

**Міністерство освіти і науки України**  
**Херсонський державний університет**  
**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА**  
**МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО**  
**АНАЛІЗУ**

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА**  
**ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН»**

**Кваліфікаційна робота (проект)**  
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

**Виконала:** студентка 2-го курсу, 12-221М  
групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня  
освіта (математика)» другого (магістерського)  
рівня вищої освіти

Марчук Світлана Іванівна

**Керівник** кандидатка фізико-математичних  
наук, доцентка Котова Ольга Володимирівна

**Рецензент** доцентка кафедри

природничонаукової підготовки Херсонської  
державної морської академії

Спичак Т.С.

**Івано-Франківськ – 2024**

**ЗМІСТ**

ВСТУП .....	3
<b>РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕМИ «ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН»</b>	
1.1. Історичний розвиток понять паралельності та перпендикулярності .....	6
1.2. Аналіз методичної літератури. Питання про послідовність вивчення тем.....	8
<b>РОЗДІЛ 2. ТРАДИЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ</b>	
2.1. Паралельність прямих і площин у просторі.....	15
2.2. Перпендикулярність прямих і площин у просторі.....	21
2.3. Зображення просторових фігур на площині.....	27
<b>РОЗДІЛ 3. СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ</b>	34
<b>ВИСНОВКИ</b>	40
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	42

## ВСТУП

### *Актуальність теми дослідження*

Тема «Паралельність та перпендикулярність прямих і площин» є однією з ключових у шкільному курсі геометрії, оскільки вона лежить в основі розуміння просторових відношень, що має велике значення для математичної освіти та розвитку просторового мислення. Вивчення цієї теми формує уявлення учнів про базові геометричні поняття та їх застосування у різних сферах життя. Вона є необхідною для розуміння більш складних геометричних тем, таких як побудова трикутників, багатокутників, визначення кутів між площинами, а також векторна алгебра. Учні, які засвоїли ці базові поняття, легше розуміють подальші теореми та правила, наприклад, у стереометрії, аналітичній геометрії та тригонометрії.

Паралельність та перпендикулярність — це фундаментальні поняття, що дозволяють учням краще орієнтуватися у тривимірному просторі. Розуміння цих понять допомагає учням не тільки вивчати геометрію, але й розвиває їхнє просторове мислення, що є важливим для успішної діяльності в різних сферах, зокрема в інженерії, архітектурі та дизайні.

Поняття паралельності та перпендикулярності мають безпосереднє відображення в реальному світі. Наприклад, будівництво будівель та споруд передбачає дотримання паралельних та перпендикулярних елементів для забезпечення стійкості конструкцій. Вивчаючи цю тему, учні отримують знання, які допомагають їм краще розуміти об'єкти навколо них.

Вивчення паралельності та перпендикулярності вимагає від учнів побудови доведень, що значно розвиває їх логічне мислення, сприяє розвитку загальної математичної грамотності учнів. Вміння бачити зв'язки між різними математичними поняттями, застосовувати їх у практичних ситуаціях, аналізувати і розв'язувати геометричні задачі є важливою

частиною формування математичної компетентності. Геометрія в цілому базується на строгих доведеннях і доказах, тому учні вчать логічно обґрунтовувати свої міркування.

Дана тема широко представлена в завданнях шкільних іспитів, таких як НМТ з математики. Вона є важливою не лише у вивченні геометрії, але й тісно пов'язана з іншими предметами, такими як фізика, де поняття векторів, сил та кутів має фундаментальне значення. Наприклад, вивчення законів Ньютона вимагає розуміння, як сили можуть діяти під прямими або косими кутами одна до одної, що є застосуванням поняття перпендикулярності.

Учні, які добре засвоїли цю тему, мають більше шансів успішно виконувати завдання, пов'язані з геометрією. Вивчення цієї теми також допомагає їм закріпити розуміння основних принципів побудови геометричних фігур та обчислення кутів і відстаней.

Сучасні комп'ютерні програми для 3D-моделювання, такі як CAD-системи, активно використовують поняття паралельності та перпендикулярності для побудови об'єктів. Знання цієї теми є необхідними для того, щоб учні могли вільно працювати з такими програмами у майбутньому, незалежно від того, чи це буде архітектурне моделювання, графічний дизайн, інженерія або робототехніка.

*Мета дослідження* — розгляд методики вивчення теми з використанням класичного підходу та сучасних методів навчання.

Завдання дослідження:

- аналіз наукової літератури щодо класичних і сучасних методів викладання геометрії;
- вивчення методики традиційного підходу вивчення;
- розгляд методики вивчення теми з урахуванням особливостей сучасних технологій;
- аналіз завдань з теми, представлених в НМТ з математики в останні роки.

*Об'єктом дослідження* є процес навчання теми «Паралельність та перпендикулярність прямих і площин» в шкільному курсі геометрії.

*Предметом дослідження* є сам процес формування цих понять.

