докази цієї теореми про чотири фарби. Обидва докази вважалися правильними та загальноприйнятими цілих 11 років, поки Юліус Петерсен та Персі Хівуд не знайшли помилки. Полювання почалася знов, були сотні спроб знайти розв’язок теореми, але всі вони були помилковими і лише через 80 років з’явився коректний доказ.

У 1940-х роках німецький математик Генріх Хейешер розробив підхід того, як можна вирішити проблему, але з одним нюансом — потрібно використовувати допомогу комп'ютера. І, на жаль, він не зміг домовитися на його використання, але інші математики змогли. І в 1976 році Вольфнанг Хакен і Кеннет Аппель оголосили про доказ теореми про чотири фарби. Усього тисяча годин роботи комп’ютера та доказ було отримано, дві статті по 100 сторінок, де розписано весь доказ та схеми.

Математики мали видихнути і радіти. 120 років зусиль нарешті привели до результату, але математики думали інакше і не захотіли приймати рішення.

Доказ теореми сильно відрізнявся від того, як математики доводили теореми до цього протягом трьох тисяч років. Звичне доказ — це ланцюжок логічних роздумів, коли з А випливає В, які написані на папері і які людина може записати, прочитати і зрозуміти. Але в теоремі про чотири фарби в якийсь момент з’являвся комп’ютер, який робив на перший погляд незрозуміло що, якась «чорна скринька».

На сьогоднішній день, коли математики дуже активно використовують комп’ютери для вирішення багатьох задач та доказів. У

1976 р. математичне співтовариство хоч і прийняло той доказ скрізь зуби, але осад залишався. За таким простим формулюванням теореми про чотири фарби, людина своїми силами довести не може. Математикам елегантне завдання потребує елегантного рішення, а не простого комп’ютера. У 80-х роках почали заявляти про помилки в доказі, Хакен і Аппель трохи поправили доказ, але помилки були не критичними. У 96-му році інша група математиків опублікувала простіше рішення, але воно все одно вимагає використання комп’ютера для доказу.

І до сьогодні різні математики намагаються довести теорему, не використовуючи комп’ютер.

1.2. Гіпотези Ґольдбаха.

Християн Ґольбах народився березня року. Відомостей про його дитинство та юність не зберіглося. Очевидно, освіту він здобув у Кенігсберзькому університеті, де переважаючими дисциплінами на той час були богослов'я, схоластична філософія та право. Тим не менш є свідчення того, що вже з 1708 Ґольдбах цікавиться математикою, до якої він відчуває явну схильність.

Бажання поповнити свої знання спонукають вісімнадцятирічного Християна в 1708 р. вирушити до Лейпцигу, де на той час навчався його брат Генріх. Можливо, з цієї подорожі Ґольдбах на багато років стає студентом, мандрівним європейськими центрами науки і культури, де бере уроки алгебри, геометрії, астрономії, креслення, музики (скрипка та флейта), юриспруденції. Він слухає університетські курси, бере участь у диспутах, відвідує бібліотеки, знайомиться з університетськими професорами.

У 1712 р. під час подорожі до Англії Ґольдбах відвідує Лондонське Королівське товариство та знайомиться з Ісааком Ньютоном. В

Оксфорді він оглядає анатомічний музей і бібліотеку і знайомиться з швейцарським математиком Миколою Бернуллі (1687-1759), який був там. Після повернення до Лондона Ґольдбах знайомиться з директором Грінвічської обсерваторії астрономом Едмундом Галлеєм (1656-1742) та математиком Абрагамом Муавром (1667-1754).

Очевидно, до цього часу відноситься перший відомий математичний результат Ґольдбаха: у 1742 році він написав лист Леонарду Ейлеру, в якому висловив таке припущення:

«dass jede Zahl, welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist, ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey, als man will (die unitatem mit dazu gerechnet), bis auf die congeriem omnium unitatum» [12].

«Кожне ціле число, яке можна записати як суму двох простих чисел, можна також можна записати як суму будь-якої кількості простих чисел, доки всі члени не стануть одиницями»[12].

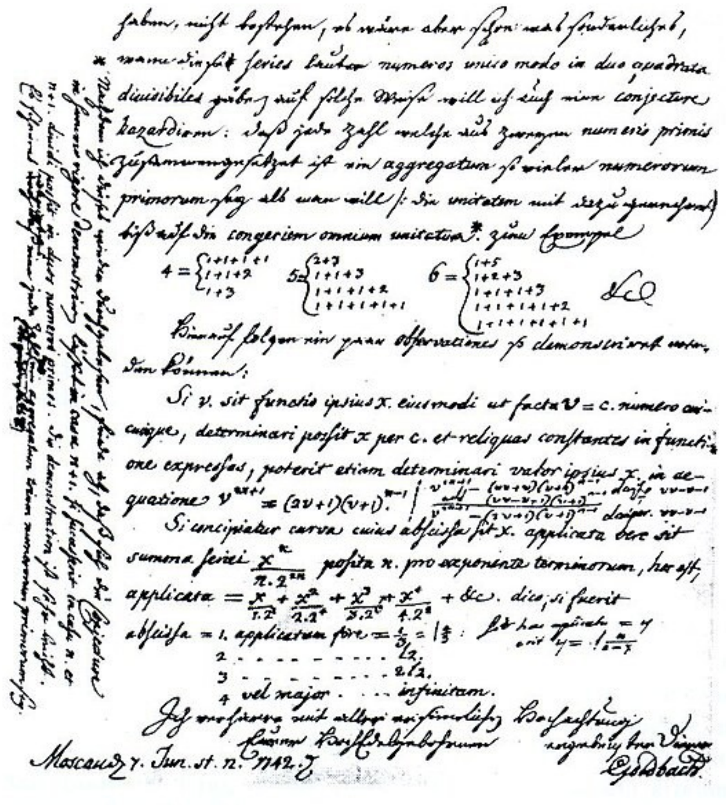


Рис. 1.3. Лист Ґольбаха Ейлеру.

Ґольдбах дотримувався домовленості, від якої зараз відмовилися, вважаючи 1 простим числом, щоб сума одиниць була сумою простих чисел. Потім він запропонував другу гіпотезу на полях свого листа, яка передбачає першу:

«... eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey»[12].

«Кожне ціле число більше 2 можна записати як суму трьох простих чисел»[12].

Ейлер відповів у листі від 30 червня 1742 року і нагадав Гольдбаху про їхню попередню розмову («...so Ew vormals mit mir communicirt haben...»[12]), у якій Гольдбах зауважив, що перший із цього твердження випливають дві гіпотези:

Кожне натуральне парне число можна записати як суму двох простих чисел [28].

Фактично це еквівалентно його другій, маргінальній гіпотезі. У листі від 30 червня 1742 року Ейлер зазначив:

«Dass ... ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann»[12].

«Те, що ... кожне парне ціле число є сумою двох простих чисел, я вважаю цілком певною теоремою, хоча я не можу це довести»[12].

Кожна з трьох гіпотез має природний аналог у термінах сучасного визначення простого числа, згідно з яким 1 виключається. Сучасна версія першої гіпотези така:

«Кожне ціле число, яке можна записати як суму двох простих чисел, можна також записати як суму будь-якої кількості простих чисел, доки або всі доданки не стануть двома (якщо ціле число парне), або один доданок дорівнюватиме трьом, а всі інші доданки не будуть два (якщо ціле число непарне)»[6].

Сучасна версія граничної гіпотези:

«Кожне ціле число більше 5 можна записати у вигляді суми трьох простих чисел»[6].

Сучасна версія давньої гіпотези Гольдбаха, про яку йому нагадав Ейлер, така:

«Кожне парне ціле число, більше 2, можна записати як суму двох простих чисел»[6].

Ці сучасні версії можуть бути не зовсім еквівалентними відповідним оригінальним твердженням. Наприклад, якби існувало парне ціле число , більше , для — простого числа, яке не можна було б виразити як суму двох простих чисел у сучасному розумінні, тоді це було б контрприкладом до сучасної версії третя гіпотеза (не будучи контрприкладом до початкової версії). Таким чином, сучасна версія, ймовірно, сильніша (але щоб підтвердити це, потрібно довести, що перша версія, вільно застосована до будь-якого додатного парного цілого числа n, не може виключати існування такого конкретного контрприкладу). У будь-якому випадку, сучасні твердження мають такі ж стосунки одне з одним, як і старі твердження. Тобто друге та третє сучасні твердження еквівалентні, і будь-яке означає перше сучасне твердження.

Третє сучасне твердження (еквівалентне другому) є тією формою, в якій зазвичай висловлюється гіпотеза сьогодні. Вона також відома як» ««сильна», «парна» або «бінарна» гіпотеза Гольдбаха»[4]. Слабша форма другого сучасного твердження, відома як: ««слабка гіпотеза Гольдбаха», «дивна гіпотеза Гольдбаха» або «потрійна гіпотеза Гольдбаха»»[4], стверджує, що:

«Кожне непарне ціле число, більше 7, можна записати як суму трьох непарних простих чисел»[6].

