

**Міністерство освіти і науки України**  
**Херсонський державний університет**  
**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ “МНОГОГРАННИКИ”**

**Кваліфікаційна робота (проект)**  
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

**Виконав:** студент 2-го курсу, 12-221М групи  
Спеціальності: 014 Середня освіта  
Спеціалізація: 014.04 Математика  
Освітньо-професійної програми «Середня освіта  
(математика)» другого (магістерського) рівня  
вищої освіти

Лахманець Євген Олександрович

**Керівник** Доцентка, кандидатка фізико-  
математичних наук Котова О.В.

**Рецензент** доцентка кафедри природничо-  
наукової підготовки Херсонської державної  
морської академії

Спичак Т.С.

**Івано-Франківськ – 2024**

**ЗМІСТ**

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ.....	5
1.1. Історичний аспект розвитку знань про многогранники.....	5
1.2. Особливості викладу теми «Многогранники» в шкільних підручниках.....	10
1.3. Місце теми в навчальній програмі стереометрії.....	14
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ та практичні АСПЕКТИ вивчення теми .....	20
2.1. Особливості вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники».....	20
2.2. Задачі з многогранниками.....	26
.....	32
2.3. Види і роль наочних засобів та інноваційних технологій при вивченні многогранників.....	35
РОЗДІЛ 3. педагогічний експеримент вивчення теми «Многогранники».....	41
ВИСНОВКИ.....	45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	48
ДОДАТКИ.....	52
Додаток А.....	52

## ВСТУП

Вивчення многогранників є однією з важливих складових геометрії, яка має фундаментальне значення для формування просторового мислення і розвитку математичних навичок учнів. Многогранники – це тривимірні геометричні фігури, що мають важливі властивості і закономірності, які є основою для вивчення більш складних концепцій у геометрії. Оскільки многогранники використовуються в різних галузях науки і техніки, зокрема в архітектурі, інженерії та комп'ютерній графіці, їх детальне дослідження є необхідним для підготовки фахівців у цих областях.

Методика вивчення теми «Многогранники» стала предметом досліджень багатьох вітчизняних вчених, серед яких: І. Гириловська [13], М. Іваненко [20], В. Руденко [33], Н. Тарасенкова [36; 37] та інші.

Разом з тим, незважаючи на значну кількість психолого-педагогічних, методичних досліджень існує ряд протиріч:

- виникає питання узгодженості між теоретичними напрацюваннями і практичними методами навчання, що може призводити до недостатньої ефективності навчального процесу;

- існуючі методичні рекомендації часто не враховують індивідуальні особливості учнів і не завжди адаптовані до сучасних вимог освітнього процесу.

Актуальність та виявлені протиріччя і слугують основою для вибору теми дослідження.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами:**  
Кваліфікаційну роботу ( проєкт) виконано відповідно до тематичного плану науково-дослідної роботи кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, напрям наукового пошуку: " Формування професійної компетентності майбутніх учителів математики в умовах цифровізації вищої освіти", номер державної реєстрації 0123U103793.

**Мета:** дослідження особливостей методики вивчення теми «Многогранники».

Згідно з метою були визначені **завдання дослідження:**

1. Розглянути історичний аспект розвитку знань про многогранники.
2. Вивчити особливості викладу теми «Многогранники» в шкільних підручниках.
3. Дослідити місце теми в навчальній програмі стереометрії.
4. Ознайомитися із особливостями вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники».
5. Розглянути задачі з многогранниками.
6. Вивчити види і роль наочних засобів та інноваційних технологій при вивченні многогранників.
7. Провести педагогічний експеримент та оцінити результати експериментального дослідження.

**Об'єкт дослідження:** процес навчання геометрії у середній та старшій школі.

**Предмет дослідження:** методичні підходи до вивчення теми «Многогранники».

Для досягнення мети використано такі **методи дослідження:** теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури; аналіз навчальних програм; педагогічний експеримент; вивчення та узагальнення педагогічного досвіду.

**Теоретичне значення** роботи полягає в тому, що вона розширює розуміння методики навчання теми «Многогранники» шляхом виявлення і подолання існуючих протиріч між теоретичними напрацюваннями і практичною реалізацією, що сприяє розвитку нових підходів до ефективного навчання.

**Практична значущість роботи.** Результати дослідження можуть бути використані для удосконалення навчальних планів і підручників, створення

нових методичних матеріалів і ресурсів, а також для підвищення якості викладання геометрії в середніх школах.

**Структура роботи.** Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (37 найменувань). Загальний обсяг бакалаврської роботи становить 61 сторінку.

## **РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ**

### **1.1. Історичний аспект розвитку знань про многогранники**

Історичний розвиток знань про многогранники охоплює багатовікову еволюцію геометричних уявлень, математичних принципів і наукових відкриттів, що відображають поступ людської думки.

Многогранники як особлива геометрична форма привертали увагу ще стародавніх цивілізацій, які використовували їх у практичних завданнях та символічному мистецтві. Так, зображення правильних многогранників можна знайти на різьблених кам'яних кулях, виготовлених у пізньому неоліті в Шотландії, що свідчить про їх використання задовго до епохи Платона. Ці орнаментальні елементи не лише вражають своєю естетикою, але й вказують на математичне розуміння форм, яке існувало у давніх людей.

Окрім того, навіть у кістках, використовуваних у різних іграх ранніх цивілізацій, можна виявити ознаки правильних многогранників. Це підтверджує, що геометричні форми вже тоді займали важливе місце в культурному та соціальному житті людей, адже вони використовували їх у розвагах та іграх, що, в свою чергу, свідчить про певний рівень розвитку їх математичних знань.

Перші значущі згадки про многогранники з'являються у працях давньогрецьких математиків, таких як Платон та Евклід, які досліджували властивості правильних многогранників, відомих нині як платонові тіла. Середньовіччя та епоха Відродження принесли новий інтерес до цих форм,

коли математики та художники, зокрема Леонардо да Вінчі, досліджували їх структури та зв'язки з природою. У подальшому, розвиток алгебри, аналітичної геометрії та топології у XVIII–XX століттях дозволив математичній науці розкрити нові властивості многогранників та розширити їх застосування. Сьогодні знання про многогранники є фундаментальною частиною геометрії та знаходять використання у різних науках і технологіях, від архітектури до теоретичної фізики.

Правильні многогранники були значною мірою вивчені давніми греками, які залишили вагомий слід у розвитку геометрії. Деякі джерела, зокрема Прокл Діадох, приписують відкриття цих форм Піфагору, вважаючи його першим, хто звернув увагу на їх властивості. Однак є й інші думки: згідно з ними, Піфагор мав знання лише про три з п'яти правильних многогранників – тетраедр, куб і додекаедр.

Честь відкриття октаедра та ікосаедра, вважають, належить Теетету Афінському, який був сучасником Платона. Теетет став не лише відкривачем цих форм, а й першим, хто надав математичний опис усіх п'яти правильних многогранників. Він довів, що правильних многогранників існує рівно п'ять, що стало значним досягненням у геометрії того часу.

Правильні многогранники займають важливе місце у філософії Платона, що відображає його розуміння світу як гармонійної системи. Відповідно до його ідей, ці геометричні фігури, які стали відомими як «Платонові тіла», символізують основні елементи природи. Платон писав про них у своєму трактаті «Тімей» (360 р. до н. е.), де здійснив цікаве зіставлення кожної з чотирьох стихій – землі, повітря, води та вогню – з певним правильним многогранником. Зокрема, він асоціював землю з кубом, вважаючи, що кубічна форма відображає стабільність і твердість землі. Повітря було зіставлено з октаедром, оскільки його гладкі та легкі компоненти, на думку Платона, нагадують цю фігуру. Вода, яка має властивість текти і змінювати свою форму, відповідала ікосаедру, адже його закруглені грані символізують гладкість водяної поверхні. Нарешті, вогонь

асоціювався з тетраедром, оскільки його гострі грані нагадують про яскравість і рвучкість вогню.

Щодо п'ятого елементу, додекаедра, Платон зробив невиразне зауваження: «... його бог визначив для Всесвіту і вдався до нього в якості зразка». Аристотель, у свою чергу, ввів поняття п'ятого елемента – ефіру, стверджуючи, що небеса складаються саме з цього елемента, хоча він і не пов'язував його з платонівським п'ятим елементом.

Повний математичний опис правильних многогранників дав у XIII книзі «Початків» (близько 300 р. до н. е.) Евклід. У цій книзі детально розглядаються структура тетраедра, октаедра, куба, ікосаедра та додекаедра у вказаному порядку. Для кожного многогранника Евклід визначив відношення діаметра описаної сфери до довжини ребра. Він також стверджував, що більше не існує інших правильних многогранників.

Андреас Шпейзер підтримував думку, що побудова п'яти правильних многогранників є центральною метою дедуктивної системи геометрії, як її створили греки і яка була закріплена в «Початках» Евкліда. Варто зазначити, що значна частина інформації XIII книги могла бути запозичена з праць Теетета.

У XVI столітті німецький астроном Йоганн Кеплер намагався встановити зв'язок між п'ятьма відомими на той час планетами Сонячної системи (без урахування Землі) та правильними многогранниками. У своїй праці «Таємниця світу», опублікованій у 1596 році, Кеплер представив свою модель Сонячної системи, де п'ять правильних многогранників розташовувалися один всередині іншого, розділені серією вписаних і описаних сфер. Кожна з шести сфер відповідала одній з планет (Меркурій, Венера, Земля, Марс, Юпітер і Сатурн). Многогранники розташовувалися в наступному порядку (від внутрішнього до зовнішнього):

- октаедр;
- ікосаедр;
- додекаедр;

– тетраедр;

– куб.

Таким чином, структура Сонячної системи та відносини між відстанями планет визначалися правильними многогранниками.

Хоча Кеплер згодом змушений був відмовитися від цієї оригінальної концепції, його пошуки призвели до відкриття двох законів орбітальної динаміки – законів Кеплера, які суттєво змінили хід розвитку фізики та астрономії, а також сприяли вивченню правильних зірчастих многогранників [3, с. 115-117].

Іншим важливим внеском Кеплера в геометрію многогранників стало відкриття двох правильних зоряних тіл. Загалом їх існує чотири, два з яких були виявлені французьким математиком Луї Пуанкаре в 1809 році.

Наступним значущим кроком у вивченні многогранників став внесок Леонарда Ейлера (1707-1783) у XVIII столітті. Він встановив співвідношення між числом вершин, ребер та граней опуклого многогранника. Ця теорема, опублікована в 1758 р. в «Записках Петербурзької академії наук», поклала край хаосу в різноманітті многогранників. Теорема Ейлера стверджує, що сума граней і вершин будь-якого многогранника дорівнює числу ребер, збільшеному на два. Іншими словами,  $Грани + Вершини = Ребра + 2$  або  $G + V - P = 2$  [3, с. 111].

При спостереженні та аналізі многогранних форм можна не лише оцінити їх естетичну привабливість, але й виявити закономірності, що мають практичне застосування. Деякі з правильних і напівправильних тіл в природі проявляються у формі кристалів, тоді як інші зустрічаються у вигляді вірусів та простих мікроорганізмів.

Проте многогранники є не лише об'єктами наукових досліджень. Їх форми, які вражають своєю красою та складністю, широко використовуються в архітектурі, образотворчому та декоративному мистецтві. Так, наприклад, у картині «Таємна вечеря» Сальвадора Далі полотно має форму золотого прямокутника, а золоті прямокутники менших розмірів використовуються



для розташування фігур дванадцяти апостолів. В центрі композиції розташовано додекаедр. У картині Пабло Пікассо «Дівчинка на кулі» особливу увагу привертає чоловік, що сидить на кубі. Пікассо вдало використовує контраст: могутній атлет на стійкій основі в порівнянні з тендітною акробаткою, яка намагається втримати рівновагу на великій кулі.

Якщо звернути увагу на ранні архітектурні конструкції, побудовані з каміння, то можна помітити, що люди вже тоді свідомо обирали виразні за формою та розміром каменю. Це свідчить про те, що дизайн архітектурних споруд почав формуватися ще в давні часи.

Пірамідальна форма була популярною в архітектурі стародавнього світу. Будівництво такої споруди становило складне інженерне завдання: краї кам'яних блоків мали бути точно виміряні та вирівняні з самого початку, інакше їх верхи не зійдуться в одній точці. Британський фізик К. Мендельсон ставить важливе питання: як стародавні єгиптяни, не маючи сучасних наукових приладів, могли визначити напрямок до потрібної точки в повітрі і точно будувати в цьому напрямку? Навіть невелика помилка в два градуси могла призвести до серйозних наслідків.

Серед усіх пірамід, Піраміда Хеопса є найбільш грандіозною спорудою на Землі. Її висота сягала 147 метрів, і до кінця XIX століття вона залишалася найвищою будівлею у світі [10].

Отже, історичний аспект розвитку знань про многогранники демонструє еволюцію геометричних уявлень від давніх цивілізацій до сучасності. Ще у пізньому неоліті люди використовували многогранники у практичних завданнях та мистецтві, що свідчить про їх математичне розуміння форм. Давньогрецькі математики, зокрема Платон і Евклід, заклали основи вивчення правильних многогранників, пов'язавши їх із філософськими ідеями про природу. У XVI столітті Йоганн Кеплер спробував з'єднати геометрію з астрономією, що призвело до значних відкриттів у фізиці. Внески Леонарда Ейлера у XVIII столітті, зокрема його теорема про співвідношення між вершинами, ребрами та гранями, стали

важливим кроком у розвитку геометрії. Сьогодні знання про многогранники застосовуються в різних науках і технологіях, підкреслюючи їх значущість у людській думці та культурі.

## **1.2. Особливості викладу теми «Многогранники» в шкільних підручниках**

Тема «Многогранники» займає важливе місце у шкільному курсі геометрії, оскільки формує в учнів базові уявлення про об'ємні форми, їх властивості та структури. Вивчення многогранників сприяє розвитку просторового мислення, що є необхідним для розуміння багатьох природних і техногенних об'єктів.