*Теоретичне значення.* Робота поглиблює науково-методичне обґрунтування теми «Паралельність та перпендикулярність прямих і площин» в курсі геометрії. Вона аналізує існуючі підходи до викладання та показує, як класичні методи можуть поєднуватися з сучасними, що сприяє більш ефективному навчанню.

*Практичне значення.* Матеріали можуть бути використані вчителями середніх шкіл. Вони допоможуть у процесі навчання та викладання, полегшуючи засвоєння і викладання навчальних тем, особливо тих, що стосуються геометрії або інших дисциплін, де необхідно формувати просторове мислення та логічне міркування.

*Методи дослідження:* аналіз навчальних програм, науково-методичної літератури, методи моделювання, вивчення та узагальнення педагогічного досвіду.

*Наукова новизна одержаних результатів.* Дослідження педагогічних умов використання цифрових інструментів для навчання геометрії, зокрема теми паралельності та перпендикулярності.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

*Апробація результатів дослідження.* Наукова стаття «Сучасні підходи до вивчення паралельності та перпендикулярності у шкільній геометрії» («Магістерські студії» Івано-Франківськ. ХДУ, 2024).

## РОЗДІЛ 1

### ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕМИ «ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН»

#### 1.1. Історичний розвиток понять паралельності та перпендикулярності

Розвиток понять паралельності та перпендикулярності пройшов довгий шлях від давніх цивілізацій до сучасних наукових теорій.

Ідеї, що стосуються паралельності та перпендикулярності, з'явилися ще у давніх цивілізаціях, таких як Єгипет і Месопотамія. Єгиптяни використовували перпендикулярність при побудові пірамід, застосовуючи прості інструменти для створення прямих кутів. Вони будували системи іригації, використовуючи знання про паралельні русла каналів.

Месопотамські геометри також використовували принципи паралельності та перпендикулярності для побудови зрошувальних систем. Ці знання, хоча й не були формалізовані в аксіомах, демонстрували інтуїтивне розуміння цих понять.

Одним з перших математиків, хто систематизував геометрію, був Евклід (близько 300 р. до н.е.). У своїй праці «Начала» він розробив п'ять основних постулатів, зокрема, п'ятий постулат, який стосується паралельності [8].

Аксіома паралельних прямих відіграла ключову роль у розвитку класичної геометрії. Багато вчених намагалися довести цей постулат, однак їм це не вдалося. Саме через п'ятий постулат виникли нові напрямки у геометрії, зокрема, неевклідова геометрія.

Протягом століть п'ятий постулат Евкліда викликав численні суперечки серед математиків. Лише в XIX столітті математик Микола Лобачевський запропонував нову геометрію, де паралельність була переосмислена. У геометрії Лобачевського через точку поза прямою

можна провести багато паралельних прямих, що кардинально відрізняється від геометрії Евкліда.

У той же період Бернхард Ріман створив свою ріманову геометрію, де паралельні прямі просто не існують. У кривих просторах, таких як поверхня сфери, дві прямі завжди перетинаються. Таким чином, поняття паралельності було розширене і стало частиною нових теорій простору, що згодом використовувалося у загальній теорії відносності Ейнштейна [26].

Перпендикулярність була фундаментальним поняттям у грецькій геометрії. Вона використовувалася для побудови правильних багатокутників, визначення висот трикутників і побудови прямокутників. Визначення перпендикулярності стало ключовим у задачах на побудову, таких як створення перпендикулярів з точки на пряму або побудова перпендикуляра до площини.

У сучасній геометрії перпендикулярність застосовується не тільки на площині, але і в тривимірному просторі. Для визначення перпендикулярності у просторі використовуються вектори, і пряма є перпендикулярною до площини, якщо її напрямний вектор перпендикулярний до довільної прямої, яка лежить у цій площині.

У сучасній фізиці та інженерії поняття паралельності та перпендикулярності є основоположними. Вони використовуються для побудови моделей руху тіл, визначення траєкторій у космосі та побудови інфраструктурних об'єктів, таких як мости та будівлі. Архітектори використовують ці поняття для створення стійких конструкцій, де перпендикулярність забезпечує міцність, а паралельність – симетрію. У комп'ютерній графіці поняття паралельності та перпендикулярності допомагають у створенні тривимірних моделей і симуляцій. Програми для проектування використовують алгоритми, засновані на цих поняттях, для побудови точних тривимірних моделей. Більш детально ці питання розглянемо у наступних розкладах [44].

## **1.2. Аналіз методичної літератури. Питання про послідовність вивчення тем**

Поняття паралельності та перпендикулярності у шкільному курсі геометрії є одними з ключових понять, які формують основи геометрії і широко використовуються у вивченні площин, прямих і тривимірних об'єктів.

Досліджувані теми вивчаються одразу після введення основних понять. Це сприяє не тільки розвитку логічного мислення учнів, але й міцному засвоєнню базових понять та аксіом, розкриваючи їх важливість у шкільному курсі геометрії.