Отже, сильна гіпотеза Гольдбаха набагато складніша, ніж слабка гіпотеза Гольдбаха, яка говорить, що кожне ціле число (еквівалентно, ко жне непарне ціле число), більше — є сумою трьох простих чисел.

Використовуючи метод Виноградова: Микола Чудаков, Йоханнес ван дер Корпут і Теодор Естерманн показали (1937—1938), що майже всі парні числа записуються у вигляді суми двох простих чисел (у тому сенсі, що частка парних чисел до деякого , яку можна записати таким чином, прагне до із збільшенням). У 1930 році Лев Шнірельман довів: будь-яке натуральне число () можна записати у вигляді суми не більшої ніж простих чисел, де — ефективно обчислювальна константа. Стала Шнірельмана являється найменшим числом з цією властивістю. Сам Шнірельман отримав: . Згодом цей результат був посилений багатьма авторами, наприклад Олів'є Рамаре у 1995 році показав, що «кожне парне число насправді є сумою щонайбільше простих чисел»[4]. Найбільш відомий результат на даний момент випливає з доказу слабкої гіпотези Гольдбаха Гаральда Гельфготта, з якого прямо випливає, що «кожне парне число є сумою щонайбільше простих чисел»[4].

У 1924 році Харді та Літтлвуд показали на підставі узагальненої гіпотези Рімана, що кількість парних чисел до , які порушують гіпотезу Гольдбаха, набагато менша, ніж для малих .

У 1948 році, використовуючи методи теорії сит, Альфред Рен'ї показав, що кожне досить велике парне число можливо записати як суму простого та майже-простого числа з не більше ніж множниками. Чень Цзінжунь показав у 1973 році, використовуючи теорію сита, що кожне достатньо велике парне число можливо записати, як суму або двох простих чисел, або простого та напів-простого числа (добуток двох простих чисел).

У 1975 році Г'ю Лоуелл Монтгомері та Боб Воган показали, що «більшість» парних чисел можливо виразити як суму двох простих чисел. Точніше, вони показали, що «існують такі додатні константи , що для всіх досить великих чисел N кожне парне число, менше N, є сумою двох простих чисел, за винятком щонайбільше . Зокрема, множина парних цілих чисел, які не є сумою двох простих чисел, має нульову щільність»[7].

У 1951 році Юрій Ліннік довів існування константи K, такої, що кожне достатньо велике парне число являється сумою двох простих і не більше ступенів . Янош Пінц та Імре Ружа в 2020 році виявили, що при все працює. Припускаючи узагальнену гіпотезу Рімана, також працює, як показали Роджер Хіт-Браун і Ян-Крістоф Шлаге-Пухта у 2002.

У 2013 році Харальд Хельфготт надав доказ слабкої гіпотези в серії Annals of Mathematics Studies. Незважаючи на те, що стаття була прийнята, Гельфготт вирішив внести основні зміни, запропоновані рецензентом. «Слабка гіпотеза випливає із сильної гіпотези, так як якщо є сумою двох простих чисел, тоді є сумою трьох простих чисел»[6]. Однак протилежний висновок і, отже, сильна гіпотеза Гольдбаха залишаться недоведеною, якщо доказ Гельфготта правильний.

1.3. Прості числа-близнюки.

Гіпотеза об простих числах-близнюках у теорії чисел стверджує про те, що «існує нескінченна кількість простих чисел-близнюків або пар простих чисел, які відрізняються на 2»[4]. Наприклад, , а також є простими числами-близнюками. Коли числа стають більшими, прості числа зустрічаються рідше, а подвійні прості числа — ще рідше.

Перше твердження гіпотези про подвійне просте число було дано в 1846 році французьким математиком Альфонсом де Поліньяком, який писав, що будь-яке парне число можна виразити нескінченною кількістю способів як різницю між двома послідовними простими числами. Коли парне число дорівнює 2, це гіпотеза про подвійне просте число; тобто .

Хоча цю гіпотезу іноді називають гіпотезою Евкліда про двійникові прості числа: він надав найстаріший відомий доказ того, що існує нескінченна кількість простих чисел, але не припустив, що існує нескінченна кількість простих двійників.

Дуже незначний прогрес був досягнутий у цій гіпотезі до 1919 р., коли норвезький математик Вігго Брун показав, що сума зворотних величин подвійних простих чисел збігається до суми, відомої зараз як стала Бруна. На відміну від цього, сума зворотних величин простих чисел розходиться до нескінченності. Стала Бруна була розрахована в 1976 році як приблизно 1,90216054 з використанням подвійних простих чисел до 100 мільярдів.

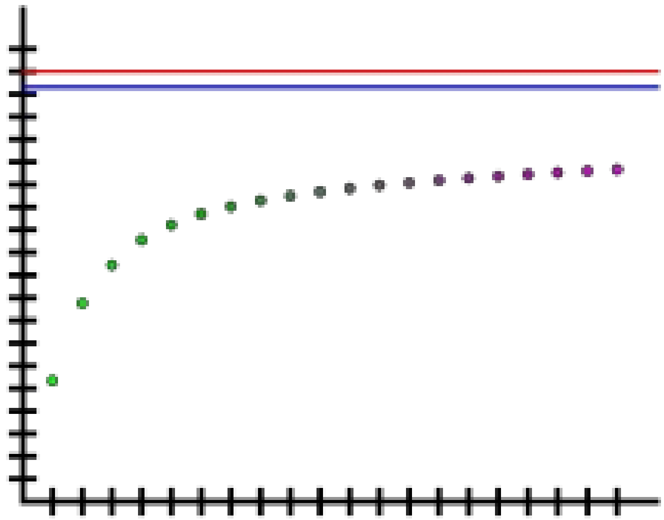


Рис.1.4. Схожість до константи Бруна

У 1994 році американський математик Томас Найслі використовував персональний комп'ютер, оснащений на той час новим чіпом Pentium від корпорації Intel, коли він виявив недолік у чіпі, який давав суперечливі результати в його розрахунках постійної Бруна. Негативний розголос з боку математичної спільноти змусив Intel запропонувати безкоштовну заміну чіпів, які були модифіковані для вирішення проблеми.

У 2010 році Найслі дав значення константі Бруна на основі всіх простих чисел-близнюків, менших за .

Наступний великий прорив стався в 2003 році, коли американський математик Деніел Голдстон і турецький математик Джем Йилдірим опублікували статтю «Малі проміжки між простими числами», в якій було встановлено існування нескінченної кількості пар простих чисел у межах невеликої різниці (16, з деякими іншими припущення, особливо гіпотеза Елліотта-Хальберстама). Хоча їхній доказ був помилковим, вони виправили його разом з угорським математиком Яношем Пінцем у 2005 році.

Американський математик Ітанг Чжан спирався на їхню роботу, щоб показати в 2013 році, що без будь-яких припущень існує нескінченна кількість, яка відрізняється на 70 мільйонів. Ця межа була покращена до 246 у 2014 році, і якщо припустити гіпотезу Еллíотта-Хальберстама або узагальнену форму цієї гіпотези, різниця становила 12 і 6 відповідно. Ці методи можуть сприяти розвитку гіпотези Рімана, яка пов’язана з теоремою про просте число (формула, яка дає наближення кількості простих чисел, менших за будь-яке задане значення).

1.4. Задача Кеплера про найщільніше пакування куль.

Йоганна Кеплера сьогодні в основному пам’ятають за відкриття трьох законів руху планет, які носять його ім’я (опубліковані в 1609 і 1619 роках, рис. 1.5). Він також зробив важливу роботу в області оптики (1604, 1611), відкрив два нових правильних багатогранника (1619), дав першу математичну інтерпретацію щільного укладання рівних сфер (що привело до пояснення форми комірок стільника, 1611) дав перший доказ того, як працюють логарифми (1624) і розробив метод знаходження об’ємів твердих тіл обертання, який, оглядаючи заднім числом, можна розглядати як внесок у розвиток числення (1615, 1616). Крім того, він розрахував найточніші астрономічні таблиці, відомі досі, незмінна точність яких багато в чому зробила для встановлення істинності геліоцентричної астрономії (Таблиці Рудольфіна, Ульм, 1627).