У шкільних підручниках ця тема подається поступово, починаючи з основних понять і правил, які дозволяють учням зрозуміти, що таке многогранники, як їх класифікувати, та як визначати їх об'єми й площі. Особливий акцент на наочності, практичних завданнях та застосуванні знань про многогранники в реальному житті допомагає учням не лише засвоїти новий матеріал, але й відчутти його важливість і практичну значущість.

У наш час Міністерство освіти і науки України рекомендує різні підручники з геометрії для використання в загальноосвітніх навчальних закладах. Проте вчителі мають право самостійно обирати підручники, які найкраще відповідають їх потребам та стилю викладання. При виборі особливу увагу приділяють тому, як введені основні поняття, що є фундаментом для подальшого вивчення геометрії. Тому важливо, щоб визначення були зрозумілими та доступними для учнів.

Можемо сказати, що в загальному виклад теми «Многогранники» у шкільних підручниках має свої специфічні риси, що спрямовані на забезпечення доступного та послідовного засвоєння матеріалу. Основні особливості викладу можна виділити так:

– поступовість і доступність. У шкільних підручниках тема розглядається поступово, від базових понять (таких як визначення

многогранників, ребер, граней і вершин) до більш складних типів многогранників (правильних і напівправильних). Це дозволяє учням засвоювати матеріал поетапно, що сприяє кращому розумінню теми;

- візуалізація і наочність. Виклад теми супроводжується ілюстраціями, які допомагають учням візуалізувати форми многогранників;

- формування просторового мислення. Завдання на розпізнавання та побудову різних видів многогранників сприяють розвитку просторового мислення учнів, навчаючи їх орієнтуватися в просторових структурах і уявляти їх властивості;

- зв'язок із реальними об'єктами. Часто в підручниках використовуються приклади із реального життя, де зустрічаються форми многогранників (наприклад, кристали, архітектурні споруди, моделі молекул). Це допомагає учням зрозуміти практичну значущість теми та її застосування;

- логічний підхід до властивостей і теорем. Для старших класів у підручниках подається строгіший математичний апарат, що включає властивості многогранників, формули для підрахунку їх об'єму та площі поверхні, а також основні теореми. Це підводить учнів до глибшого розуміння геометричних закономірностей;

- історичний контекст. Деякі шкільні підручники включають історичні відомості про розвиток знань про многогранники, що стимулює інтерес учнів до теми і допомагає краще зрозуміти, як формувалися наукові уявлення.

Однак, аналізуючи тему «Многогранники» в шкільних підручниках, можемо відзначити, що вона висвітлюється з різних перспектив і має різний рівень складності. Так, деякі підручники обмежують тему «Многогранники» вивченням формул для обчислення площі і об'ємів простих тіл, таких як куб, паралелепіпед, піраміда та призма. А більш глибоке дослідження многогранників, яке включає аналіз їх властивостей, вивчення закономірностей їх конструкції та зв'язків з іншими геометричними фігурами, зазвичай відсутнє.

Деякі підручники намагаються підтримувати інтерес здобувачів освіти до теми через додаткові розділи, такі як «Цікаві факти про многогранники» або «Застосування тіл обертання в побуті». Ці розділи демонструють учням реальні приклади застосування теоретичних знань у їх повсякденному житті. Так, наприклад, у підручнику [Бевз, 2014] представлена історична інформація про виникнення многогранників та тіл обертання, а в підручнику [Бевз, 2015] акцентується увага на їх використанні в архітектурі та мистецтві.

Проте, окремі підручники не забезпечують достатньої доступності матеріалу для учнів. Наприклад, в окремих з них є складні формулювання теорем та визначень, що ускладнює розуміння матеріалу учнями. Також зазначимо, що деякі підручники мають не достатню кількість практичних прикладів для розвитку практичних навичок учнів.

Підручники відрізняються за обсягом і структурою матеріалу. Так, підручник [21] включає рубрику для перевірки компетентності у формі тестів, а також робить акцент на побудову перерізів призми та піраміди. Підручник [25] використовує кольорові ілюстрації геометричних фігур та містить рубрику «Головне в параграфі». На початку кожного параграфа у підручнику [29] міститься таблиця з основними визначеннями та властивостями геометричних фігур, а також розглянута теорема Ейлера, що описує зв'язок між кількістю вершин, граней та ребер многогранника. Окрім цього, окремим параграфом висвітлений «Метод слідів».

В рамках даного дослідження, проведемо аналіз підручників [29], [21] та [25] за викладом навчального матеріалу теми «Многогранники». У трьох розглянутих підручниках автори демонструють високий рівень наукового і методичного викладу, дотримуючись принципу доступності для учнів та враховуючи їх вікові особливості. Кожен з авторів має унікальний стиль написання та своє бачення в поданні визначень і основних понять, що впливає на загальне сприйняття матеріалу.

Перший підручник [29] структурує матеріал на тематичні блоки, де кожен розділ складається з підрозділів, які логічно доповнюють один одного.

В рамках цих підрозділів подаються ключові поняття, що сприяють глибшому розумінню теми. Також підручник містить як традиційні, так і оригінальні задачі, що сприяють розвитку нестандартного мислення учнів.

Другий підручник [21], на відміну від першого, пропонує значно більше додаткової інформації, що дозволяє глибше засвоїти навчальний матеріал. Цей підручник орієнтований на підготовку учнів до подальшого навчання у спеціальностях, пов'язаних з математикою. Тут задачі мають вищий рівень складності, що підходить для учнів з більшою математичною підготовкою.

Третій підручник [25] відрізняється стислим викладом матеріалу та більше нагадує методичний посібник, призначений для використання студентами у закладах вищої освіти (ЗВО). Він містить усі основні визначення та теореми з відповідними доведеннями, що може бути корисно для закріплення знань.

Зазначимо, що в кожному з цих підручників підхід до викладу матеріалу є унікальним та націлений на досягнення різних навчальних цілей. Вибір підручника має враховувати потреби та можливості здобувачів освіти, що вивчають дану тему.

Не зважаючи на всі ці відмінності, всі підручники мають спільну мету – допомогти здобувачам освіти зрозуміти теоретичні та методичні основи вивчення многогранників і тіл обертання в старшій школі. У процесі роботи з цими підручниками учні отримують необхідні знання для розв'язування задач, пов'язаних із многогранниками та тілами обертання, а також мають можливість розвивати свої когнітивні та аналітичні навички. Це дозволяє формувати у них комплексний підхід до вивчення математики, що є надзвичайно важливим для їх подальшої академічної та професійної діяльності.

Отже, тема «Многогранники» у шкільних підручниках викладається з акцентом на поступовість, доступність та наочність, що сприяє ефективному засвоєнню матеріалу учнями. Важливими аспектами є візуалізація форм

многогранників, зв'язок з реальними об'єктами та розвиток просторового мислення через практичні завдання. Деякі підручники намагаються зацікавити учнів через додаткові матеріали та історичні факти, що стимулює інтерес до теми.

Проте існують й труднощі, пов'язані з складними формулюваннями та недостатньою кількістю практичних прикладів. Відмінності у викладі та структурі матеріалу між різними підручниками дають змогу вчителям вибрати оптимальний варіант відповідно до потреб своїх учнів.

Незважаючи на ці різноманітності, спільною метою всіх підручників є забезпечення глибокого розуміння теоретичних основ многогранників та їх практичного застосування. Це створює міцний фундамент для подальшого вивчення геометрії та розвитку аналітичних навичок учнів.

### **1.3. Місце теми в навчальній програмі стереометрії**

Тема «Многогранники» займає ключове місце у навчальній програмі стереометрії, оскільки є основою для вивчення об'ємних геометричних фігур, їх властивостей та просторових взаємозв'язків. Саме вивчення многогранників допомагає учням переходити від планіметричних знань до просторового мислення, що є необхідним для розуміння складніших понять стереометрії. Завдяки цій темі учні знайомляться з поняттям об'єму, площі поверхні та властивостями просторових фігур, таких як куб, тетраедр, октаедр та інші правильні многогранники.

Аналіз діючої шкільної програми для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів свідчить, що основною метою вивчення многогранників як об'ємних геометричних фігур є не лише формування навичок обчислення практично значущих величин, таких як площа поверхні чи об'єм, але й розвиток логічного мислення та просторової уяви в здобувачів освіти. Вивчення многогранників вимагає від учнів уміння поєднувати логічні міркування з образним мисленням, що може бути складним для сприйняття.

Навіть базові властивості, такі як, наприклад, перетин діагоналей паралелепіпеда в одній точці, потребують від учнів значних зусиль для просторового уявлення, а також точного доведення для підтвердження цієї властивості.

Зауважимо, що в 11 класі на вивчення теми «Многогранники» відведено 16 годин, протягом яких учні ознайомлюються з ключовими аспектами просторових фігур. Програма включає такі розділи, як «Двогранні кути» та «Лінійний кут двогранного кута», які закладають основу для розуміння просторових кутів. Далі вивчаються «Многогранні кути», а також базові поняття про многогранники, їх елементи й опуклі форми. Розділи «Призма», «Паралелепіпед» і «Піраміда» охоплюють різновиди многогранників, зокрема пряму й правильну призми та правильну піраміду. Особливу увагу приділено обчисленню площ бічної та повної поверхонь, а також об'ємів цих фігур, що є практично важливими навичками. Вивчення правильних многогранників завершує тему, формуючи цілісне уявлення про багатогранники та їх властивості.

Даний курс стереометрії відрізняється систематизованим і узагальнюючим підходом до викладання, який спрямований на закріплення та розвиток умінь і навичок, набутих учнями у базовій середній школі. При доведенні теорем та розв'язуванні задач активно застосовуються знання з курсу планіметрії, зокрема властивості геометричних фігур, геометричні перетворення, а також методи векторів і координат. Високий рівень абстрактності матеріалу поєднується з логічною строгою подачею, що супроводжується візуалізацією на всіх етапах навчання та посиленням на практичний досвід учнів. Навички зображення основних геометричних тіл, обчислення їх площ поверхонь і об'ємів відіграють важливу роль, оскільки мають значну практичну цінність.

Відмітимо, що у пропонованих програмах збережено єдину структуру для всіх рівнів навчання, що дозволяє учням змінювати рівень підготовки, не порушуючи логіки послідовного засвоєння матеріалу. Основні теми, їх

послідовність та назви залишаються такими ж, як у програмі рівня стандарту. Проте для поглиблених рівнів зміст матеріалу розширено й доповнено, а вимоги до навчальних досягнень учнів деталізовано відповідно до державного стандарту. Матеріал, представлений у квадратних дужках, є факультативним, не обов'язковим для вивчення і не входить до обсягу тематичного контролю.

Вимоги до знань і вмінь учнів:

- розрізняти основні види многогранників та їх елементи, що є фундаментальним для подальшого розуміння структури й властивостей цих фігур;

- знати і правильно формулювати визначення двогранного кута, лінійного кута двогранного кута, многогранного кута, а також основних многогранників, зазначених у змісті програми;

- доводити властивості многогранників та знати формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди, що є важливими для практичних застосувань;

- обчислювати розміри й площі основних елементів многогранників допомагає учням закріпити знання формул і краще зрозуміти їх геометричну природу;

- впевнено застосовувати вивчені формули та властивості при вирішенні задач, що розвиває їх навички аналітичного мислення та підготовку до роботи з комплексними геометричними завданнями [10].

У старшій школі вивчення математики поділяється на три рівні: стандартний, академічний та профільний, для кожного з яких розроблено окрему програму. Програма враховує необхідність резервного часу, який вчитель може використовувати на власний розсуд: для повторення попередньо вивченого матеріалу, детальнішого опрацювання складних тем, інтеграції з профільними предметами чи виконання інших дидактичних завдань. Така гнучкість сприяє посиленню міжпредметних зв'язків, зокрема в опрацюванні геометрії через методи аналізу й алгебри та навпаки.



Приділяється значна увага застосуванню математичних понять і методів, що широко використовуються в інших науках, таких як фізика, хімія та біологія.

Методичні підходи до вивчення геометрії підбираються з урахуванням індивідуальних особливостей учнів і специфіки змісту навчального матеріалу. У програмі чітко зазначені вимоги до знань учнів, що орієнтує вчителя на досягнення поставлених цілей і полегшує вибір ефективних технологій навчання та оцінювання результатів.

Зауважимо, що основною формою організації навчального процесу залишається система уроків, яка охоплює вивчення нового матеріалу, розвиток навичок розв'язування задач, узагальнення та систематизацію знань, а також контроль і корекцію набутих знань. Методика навчання в цьому контексті орієнтована на активну самостійну діяльність учнів, індивідуальний підхід до їх освітніх потреб і застосування проблемно-пошукових методів, що сприяє глибшому розумінню і засвоєнню матеріалу.

Для підвищення ефективності уроків математики, особливо в старших класах, активно використовуються навчальні програми, такі як GRAN-3D, Maple, MathCad, а також бібліотеки електронних наочностей. Завдяки цим інструментам стає значно доступнішим вивчення складних тем геометрії, таких як побудова фігур, визначення та зображення перерізів геометричних тіл, а також розрахунок об'ємів тіл обертання. Ці програми сприяють більш наочному, динамічному та інтерактивному засвоєнню матеріалу, що підвищує інтерес учнів і сприяє розвитку їх математичних компетентностей.

З огляду на вимоги навчальної програми, різні авторські колективи підготували низку підручників з геометрії для 10-11 класів, які створені відповідно до Державного стандарту та оновлених програм для старшої школи. Вони враховують особливості навчання геометрії в 11 класі загальноосвітніх навчальних закладів. Розглянемо вивчення теми «Многогранники» у цих підручниках.

1. «Геометрія. 11 клас. Академічний рівень, профільний» автор Апостолова Г. В. [3].