Розв'язування великої кількості задач, зокрема задач на доведення та конструктивного характеру, супроводжує вивчення взаємного розташування. Конструктивні задачі у тривимірному просторі вимагають як формально-логічного підходу, так і знань про проекційне креслення та властивості паралельного проектування. У процесі розв'язування таких задач формуються просторові уявлення, розвиваються навички зображення фігур на площині та вміння їх правильно сприймати та читати.

Паралельно з вивченням взаємного розташування прямих і площин відбувається формування основ векторного методу. Цей метод широко застосовується для доведення теорем і розв'язання різних задач. Його поєднання з синтетичним методом дозволяє зберегти увагу на розвиток просторового мислення учнів [5].

Координатний метод у шкільному курсі також успішно комбінується з наочними геометричними уявленнями про взаємне розташування прямих.

Вивчення взаємного розташування прямих і площин у школі можна поділити на три етапи:

- ознайомлення з темою у 5-6 класах;
- систематичне вивчення цього матеріалу у 7-9 класах;



- вивчення у просторі у 10-11 класах.

Вже з першого знайомства з геометрією учні починають вивчати такі поняття, як перетин, перпендикулярність і паралельність прямих на площині. Важливо зазначити, що формування навичок креслення та опрацювання випадків взаємного розташування прямих на площині є основою для майбутнього вивчення геометрії [7].

На підготовчому етапі учні повинні знати, що дві прямі можуть мати одну спільну точку або ж не мати жодної, і вміти зобразити ці випадки за допомогою креслярських інструментів.

Обидві теми "паралельність прямих і площин" та "перпендикулярність прямих і площин" мають логічну послідовність у вивченні, але можуть бути вивчені в різному порядку залежно від освітньої програми або цілей навчання.

Аналіз послідовності тем у різних підручниках може відрізнятись залежно від методології авторів, але загалом є певні тенденції та рекомендації [15].

Тема паралельності прямих і площин зазвичай вивчається першою, тому що паралельність є простішим для розуміння концептом порівняно з перпендикулярністю. Паралельні прямі та площини мають однаковий напрямок або не перетинаються, що легше уявити на прикладах із реального світу (наприклад, залізничні колії або стіни будівлі). Оскільки паралельність не вимагає точного розуміння кутів і векторних проєкцій, її можна вивчати раніше, допомагаючи закласти основу для складніших тем.

Тема перпендикулярності зазвичай вивчається після паралельності, оскільки вимагає більш складних понять, таких як кути між прямими та площинами, теорія проєкцій і використання векторів для знаходження перпендикулярних елементів. Для повного розуміння перпендикулярності потрібно розуміти поняття нормалі до площини, що впливає з базових понять площин і прямих. Перпендикулярність є ключовою для побудови

геометричних об'єктів і використовується в багатьох інших темах.

Розглянемо переваги вивчення спочатку паралельності, а потім перпендикулярності. По перше, це простота переходу. Паралельність легше зрозуміти і уявити, що дає можливість плавно перейти до більш складних понять, таких як кути і вектори при перпендикулярності. По друге, це природна логіка. Більшість задач на перпендикулярність включають поняття паралельності (наприклад, для побудови перпендикуляра часто потрібні паралельні сторони), тому логічно спершу освоїти основи. І накінець, це послідовне ускладнення. Після вивчення паралельних об'єктів учні краще підготовлені до розуміння складніших концептів перпендикулярності.

Щодо недоліків вивчення перпендикулярності перед паралельністю, зазначимо два основних. Це складність понять. Перпендикулярність включає в себе більше абстрактних понять, таких як нормалі, проєкції, кути між прямими і площинами, які можуть бути складні для розуміння без попереднього знання про паралельність. Учні можуть мати труднощі з розумінням основних просторових взаємодій без попереднього вивчення простіших випадків паралельності [39].

Зінаїда Іванівна Слєпкань, відома українська методистка і авторка навчальних посібників з математики та методики викладання математики, наголошує на тому, що:

Паралельність прямих і площин має бути введена раніше, оскільки це сприяє формуванню базових просторових уявлень учнів.

Вивчення перпендикулярності варто розпочинати після того, як учні засвоять паралельність. Перпендикулярність вводить складніші поняття, такі як кути між елементами простору та проєкції, які логічно слідують після вивчення паралельності.

Слєпкань радить використовувати наочні моделі та практичні завдання, щоб учні краще зрозуміли, як ці поняття застосовуються у тривимірному просторі. Наприклад, використовувати фізичні моделі кубів,

пірамід або інших багатогранників для демонстрації паралельності та перпендикулярності.

Наведемо кілька прикладів послідовності викладання тем в шкільних підручниках.

У підручнику Г.П. Бевза та В.Г. Бевз для 10 класу, першою вивчається тема паралельності. Вона починається з паралельності прямих і площин, що включає основні аксіоми стереометрії, наслідки з аксіом, і правила зображення фігур у просторі.