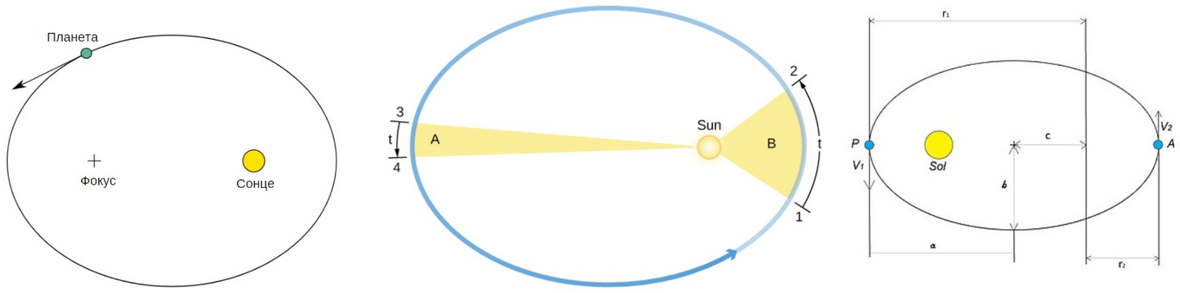


Рис. 1.5. Три закони Кеплера

Збереглася велика кількість листування Кеплера. Багато його листів є майже еквівалентом наукової статті (наукових журналів тоді ще не було), і кореспонденти, зберігали їх, тому що вони були цікавими. Як наслідок, ми знаємо досить багато про життя Кеплера, і навіть про його характер. Частково через це Кеплер зробив кар'єру більш-менш вигаданого персонажа.

Протягом усього свого життя Кеплер був глибоко релігійною людиною. Усі його твори містять численні посилання на Бога, і він сприймав свою роботу як виконання свого християнського обов'язку розуміти діла Бога. Людина, як вважав Кеплер, створена за образом Бога, явно здатна зрозуміти створений Ним Всесвіт. Більше того, Кеплер був переконаний, що Бог створив Всесвіт згідно з математичним планом — це переконання міститься в працях Платона та пов'язане з Піфагором. Оскільки в той час було загальновизнано, що математика забезпечувала надійний метод досягнення істин про світ (загальні поняття та постулати Евкліда вважалися дійсно істинними), ми маємо тут стратегію розуміння Всесвіту. Оскільки деякі автори назвали Кеплера ірраціональністю, варто зазначити, що ця досить обнадійлива епістемологія дійсно дуже далека від переконання містика, що речі можна зрозуміти лише неточним способом, який спирається на розуміння, яке не підвладне розуму. Кеплер справді неодноразово дякує Богові за те, що він наділив його розумінням, але це розуміння представляється як раціональне.

«Задача про пакування куль — задача комбінаторної геометрії про розміщення однакових куль в евклідовому просторі без їхнього взаємного перетинання»[20].

Типова постановка задачі така: «знайти спосіб розташування куль в просторі, за якого кулі займають найбільшу частину цього простору». Задана у 1500-х англійськими математиками. І розв'язана лише у 2016 році для 8-вимірного простору українською математикинею Мариною Вязовською.

Інтуїтивно задача виглядала простою, але довести, що пакування з такою щільністю є найкращим, не вдавалося протягом 400 років.

У 90-х роках XVI століття видатний англійський мореплавець та дослідник сер Волтер Рейлі звернувся до математика Томаса Герріота з практичним завданням: винайти оптимальний метод розміщення гарматних ядер на військових кораблях Британії. Герріот поділився цією проблемою з німецьким астрономом Йоганом Кеплером. Останній висловив думку, що найефективніший спосіб вже використовується на практиці — як при складанні боєприпасів, так і при зберіганні фруктів. Система полягала в наступному: нижній ряд формувався зі сфер, щільно прилеглих одна до одної у формі гексагона (шестикутника), наступний шар розміщувався у заглибленнях між кулями попереднього рівня, і так далі. За такого способу укладання у великому контейнері максимальна щільність заповнення простору становила приблизно 74 відсотки:

Самостійно підтвердити математично свою теорію про максимально щільне пакування Кеплер не спромігся. У 1611 році він опублікував працю латинською мовою під назвою «Strena, seu de nive sexangula» («Про шестикутні сніжинки», рис. 1.6), де виклав припущення стосовно найефективнішого розташування однакових сфер у тривимірному просторі при їх пірамідальному розміщенні. Цей невеликий науковий трактат був спрямований на пошук пояснення геометричної природи сніжинок та їхньої шестикутної форми. Хоча астроном не зміг надати вичерпну відповідь на головне питання свого дослідження, його робота заклала фундаментальні основи нової науки - кристалографії, здійснивши революційний вплив на подальший розвиток наукової думки.

Наукова дискусія щодо оптимального розміщення сфер отримала продовження в Кембриджському університеті наприкінці XVII століття, де у 1694 році свої погляди висловили видатні вчені Девід Грегорі та Ісаак Ньютон. Їхні думки розділилися: Грегорі наполягав на можливості такого розташування куль, при якому кожна сфера контактує з 13 сусідніми, тоді як Ньютон відстоював варіант з 12 точками дотику.

Математичне доведення гіпотези Кеплера виявилося настільки складним завданням, що воно залишалося нерозв'язаним протягом кількох століть. Значущість цієї проблеми підкреслює той факт, що її було включено до переліку 23 найважливіших невирішених математичних завдань, який сформував Давид Гільберт у 1900 році — він оголосив їх на Міжнародному математичному конгресі в Парижі.

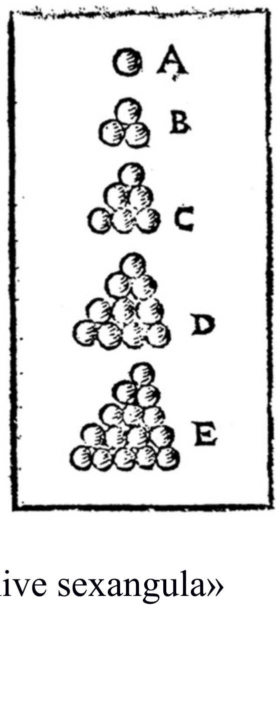


Рис 1.6. «Strena, seu de nive sexangula»

У своїй промові «The Problems of Mathematics» він оглянув майже всю математику свого часу і спробував викласти проблеми, які, на його думку, будуть важливими для математиків 20-го століття. З тих пір багато проблем було вирішено, і кожне рішення було помітною подією. Проте з тих, що залишилися, один частково потребує вирішення проблеми Гіпотези Рімана, що вважається найважливішою невирішеною проблемою в математиці.

Значний прорив у розв'язанні гіпотези Кеплера стався 1998 року, коли математик Томас Гейлс представив своє доведення. Його метод ґрунтувався на комп'ютерному обчисленні та аналізі всіх можливих комбінацій розташування сфер. Проте це рішення не отримало повного визнання наукової спільноти через відсутність строгого математичного обґрунтування.

Що стосується двовимірного евклідового простору, то тут успіх було досягнуто значно раніше. У 1940 році математики довели, що найефективніше заповнення площини досягається при розміщенні центрів кіл у вершинах мозаїки з правильних шестикутників. При такому розташуванні кожне коло має рівно шість дотичних сусідів, що забезпечує оптимальну щільність розміщення (рис. 1.7.).

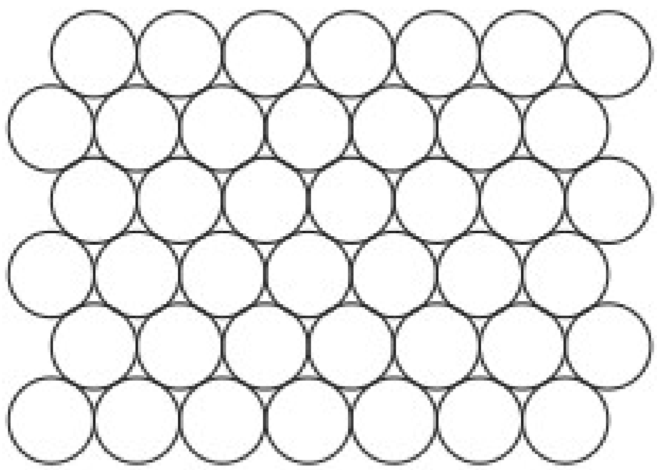


Рис. 1.7. Гексональне пакування.

У 1958 році відомий математик та популяризатор науки Гарольд Коксетер висунув цікаве спостереження щодо проблеми найщільнішого пакування сфер. Він зазначив, що при розташуванні 12 куль навколо центральної залишаються невеликі проміжки, які теоретично могли б вмістити тринадцяту кулю. Ці порожнини наштовхнули його на думку про можливість існування неправильного пакування з щільністю, що перевищує 0,74. Втім, ні це припущення, ні необхідність саме 12-ти точок дотику не отримали математичного підтвердження.

Гіпотеза Коксетера стимулювала проведення серії експериментів з хаотичним розміщенням куль. Результати показали, що при випадковому пакуванні щільність коливається від 0,59 до 0,63, що суттєво поступається показнику 0,74, характерному для впорядкованого розташування.

Якщо задачі пакування для двовимірного та тривимірного просторів можна візуалізувати, то існують також більш абстрактні варіанти для просторів вищої розмірності.