Підручник призначений для викладання геометрії в 11 класах академічного та профільного рівня навчання. Він відзначається розширеним викладом теоретичного матеріалу щодо многогранників та містить історичні довідки, що дозволяють учням краще зрозуміти еволюцію понять та ідей у геометрії. У порівнянні з підручниками стандартного рівня, теоретичний матеріал подається більш структуровано.

Система вправ у підручнику є послідовною і включає завдання різного рівня складності, а також приклади розв'язання найбільш важливих задач. Після завершення кожного розділу запропоновані додаткові завдання, що охоплюють як поточну тему, так і питання з історії геометрії та раніше вивчені теми, забезпечуючи глибше розуміння матеріалу.

Особливістю підручника є раннє введення просторових фігур, включаючи многогранники, що базується на припущенні, що учні вже ознайомлені з основними поняттями просторової геометрії. Мета такого підходу – систематизувати, узагальнити та розширити знання учнів про просторові тіла, а також навчити їх використовувати ці знання для розв'язування задач.

У підручнику многогранник визначається як просторовий об'єкт, поверхня якого складається з багатокутників, які називаються гранями. Сторони цих багатокутників є ребрами, а вершини – вершинами многогранника. Особливу увагу приділено многогранним кутам, яким виділено окремий розділ, що вивчається до розділу про многогранники. Після визначення многогранників у розділі Тіла. Многогранники. Тіла обертання» подаються поняття тіл обертання, таких як призми і циліндри, піраміди і конуси, що взаємопов'язані в одній структурі. Робимо висновок, що підручник є досить складним і призначений для поглибленого вивчення теми.

2. «Геометрія. 11 клас. Академічний та профільний рівень» автори: Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. [5].

Тема «Многогранники» вивчається в розділі в другому розділі підручника,. На її вивчення відводиться 16 уроків. На відміну від попереднього підручника, автори цього видання вдало розділили вивчення многогранних кутів і многогранників від тіл обертання. Такий підхід є доречним при вивченні, оскільки він спрощує сприйняття матеріалу учнями і дозволяє їм зосередитися на основних поняттях.

Підручник містить весь теоретичний матеріал, передбачений програмою для академічного рівня, а також достатню кількість відповідних вправ. Завдання поділено на декілька категорій: для усного розв'язання, рівні А, Б, В, вправи підвищеної складності та завдання для повторення. Це дає змогу учням знайти завдання, що відповідають їх рівню підготовки. Для старшокласників, які бажають продовжити вивчення геометрії, в підручнику є додаток «Елементи геометрії тетраедра», а також список тем для самостійних наукових досліджень та перелік рекомендованої літератури.

Основна увага в підручнику відводиться для практичного застосування знань при розв'язуванні задач. Підручник не містить зайвої інформації та є доступним для учнів, що робить його чудовим ресурсом для вивчення геометрії в школі.

Отже, тема «Многогранники» займає центральне місце в навчальному курсі стереометрії, адже вона слугує основою для розуміння об'ємних геометричних фігур і їх властивостей. Вивчення цієї теми дозволяє учням перейти від планіметрії до просторового мислення, необхідного для оволодіння складнішими концепціями. Програма передбачає детальне ознайомлення з різновидами многогранників, їх елементами, а також обчисленням площі поверхні і об'єму, що є важливими навичками для практичного застосування. Формування логічного мислення та просторової уяви через цю тему сприяє глибшому розумінню геометричних понять. Таким чином, ця тема не лише сприяє засвоєнню теоретичних знань, але й розвиває аналітичні навички, які є необхідними для вирішення комплексних геометричних задач.

## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ

### 2.1. Особливості вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники»

Вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники» є важливим етапом у формуванні просторового мислення та розуміння основних принципів стереометрії. Ця тема охоплює базові поняття, такі як ребра, вершини, грані, правильні та напівправильні многогранники, а також ключові формули для обчислення площі поверхні та об'єму. Особливістю викладання теоретичного матеріалу є поєднання візуальної наочності, логічного аналізу властивостей фігур і практичних завдань, що допомагає учням краще зрозуміти та засвоїти матеріал. Викладання супроводжується ілюстраціями, розгортками й моделями многогранників, що робить абстрактні поняття доступнішими та зрозумілішими. Ретельно структурований виклад і поступове ускладнення змісту забезпечують учням глибше оволодіння основами геометрії та застосування знань у практичних задачах.

При вивченні теми «Многогранники» необхідно звернути увагу на три основні аспекти: розвиток графічних навичок учнів, розвиток просторової уяви та розвиток аналітичних навичок.

При вивченні теми «Многогранники» необхідно звернути увагу на три основні аспекти:

1. Розвиток графічних навичок. Сюди можна віднести такі правила, як побудова рисунку за допомогою одного методу проектування [9], розуміння задачі через наочні зображення та простота побудови рисунка. Ці правила є актуальними як для учнів, так і для вчителів, оскільки наочні зображення допомагають зрозуміти суть задачі та розвивати просторову уяву.

Коли учні бачать, як многогранники виглядають в тривимірному просторі, це не лише полегшує їх сприйняття математичних понять, але й підвищує мотивацію до навчання. Метод проектування, який передбачає використання однієї техніки для створення креслень, спрощує процес навчання і знижує ймовірність помилок. У результаті учні можуть зосередитися на аналітичних аспектах задачі, покращуючи свої навички вирішення геометричних проблем.

Таким чином, використання наочних зображень та зрозумілих методів побудови рисунків стає важливим інструментом у навчальному процесі, який сприяє розвитку не тільки математичних, але й критичних мислень учнів.

2. Розвиток просторової уяви. Вміння уявляти об'ємні фігури та їх взаємозв'язки є ключовим для успішного освоєння стереометрії. Розвиток просторової уяви допомагає учням орієнтуватися в тривимірному просторі, що є важливим у багатьох практичних застосуваннях математики.

3. Розвиток аналітичних навичок. Учні повинні навчитися аналізувати властивості многогранників, проводити обчислення об'єму та площі поверхні. Це формує їх логічне мислення, здатність до систематизації інформації та вирішення комплексних задач, що є важливими в багатьох сферах діяльності.

Учитель, організовуючи вивчення геометричних тіл, користується системою понять, які характеризують їх властивості. Ці поняття відображають загальні, істотні та специфічні особливості реальних об'єктів і явищ, стаючи ментальними образами навколишнього світу або нашої свідомості. У розділі стереометрії головними поняттями є: многогранник, куб, паралелепіпед, призма, піраміда, зрізана піраміда, площа поверхні та об'єм. Формування цієї системи понять відіграє важливу роль у процесі вивчення геометрії, оскільки дозволяє учням систематизувати знання і розуміти взаємозв'язки між різними геометричними об'єктами [4].

Одним із важливих умов покращення навчання геометрії в школі є зміна підходу до формування геометричних понять. Це передбачає не лише

акцент на визначеннях і властивостях, але й інтеграцію практичних завдань, які сприяють розвитку просторової уяви і аналітичних навичок. Застосування різних методів навчання, таких як візуалізація, моделювання та робота з реальними об'єктами, може значно підвищити рівень зацікавленості учнів та їх здатність до засвоєння геометричних концепцій.

Зауважимо, що під час вивчення початкових відомостей стереометрії у 10 класі, після вивчення паралельності прямих і площин, проводиться аналіз зображень просторових фігур на площині. Учні повинні вміти визначати паралельні та перпендикулярні прямі і площини, а також перпендикуляр та похилу на моделях геометричних тіл. При переході до 11 класу та вивченні геометричних тіл, важливо враховувати, що учні вже мають уявлення про призму, піраміду, циліндр, конус і кулю. Тому в цьому контексті необхідно систематизувати, поглибити і розширити їх знання, надати означення, доповнити новими поняттями (наприклад, геометричного тіла) і ввести більш точні визначення понять площі поверхні та об'єму.

Многогранники відіграють особливу роль серед усіх тіл, оскільки багато результатів для інших тіл отримуються з відповідних результатів для многогранників. Наприклад, об'єми тіл і площі їх поверхонь визначаються шляхом граничного переходу від многогранників, а також початкові відомості зі стереометрії вивчаються на основі многогранників. Окрім того, многогранники є важливими для розвитку просторової уяви учнів, адже їх властивості та характеристики стимулюють формування аналітичних і графічних навичок

Учні вже знайомі з поняттям призми з основної школи, що слугує основою для розширення знань у старшій школі через узагальнення многогранників та деталізацію завдяки введенню неопуклих і похилих призм. Поняття паралелепіпеда вводиться як підкатегорія поняття «призма», а поняття куба – як підкатегорія «прямокутного паралелепіпеда». При вивченні пірамід важливо враховувати, що многокутник може бути опуклим або неопуклим, включаючи «дірки» у своїй структурі. Визначення правильної

піраміди вимагає дотримання двох умов: основа має бути правильним багатокутником, а центр цього багатокутника повинен співпадати з основою висоти піраміди.

Обговорення різних геометричних тіл веде до виділення пірамід, у яких основою є багатокутник, а бічні грані складаються з трикутників зі спільною вершиною. Ці піраміди можуть бути трикутними, чотирикутними, п'ятикутними і навіть з основою, що не обов'язково лежить у горизонтальній площині. Вони можуть мати як прямі, так і похилі бічні грані, бути опуклими або неопуклими. Для закріплення знань учні виконують вправи на дошці, які передбачають побудову різних геометричних тіл, зокрема пірамід, що сприяє усвідомленню їх істотних властивостей.

Також важливими є вправи на конструювання моделей геометричних тіл, що дозволяє учням виявити та зрозуміти основні характеристики піраміди. Ці практичні заняття не лише підсилюють теоретичні знання, а й розвивають просторову уяву учнів, формуючи у них необхідні навички для подальшого вивчення стереометрії.

В рамках даного дослідження варто зауважити, що більшість школярів швидко засвоюють виведення формул площі поверхонь, що важливо для подальшого вивчення стереометрії. Важливо зазначити, що обчислення площі поверхні многогранників та тіл обертання зводиться до розрахунків площ їх розгортки, що підкреслює зв'язок з планіметрією. Це готує учнів до розширеного поняття площі поверхні окремих тіл.

При розв'язанні задач на знаходження площі поверхні многогранників учні використовують знання формул площ багатокутників, адже розгортка поверхні призми може бути представлена як набір багатокутників, з яких складається ця поверхня. Це робить обчислення площі призми доступним завданням для школярів. Учні також розуміють, що перпендикулярний переріз визначає висоту всіх бічних граней, і вони вже мають навички підрахунку площ багатокутників та паралелограмів. Корисно, коли на дошці

записані формули для бічної поверхні похилої та прямої призми, оскільки вони не викликають складнощів у доведенні.

Однак труднощі можуть виникнути під час обчислення площі поверхні зрізаної піраміди, оскільки площа її бічної поверхні складається з суми площ трапецій, а формула для повної поверхні включає площу ще одного многокутника.

Під час вивчення теми «Об'єми многогранників» важливо, щоб учні ознайомилися з поняттям об'єму геометричних фігур, формулами об'єму призми та піраміди, а також набули навичок знаходження об'ємів цих фігур та використання їх у розв'язанні задач. Уміння зчитувати інформацію з зображень призм і пірамід є необхідним, тому потрібно навчити учнів виконувати допоміжні планіметричні рисунки, які сприятимуть кращому розумінню теми.

Практична робота, що включає вимірювання об'ємів за допомогою пересипання або переливання, є доцільним методом для введення основних понять на рівні стандарту. Для цього можна використовувати прозорі макети прямих і похилих призм та пірамід з однаковими основами, які слугуватимуть ємностями для пересипання. Залучення таких матеріалів, як пісок або вода, а також таблиці з формулами площ многокутників та посібника з завданнями за готовими рисунками, створює практичну основу для засвоєння теми.

Оглянувши загальну методику, можемо виділити універсальний алгоритм побудови стереометричних тіл:

1. Створення попередньої розмітки: на початку необхідно зробити загальну розмітку для фігури або тіла, щоб визначити основні точки та контури.

2. Побудова видимих елементів: на цьому етапі учні повинні намалювати ті елементи, які будуть видимі у фінальному зображенні.



3. Побудова елементів, що потребують штриховки: далі слід зобразити елементи, які не є видимими, використовуючи штриховку для позначення цих частин.

4. Позначення необхідних деталей: на рисунку потрібно чітко позначити всі важливі деталі, такі як висоти, основи, грані тощо, щоб спростити подальше розуміння задачі.

5. Повернення до попередніх кроків: якщо умова задачі вимагає побудови додаткових елементів, слід повернутися до пункту 1 для коригування чи доповнення розмітки.

6. Розв'язування задачі: після виконання всіх попередніх етапів можна приступити до розв'язання задачі, використовуючи побудовані елементи та позначення.

Цей алгоритм забезпечує структурований підхід до вивчення стереометрії, допомагаючи учням розвивати їх графічні та аналітичні навички.

Зауважимо також, що у більшості випадків для розв'язання задач на стереометрію учням достатньо знати пропорції фігур і вміти виконувати паралельне проєктування. Однак, для закріплення цих навичок важливо регулярно надавати прості вправи на побудову, щоб учні могли практикувати свої вміння. Використання усних задач з готовими рисунками, особливо в поєднанні з динамічними комп'ютерними моделями, може значно підвищити ефективність навчання.

Такий підхід дозволяє учням не лише аналізувати рисунки, але й активно взаємодіяти з ними, застосовуючи еквівалентні перетворення чи створюючи нові побудови. Проте, цей метод може бути складним для засвоєння, оскільки вимагає від учнів визначення моментів, коли потрібно застосовувати додаткові елементи [8].

Розв'язання задач без попереднього розписування умов також сприяє розвитку швидкості мислення. Починати навчання доцільно з простих задач, поступово прибираючи зоровий супровід, що дозволяє учням покращувати

свої аналітичні навички і робити висновки швидше. Цей підхід не лише розвиває мисленнєві здібності, а й готує учнів до більш складних задач у майбутньому.