У підручнику з геометрії для 10 класу під редакцією А.Г. Мерзляка також тема паралельності вивчається раніше, ніж перпендикулярність. Спочатку розглядаються основи стереометрії та аксіоми, після чого вивчається паралельність у просторі. Лише після цього вивчається перпендикулярність у просторі, де розглядаються кут між прямими, перпендикулярність прямої та площини, і пов'язані теореми.

Зауважимо, що і у підручнику О. В. Погорєлова тема паралельності прямих і площин подається раніше, після чого вивчається перпендикулярність.

У підручнику О.С. Істера та О.В. Єрگیної, тема перпендикулярності прямих і площин викладається раніше теми паралельності. Вона охоплює перпендикулярність прямих у просторі, перпендикуляр і похилу, а також теорему про три перпендикуляри.

У підручнику Є.П. Неліна для 10 класу також першою подається тема перпендикулярності, де вивчаються перпендикулярність прямих і площин, а також кути між прямими і площинами. Лише після цього йде вивчення паралельності прямих і площин.

Отже є ряд підручників, у яких спочатку вводиться паралельність прямих і площин, що є базовою темою [9]. Учням пропонують працювати з простими геометричними об'єктами, щоб зрозуміти принцип неперетину паралельних ліній та площин. Після цього переходять до перпендикулярності прямих і площин. Вивчення відбувається через

поняття кутів між прямими та площинами, а також нормалі до площини. Такий підхід є логічним, оскільки учні спершу опрацьовують простіші концепції, а потім переходять до складніших.

І є підручники, в яких спочатку вивчається перпендикулярність. Іноді паралельність і перпендикулярність можуть вивчатися майже одночасно, аби підкреслити взаємозв'язок цих понять. Це дає учням можливість одразу порівнювати ці відносини і краще розуміти їхні відмінності. У сучасних підручниках більше приділяється увага практичним задачам і застосуванню цих понять у реальному житті, наприклад, у будівництві або архітектурі [6].

Розглянемо кілька задач прикладного характеру.

#### *Задача 1. Архітектурне планування*

Під час проєктування офісного приміщення потрібно розташувати перегородки між кабінетами паралельно одна одній, щоб заощадити простір і забезпечити симетрію. Вкажіть, як потрібно розташувати нові перегородки щодо існуючих стін приміщення. Покажіть за допомогою побудов, чи можливо розташувати нові перегородки паралельно під кутом  $90^\circ$  до основної стіни.

*Вказівка:* використайте властивості перпендикулярності для побудови перегородок на плані приміщення. Застосуйте аксіоми паралельності, щоб змінити правильні кути.

#### *Задача 2. Дизайн меблів*

При проєктуванні книжкової полиці важливо, щоб полиці були паралельні одна одній, а бічні сторони – перпендикулярні до них. Доведіть, що за такої конструкції полиці будуть стійкими і рівномірно витримуватимуть навантаження.

*Вказівка:* застосуйте властивості паралельності для розташування полиць і обґрунтуйте, як перпендикулярність бічних сторін додає стійкості конструкції.

#### *Задача 3. Транспортні розв'язки*

При будівництві нового перехрестя в місті передбачено, що основна траса і нова вулиця мають бути паралельні. Проте одна з допоміжних доріг повинна підходити перпендикулярно до основної траси. Визначте, як правильно розташувати допоміжну дорогу.

*Вказівка:* використайте властивості перпендикулярності для побудови потрібної допоміжної дороги. Доведіть, що взаємне розташування доріг не зміниться після побудови.

#### *Задача 4. Сонячні панелі*

Для кращої ефективності сонячні панелі на даху будинку повинні бути встановлені під кутом  $90^\circ$  до площини горизонту. Визначте необхідний кут нахилу панелей для різних ділянок даху, якщо він похилий.

*Вказівка:* розгляньте нахил даху і, використовуючи властивості перпендикулярності, визначте, під яким кутом треба встановлювати панелі.

#### *Задача 5. Конструювання сходів*

Під час проєктування сходів необхідно, щоб кожен сходовий марш був перпендикулярний до площини горизонтального майданчика і паралельний до попереднього маршу. Доведіть, що така конструкція буде зручною та безпечною для використання.

*Вказівка:* використовуйте властивості паралельності та перпендикулярності для розташування сходових маршів та обґрунтуйте безпечність такої конструкції.

Зазначимо переваги вивчення обох тем одночасно:

Паралельні поняття. Оскільки паралельність і перпендикулярність є протилежними геометричними властивостями, їх одночасне вивчення може допомогти учням краще бачити зв'язки між ними.

Комплексний підхід. Викладання обох тем разом може дати учням комплексний підхід до розв'язку задач на взаємодію прямих і площин.

Тема «Паралельність та перпендикулярність прямих і площин» є ключовою частиною навчального курсу для 9-11 класів. Вона охоплює

основи взаємного розташування геометричних об'єктів у просторі, формуючи розуміння основних властивостей паралельних і перпендикулярних прямих і площин. Зі змістом навчальної програми можна ознайомитись на сайті Міністерства освіти і науки України за посиланням <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi> [45].