Визначний прорив у цій галузі здійснила українська математикиня Марина Вязовська, розв'язавши у 2016 році задачу для восьмивимірного простору. Вона також відома своїми дослідженнями сферичних дизайнів у співпраці з Андрієм Бондаренком та Данилом Радченком. Її робота підтвердила гіпотезу Кореваара-Меєрса про існування компактних конструкцій у будь-яких вимірах.

Елегантність рішення Вязовської вразила математичну спільноту — воно вмістилося на 23 сторінках, що разюче контрастує з доведенням тривимірної гіпотези Кеплера, яке потребувало 300 сторінок тексту та 50 000 рядків програмного коду. За це досягнення вона здобула численні міжнародні відзнаки, включаючи найпрестижнішу нагороду в математиці — Медаль Філдса у 2022 році.

Наступного року Вязовська разом з колегами представила розв'язок аналогічної задачі для 24-вимірного простору.

РОЗДІЛ 2
ІНТЕГРАЦІЯ НАЙВІДОМІШИХ ВИРІШЕНИХ ПРОБЛЕМ В МАТЕМАТИЦІ У ШКІЛЬНУ ПРОГРАМУ

2.1. Проблема чотирьох фарб як інструмент розвитку математичних здібностей у здобувачів освіти.

Сучасний шкільний курс математики має величезний розвивальний потенціал завдяки своїй цілісності та логічній строгості. Для розуміння здобувачами освіти важливих математичних понять необхідно обирати такі методи і форми навчання, щоб матеріал був поданий на доступному для них рівні.

Проблема чотирьох фарб тісно пов’язана з темою «Теорія графів». Тому ми можемо познайомити здобувачів освіти із цією темою за допомогою карт. Почнемо з означення графа, що це таке?

У математиці теорія графів — це вивчення графів, які є математичними структурами, що використовуються для моделювання попарних зв’язків між об’єктами. У цьому контексті граф складається з вершин (також званих вузлами або точками), які з’єднані ребрами (також званими дугами, зв’язками або лініями).

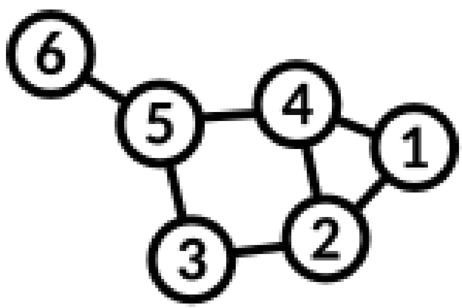


Рис. 2.1. Приклад найпростішого графу.

Візьмемо за основу карту України (рис. 2.2). Головне місто кожної області буде вершиною графа, а головні дороги між ним — ребра, що з'єднують вершини.

Рис. 2.2. Схематична мапа України.

Відокремимо наприклад Херсон, Одесу та Київ. Що буде вершинами графів? — Херсон, Одеса та Київ. Що буде ребрами? — Дорога від Херсона до Одеси, від Херсона до Києва та з Києва до Одеси (рис. 2.3).

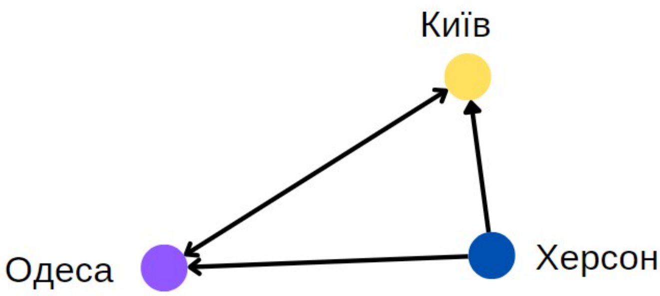


Рис. 2.3. Приклад графа.

На прикладі рисунку 2.3 ми розглянемо деякі властивості графа:

1) Якщо дорога має напрямок руху: з Херсону до Києва, або з Херсону до Одеси, проте не має зворотної дороги (з Києва до Херсону та з Одеси до Херсону — дороги немає), то такий граф називають — *орієнтовним*.

2) Якщо дороги двосторонні, наприклад із Одеси до Києва та з Києва до Одеси, тоді це *неорієнтовний* граф.

3) А тепер уявимо, що кожна дорога має певну довжину або вартість поїздки, у такому випадку граф стає *ваговим*, і кожне ребро має свою числову характеристику (наприклад, кілометраж).

У теорії графів є поняття «шлях» — це послідовність вершин, з'єднаних ребрами. На нашому рисунку 2.3 одним із шляхів може бути Херсон-Київ-Одеса.

Зі шляхом пов'язане одне із важливіших завдань графів — пошук найкоротшого шляху між двома вершинами. На мапі це може означати шлях між містами із мінімальною витратою часу або пройденого шляху — це залежить від того, що саме нас цікавить.

Поняття *ступінь вершин* — це кількість ребр, що виходять з однієї вершини. Наприклад, з Херсону прокладено дороги до Одеси, Миколаєва, Черкас, тоді ступінь вершини Херсону буде дорівнювати 3.

Наступні завдання частково були узяти із написаною нами статті: «Проблема чотирьох фарб як інструмент для розвитку математичних здібностей у старшокласників» — підготовленої для VIII Міжнародної науково-практичної конференції у Львові [22].

Одне із завдань, що ми пропонуємо по цій темі, це розфарбувати мапу України найменшою кількістю різних кольорів так, щоб два сусідніх не були розфарбовані в один колір.

Для розв'язку завдання, ми з мапи України зробимо граф, що підлягає наступним правилам: дві області вважаються сусідніми, якщо їх з'єднує не нульовий відрізок — тоді між ними прокладається дорога; якщо дві області не мають спільного кордону або вони межують в одній точці, то вони не сусідні і дороги між ними немає. У результаті ми отримаємо наступний граф на рисунку 2.4, на якому кожна вершина це обласний центр, а ребром є наявність кордону між цими областями.

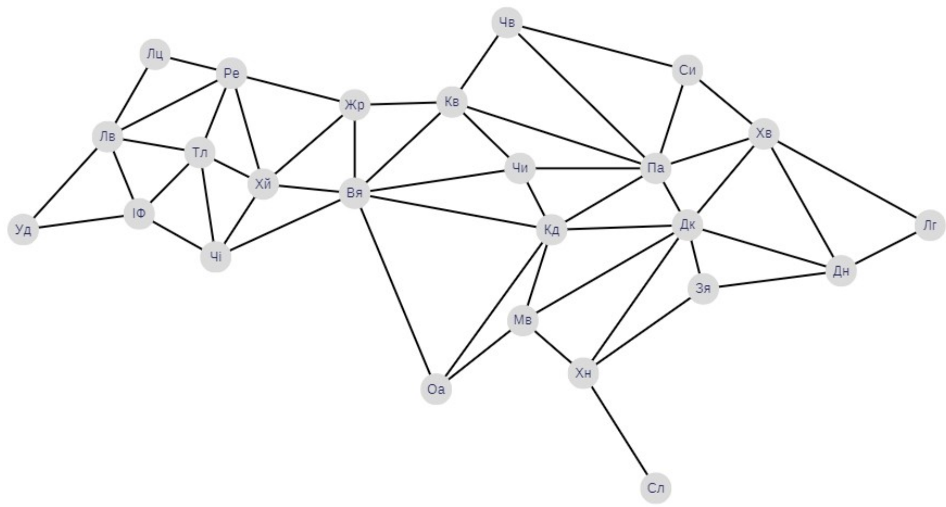


Рис. 2.4. Граф побудований на основі мапи України.

Теорема про чотири фарби стверджує, що для розфарбування будь якої карти достатньо усього чотири кольори. Тому здобувачам освіти пропонується використати щонайбільше чотири кольори. Щоб розфарбувати цей граф, дотримуючись правила, що жодні два сусідніх вершини (ти, що з'єднані дорогою) не повинні мати один і той самий колір. Далі буде представлено один із можливих варіантів готового завдання (рис. 2.5).

Отже, чотирьох кольорів дійсно було достатньо, щоб розфарбувати граф у чотири кольори. Відповідно до цього графу ми можемо розфарбувати і саму схему мапи України (рис.2.6).