Отже, вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники» є складним, але надзвичайно важливим етапом у геометрії. Учні повинні усвідомити основні властивості многогранників, їх класифікацію та співвідношення між об'ємами і площами. Застосування візуальних засобів, таких як моделі або комп'ютерні програми, може значно полегшити сприйняття матеріалу.

Також важливо розвивати просторове мислення, яке дозволяє уявити многогранники в різних перспективах. Під час навчання слід акцентувати увагу на практичних прикладах, що демонструють використання многогранників у реальному житті. Цей підхід допоможе учням не лише зрозуміти теоретичні основи, але й знайти їх застосування в інших галузях знань. Таким чином, ефективне вивчення многогранників сприяє формуванню міцної математичної бази та розвитку критичного мислення.

## **2.2. Задачі з многогранниками**

Вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники» є важливим етапом у формуванні математичних знань учнів, оскільки многогранники представляють собою об'ємні фігури, які мають численні застосування в природничих і технічних науках. Теоретичний матеріал охоплює визначення, класифікацію, властивості різних типів многогранників, а також формули для обчислення їх об'єму та площі поверхні. Важливою особливістю викладання цієї теми є поєднання абстрактних понять з практичними задачами, що дозволяє учням не лише засвоювати нові знання, але й розвивати просторове мислення. Використання візуальних засобів, таких як графіки, моделі та розгортки, робить матеріал більш доступним і зрозумілим. Поглиблене вивчення многогранників допомагає учням не лише

оволодіти основами геометрії, але й підготуватися до вивчення складніших концепцій стереометрії в майбутньому.

У курсі стереометрії розв’язування задач є важливим компонентом навчальної програми. Це пояснюється тим, що без належного розв’язання достатньої кількості задач учні не зможуть якісно засвоїти матеріал. Проте, вимоги до розв’язання геометричних задач значно відрізняються в початковій та старшій школі. У старших класах учні стикаються з комбінованими завданнями, які поєднують різні типи задач — обчислення, доведення, побудову та дослідження. Крім того, зростають вимоги до логічної обґрунтованості кожного етапу розв’язання. Також збільшується використання алгебри, зокрема коефіцієнтів і тригонометричних формул, під час розв’язування задач.

Для успішного розв’язування стереометричних задач учням необхідно навчитися будувати фігури. Рисунок слугує ілюстрацією тіла, яке описується в умові задачі. Однак, оскільки деякі кутові та лінійні розміри можуть бути спотворені, зображення стереометричних фігур часто викликають труднощі та незрозуміння у багатьох учнів. Тому вчителю варто зробити зображення більш наочними, ніж точними, щоб активізувати уяву учнів. Для цього використовують моделі, які допомагають у побудові фігур. В табл.2.1 наведено декілька підходів, що можуть допомогти вчителям зробити навчання більш ефективним.

Таблиця 2.1

Методи візуалізації та моделювання в стереометрії

Метод	Опис	Переваги	Приклади використання
Фізичні моделі	Використання реальних моделей фігур з картону, пластмаси або інших матеріалів для фізичної взаємодії учнів.	Покращує розуміння просторових відносин; активує тактильні відчуття.	Моделі куба, призми, піраміди, виготовлені з картону або пластика.
Візуалізація за допомогою програм	Використання комп’ютерних програм для 3D-моделювання, що допомагає учням уявити фігури та змінювати кути та масштаби.	Дозволяє маніпулювати фігурами; розвиває навички роботи з комп’ютером.	Програми на кшталт Tinkercad, SketchUp або AutoCAD.

Продовження табл.2.1

Анімації та відео	Інтерактивні анімації, що демонструють зміни фігур при перетвореннях, допомагаючи зрозуміти об'єм та площу.	Візуалізація динаміки; допомагає у зрозумінні складних концепцій.	Відео-уроки на YouTube або анімації в освітніх платформах (Khan Academy).
Графічні програми	Використання програм для креслення, таких як GeoGebra, для самостійного створення та модифікації стереометричних фігур.	Стимулює творчість; дозволяє вивчати матеріал на практиці.	Створення 3D-фігур і графіків у GeoGebra.
Групові проекти	Спільна робота над проектами з побудови та вивчення стереометричних фігур, що заохочує обмін ідеями та творчість.	Розвиває командну роботу; покращує комунікаційні навички.	Проекти з виготовлення великих моделей фігур або дослідження об'ємів.

*Джерело:* складено автором самостійно

На нашу думку, ці методи можуть зробити навчання стереометрії більш захоплюючим і зрозумілим для учнів, заохочуючи їх розвивати просторову уяву.

Зазначимо, що при розв'язанні задач та доведенні теорем у стереометрії зазвичай використовують графічні зображення відповідних фігур на площині, а не просторові моделі. Цей підхід називається графічною моделлю. Щоб оволодіти розв'язуванням стереометричних задач, потрібно вміти правильно зображати просторові фігури на площині, наприклад, на аркуші паперу або дошці.

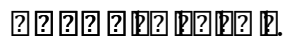
Для створення таких зображень зазвичай застосовують два методи: паралельну проекцію та центральну проекцію (перспективу). Хоча центральна проекція більше відповідає людському сприйняттю, її використання в школі є складним, оскільки рисунок в стереометрії виконує допоміжну роль. Тому паралельна проекція є більш доцільною для навчання, адже дозволяє швидко та легко зображувати фігури на площині.

При створенні графічних зображень важливо, щоб вони були точними, наочними, простими та швидкими у виконанні. Паралельна проекція є ідеальним варіантом для задоволення цих вимог.

Варто також відмітити, що з моменту впровадження обов'язкового ЗНО у 2008 році в тестах було близько 100 завдань на тему «Многогранник». Переважна більшість з них містила варіанти вибору з однією правильною відповіддю. На відміну від теми «Піраміда», у завданнях на встановлення відповідностей частіше зустрічається тема «Призма». Однак завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю найчастіше пов'язані з темою «Піраміда». Завдання з цієї теми можуть бути виконані в різних форматах, включаючи завдання з вибором однієї правильної відповіді, завдання на встановлення відповідності, неструктуровані завдання відкритої форми з короткою відповіддю та завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Для оцінки розуміння термінів, що стосуються многогранників та їх елементів, автори завдань ЗНО пропонують розв'язувати задачі, які передбачають визначення сусідніх або протилежних ребер, сусідніх або протилежних граней, а також паралельних і мимобіжних прямих у многограннику.

Розглянемо більш детально деякі із завдань із ЗНО з теми «Многогранники»:

*Завдання 1.* На рисунку (рис. 2.1) зображено куб 

Установіть відповідність між парою прямих (1–4) та їх взаємним розташуванням (А–Д) [17].

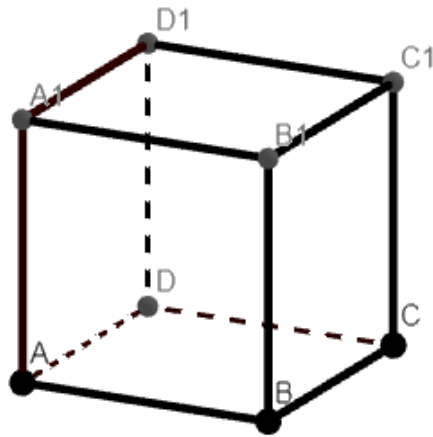


Рис. 2.1. Вихідний куб

Пара прямих		Взаємне розташування	
1	AC і CC <sub>1</sub>	А	Прямі паралельні
2	AB <sub>1</sub> і CD <sub>1</sub>	Б	Прямі мимобіжні
3	AC і CD <sub>1</sub>	В	Прямі перетинаються і утворюють прямий кут
4	AB і C <sub>1</sub> D	Г	Прямі перетинаються і утворюють кут 45 <sup>0</sup>
		Д	Прямі перетинаються і утворюють кут 60 <sup>0</sup>

Додатково учасникам надаються завдання, пов'язані з розгорткою многогранників. У цих завданнях потрібно визначити кількість ребер і вершин многогранника, з'ясувати, якому типу многогранника відповідає запропонована розгортка, а також обчислити об'єм, бічну та загальну площу поверхні тіла, для якого надано розгортку.

*Завдання 2.* На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників (рис. 2.2).

Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди (у см<sup>2</sup>) [16].

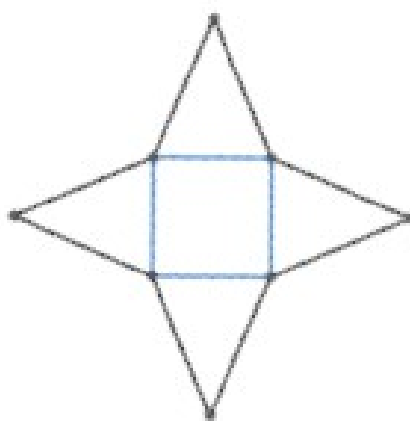


Рис. 2.2. Вихідна розгортка піраміди

А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3}$	100	$400\sqrt{3}$	$100 \cdot (1 + \sqrt{3})$	200

Такі завдання дають можливість перевірити знання учасників з цієї теми та їх здатність використовувати отримані знання в практичних ситуаціях. Успішне розв'язання таких завдань свідчить про знання термінології, розуміння властивостей многогранників та їх елементів, а також про здатність до логічного мислення.

Після завершення навчання в школі учень повинен мати певні компетенції, серед яких математична є основою для різних видів діяльності. Тому на зовнішньому незалежному тестуванні часто представлені завдання прикладного характеру, які дають можливість перевірити, наскільки учні здатні використовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях.

*Завдання 3.* На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють 40 см, 40 см, 50 см (рис. 2.3).

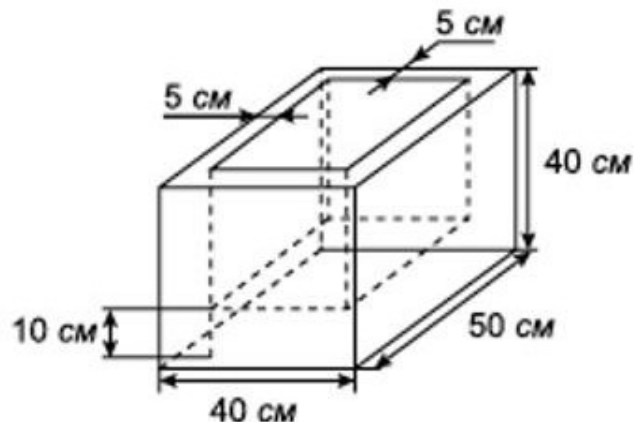


Рис. 2.3. Вихідний прямокутний паралелепіпед

Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об’єм бетону ( $y \text{ м}^3$ ) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утратою бетону під час виготовлення знехтуйте [ЗНО-2014].

А	Б	В	Г	Д
$0,32 \text{ м}^3$	$0,33 \text{ м}^3$	$0,36 \text{ м}^3$	$0,44 \text{ м}^3$	$0,8 \text{ м}^3$

Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об’єм бетону ( $y \text{ м}^3$ ) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утратою бетону під час виготовлення знехтуйте [16].

Це завдання має практичне застосування і націлене на перевірку вміння розв’язувати стереометричні задачі за допомогою формули об’єму прямокутного паралелепіпеда. На рисунку показана ємність для квітів, яка має форму прямокутного паралелепіпеда, з якого вирізано менший паралелепіпед.



Отже, об'єм цієї ємності шукатимемо як різницю об'ємів двох

паралелепіпедів. Об'єм паралелепіпеда знаходиться за формулою  $V = abc$  де

$a, b, c$  - виміри паралелепіпеда.

Виміри першого паралелепіпеда задані: 40 см, 40 см, 50 см, а другого (порожня частина) знаходимо:

$$40 - 10 = 30 \text{ см};$$

$$40 - 5 - 5 = 30 \text{ см};$$

$$50 - 5 - 5 = 40 \text{ см}.$$

Обчислюємо об'єм однієї ємності:  $V_1 - V_2 = 40 \cdot 40 \cdot 50 - 30 \cdot 30 \cdot 40 =$

$$4000 \cdot (20 - 9) = 44000 \text{ см}^3.$$

Тоді об'єм 10 таких ємностей дорівнює  $440\,000 \text{ см}^3$  або  $0,44 \text{ м}^3$ .

Тут враховано, що  $1 \text{ м} = 100 \text{ см}$ ,  $1 \text{ м}^3 = 1\,000\,000 \text{ см}^3$ .

Отже, задачі з многогранниками є важливою складовою навчання геометрії, оскільки вони допомагають здобувачам освіти засвоїти основні поняття та властивості об'ємних фігур. Розв'язування таких задач сприяє розвитку просторового мислення, логічного аналізу та здатності до побудови геометричних фігур. Включення практичних завдань, пов'язаних із реальними ситуаціями, робить матеріал більш цікавим та зрозумілим для

учнів. Використання візуалізацій, моделей та комп'ютерних програм допомагає краще усвідомити складні концепції. Завдання з многогранниками не лише оцінюють знання термінології, а й стимулюють розвиток аналітичних навичок. Отже, ефективне викладання цієї теми сприяє підготовці учнів до подальшого вивчення стереометрії та застосування математичних знань у практичних ситуаціях.

### **2.3. Види і роль наочних засобів та інноваційних технологій при вивченні многогранників**

Наочні засоби та інноваційні технології відіграють ключову роль у вивченні теми «Многогранники», оскільки вони забезпечують візуалізацію абстрактних математичних понять і сприяють більш глибокому розумінню просторових властивостей фігур. Дана тема, як ніяка інша тема шкільного курсу стереометрії, за винятком, можливо, вивчення круглих тіл, дає широкі можливості використання різних наочних засобів.