## РОЗДІЛ 1

### ТРАДИЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ

#### 2.1. Паралельність прямих і площин у просторі

Перші уроки курсу планіметрії викликають певні труднощі, оскільки потребують систематизації попередніх знань про взаємне розташування прямих на площині. Це вимагає особливої уваги до методики їх проведення через низку причин: психологічні особливості учнів цього віку, новизна геометрії як окремої дисципліни, зростання складності логічних міркувань, введення великої кількості нових понять і термінів, підвищений рівень абстрактності матеріалу, а також недостатньо розвинені просторові уявлення учнів [11].

Викладання саме перших розділів планіметрії має забезпечити перехід від конкретного до загального, необхідно постійно звертатися до реальних прикладів та наочності, навчати учнів логічно міркувати, обґрунтовувати свої твердження, а також орієнтуватися у нових для них аксіомах, означеннях і теоремах. На початкових етапах важливо узгоджувати пояснення вчителя, матеріал з підручника, відповідні записи на дошці та в зошитах, щоб учні могли використовувати їх під час самостійної роботи.

Знайомство з геометричними об'єктами, такими як точка і пряма, розпочинається з їх формального визначення, що закладає основу для подальшого вивчення їх властивостей. Важливо підкреслювати, що пряма є нескінченною, хоча на малюнку зображається лише її частина. Одним із перших питань для розгляду є взаємне розташування точок і прямих на площині. Це поняття формулюється у вигляді аксіоми в одних навчальних посібниках, а в інших викладається без посилання на аксіоматичну структуру [39].

Особливу увагу потрібно приділити розумінню, що через одну точку на площині можна провести нескінченну кількість прямих, що необхідно демонструвати на відповідних малюнках. Крім того, на початкових уроках вводяться перші аксіоми, які не слід подавати формально. Для їх засвоєння важливо використовувати приклади з повсякденного життя або спеціальні моделі, ілюструвати аксіоми малюнками та короткими записами.

Один з методів навчання учнів доведенню геометричних тверджень — це доведення від супротивного, яке на початкових етапах викликає певні труднощі. Під час вивчення цього методу важливо чітко структурувати етапи доведення та показувати алгоритм міркувань. Наприклад, для доведення твердження "Дві різні прямі не можуть мати більше однієї спільної точки" використовується метод від супротивного.

Для засвоєння теми про взаємне розташування точок і прямих велике значення мають задачі, що супроводжуються малюнками. Вони дозволяють учням краще зрозуміти та закріпити матеріал.

На початкових уроках також вводяться поняття "відрізок", "промінь", "кут", які отримують формально-логічні визначення. Перед їх вивченням варто звернути увагу на властивості розташування точок на прямій, що допоможе краще засвоїти нові поняття [15].

Пристаючи до вивчення паралельності, можна виділити чотири змістовихих модулі.

#### 1. Паралельність прямих у просторі, мимобіжні прямі.

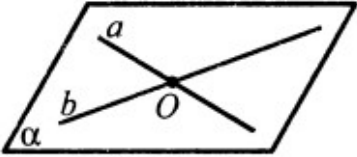
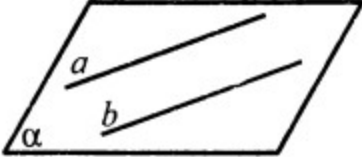
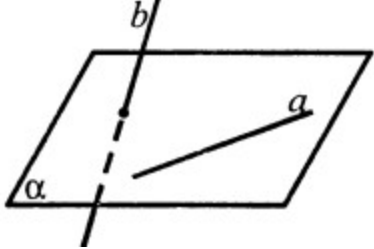
Питання взаємного розташування прямих займають важливе місце у вивченні планіметрії, тому методика викладання цих тем повинна враховувати роль аксіом як інструмент для побудови геометрії.

Як зазначає Слєпкань З.І., варто на початку розглянути можливі розташування двох прямих на площині та у просторі (табл.1). Учні пропонуються завдання для малювання та аналізу, що сприяє їхньому логічному мисленню та розумінню просторових відносин [39]. Це є



природнім продовженням вивчення теми паралельності. Потім необхідно пригадати означення паралельних прямих у планіметрії. Метою є з'ясування учнями того факту, що є лише одна суттєва властивість. А саме те, що вони не перетинаються.

Таблиця 1.

<i>Розташування прямих у просторі</i>		
<i>Прямі, що перетинаються</i>	<i>Паралельні прямі</i>	<i>Мимобіжні прямі</i>
		

Далі можна використати модель куба або прямокутного паралелепіпеда. На відміну від площини, важливі вже дві умови. Лежати в одній площині та не перетинатися. Необхідно досягти розуміння учнями різниці між ознакою та означенням. Доведення ознаки дуже громіздке. Варто зробити цільову установку.