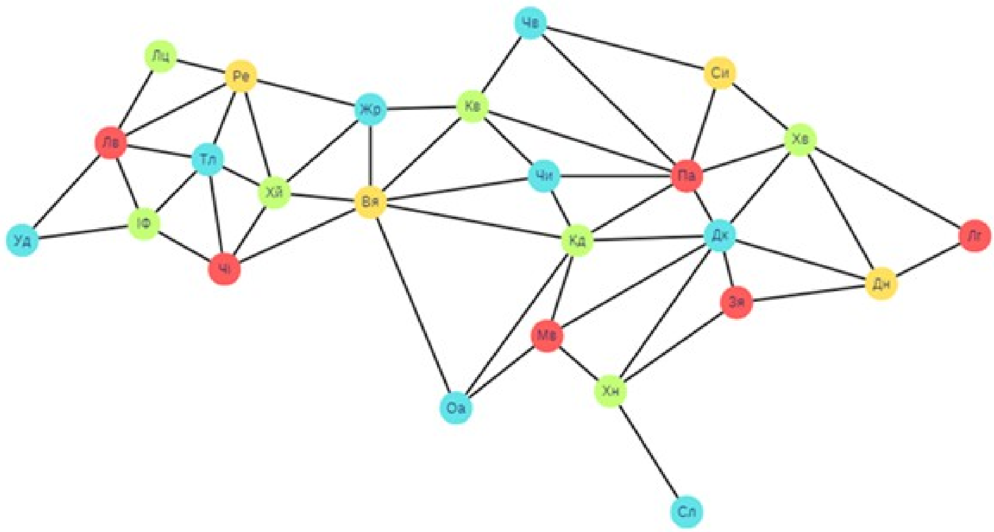


Рис. 2.5. Варіант розфарбування графа, використовуючи синій, червоний, жовтий та зелений кольори.

Інше питання, яке ми розберемо: «Чи буде достатньо використати лише три кольори?»

Рис.2.6. Розфарбована мапа України до відповідного графу

Візьмемо вершину Тернопіль «Тл» у західній частині мапи, розфарбуємо його у синій колір. Тернопіль граничить із наступними областями: Львів «Лв», Івано-Франківськ «ІФ», Чернівці «Чі», Хмельницький «Хй» та Рівне «Ре» — усього п’ять. Беремо червоний і зелений кольори та по черзі зафарбовуємо області: «Лв» — червоний, «ІФ» — зелений, «Чі» — червоний, «Хй» — зелений і для «Ре» в нас залишається червоний колір. Проте, якщо ми «Ре» зафарбуємо червоним, то це буде суперечить умові, що дві сусідні вершини не повинні бути одного кольору, а тоді для «Ре» не залишається кольору, якщо ми використовуємо лише троє фарб.

Отже, ми можемо зробити висновок, що для мапи України та нашого побудованого графу трьох фарб буде не достатньо для розфарбування їх у різні кольори.

2.2. Ознайомлення здобувачів освіти із гіпотезами Ґольбаха.

Перед вивченням гіпотез Ґольдбаха, здобувачі освіти повинні опанувати базові знання, пов’язанні із простими та складеними числами.

Означення. «Просте число — це натуральне число, яке має рівно два різні натуральні дільники (лише 1 і саме число)»[14].

Складене число — це усі інші числа, що не є простими, не є одиницею та не є нулем.

Просте число визначається за допомогою множення, так стверджує основна теорема арифметики: «кожне натуральне число більше одиниці, можна представити як добуток простих чисел, причому, в єдиний спосіб з точністю до порядку множників»[26].

Для знаходження простого числа використовують алгоритм, що називається Решето Ератосфена (Ератосфен, грец. Ἐρατοσθένης — давньогрецький ерудит: математик , географ , поет , астроном і теоретик музики, який вперше виміряв розмір Землі).

Цей алгоритм полягає у виписуванні всіх чисел від двох до N. Далі викреслюємо усі числа більше двох, що діляться на два (). Наступне просте число — 3, воно є простим, викреслюємо далі усі числа, що діляться на 3 (). Наступне число — 5, знову викреслюємо решту чисел, що діляться на 5 (). Кожне наступне не закреслене число — просте, тому викреслюємо всі числа більші за нього та кратні йому. Повторюємо алгоритм закреслення чисел до поки не дійдемо записаного числа N.

Усі числа, що залишились після закреслення є простими.

Також можна помітити, що викреслення кожного кратного до простого можна розпочинати із , тобто кратні 3 починають викреслювати із , оскільки 6 вже викреслено як кратне 2, кратні 5 починаються з , оскільки 10, 15 та 20 викреслено як числа кратні 2 та 3 і т.д.

Наприклад числа від 2 до 20:

Викреслюємо кратні 2 і залишається:

Викреслюємо кратні 3 і залишається:

Кожне із отриманих чисел є простим.

Існує нескінченна кількість простих чисел, як продемонстрував Евклід близько 300 року до нашої ери. Жодна відома проста формула не відокремлює прості числа від складених чисел. Однак розподіл простих чисел у межах натуральних чисел у цілому можна статистично змоделювати. Першим результатом у цьому напрямку є теорема про прості числа, доведена наприкінці 19 століття, яка говорить, що ймовірність того , що навмання вибране велике число є простим, обернено пропорційна кількості його цифр, тобто його логарифму.

Також торкнемося теми парності числа. «У математиці парність — це властивість цілого числа бути парним чи непарним. Ціле число є парним, якщо воно ділиться на 2, і непарним, якщо воно не ділиться на 2»[15].

Наведене вище визначення парності застосовується лише до цілих чисел, отже, воно не може бути застосоване до таких чисел, як або .

Ціле число, виражене в десятковій системі числення, є парним або непарним залежно від того, парна чи непарна його остання цифра. Тобто, якщо остання цифра , то число непарне, в іншому випадку воно парне, оскільки остання цифра будь-якого парного числа дорівнює . Ця ж ідея працюватиме з будь-якою парною основою. Зокрема, число, виражене в двійковій системі числення, є непарним, якщо його остання цифра дорівнює 1, і воно є парним, якщо його остання цифра дорівнює 0.

Коли здобувачі освіти добре засвоїли основний матеріал, то можна переходити до гіпотез Ґольбаха — хоча через складність її не проходять у школі, віддаючи перевагу концентрації на більш простих темах пов'язаних із простими числами та їх властивостями.

Формулювання гіпотез доволі просте: бінарна — «Довільне парне число більше двох можна подати у вигляді суми двох простих чисел»; тернарна — «Довільне непарне число не менше семи можна записати у вигляді суми трьох простих чисел».

Наступні представленні задачі, використання Гіпотез Кеплера у шкільній програмі, були розглянуті у наступній статті: «Ознайомлення учнів закладів середньої освіти з Гіпотезами Ґольдбаха», яка була написана нами для магістерських студій Херсонського державного університету.

У першому завданні ми хочемо переконатися, що здобувачі освіти зрозуміли суть гіпотез. Тому ми пропонуємо їм деякі числа та просимо розкласти їх на суму трьох простих (для непарних — тернарна гіпотеза) та суму двох простих (для парних — бінарна гіпотеза). Наприклад: та тощо.

Ускладнюючи, ми пропонуємо здобувачам самим обрати числа та задати їх розкладання один одному. Також, щоб вони знайшли максимально можливу кількість розкладів одного числа. Наприклад, та .

Ці вправи спрямовані на допомогу учням зрозуміти гіпотези, і попрактикуються у складанні та вибірці простих чисел.

Завдання: представити деяке число як суму трьох простих чисел, що менші за деяке — стимулює до пошуку більш складної вибірки цифр, ніж підбір двох самих маленьких та великого, що залишився. Наприклад, представити 79 як суму трьох простих чисел, що менші за 50. Найпростіше для пошуку це: , проте ця сума не буде правильною відповіддю на завдання, одна з можливих правильних відповідей:

Поєднавши дві гіпотези ми формулюємо наступне завдання: навести приклади непарних чисел, що можна представити у вигляді суми двох простих чисел: тощо. З цього випливає наступне завдання: довести наступне твердження: якщо непарне число допускає розклад у суму двох простих чисел, то одне з них дорівнює двом.

Доказ: припустимо, що існує деяке — не парне число. Не парне число записується як , де — ціле число.

Не парне число, що представлене сумою двох чисел має наступний вигляд*:* , де — прості числа.

Доводити будемо від супротивного, припускаючи, що жодне число з не дорівнюють 2. Тоді — прості непарні числа (згадуємо, що у простих числах парним є тільки 2). Позначимо , де — деякі цілі числа. Тоді наше рівняння матиме вигляд: . Ми отримали, що ліва частина — непарне число, а права частина — парне число.

Отже, наше припущення не вірне і одне із чисел має дорівнювати 2.

Цей доказ базується на властивості парності чисел і твердженню, що сума двох непарних чисел є парним числом.

2.3. **Поглиблене вивчення властивостей простих чисел за допомогою простих чисел-близнюків.**

Про означення, властивості та метод знаходження простих чисел ми казали у попередньому пункті розділу 2.2. «Прості числа близнюки це такі прості числа, різниця між якими дорівнює 2»[18]. Наприклад, числа 17 і 19 є простими, якщо від 19 відняти 17 ми отримаємо 2, тобто очевидно можна казати, що різниця між ними дорівнює 2, і такі прості числа називаються «прості числа близнюки». Числа 3 і 11 є простими числами, но не є простими числами близнюками, так як , вочевидь .