Наочність є обов'язковою якістю будь-якого навчання. Шляхом цілеспрямованих дій, ми формуємо у свідомості учня деяку систему понять, відносин між ними. Для того щоб навчання було успішним, необхідно, щоб учень міг сприймати цю систему і працювати з нею. Але для цього, у свою чергу, необхідно дати учневі деяку її матеріальну модель. Для цього застосовують наочні засоби навчання. Наприклад, якщо вивчається поняття піраміди, то такою моделлю може бути:

1) словесний опис (визначення). Піраміда – це тривимірна геометрична фігура, яка має одну основу (многокутник) і три або більше бічних граней, які є трикутниками і сходяться в одній точці, званій вершиною піраміди;

2) об'ємна модель піраміди. Це може бути каркасна модель, виготовлена з картону або пластикових трубок, або ж суцільна модель, виконана з глини чи іншого матеріалу. Така модель допомагає учням зрозуміти просторову структуру фігури;

3) розгортка піраміди. Навчальні матеріали можуть містити розгортку піраміди, що дозволяє учням бачити, як елементи піраміди (основа та бічні грані) взаємодіють між собою;

4) зображення піраміди. Вчитель може використовувати зображення піраміди або її розгортки на дошці, папері або екрані проектора. Візуалізація допомагає закріпити знання і спростити сприйняття геометричних відносин

[35]. Всі перераховані об'єкти є матеріальними моделями, з тієї чи іншої сторони відбивають поняття піраміди.

Відмітимо, що основними наочними засобами при вивченні многогранників є об'ємні моделі, які можуть бути виготовлені з різних матеріалів, відповідно до навчальних цілей. Промислові моделі не завжди задовольняють потреби навчального процесу, тому вчителі часто звертаються до самостійного виготовлення моделей, залучаючи до цього учнів. Це підходить не лише у випадках відсутності готових моделей, але й коли наявні моделі не забезпечують ясного сприйняття матеріалу.

Покращуючи моделі, вчитель заохочує учнів до створення нових варіантів, що призводить до глибшого розуміння та закріплення знань. Залучення учнів до практичного виготовлення моделей також допомагає їм застосовувати теоретичний матеріал на практиці. Як фабричні, так і саморобні моделі можна використовувати для введення нових понять, доведення теорем та вирішення задач, що робить навчання більш інтерактивним і цікавим. Таким чином, використання об'ємних моделей сприяє розвитку критичного мислення та творчого підходу до навчання геометрії.

При вивченні многогранників ефективним засобом навчання є також й використання робочих і довідкових таблиць. Робочі таблиці сприяють організації активної розумової діяльності учнів, допомагаючи їм засвоювати новий теоретичний матеріал та закріплювати знання. Наприклад, при введенні поняття «піраміда» можна застосувати таблицю, що містить зображення піраміди, її основних елементів і різновидів, що сприяє кращому розумінню теми.

На відміну від робочих, довідкові таблиці призначені для тривалого запам'ятовування і впливають на зоровий апарат учнів. Основною їх властивістю є дидактична спрямованість, адже вони сприяють запам'ятовуванню основних фактів, формул і графіків. Завдяки візуальному представленню матеріалу, довідкові таблиці полегшують процес

запам'ятовування, що робить навчання більш структурованим і ефективним. Таким чином, комбінування робочих і довідкових таблиць у навчанні геометрії допомагає створити комплексний підхід до вивчення многогранників, який стимулює активність і зацікавленість учнів.

Великі можливості виховання самостійності та активності відкриваються при використанні зошитів з друкованою основою. Зошити, які стають дедалі популярнішими в навчальних закладах, призначені для організації самостійної роботи учнів на етапах закріплення та повторення вивченого матеріалу. Однією з основних переваг друкованих зошитів є їх здатність економити навчальний час, адже учні звільняються від рутинного механічного переписування тексту завдань. Це дозволяє їм зосередити увагу на самих завданнях і проблемах, що розвиває їх аналітичні навички та критичне мислення.

Зошити з друкованою основою також сприяють індивідуалізації навчального процесу, адже учні можуть працювати в своєму темпі, що підвищує їх мотивацію та залученість. Вони заохочують до активного навчання, оскільки вимагають від учнів ініціативи та самостійності у виконанні завдань. Завдяки цьому, зошити стають не лише інструментом для закріплення знань, але й важливим засобом розвитку навичок самостійної роботи, що є критично важливим для успішного навчання [36; 37].

Відмітимо також, що на сьогоднішній день існує безліч інноваційних програмних засобів, спеціально розроблених для вивчення математики. До таких програм належать DERIVE, EUREKA, GRAN-3D, Maple, MathCAD, MathLab, Maxima, Numeri, Reduce та інші. В особливості, під час вивчення курсу геометрії у школах, корисно застосовувати програмне забезпечення GRAN-3D, Maple та MathCAD. Ці інструменти призначені для аналізу функціональних залежностей та статистичних закономірностей, що робить їх надзвичайно цінними для учнів.

Завдяки можливостям моделювання, вказані програмні засоби дозволяють розв'язувати широкий спектр задач, створюючи візуалізації

об'єктів, що з'являються в умові задачі. Це не лише покращує сприйняття матеріалу, але й сприяє глибшому розумінню геометричних концепцій. Використання таких програм також розвиває у школярів навички роботи з комп'ютерними технологіями, що є важливим аспектом сучасної освіти. В цілому, інноваційні програмні засоби забезпечують інтерактивний та продуктивний підхід до вивчення математики, підвищуючи ефективність навчального процесу.

Нові можливості для наочної демонстрації графіків і математичних моделей відкриває використання 3D-ручок і 3D-друку в навчальному процесі [15]. Ці технології дозволяють учням не лише бачити, але й взаємодіяти з об'ємними фігурами, що значно полегшує розуміння складних математичних концепцій, таких як рівняння та графіки. Завдяки 3D-друку стало можливим створення наочних посібників для уроків геометрії, які допомагають учням краще сприймати матеріал. Наприклад, моделі многогранників можуть бути виготовлені з різних матеріалів, що робить їх більш доступними для використання в класі. Це не лише підвищує інтерес до навчання, але й сприяє розвитку просторового мислення та креативності.

Важливо усвідомлювати, що наочні засоби відіграють ключову роль у навчальному процесі не лише на етапі початкового засвоєння знань, а й на всіх його стадіях. Вчитель, готуючись до уроку, має вибрати такі засоби, які сприятимуть найкращому сприйняттю матеріалу учнями. Наприклад, для введення нового поняття, такого як приватний вид многогранника, особливо корисними є об'ємні моделі або комп'ютерні зображення, які дозволяють наочно уявити структуру та характеристики фігури [19].

При закріпленні вивченого матеріалу вчитель може використовувати прості плоскі креслення або словесні описи, які допомагають учням систематизувати знання та застосувати їх на практиці. Ключовим є те, що матеріальна модель має бути не лише точною у відображенні поняття, а й доступною для сприйняття, що дозволяє учням легко взаємодіяти з матеріалом [35].

Варто також згадати й віртуальну (VR) та доповнену (AR), які відкривають нові можливості для вивчення многогранників. Так, віртуальна реальність дозволяє учням зануритися у тривимірний світ, де вони можуть взаємодіяти з моделями многогранників. Наприклад, учні можуть обертати многогранники, змінювати їх розмір та вивчати їх властивості, такі як площа поверхні та об'єм, у реальному часі. Це надає можливість вивчати геометрію в інтерактивному форматі, що сприяє глибшому розумінню та запам'ятовуванню матеріалу.

Доповнена реальність надає можливість накладати цифрові моделі многогранників на реальне середовище через камеру смартфона або планшета. Учні можуть бачити та взаємодіяти з многогранниками в своєму класі або вдома, що робить навчання більш захоплюючим. AR-технології можуть також містити додаткові матеріали, такі як відео або анімації, що пояснюють характеристики многогранників.

В табл. 2.2 згрупуємо основні види наочних засобів та інноваційних технологій при вивченні многогранників, а також визначимо їх роль у навчальному процесі.

Таблиця 2.2

Види наочних засобів та інноваційних технологій при вивченні многогранників і їх роль у навчальному процесі

Види наочних засобів	Опис	Роль у навчанні
Моделі многогранників	Паперові та пластикові моделі	Допомагають візуалізувати структуру многогранників
Схеми та рисунки	Двовимірні рисунки	Пояснюють характеристики фігур і їх взаємозв'язки
	Графічні програми	
Візуалізаційні засоби	3D-принтери	Створюють реальні моделі для маніпуляцій
	Картонні конструктори	
Комп'ютерні програми	3D-візуалізація	Дозволяють інтерактивно вивчати властивості фігур
	Геометричні симулятори (GeoGebra)	
Адаптивне навчання	Онлайн-ресурси з інтерактивними завданнями	Спонукають до самостійної роботи в індивідуальному темпі
Віртуальна та доповнена реальність	VR-окуляри для взаємодії з 3D-фігурами	Створюють занурення у тривимірний простір фігур

*Джерело:* складено автором самостійно

Отже, наочні засоби та інноваційні технології відіграють важливу роль у вивченні многогранників, оскільки вони сприяють візуалізації абстрактних математичних концепцій, що полегшує їх засвоєння учнями. Використання об'ємних моделей, розгорток, графіків та комп'ютерних візуалізацій дозволяє краще зрозуміти просторові властивості фігур і їх взаємозв'язки.

Інтерактивні технології, такі як 3D-друк і програмне забезпечення для моделювання, роблять навчальний процес більш захопливим і ефективним, заохочуючи учнів до активної участі та експериментування. Залучення учнів до створення моделей сприяє розвитку критичного мислення та творчого підходу до навчання. Окрім того, комбінування різних видів наочних засобів, таких як робочі та довідкові таблиці, покращує структурування навчального матеріалу і підтримує запам'ятовування.

Таким чином, впровадження наочних засобів і сучасних технологій у навчання геометрії не лише підвищує зацікавленість учнів, а й сприяє глибшому розумінню складних концепцій.



### РОЗДІЛ 3. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ»

Педагогічний експеримент у вивченні теми «Многогранники» є важливим інструментом для вдосконалення методів навчання та оцінювання ефективності різних підходів у викладанні геометрії. У контексті сучасної освіти, де акцент робиться на інтерактивність, практичність та індивідуалізацію навчання, експеримент дозволяє перевірити, як нові педагогічні технології і методики можуть вплинути на засвоєння учнями складних геометричних концепцій.

Для проведення експерименту були обрані два класи: 11-А та 11-Б Хмельницької школи №2. Важливо зазначити, що рівень успішності учнів з математики в обох класах був практично однаковим, що забезпечило об'єктивність порівняння. Це дозволило зосередитися на впливі нових методів навчання на засвоєння теми «Многогранники».

Для вивчення ефективності впровадження інформаційних технологій у навчальний процес контрольні роботи стали основним інструментом оцінювання. На початку експерименту була проведена нульова контрольна робота, метою якої було виявлення початкового рівня знань учнів (табл.3.1).

Таблиця 3.1

#### Результати контрольної роботи

Бали	Класи	
	11-А Експериментальний	11-Б Контрольний
	Кількість учнів	
	32	32
	Результати контрольної роботи	
4-6	12	16
7-9	14	12
10,11	6	4
12	0	0

Ця контрольна робота дозволила зафіксувати стартові результати та визначити, які аспекти матеріалу потребують особливої уваги під час

навчання. Зібрані дані стали базою для подальшого аналізу, що сприяло формуванню обґрунтованих висновків щодо ефективності запропонованих методів навчання.

Результати контрольної роботи свідчать про те, що рівень успішності учнів у класах 11-А (експериментальний) та 11-Б (контрольний) був досить схожим, із незначними відмінностями у розподілі балів. У класі 11-А більшість учнів отримали бали в діапазоні 7-9, тоді як у класі 11-Б спостерігалася більша кількість учнів із балами 4-6 (рис.3.1).

### Рис.3.1. Результати контрольної роботи

*Джерело:* складено автором за результатами експерименту

Обидва класи не мали учнів, які набрали максимальні 12 балів, що може свідчити про загальну складність завдань або недоліки в підготовці. Кількість учнів, які отримали бали в діапазоні 10-11, була невеликою в обох класах, що вказує на те, що контрольна робота була досить складною для всіх учнів, а відмінності в успішності між класами залишалися мінімальними.

Вивчаючи тему «Многогранники» у 11-А класі на уроках було застосовано інформаційні технології, а саме, використання програми GRAN-3D (Додаток 3).

Під час проведення уроків у рамках педагогічного експерименту учні виявили значний інтерес до матеріалу, намагалися самостійно зобразити многогранники та розв'язувати відповідні задачі. Деякі з них зробили відкриття, що можуть уявити, наприклад, куб, вписаний у піраміду, чи циліндр, вписаний у призму, і так далі. Учні ставили багато запитань, що сприяло розвитку їх абстрактного мислення. У дітей також розвинулася уява про зовнішні предмети та їх положення у просторі. Окремі учні зробили висновок, що геометрія виявилася для них цікавішою, ніж алгебра.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у вигляді тестів в 11-А та 11-Б класах. Результати підсумкової контрольної роботи

виявились наступними (табл.3.2).

Таблиця 3.1

Результати підсумкової контрольної роботи

Бали	Класи	
	11-А Експериментальний	11-Б Контрольний
	Кількість учнів	
	32	32
	Результати контрольної роботи	
4-6	7	14
7-9	16	13
10,11	8	5
12	1	0

Результати підсумкової контрольної роботи вказують на значні зміни в успішності учнів класів 11-А та 11-Б. У класі 11-А (експериментальному) кількість учнів, які отримали бали 4-6, зменшилася до 7, що свідчить про покращення загального рівня знань у порівнянні з початковими результатами.

У той же час у класі 11-Б (контрольному) кількість учнів з такими ж балами зросла до 14. Клас 11-А також показав збільшення кількості учнів, які отримали 10-11 балів (8 учнів), порівняно з 6 учнями на початку, а один учень набрав максимальні 12 балів, чого раніше не було. У класі 11-Б кількість учнів з балами 10-11 також зросла, але до 5 учнів, і жоден учень не досяг 12 балів. Ці результати свідчать про позитивний вплив використання інформаційних технологій на рівень успішності учнів у класі 11-А.