Є також принципова різниця між аксіомою паралельності у планіметрії і теоремою про можливість проведення через точку, що не належить заданій прямій, паралельної прямої до неї.

Вчитель має добре розуміти логічну структуру розділу, послідовність вивчення окремих елементів і зв'язок між ними. Тема складається з кількох важливих частин: визначення, доведення існування, побудова, аксіома паралельності, властивості, ознаки, застосування.

Ці частини тісно пов'язані, і остання з них присутня на кожному етапі навчання. Визначення паралельних прямих слід чітко записати в

зошиті з виділенням ключових аспектів.

Щодо питання існування паралельних прямих, у підручниках можна зустріти два основні підходи:

Спочатку вводиться теорема, яка доводить існування паралельних прямих, після чого розглядається аксіома паралельності.

Спочатку вводиться аксіома паралельних прямих, а потім доводиться існування таких прямих.

Другий підхід може викликати труднощі у розумінні, оскільки учням важко усвідомити необхідність доказу існування паралельних прямих. Для кращого засвоєння матеріалу важливо роз'яснити, що паралельні прямі, аксіома про їх існування та пов'язані властивості передбачають, що такі прямі дійсно існують [9].

Теореми, що стосуються ознак паралельності, потребують ретельного методичного підходу та відповідних записів. Наприклад, важливо пояснити, як паралельність двох прямих підтверджується на основі рівності кутів, утворених при перетині прямих третьою.

Вивчення аксіоми паралельних також відіграє ключову роль. У шкільних підручниках вона може формулюватися по-різному:

"Через дану точку можна провести не більше однієї прямої, паралельної даній."

"Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить лише одна пряма, паралельна даній."

Доведення ознак паралельності та зворотних теорем потребує уваги до деталей. Щоб учні могли засвоїти їх, необхідно поступово ознайомлювати їх з методом доведення та давати відповідні завдання.

Важливим елементом вивчення паралельних прямих є задачі на побудову, які допомагають учням закріпити знання [20].

Для кращого розуміння учнями відмінностей між паралельними та мимобіжними прямими, важливо використовувати наочні матеріали. Це можуть бути моделі кубів, призм або паралелепіпедів, у яких легко демонструвати мимобіжні та паралельні прямі. Геометричні побудови на дошці або на комп'ютері за допомогою програм для моделювання допоможуть учням краще візуалізувати розташування прямих у просторі.

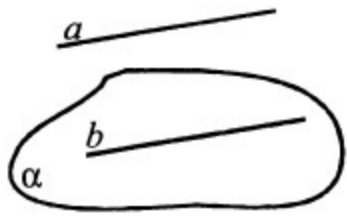
Доречно вводити задачі на побудову паралельних і мимобіжних прямих у просторі, щоб учні краще зрозуміли, як ці поняття застосовуються в практичних ситуаціях. Задачі типу: "Знайти найкоротшу відстань між мимобіжними прямими", "Побудувати пряму, паралельну даній прямій", допомагають закріпити теорію [24].

Важливо наголошувати на відмінностях між паралельними і мимобіжними прямими, щоб учні могли чітко їх розрізняти. Корисним є складання таблиці або схеми, яка порівнює властивості цих двох типів прямих. Задачі з реального життя, де потрібно визначити або побудувати мимобіжні або паралельні прямі, допоможуть зрозуміти практичну користь цих понять і закріпити теоретичні знання.

## 2. Паралельність прямої і площини

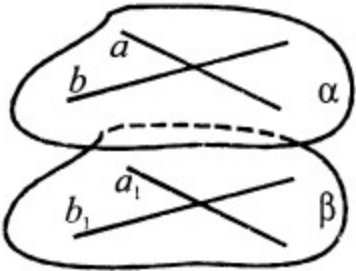
Зазвичай, цей змістовий модуль, не викликає труднощів при вивченні. Учням необхідно пояснити, що пряма і площина не можуть мати більше двох спільних точок, інакше пряма належатиме площині. За умови, що пряма має єдину спільну точку з площиною, вона перетинає площину, а якщо не має жодної — вони є паралельними. Варто пояснити це на конкретних прикладах.

При доведенні ознаки (табл. 2) доцільно відразу сформулювати мету доведення. І знову ми наголошуємо на методі доведення від супротивного. При цьому учні можуть здійснити міркування у три кроки. Припустити, що пряма перетинає площину. В такому випадку, точка мала б належати іншій прямій. І вказати на суперечність.

<i>Ознака паралельності прямої та площини</i>	
якщо $a \parallel b, b \subset \alpha$ , то $a \parallel \alpha$	

### 3. Паралельність площин у просторі

Вивчається за тією ж самою методичною схемою. І також не спостерігається виникнення особливих труднощів при вивченні. Звернемо увагу на те, що учитель сам повинен сформулювати ознаку паралельності двох площин та підвести до означення паралельних площин (табл. 3).