Подвійні прості числа стають все більш рідкісними, оскільки досліджуються більші діапазони, відповідно до загальної тенденції збільшення проміжків між сусідніми простими числами в міру збільшення самих чисел.

Прості числа близнюки мають декілька властивостей.

1) Зазвичай пара (2,3) не вважається парою простих чисел-близнюків. Оскільки 2 є єдиним парним простим числом, ця пара є єдиною парою простих чисел, які відрізняються на одиницю; таким чином, прості числа-близнюки розташовані якомога ближче для будь-яких інших простих чисел.

2) П'ять — єдине просте число, яке належить двом парам (і), оскільки кожна пара простих близнюків, більша за (3,5), має вигляд для деякого натурального числа ; тобто число між двома простими числами є кратним 6. У результаті сума будь-якої пари простих чисел-близнюків (окрім 3 і 5) ділиться на 12.

Розглянемо більш детально другу властивість: чому пара простих близнюків має вигляд і чому їх сума ділиться на 12?

Згадаємо, що будь-яке ціле число можна представити у вигляді , де — деяке ціле число, а — залишок від ділення числа на 6 () — це твердження засноване на залишках, які числа можуть мати при діленні на 6. Чому саме 6? Тому що 6 — це найменше число, яке дозволяє швидко «відфільтрувати» числа, які діляться на 2 або 3. Також будь-яке число, що ділиться на 2 і 3 не може бути простим, окрім самих 2 і 3.

Проаналізуємо кожен випадок по черзі:

— ділиться на 6, а отже і на 2 і на 3, складене;

— потенційно просте;

— ділиться на два, складене;

— ділиться на 3, складене;

— ділиться на 2, складене;

теж саме, що — потенційно просте.

Якщо — прості числа близнюки, то . Тоді: якщо , то — ділиться на 3, а тому не може бути простим; якщо , то — і воно може бути простим.

І тоді єдиний можливий варіант для простих близнюків: — це не означає, що всі числа виду є простими, але всі прості числа мають такий вигляд.

Друге питання: чому сума пари простих близнюків ділиться на 12? Дане питання також можна запропонувати довести здобувачам освіти.

Візьмемо пару простих близнюків , . Отже, сума будь-якої пари простих близнюків дійсно ділиться на 12. Проте пара (3,5) є винятком, тому що 3 не має вигляду , а сума , що не ділиться на 12.

Поєднуючи тему простих чисел близнюків і попередню тему гіпотези Ґольдбаха пропонуємо наступні завдання: 1) сумою яких двох чисел-близнюків є число 2) які непарні числа можна подати у вигляді суми простого числа та пари простих чисел-близнюків. Наприклад: 1) ; 2) .

Також пропонуємо довести, що добуток двох простих близнюків завжди на 1 менший від повного квадрату.

Доведення. Нехай — пара простих-близнюків. Розглянемо їх добуток: , даний вираз можна представити у вигляді: .

Таким чином, — добуток двох простих-близнюків менший за повний квадрат на 1.

2.4. Головоломка про найщільніше пакування кіл.

Гіпотеза Кеплера — «задача комбінаторики про розміщення однакових куль в евклідовому просторі без їхнього взаємного перетину».

Ця задача стосується геометрії. Тому представляти її треба, коли здобувачі освіти засвоїли наступні теми: «Коло», «Куля та сфера», «Розташування кулі у просторі». Згадаємо основні моменти.

«Коло — це фігура, що складається з усіх точок площини, які знаходяться на заданій відстані від даної точки, центру. Відстань між будь-якою точкою кола і центром називається радіусом. Довжина відрізка, що сполучає дві точки кола і проходить через центр, називається діаметром»[15] (рис. 2.7).

Основні формули: , .

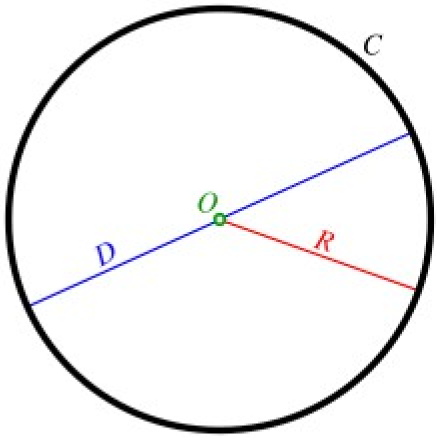


Рис. 2.7. Коло.

«Сфера — геометричний об’єкт, що є тривимірним аналогом двовимірного кола. Формально сфера — це набір точок, які знаходяться на однаковій відстані r від даної точки в тривимірному просторі. Дана точка є центром сфери, а r є радіусом сфери. Сферу можна побудувати як поверхню, утворену обертанням кола на півоберту навколо будь-якого з його діаметрів»[16].

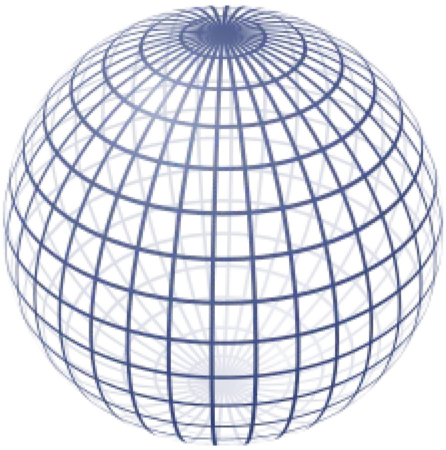


Рис. 2.8. Сфера.

Основні формули:

Треба пам’ятати різницю між кулею та сферою. Сфера — це тільки обгортка, сфера порожня всередині, а куля — заповнена. Кулю утворюють за допомогою обертання круга навколо його діаметра.

Частина наступної інформації була узята із написаної нами статті: «Задача Кеплера про найщільніше пакування куль» — підготовлена для Всеукраїнської науково-практичної конференції «Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» на базі Херсонського державного університету.

Перша задача для розглядання буде стосуватись двовимірного простору. Здобувачам пропонується схема рисунок 2.9. Та наступна умова: у прямокутнику висота якого 5 см, а ширина — 8 см, викладено 40 кіл, діаметр яких дорівнює 1 см. Чи можна укласти кола так, щоб їх було 41?

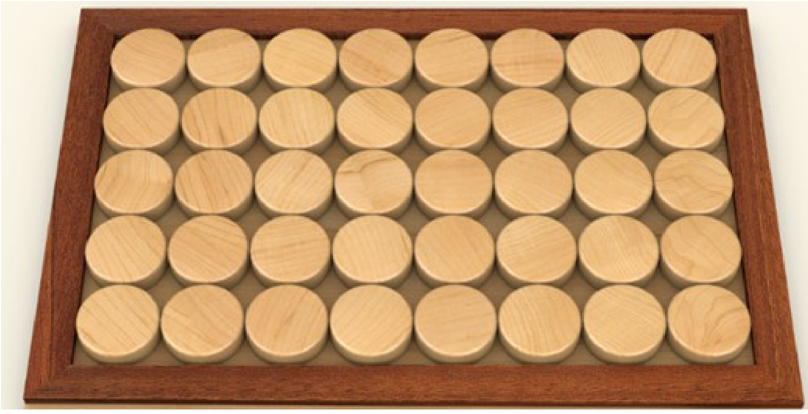


Рис. 2.9. Умова до першої задачі.

На рисунку 2.9 запропоновано приклад щільного пакування, яке його контактне число? Контактним числом є число найближчих кіл, що дотикаються до розглянутого кола. Узявши будь-яке з кіл в середині, ми бачимо, що до нього дотикається усього чотири сусідніх кола. Тому ми можемо стверджувати, що у даного щільного пакування контактне число дорівнює 4. Щільність такого пакування дорівнює .

Проте щільне не означає найщільніше. Якщо ми збільшимо контактне число до шести, розташовуючи кола у шаховому порядку, або у порядку стільників, як бджоли, то ми отримаємо найщільніше пакування кіл. Щільність такого пакування буде .

І тоді при такому розташуванні кіл ми зможемо додати ще одне і отримаємо 41 коло (рис. 2.10).

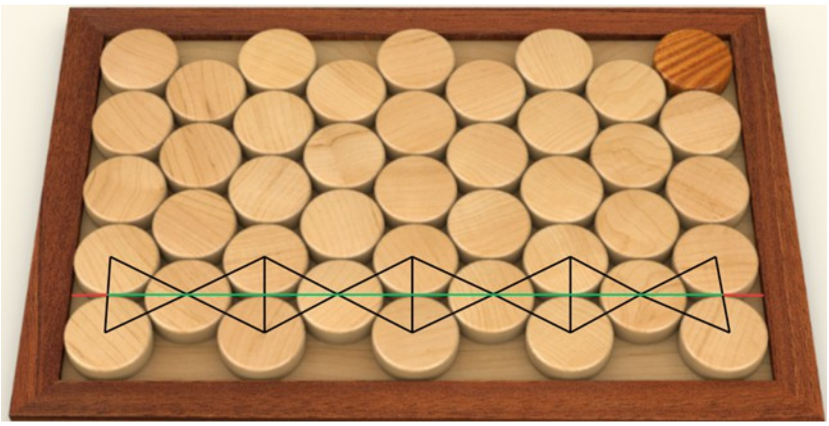
Рис.2.10. Найщільніше пакування.