Для кращої наочності побудуємо діаграму (рис.3.2).

Результати підсумкової контрольної роботи вказують на те, що впровадження інформаційних технологій, зокрема програми GRAN-3D, суттєво сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу учнями. Завдяки цьому зменшується час, необхідний для виконання завдань, і учні можуть розв'язувати більшу кількість вправ. Використання цієї програми позитивно вплинуло на розвиток логічного та абстрактного мислення, а також підвищило зацікавленість учнів у предметі.

### Рис.3.2. Результати підсумкової контрольної роботи

Однак, поряд із перевагами, існують і певні недоліки. Наприклад, учні стали рідше виконувати геометричні побудови вручну, використовуючи традиційні інструменти, такі як лінійка, олівець та циркуль. Це спостереження було враховано при розробці уроків: учням надали можливість створювати аналогічні многогранники у зошитах, використовуючи побудови, виконані за допомогою GRAN-3D. Такий підхід дозволяє учням поєднувати сучасні технології з класичними методами, що забезпечує комплексний розвиток їх навичок.

Отже, в ході педагогічного експерименту, що зосереджувався на вивченні теми «Многогранники», було виявлено суттєві позитивні зміни в успішності учнів експериментального класу (11-А).

Так, використання інформаційних технологій, зокрема програми GRAN-3D, сприяло зменшенню кількості учнів з низькими балами (4-6) до 7 осіб, у той час як у контрольному класі (11-Б) цей показник зріс до 14.

Кількість учнів, які отримали бали 10-11, зросла до 8 у класі 11-А, і один учень досяг максимальних 12 балів. Учні виявили значний інтерес до теми, активно ставили запитання та досліджували геометричні концепції, що підвищило їх мотивацію.

Однак спостерігалось зниження навичок виконання геометричних побудов вручну. Це свідчить про необхідність поєднання сучасних технологій з традиційними методами навчання для забезпечення комплексного розвитку учнів. Загалом, результати експерименту підтвердили ефективність інтеграції новітніх технологій у навчальний процес з метою покращення засвоєння матеріалу.

## ВИСНОВКИ

Таким чином, дослідивши особливості методики вивчення теми «Многогранники», можемо зробити наступні висновки:

1. Історичний розвиток знань про многогранники демонструє еволюцію геометричних уявлень від стародавніх цивілізацій до сучасної науки. Перші згадки про ці геометричні форми можна знайти в артефактах пізнього неоліту, що свідчить про їх роль у культурному житті давніх людей. Давньогрецькі математики, зокрема Платон і Евклід, заклали основи вивчення правильних многогранників, які стали важливими символами в їх філософії та науці. У середні віки та епоху Відродження інтерес до многогранників зріс, що призвело до нових відкриттів і зв'язків з природою, зокрема в працях Леонардо да Вінчі. Протягом XVIII–XX століть, з розвитком алгебри та топології, знання про многогранники суттєво розширилися. Сьогодні многогранники вивчаються не лише в геометрії, але й знаходять застосування в архітектурі, природничих науках та технологіях, підкреслюючи їх універсальність і важливість для людської діяльності.

2. Тема «Многогранники» в шкільних підручниках геометрії викладається з урахуванням поступовості та доступності, що дозволяє здобувачам освіти крок за кроком освоювати базові поняття і складніші ідеї. Значна увага приділяється візуалізації та наочності, що допомагає учням уявити різноманітні форми многогранників і зрозуміти їх властивості. Підручники активно використовують приклади з реального життя, що демонструє практичну значущість теми. Окрім того, важливим аспектом є логічний підхід до викладу властивостей і теорем, що забезпечує глибше розуміння геометричних закономірностей.

Водночас варто зазначити, що рівень складності матеріалу може варіюватися, що впливає на його сприйняття учнями. Деякі підручники пропонують додаткові розділи, які підвищують інтерес до теми, однак є й такі, що не забезпечують достатньої доступності для сприйняття.

3. Тема «Многогранники» займає центральне місце в навчальній програмі стереометрії, адже вона формує базу для розуміння об'ємних геометричних фігур і їх властивостей. Вивчення цієї теми сприяє розвитку просторового мислення учнів, що є критично важливим для освоєння складніших аспектів стереометрії. Вона охоплює основні поняття, такі як об'єм, площа поверхні та різноманітні види многогранників, що готують учнів до практичного застосування отриманих знань. Окрім того, вивчення многогранників сприяє розвитку логічного мислення та аналітичних навичок, оскільки вимагає поєднання теоретичних знань з практичними завданнями. Зважаючи на різноманітність підходів у викладанні та використанні сучасних технологій, ця тема забезпечує активну участь учнів у навчальному процесі.

4. Вивчення теоретичного матеріалу про многогранники має свої особливості, що потребують уваги педагогів та учнів. По-перше, важливо акцентувати на візуалізації форм, оскільки многогранники можуть бути складними для сприйняття в абстрактній формі. Використання моделей та графіки допомагає краще зрозуміти властивості та класифікацію многогранників. По-друге, необхідно підкреслити зв'язок між многогранниками та іншими математичними поняттями, такими як площа, об'єм і симетрія. Це сприяє інтеграції знань і формуванню цілісного розуміння предмету. Також важливими є практичні завдання, які стимулюють креативне мислення та розвивають просторову уяву. Завдяки комплексному підходу до вивчення цієї теми, учні можуть досягти глибшого розуміння не лише многогранників, а й математики загалом.

5. Задачі з многогранниками є невід'ємною частиною навчального процесу з геометрії, оскільки вони допомагають учням засвоїти основи стереометрії та розвивати просторове мислення. Використання різних типів задач, таких як обчислення об'ємів, площ поверхні, а також завдань на визначення властивостей многогранників, дозволяє учням інтегрувати теоретичні знання з практичними навичками. Візуалізація через графічні

моделі та фізичні моделі допомагає краще зрозуміти складні геометричні поняття, що сприяє підвищенню інтересу до теми. Завдання з многогранниками також відображають вимоги зовнішнього незалежного тестування, що надає учням можливість перевірити свої знання в практичних умовах. Через комбіновані задачі, які поєднують різні види діяльності, учні розвивають логічне мислення і здатність до аналітичного вирішення проблем.

6. Наочні засоби та інноваційні технології відіграють важливу роль у вивченні многогранників, оскільки вони сприяють візуалізації абстрактних математичних концепцій, що полегшує їх засвоєння учнями. Використання об'ємних моделей, розгорток, графіків та комп'ютерних візуалізацій дозволяє краще зрозуміти просторові властивості фігур і їх взаємозв'язки. Інтерактивні технології, такі як 3D-друк і програмне забезпечення для моделювання, роблять навчальний процес більш захопливим і ефективним, заохочуючи учнів до активної участі та експериментування. Залучення учнів до створення моделей сприяє розвитку критичного мислення та творчого підходу до навчання. Окрім того, комбінування різних видів наочних засобів, таких як робочі та довідкові таблиці, покращує структурування навчального матеріалу і підтримує запам'ятовування.

7. Педагогічний експеримент підтвердив позитивний вплив інформаційних технологій, зокрема програми GRAN-3D, на успішність учнів у вивченні теми «Многогранники». Зменшення кількості учнів з низькими балами та збільшення кількості тих, хто отримав високі оцінки, свідчить про ефективність інтерактивних методів навчання. Учні проявили значний інтерес до теми, що підвищило їх мотивацію до навчання. Проте зниження навичок виконання геометричних побудов вручну вказує на необхідність поєднання сучасних технологій з традиційними методами. Загалом, інтеграція новітніх технологій у навчальний процес може суттєво поліпшити засвоєння матеріалу, однак важливо зберігати баланс між новими та традиційними підходами.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аксютіна І. В., Шукліна Ю. А. Методика формування просторової уяви учнів на факультативних заняттях. *Інженерно-будівельний вісник Прикаспію*. 2013. №1(4). С. 49–64.
2. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: Книжка для вчителя. Київ: Рад. шк., 1991. 128 с.
3. Апостолова Г. В. Геометрія. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академічний рівень, профільний рівень. Київ: Генеза, 2011. 304 с.
4. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач: Посібник для вчителя. Київ: Рад. шк., 1988. 192 с.
5. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. Геометрія 11 кл.: підруч.для загальноосвіт.навч.закл.: академ. рівень, профіл. рівень. Київ: Генеза, 2011. – 256 с.
6. Бевз В. Ф., Бевз В. О., Глазова О. В. Геометрія. 7 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2014. 256 с.
7. Бевз В. Ф., Бевз В. О., Глазова О. В. Геометрія. 8 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза, 2015. 256 с.
8. Беседін Б. Б., Смоляков О. В. Використання наочності на уроках математики. *Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ*. 2017. №7. С. 103–109.
9. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. 464 с.
10. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Геометрія. 11 клас. Академічний рівень, профільний рівень. Київ: Зодіак-ЕКО, 2011. 180 с.
11. Василенко А. В. Моделювання як засіб просторового мислення. *Викладач XXI століття*. 2012. №3. С. 141–144.
12. Генденштейн Л.Е., Єршова А.П. Наочний довідник з геометрії. Харків–Тернопіль: Гімназія, 1997. 96 с.



13. Гириловська І.В. Формування в учнів умінь будувати перерізи многогранників. *Рідна школа*. 2003. №2. С. 50-52.
14. Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти.  
URL: [www.mon.gov.ua](http://www.mon.gov.ua)
15. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Київ: Техніка, 2000. 256 с.
16. Завдання з математики (ЗНО-2014). URL:  
<https://zno.osvita.ua/mathematics/138/>
17. Завдання з математики (ЗНО-2019). URL:  
<https://zno.osvita.ua/mathematics/346/>
18. Заїкіна Т. В. Формування просторової уяви в комп'ютерному предметному середовищі для досягнення високого рівня геометричній підготовки учнів. URL:  
[http://www.rusnauka.com/7\\_PNI\\_2015/Pedagogica/5\\_188725.doc.htm](http://www.rusnauka.com/7_PNI_2015/Pedagogica/5_188725.doc.htm)
19. Застосування 3D принтерів в навчальних закладах. URL:  
<https://dixi.education/using-3d-printers/>
20. Іваненко М.О., Філон Л. Г. Вивчення геометричних тіл у профільній школі з використанням інтерактивних технологій навчання. *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (7 грудня 2023 р., м. Чернігів)*. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2023. С. 102–103.
21. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: (проф. рівень) : підруч. для 11-го закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 288 с.
22. Кнопський В.М., Скопец З.А., Ягодовський М.І. Геометрія: Навчальний посібник для 10 класу середньої шк. Київ: Рад. шк., 1978. 160 с.
23. Ковтунович В.В., Павелків О.М. Методика вивчення теми «Многогранники» у класах академічного рівня. Наука, освіта, суспільство очима молодих : матеріали VI Міжнар. наук.–практ. конф. студентів та

молодих науковців. Ч. 1. Психолого-педагогічний напрям. Рівне, 2013. С. 97–99.

24. Кушнір І.А. Трикутник і тетраedr у задачах: Для ст. шк. віку. Київ: Рад. шк., 1991. 208 с.

25. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 240 с.

26. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

27. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

28. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

29. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.

30. Орач Б. Побудова перерізів многогранників. *Математика*. 2004. № 27-28. С. 41–49.

31. Прус А. В., Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир: «Рута», 2011. 388 с.

32. Роганін О.М. Геометрія. 11 клас: Плани-конспекти уроків. Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2003. 256 с.

33. Руденко В.О. Правильні многогранники. Кількісні характеристики правильних многогранників: 11-клас. *Математика в школах України: Науково-методичний журнал*. 2006. №28. С.20-25.

34. Саніна Є. І., Гришина О. А. Розвиток просторового мислення в процесі навчання стереометрії. *Вісник РУДН*. 2013. №4. С. 99–102.

35. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак ЕКО, 2000. 512 с.

36. Тарасенкова Н. А. Експрес-контроль з геометрії для 11 класу (академічний рівень): Метод. посібник / за ред. Н.А. Тарасенкової, М. І. Бурди, І. М. Богатирьова, О. П. Воловик, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ: Освіта, 2011.

37. Тарасенкова Н. А. Самостійні та контрольні роботи з геометрії для 11 класу (академічний рівень): Метод. посібник / за ред. Н. А. Тарасенкової, М. І. Бурди, І. М. Богатирьова, О. П. Воловик, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ: Освіта, 2011.

# ДОДАТКИ

Додаток А

## ПЛАН-КОНСПЕКТ УРОКУ

**Тема:** Призма. Пряма і правильна призми.

**Мета:** *засвоїти поняття многогранника, означення призми, її елементів, види призми, означення прямої та правильної призми; вміти застосовувати вивчений матеріал під час розв'язування задач; сприяти розвитку просторової уяви, мислення, уваги; виховувати інтерес до математичних знань та прагнення бути активними в колективних творчих справах.*

**Тип уроку:** вивчення нового матеріалу.

**Наочність та обладнання:** ПК; програма GRAN-3D; проектор; підручник: Бевз Г.П. Геометрія. 11 клас: академічний рівень.

### Хід уроку

#### I. Організаційний момент

Організація учнів до уроку геометрії. Запис дати в зошитах.

Проведення бесіди з техніки безпеки під час роботи за комп'ютером.

#### II. Перевірка домашнього завдання

Перевірка виконаних вправ з підручника.

#### III. Формулювання мети й завдання уроку

На сьогоднішньому уроці ми вивчимо означення многогранника, призми її елементів та основні види призм. При чому ви навчитесь самостійно в зошитах лінійкою і олівцем будувати різні призми. В основному звернемо увагу на особливості побудови призми, та розташування головних її елементів за допомогою програми GRAN-3 D та проектора. Тим самим ми будемо розвивати вашу уяву та мислення.