<i>Ознака паралельності площин</i>	
якщо $a, b \subset \alpha, a \cap b, a \parallel a_1$ ,	
$b \parallel b_1, a_1, b_1 \subset \beta$ , то $\alpha \parallel \beta$ .	

Твердження про існування площин, паралельних даній площині, нагадує учням аксіому паралельних прямих на площині. Доведення варто дати лише в плані ознайомлення. Властивості площин, що перетинаються третьою площиною, рівність відрізків паралельних прямих між двома паралельними площинами заслуговують уважного вивчення.

4. Паралельне проектування є важливим інструментом для відображення просторових фігур на площині. Воно широко

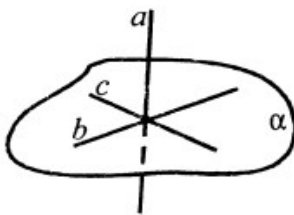
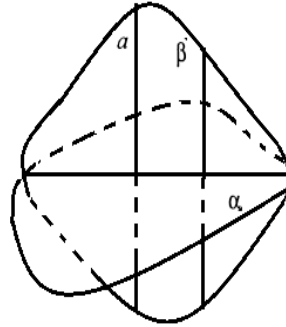
використовується у різних сферах, де необхідна точність і чіткість зображення. Це питання ми вивчимо нижче.

## 2.2. Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Зміст теми можна умовно розділити на три основні частини. Це перпендикулярність прямих у просторі, між прямою і площиною та перпендикулярність площин [39].

Методика вивчення кожного блоку схожа з методикою для теми паралельності: спершу вводиться визначення перпендикулярності відповідних об'єктів, потім формулюється й доводиться ознака їхньої перпендикулярності (табл 4).

Таблиця 4.

<i>Ознака перпендикулярності прямої та площини</i>	
$a \perp b \in \alpha, a \perp c \in \alpha, b \nparallel c, \text{ то } a \perp \alpha.$	
<i>Ознака перпендикулярності площин</i>	
якщо $a \perp \alpha, a \subset \beta, \text{ то } \beta \perp \alpha$	

Для прямої та площини також розглядається задача на побудову таких об'єктів, доводяться єдність цієї площини і властивості, притаманні перпендикулярній прямій і площині.

Особливе місце в темі займають поняття перпендикуляра і похилої до площини та теорема про три перпендикуляри (табл. 5).

Таблиця 5.

<i>Теорема про три перпендикуляри</i>	
якщо $a \perp BC$ , то $a \perp AC$	
або якщо $a \perp AC$ , то $a \perp BC$	

Тому важливо, щоб усі учні оволоділи навичками доведення цієї теореми. Під час вивчення перпендикулярності у просторі доцільно повторити відповідний матеріал з планіметрії та стереометрії [25].

Існують два визначення перпендикулярних прямих у просторі [41, 42].

Перше визначення. Дві прямі називаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Друге визначення. Дві прямі називаються взаємно перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90 градусам.

Друге визначення охоплює також випадки прямих, які не перетинаються, включно з мимобіжними. Так само існують два варіанти визначення перпендикулярності між прямою та площиною.

Перше визначення. Пряма, що перетинає площину, є перпендикулярною до неї, якщо вона перпендикулярна до всіх прямих у цій площині, що проходять через точку перетину. Перевага першого визначення для прямої і площини полягає в тому, що в ньому враховано умову їхнього перетину, що дозволяє уникнути додаткових доведень.

Друге визначення. Пряма і площина є перпендикулярними, якщо пряма перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у цій площині. Другий підхід краще підходить для класів з поглибленим вивченням

математики та може бути доповнений умовою перетину, що спростить доведення деяких теорем, зокрема, теореми про три перпендикуляри.

Для визначення перпендикулярних площин учні, за аналогією з прямими, часто намагаються описати їх як такі, що перетинаються під прямим кутом. Це піднімає питання, як саме визначити кут між площинами, що різні підручники вирішують по-різному [29].

Ознайомимося з аналізом Слєпкань Зінаїди Іванівни підручників та посібників таких авторів як О.В. Погорєлов, Л.С. Атанасян, О.Д. Александров [39].

У підручнику О. В. Погорєлова дві площини вважаються перпендикулярними, якщо третя площина, яка проходить через пряму їхнього перетину й є перпендикулярною до обох площин, розділяє їх на дві перпендикулярні прямі. У Л. С. Атанасяна спочатку розглядається визначення двогранного кута, і на його основі вводиться поняття перпендикулярних площин. У підході О. Д. Александрова основою визначення перпендикулярності площин є поняття перпендикулярності між прямою і площиною: дві площини вважаються перпендикулярними, якщо в кожній з них можна провести пряму через будь-яку точку, яка буде перпендикулярна до іншої площини.

Доведення ознак перпендикулярності в просторі (між двома прямими, прямою і площиною, двома площинами) може виконуватися різними методами. У традиційних підручниках часто використовується розгляд паралелограмів і трикутників, проте можливий також векторний підхід, зокрема для доведення ознаки перпендикулярності прямої і площини та теореми про три перпендикуляри [15].