Із цієї задачі випливає наступне питання: якщо ми змогли збільшити кількість займаних рядів з 8 до 9, то чи залишилось між фігурами та рамкою ще якийсь проміжок? Наступний розв'язок буде спиратись на рисунок 2.11.

Позначимо центр кожного круга. З'єднавши центри між собою чорною лінією, отримаємо 8 трикутників. Вони будуть рівносторонніми та рівними між собою: усі круги рівні між собою за умовою, їх діаметр дорівнює 1, а радіус , сторона кожного трикутника отримана при складанні двох радіусів, а тому кожна сторона отриманих трикутників дорівнює 1.

Проведемо висоту в кожному з трикутників зеленою прямою. За формулою маємо: — це висота одного з трикутників.

Маємо: — це довжина усієї зеленої прямої.



2.11. Схема розв'язку задачі.

Двома червоними лініями по краях від зеленої ми визначаємо залишок простору, який займають круги: з ліва та з права. Їх сума відповідно дорівнює 1.

Таким чином, увесь простір, що займає найщільніше пакування: або . Нижня рамка за умовою дорівнює 8. Щоб знайти залишок не зайнятий кругами, треба від довжини рамки відняти довжину, яку займають круги. І маємо: .

Тому, ми стверджуємо, що так, при ущільнені кругів у рамці 5 на 8 це залишається місце, яке дорівнює .

Розглядаючи найщільніше пакування у трьох-вимірному просторі, ми виокремимо декілька важливих моментів. Один з них, що найефективнішого способу укладання куль існує декілька. Найпростіший варіант для розуміння — це укладання куль у піраміду (рис. 2.12).

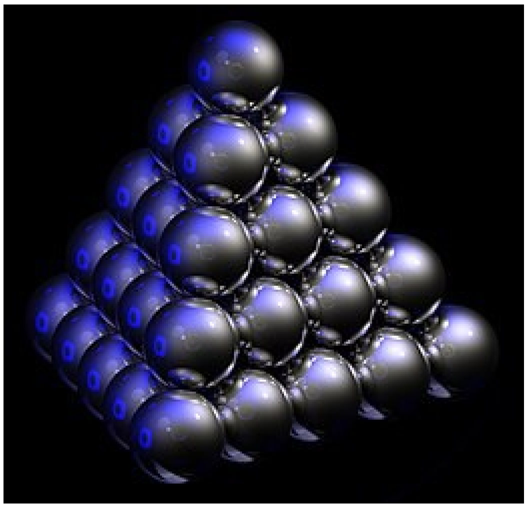


Рис. 2.12. Приклад найщільнішого пакування куль у трьох-вимірному просторі.

На початку розглядали задачу, суть якої полягала у тому, щоб розташувати найбільшу кількість куль навколо однієї так, щоб усі зовнішні кулі дотикались до центральної. Найбільша кількість куль ставляє 12, хоча з технічної точки зору можна «втиснути» 13, проте на практиці виходило на одну менше, так як область для 13-ї кулі була зазорами між іншими.

У кристалографії існують два фундаментальні типи регулярних ґраток, які демонструють найвищу можливу щільність упакування. Перший тип — це гранецентрована кубічна структура (ГЦК), також відома як кубічне щільне пакування. Другий — це гексагональна щільно-упакована структура (ГЩП або ГЩУ).

Особливістю обох цих структур (рис.2.13) є те, що вони формуються з послідовних пластів, де сфери розташовані за принципом трикутної мережі. Кожен такий пласт можна уявити як аркуш, на якому центри сфер утворюють трикутний візерунок.

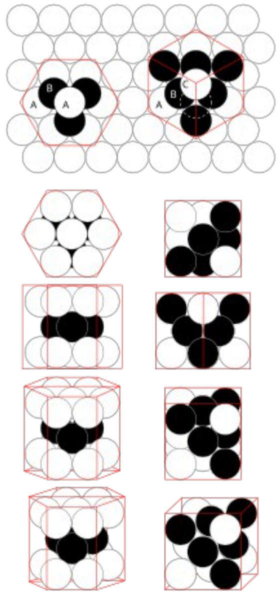


Рис. 2.13. Ілюстрація щільного пакування рівних сфер у ґратці ГЩ (ліворуч) і ГЦК (праворуч)

Головна відмінність між ГЦК та ГЩП полягає у способі накладання цих «аркушів» один на одного — тобто у відносному розташуванні послідовних шарів упакованих сфер.

Обидві ці структури досягають ідентичного коефіцієнта заповнення простору, проте мають різні симетричні характеристики та способи організації шарів.

РОЗДІЛ 3
СИСТЕМА ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗАСВОЄНИХ ЗНАНЬ

У цьому розділі буде представлено ряд задач по розглянутим нами темам, які можна запропонувати для перевірки засвоєного матеріалу здобувачами освіти.

Перша тема: «Проблема чотирьох фарб».

1. Побудувати граф на основі мапи України (рис.3.1). Де вершинами є області, а зв’язані між собою ті області, у яких спільний кордон не нульової довжини.

2. Знайти на побудованому графі мапи України (ри.3.2) ізольовані області або ті, що мають найбільшу кількість зв’язків.

Рис. 3.1. Схема мапи України.

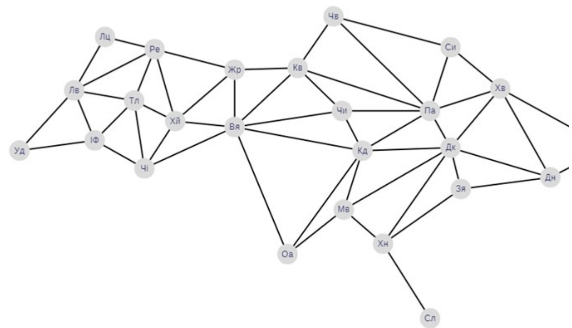


Рис.3.2. Граф побудований на основі мапи України.

3. Побудувати граф на основі мапи адміністративних районів конкретної області (рис.3.3. приклад карти). Де вершинами є адміністративні райони, а зв’язок прокладено між районами, що мають спільний кордон не нульової довжини.

4. Розфарбувати отриманий граф із «завдання 3», використовуючи чотири різні кольори так, щоб два сусідніх (пов’язаних між собою) не були однакового кольору.

5. Відповісти на запитання із доведенням: чи можна розфарбувати вашу мапу із «завдання 4» трьома кольорами?

Рис. 3.3. Приклад мапи районів Херсонської області.

6. Знайти таку область в Україні, яку можна розфарбувати лише трьома кольорами. Обґрунтуйте свою відповідь.

Наступна тема, яку ми розглядали у цій роботі: «Гіпотези Ґольбаха».

1. Знайти за допомогою Решето Ератосфена на проміжку від 1 до 100 усі прості числа.

2. Визначити парність наступних чисел: .

3. Розкласти на суму трьох простих чисел: .

4. Розкласти на суму двох простих чисел: .

5. Візьміть будь-яке число та знайти усі можливі розклади цього числа на суму трьох простих чисел, якщо воно не парне, або на суму двох простих чисел, якщо парне.

6. Довести наступне твердження: якщо непарне число допускає розклад у суму двох простих чисел, то одне з них дорівнює двом.

Третя на розгляд тема: «Прості числа близнюки».

1. Яка пара чисел відповідає простим числам-близнюкам: ?

2. Знайдіть усі пари простих чисел-близнюків на проміжку від 1 до 100.

3. Знайти середнє арифметичне кожної пари простих близнюків до 100.

4. Довести, що сума будь-якої пари простих близнюків ділиться на 12.

5. Довести, що добуток простих пар близнюків завжди менший від повного квадрата.

6. Довести, що не існує трьох послідовних чисел-близнюків окрім3,5,7.

І остання тема: «Задача Кеплера».

1. У прямокутнику висота якого 5 см, а ширина — 8 см, викладено 40 кіл, діаметр яких дорівнює 1 см. Чи можна укласти кола так, щоб їх було 41?

2. У прямокутнику висота якого 5 см, а ширина — 8 см, викладено 41 коло. Скільки треба відняти від ширини, щоб 41 коло було щільно укладено у прямокутник з мінімальною кількістю зайвого місця?

3. При щільнішому та найщільнішому пакуванні кіл, яке в кожного з них контактне число?