#### IV. Мотивація навчальної діяльності

Сьогодні ви побачите як працює програма GRAN -3D і на наступних уроках ви самостійно навчитесь користуватись цією програмою та навчитесь будувати потрібні вам фігури.

#### V. Актуалізація опорних знань, умінь та навичок

Під час актуалізації опорних знань застосовується інтерактивна технологія загального групового обговорення. Учням ставить питання для обговорення: Що ви знаєте про многогранник: означення, його елементи, види?

Після чого проводиться фронтальна бесіда:

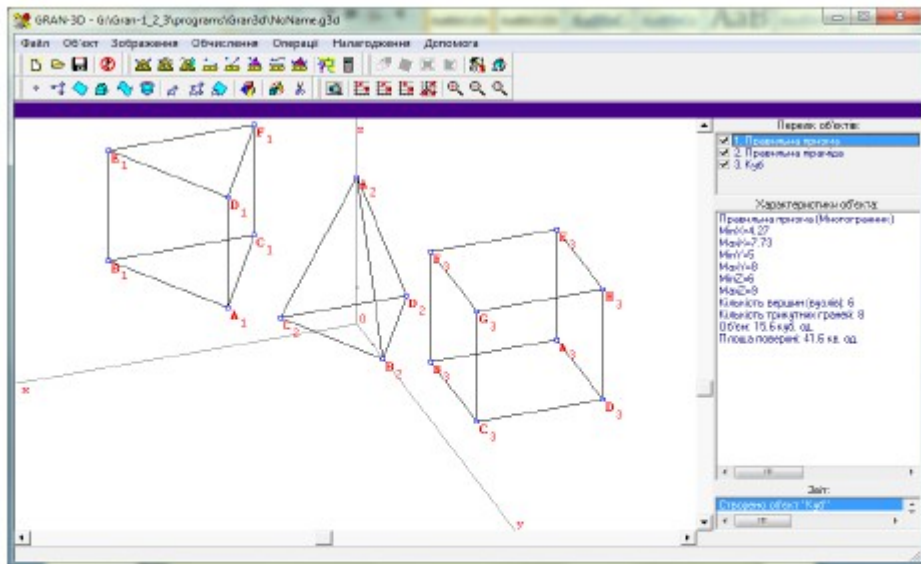
- 1) Яким може бути взаємне розміщення двох різних площин у просторі?
- 2) Які дві площини називаються паралельними?
- 3) Наведіть приклади паралельних площин у предметів із оточуючого середовища.
- 4) У якому випадку дві площини будуть паралельними?
- 5) Як можуть розташовуватися в просторі пряма і площина?
- 6) Сформулюйте означення прямої перпендикулярної до площини.
- 7) Що таке перпендикуляр? похила?

#### VI. Вивчення нового матеріалу

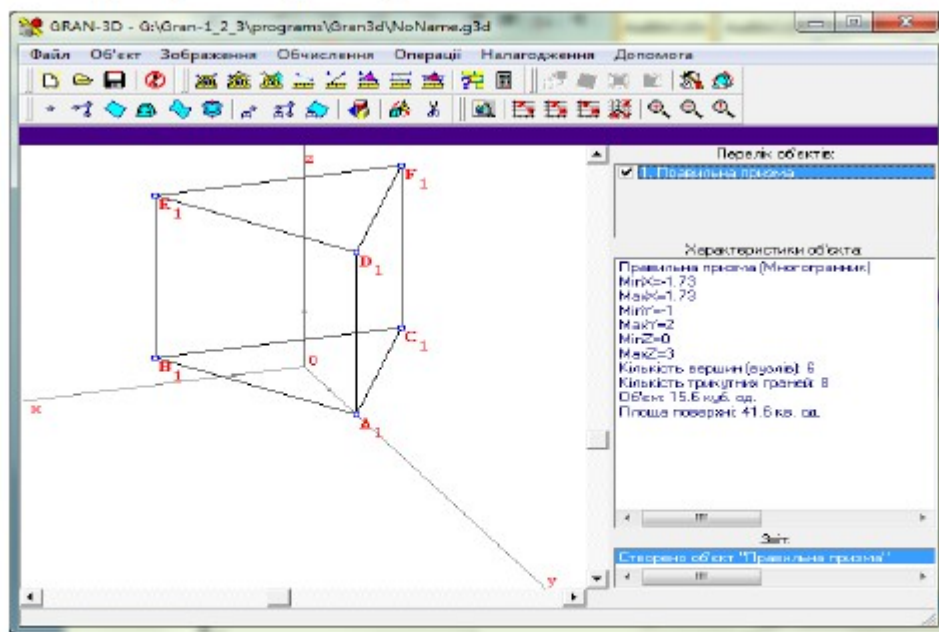
##### *Многогранник та його елементи*

Ми живемо у тривимірному просторі, в якому потрібно вміти орієнтуватися, розуміти, як він улаштований. Саме стереометрія допомагає збагнути це, оскільки вивчає *просторові фігури*.

У стереометрії вивчають фігури у просторі, що називаються тілами. Наочно геометричне тіло можна уявити як частину простору, зайняту фізичним тілом та обмежену поверхнею. (Демонструємо деякі моделі многогранників за допомогою програми GRAN -3D.)



*Многогранником* називається тіло (частина простору), обмежене скінченною кількістю плоских багатокутників (за допомогою програми вивести на дошку многогранник).



Многокутники, які обмежують многогранник, називають його *гранями*, їх сторони – *ребрами*, а вершини – *вершинами* многогранника.

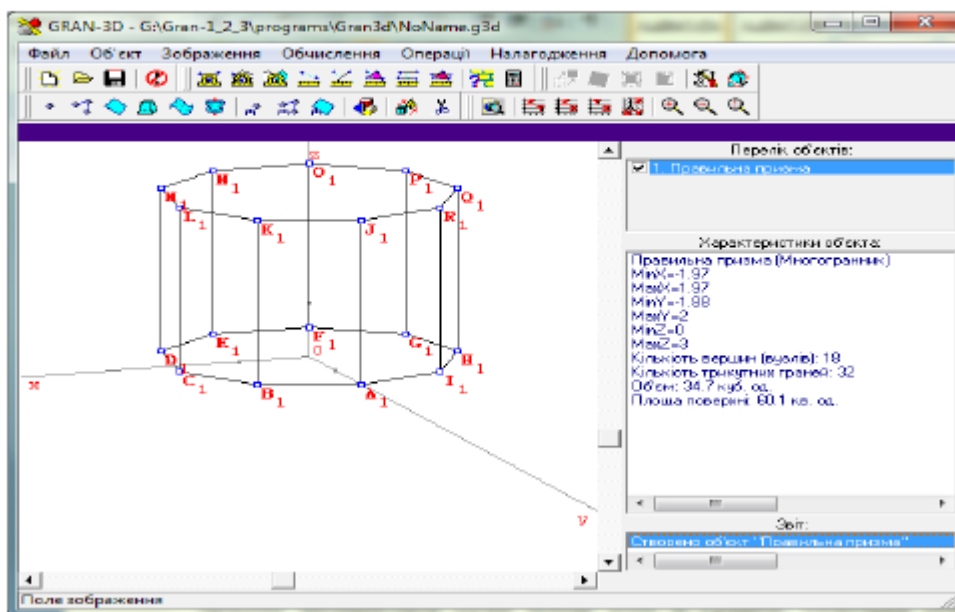
На рисунку гранями є многокутники:  $A_1B_1C_1$ ,  $F_1D_1E_1$ ,  $A_1B_1E_1D_1$ ,  $A_1D_1F_1C_1$ ,  $C_1B_1E_1F_1$ , ребрами – сторони  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$ ,  $C_1B_1$ ,  $A_1D_1$ ,  $B_1E_1$ ,  $C_1F_1$ ,  $E_1F_1$ ,  $F_1D_1$ ,  $D_1E_1$ ; вершинами – точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $E_1$ ,  $F_1$ .

#### Завдання для класу

1. Наведіть приклади предметів побуту, які мають форму многогранників.
2. Скільки вершин, ребер, граней має: паралелепіпед, куб?
3. Яке найменше число ребер може мати многогранник?
4. Побудуйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і скільки вершин він має?
5. Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розкласти на площині, то дістанемо розгортку даного многогранника.

#### Призма та її елементи

Многогранник, дві грані якого – рівні  $n$ -кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші  $n$  граней – паралелограми, називається  $n$ -кутною призмою. (Демонструємо модель  $n$ -кутної призми.)



Рівні  $n$ -кутники призми називаються *основами*, а паралелограми - *бічними гранями*, сторони основи — *ребрами основи*, інші ребра — *бічними ребрами*.

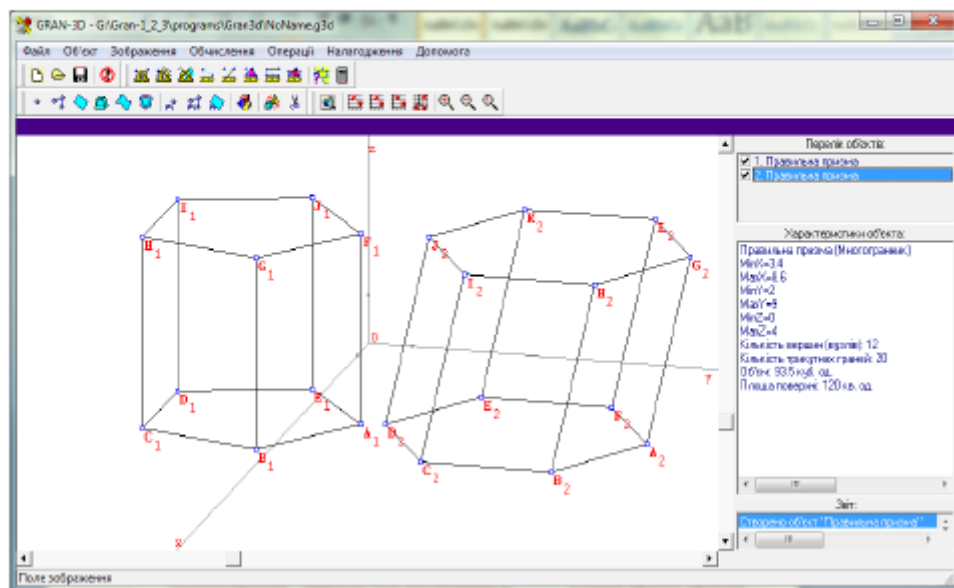
З означення призми випливає, що основи призми рівні, а також лежать паралельних площинах. Бічні ребра паралельні й рівні.

Поверхня призми складається з основ і бічної поверхні. *Площею поверхні призми* називається сума площ усіх її граней. Оскільки основи рівні,  $S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$ , де  $S_{\text{пов.}}$  - площа поверхні призми;  $S_{\text{бічн.}}$  - площа бічної поверхні призми;  $S_{\text{осн.}}$  - площа основи призми.

#### Завдання класу

1. Скільки граней має  $n$ -кутна призма? Чи може призма мати 10 граней?
2. Скільки ребер має  $n$ -кутна призма? Чи може призма мати 10 ребер?
3. Скільки вершин має  $n$ -кутна призма? Чи може призма мати 10 вершин?
4. Скільки граней має 15-кутна призма? Вершин? Ребер?

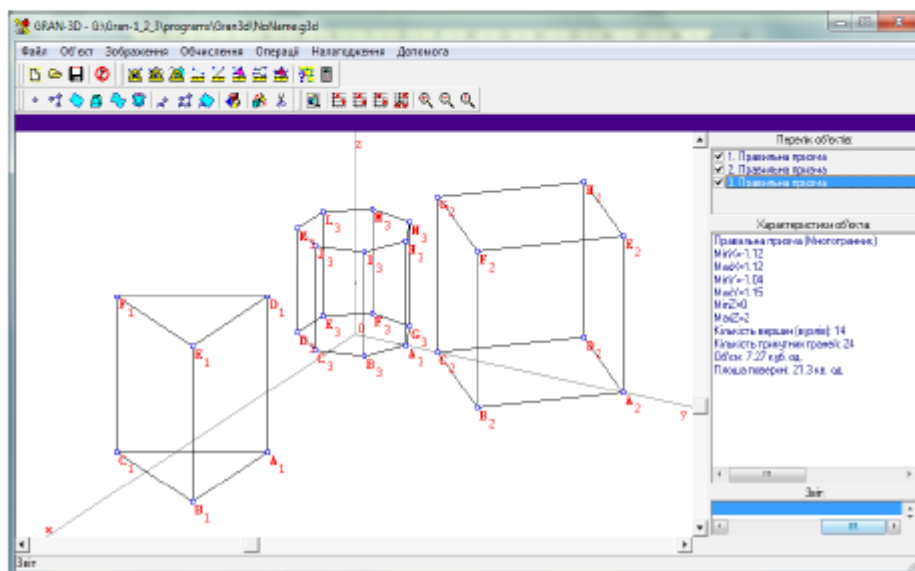
Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основи. Інші призми – *похилі*. (Демонструються моделі прямих та похилих призм, дати час для дітей, щоб вони самостійно побудували многогранники себе в зошитах.)