4. Схематично зобразити щільне та найщільніше пакування на площині.

5. Яка максимальна кількість шарів можуть дотикатись до однієї кулі у тривимірному просторі?

6. Наведіть приклади у житті, де використовується задача Кеплера.

Ці питання перевіряють засвоєння здобувачами освіти основних моментів у чотирьох темах. Умови завдань можуть бути змінені відповідно до цілей та завдань, які ставить викладач.

ВИСНОВКИ

За результатами дослідження у кваліфікаційній роботі некласичних доведень у сучасній математиці ми можемо зробити наступні висновки.

Історія проблеми чотирьох фарб, гіпотез Ґольдбаха, простих чисел-близнюків і задачі Кеплера про найщільніше пакування куль показали еволюцію математичної спільноти. Зокрема, комп'ютерне доведення проблеми чотирьох фарб започаткувала нову еру, де комп'ютерні обчислення стали невід'ємною частиною математичних доведень. Хоча вчені математики і намагаються підкріпляти комп'ютерні докази людськими. Гіпотези Ґольдбаха і проблема чисел близнюків показало, як основні питання, на яких базується теорія чисел, може залишатись невизначеними протягом багатьох літ, що у свою чергу стимулює розвиток нових методів і підходів у доведенні. Задача Кеплера демонструє як звичайна інтуїція може призвести до формування складних геометричних проблем, розв'язання яких потребує сучасних технологій.

Інтеграція досліджених тем у шкільну програму виявила потенціал для розвитку математичного мислення у здобувачів освіти. Завдання на розгляд підібрані таким чином, щоб бути не тільки цікавими, а ще й доступними для розуміння здобувачами. Ми представили складні математичні конструкції у більш простому форматі, зберігаючи математичну строгість.

Розвиток логічного і критичного мислення, здатність здобувачів освіти формулювати та доводити власні твердження — це аспекти, на яких ми зробили акцент. Підібрані завдання дозволять оцінити не лише знання з теорії, ще і застосування математичних концепцій у розв'язку практичних задач.

У кваліфікаційній роботі ми систематизувати історичний розвиток та сучасний стан досліджень некласичних доведень у математиці; розробити методичні рекомендації щодо впровадження складних математичних концепцій у шкільну програму; створити комплекс завдань для ефективної перевірки засвоєних знань.

У перспективі можна розширити вибірку некласичних доведень, до них підібрати інтерактивні методи навчання складних математичних концепцій, а також створення комп'ютерних моделей для візуалізації математичних проблем.

Таким чином, під час дослідження всі поставлені завдання були вирішені, а мета досягнута.

СПИСОК ВИКОРИСТАННИХ ДЖЕРЕЛ

1. Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko, Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. — 2016.

2. Kevin Knudson Stacking Cannonballs In 8 Dimensions // Forbes. — 2016. — 3.

3. Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. — 2016.

4. Hales, T.C. The Status of the Kepler Conjecture, The Mathematical Intelligencer, 16 (1994): 47-58

5. Айєрленд К. Класичне введення в сучасну теорію чисел [Текст] / К. Айєрленд, М. Роузен - М.: Світ, 1987

6. Баврін І.І. Стародавні завдання / І.І. Баврін, Є.А. Фрібус -М.; Освіта, 1994. - 128 с.

7. Балакова, О. Р. Тернарна та бінарна проблеми Гольдбаха = Goldbach's ternary and binary problems: кваліфікаційна робота (проєкт) на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр» / О. Р. Балакова ; наук. керівник д-р фіз.-мат. н., проф. О. Г. Савченко; Міністерство освіти і науки України ; Херсонський держ. ун-т, Ф-т комп'ютерних наук, фізики та математики, Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу. — Херсон : ХДУ, 2021. — 39 с.

8. Бевз В.Г. Практикум з історії математики. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. — 312 с.

9. Бібков М.М., Смирнова Л.А. Науково-дослідна робота з математики: теорема про чотири фарби. URL: https://files.schoolscience.ru/pdf/5/34582.pdf

10. Бородін О.І. Теорія чисел. — К.: Вища шк., 1970. — 275 с

11. Бородін О.І., Бугай О.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. - К.: Вища шк. , 1973. - 552 с

12. Виноградов, І.М. Основи теорії чисел: навчальний посібник. -М.: Лань, 2009. - 176 с.

13. Глейзер Г.І. Історія математики у школі VII — VIII кл. / Г.І. Глейзер - М.: Просвітництво, 1982. - 240 с.

14. Донець Г. А., Шор Н. З. Алгебраїчський підхід до проблеми розмальовки плоских графіків. К.: Наукова думка, 1982. 144 с.

15. Єгоров, Д.Ф. Елементи теорії чисел. - М.: Наука, 1998. — 358 с.

16. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 184 с.

17. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.:Генеза, 2016. 216 с.

18. Історія математики у 3 т.; [Текст] / за ред. А.П. Юшкевич М: Наука.; - Т.3 -1970, 496с.

19. Історія математики у 3 т.; [Текст] / за ред. А.П. Юшкевич М: Наука.; - Т.2 - 1970, 301с.

20. Кеплер Й. Strena seu de nive sexangula (Шестигранна сніжинка), короткий зміст. - 1611.

21. Клименко І.О. Задача Кеплера про найщільніше пакування куль/ Клименко І.О. // Конф. «Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» - 2024.

22. Клименко І.О. Ознайомлення учнів закладів середньої освіти з гіпотезами Ґольдбаха/ Клименко І.О. // Магістерські Студії Херсонського державного університету — 2024.

23. Клименко І.О. Проблема чотирьох фарб як інструмент для розвитку математичних здібностей у старшокласників/ Клименко І.О. // VIII Міжнародна науково-практична конференція — 2024. URL: https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-

perspectives-of-contemporary-science-theory-and-practice-16-18-09-2024-lviv-ukrayina-arhiv/

24. Маршал К. Дослідження гіпотези Кеплера: проблема Найбільш щільна упаковка // Mathematische Zeitschrift. - 2011. - С. 3-4.

25. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. Х. : Гімназія, 2020. 240 с.

26. Рінгель Г. Теорема про розмальовку карт. М.: Світ, 1977. 256 с.

27. Олійник, В. Методи отримання простих чисел — поточне стан та перспективи. - Кишинів: Evrica, 1999. - 126 с.

28. Рибченко, О. А. Задача Кеплера про найщільніше пакування куль : кваліфікаційна робота на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр» / О. А. Рибченко ; наук. керівник доктор фізико-математичних наук, проф. О. Г. Савченко ; Міністерство освіти і науки України ; Херсонський держ. ун-т, Ф-т комп'ютерних наук, фізики та математики, Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу. — Херсон : ХДУ, 2022. — 38 с.

29. Соловйова, А. О. Проблема чотирьох фарб = The problem of four colors: кваліфікаційна робота (проєкт) на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр» / А. О. Соловйова ; наук. керівник д-р фіз.-мат.н, проф. О. Г. Савченко ; Міністерство освіти і науки України ; Херсонський держ. ун-т, Ф-т комп'ютерних наук, фізики та математики, Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу. — Херсон : ХДУ, 2021. — 28 с.

30. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра та теорія чисел. - К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. - Ч. 1. - 400 с.

31. Хейлз Т. К. Доказ гіпотези Кеплера // Annals of Mathematics, Second Series. - 2005. - 162 (3) - С. 1065-1185.

32. Хейлз Т. К. Статус гіпотези Кеплера // The Mathematical Intelligencer. - 1994. - 16 (3) - С. 47-58.

33. Хейлз Т. К., Фергюсон С. П. Формулювання гіпотези Кеплера // Дискретна та обчислювальна геометрія - 2006. - 36 (1) - С. 21-69.

34. Хейлз Т. К. Історичний огляд гіпотези Кеплера // Дискретна та обчислювальна геометрія. - 2006. - 36 (1) - С. 5-20.

35. Хейлз Т. К., Фергюсон С. П. Формулювання гіпотези Кеплера // Дискретна та обчислювальна геометрія - 2006. - 36 (1) - С. 21-69.

36. Чистяков В.Д. Старовинні завдання з елементарної математики. - М: Вища шк., 1978. - 270 с.

37. Lamb E. Goldbach Variations [Text]/ E.Lamb Scientific American blogs — May 15, 2013.

38. Lisa Grossman New maths proof shows how to stack oranges in 24 dimensions // New Scientist. — 2016. — 3.

39. Erica Klarreich Sphere Packing Solved in Higher Dimensions //Quanta: Magazine. — 2016. — 3.

40. Gruber, P.M. and C.G. Lekkerkerker. Geometry of Numbers. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1987.

41. A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato and P.M. Chikin, Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids, Science, 303 (2004), 990-993.

42. Hales, T.C. The Status of the Kepler Conjecture, The Mathematical Intelligencer, 16 (1994): 47-58.