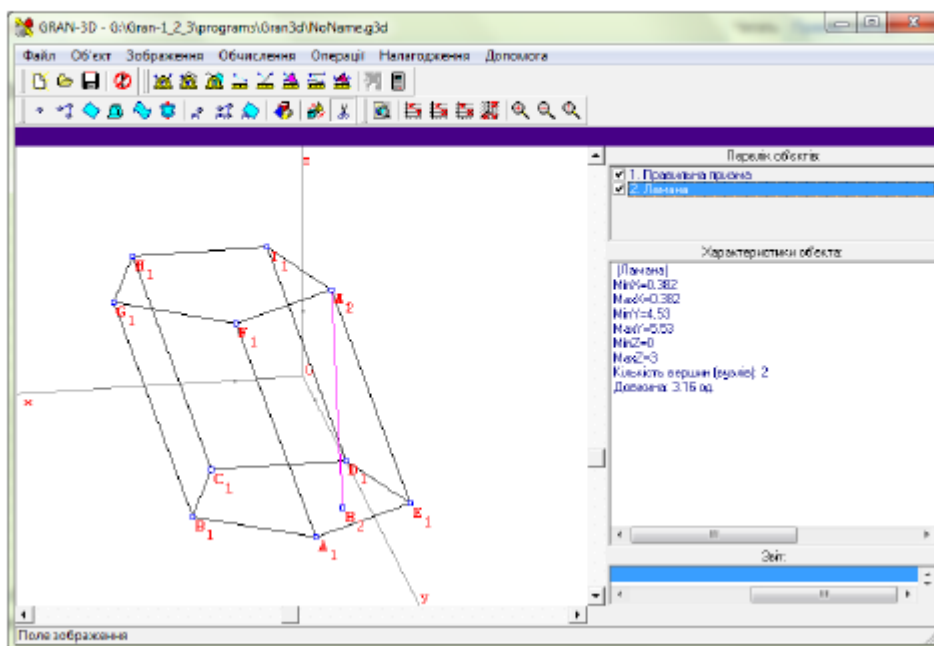


Пряма призма називається *правильною*, якщо в її основі лежить правильний багатокутник. Слід зазначити, що бічними гранями прямої призми є прямокутники.

*Висота призми* – відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра  $h = A_1D_1$ . (Демонструються моделі правильних призм.)



Висота похилої призми в нашому випадку дорівнює  $h = A_2B_2$ .



## VII. Закріплення й осмислення нового матеріалу

### Розв'язування задач

1. Знайдіть площу поверхні куба, ребро якого дорівнює 5 см.

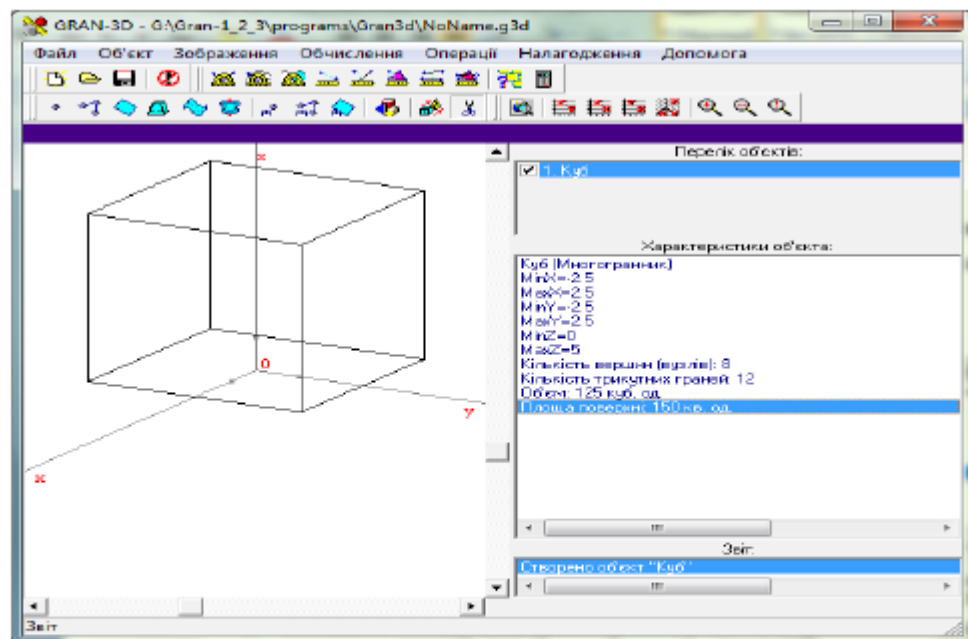
Розв'язання:

Оскільки повна поверхня призми обчислюється за формулою:

$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$ . Відомо, що грані куба – квадрати. Площа квадрата дорівнює  $a^2$ , де  $a$  – сторона квадрата або ребро куба. Тому

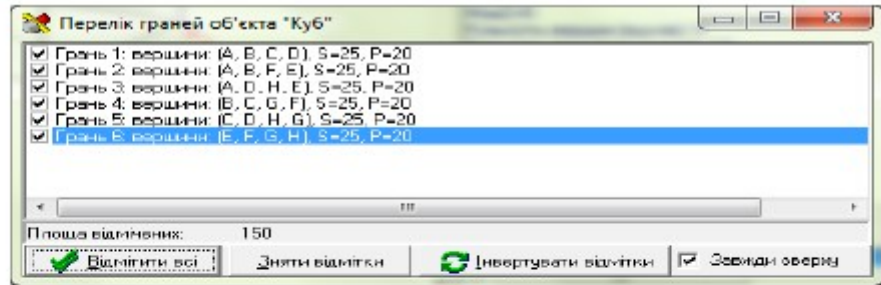
$$S_{\text{пов.}} = 6 * a^2 = 6 * 5^2 = 150 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Перевіримо правильність обчислення площі повної поверхні за допомогою програми GRAN-3D. Для цього запусимо середовище GRAN-3D. Використовуючи клавішу швидкого доступу *Створити базовий просторовий об'єкт* обираємо вкладку *Куб* та вводимо довжину ребра, в нашому випадку 5 см. Натиснувши кнопку *Створити* на екрані з'явиться куб. Для того щоб знайти повну поверхню куба досить глянути в *Характеристики об'єкта* в правому нижньому куті вікна програми.



Також виконавши наступні кроки: *Обчислення – Многогранник – Площі та периметри граней* та виділити всі грані куба, отримаємо площу поверхні,

яка дорівнює  $150 \text{ см}^2$ .



Відповідь:  $S_{\text{пов.}} = 150$

2. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см, а бічне ребро 5 см.

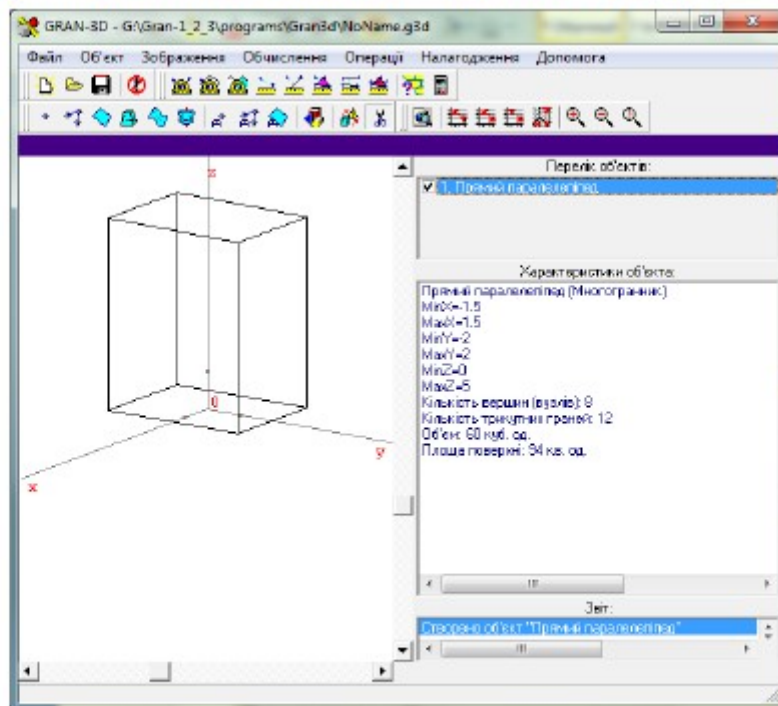
Розв'язання:

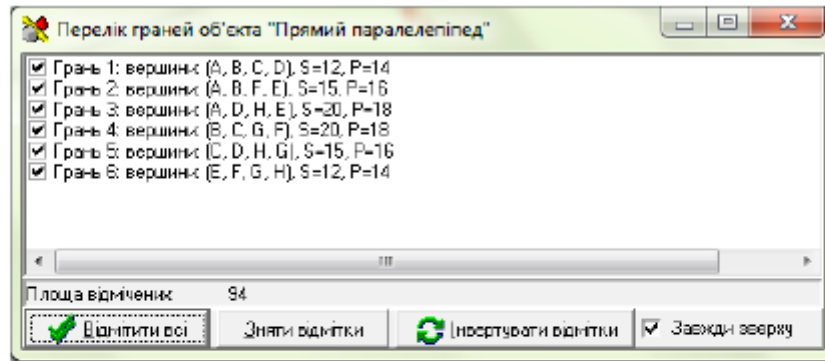
Оскільки повна поверхня призми обчислюється за формулою:

$$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}. \text{ Отже,}$$

$$S_{\text{пов.}} = 2 * 3 * 4 + 2 * 4 * 5 + 2 * 3 * 5 = 94 (\text{см}^2).$$

Перевіримо правильність розв'язку за допомогою програми.





Дійсно площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює  $94 \text{ см}^2$ .

Відповідь:  $S_{\text{пов.}} = 94 \text{ см}^2$ .

3. Основа прямої призми – рівносторонній трикутник з стороною 4 см, а бічне ребро дорівнює 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

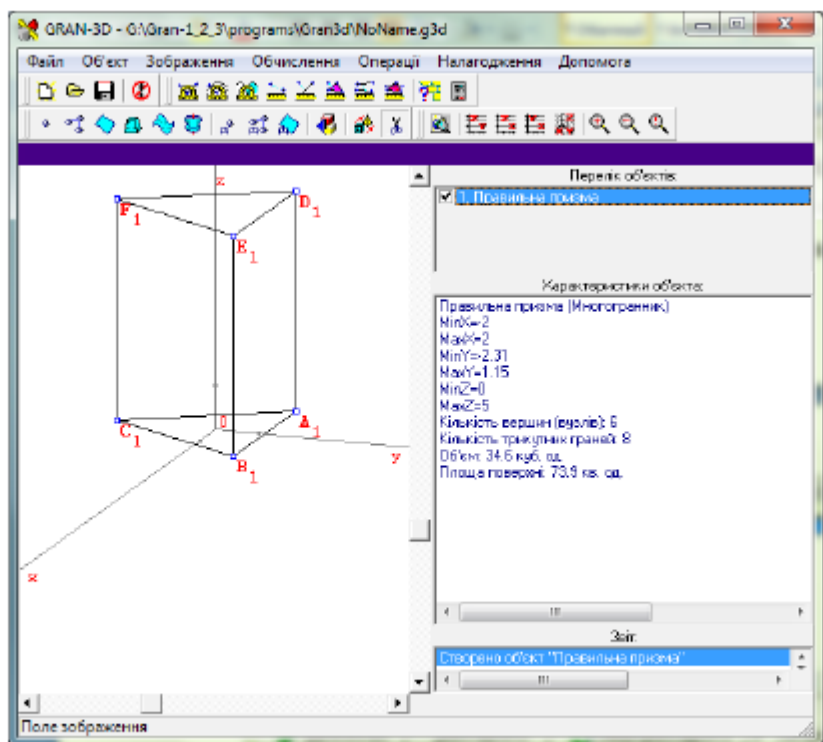
Розв'язання:

Оскільки повна поверхня призми обчислюється за формулою:

$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$ . Отже,  $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} * 4 * \sqrt{4^2 - 2^2} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$ . Тоді

$$S_{\text{пов.}} = 3 * 4 * 5 + 2 * 4\sqrt{3} = 73,9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

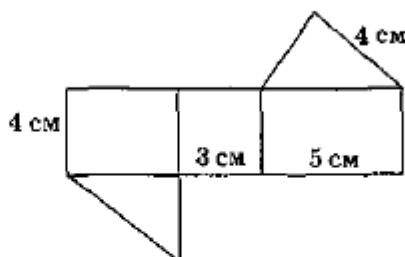
Перевіримо правильність розв'язку за допомогою програми.



Площа повної поверхні призми дорівнює  $73,9 \text{ см}^2$ .

Відповідь:  $S_{\text{пов.}} = 73,9 \text{ см}^2$

4. На рисунку зображено розгортку прямої трикутної призми. За наведеними даними знайдіть площу поверхні.



Розв'язання:

На рисунку показано всі дані, які необхідні для визначення площі поверхні.

$S_{\text{бічн.}} = 4 * 4 + 3 * 4 + 5 * 4 = 16 + 12 + 20 = 48 \text{ (см}^2\text{)}$ . Основа призми – прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 см. Звідси випливає, що

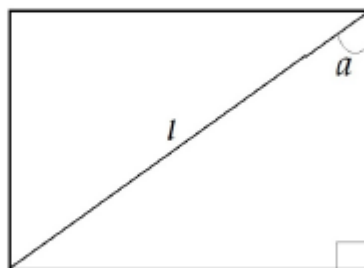
$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} * 4 * 3 = 6 \text{ (см}^2\text{)}$ . Отже  $S_{\text{пов.}} = 48 + 2 * 6 = 60 \text{ (см}^2\text{)}$ .

Відповідь:  $60\text{см}^2$

5. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює  $l$  і утворює з бічним ребром кут  $\alpha$ . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Розв'язання:

Бічна грань правильної трикутної призми матиме вигляд:



Знайдемо катети отриманого прямокутного трикутника:

$$\sin \alpha = \frac{a}{l} \Rightarrow a = l * \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{l} \Rightarrow b = l * \cos \alpha.$$

Знаючи сторони прямокутника:  $S = l^2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow S_{\text{біч}} = 3l^2 \sin \alpha \cos \alpha$

Відповідь:  $3l^2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

### VIII. Підсумки уроку

#### Запитання

1. Що таке  $n$ -кутна призма?
2. Яка призма називається прямою? правильною?
3. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?
4. Ребро куба дорівнює 5 см. Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними.

а) Площа однієї грані куба дорівнює  $20\text{ см}^2$ .

б) Площа поверхні куба дорівнює  $150\text{ см}^2$ .

г) Діагональ грані куба дорівнює  $5\sqrt{2}$  см.

### IX. Домашнє завдання

1. Вивчити формули площі поверхні прямої призми.