Ознака перпендикулярності двох прямих у просторі, яку пропонує О. В. Погорєлов, мало застосовується в задачах, а її доведення, хоч і не складне, є доволі об'ємним, тому недоцільно приділяти багато уваги цьому матеріалу. В теоремі про три перпендикуляри, на відміну від традиційних підходів, Погорєлов подає одну теорему, що поєднує пряме й обернене

твердження. При доведенні варто виділити окремі частини для достатності та необхідності, використовуючи символічні позначення умов та висновків, а також кольорове позначення на рисунку для всіх трьох перпендикулярів.

Важливо пояснити учням, що для доведення перпендикулярності двох прямих у просторі неможливо безпосередньо використати ознаку перпендикулярності, а тому доведення включає додаткові побудови з використанням властивостей перпендикулярності прямих і площин, а також визначень. Для зручності та кращого розуміння процесу доведення корисно представити його у вигляді таблиці [29].

Проведем аналіз ще кількох підручників.

У підручнику Г.П. Бевза та В.Г. Бевза виклад теми "Перпендикулярність прямих і площин у просторі" зосереджується на систематичному засвоєнні понять через приклади, пояснення і задачі різного рівня складності [5].

До основних підходів можна віднести:

1. Побудова теоретичної бази. Підручник дає чіткі означення перпендикулярності прямих і площин, поступово вводячи такі поняття, як кут між прямою та площиною, теореми про три перпендикуляри, а також ознаки та властивості перпендикулярності. Особливий акцент ставиться на використання доведень теорем для формування логічного мислення та на розкриття зв'язків між аксіоматикою планіметрії та стереометрією.

2. Покрокове ознайомлення з теоремами та їх застосуванням. Методика навчання включає численні задачі на доведення, що демонструють ключові властивості перпендикулярних прямих і площин. Наприклад, теорема про три перпендикуляри розглядається з прикладами практичного застосування. Запропоновані задачі від простих до складніших, що дозволяє учням поступово занурюватися в тему і самостійно практикувати навички побудови геометричних конструкцій.

3. Графічне представлення та наочність. Для більш ефективного



засвоєння понять, підручник містить велику кількість схем, рисунків і креслень, які ілюструють перпендикулярність між прямими та площинами. Це допомагає учням візуально зрозуміти складні просторові відношення. Використовуються наочні приклади з реального життя, що підкреслює значення перпендикулярності в різних галузях (архітектура, будівництво).

4. Різномірні завдання. Завдання включають як базові задачі для розуміння перпендикулярності, так і задачі на побудову, а також логічні задачі, які вимагають застосування теоретичних знань у нових ситуаціях. Це сприяє розвитку аналітичного мислення учнів.

Методика авторів забезпечує учням комплексне розуміння теми, створюючи міцну базу для вивчення більш складних геометричних структур у просторі. Такий підхід дозволяє послідовно та глибоко засвоїти основні теореми і методи роботи з просторовими об'єктами [5, 6, 7].

Методика викладання А.Г. Мерзляка акцентує увагу на інтерактивності та візуалізації понять, таких як перпендикулярність площин і прямих. Учні вивчають основні теореми з прикладами застосувань у повсякденному житті. Завдяки таким прикладам, як будівельні або інженерні конструкції, учні легко пов'язують вивчення теми з реальними застосуваннями, що полегшує сприйняття теоретичних понять. Особливу увагу приділено роботі з об'ємними кресленнями та графічним відображенням просторових фігур, що розвиває навички орієнтування у просторі.

У підручнику Є.П. Неліна тема «Перпендикулярність» розбита на підрозділи, що забезпечує ґрунтовний розгляд кожного аспекту. Зокрема, включено розділи з теорією та практичними вправами на кут між прямими, перпендикулярність прямої та площини, а також на ортоцентричне проектування, що допомагає учням зрозуміти механіку геометричних перетворень у просторі. Підручник забезпечує теоретичне роз'яснення понять із великою кількістю схем і рисунків, що надає можливість поглибленого опрацювання теми та її зв'язків з іншими розділами

## геометрії

Таким чином, усі три підручники охоплюють основні теми, пов'язані з перпендикулярністю, проте кожен із них має свій підхід до викладання: структурованість і логічна послідовність у Г.П. Бевза та В.Г. Бевз, інтерактивність і візуалізація у А.Г. Мерзляка, а також глибина теоретичного опрацювання та ортоцентричне проєктування у Є.П. Неліна.

Розглянемо деякі завдання з національного мультипредметного тесту у 2024 році, пов'язані з темою дослідження [47].

*Завдання №3 (18.05.2024).*

Доберіть закінчення речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Висота конуса та його твірна лежать на прямих, що...

А лежать в одній площині».

Б паралельні».

В не мають спільних точок».

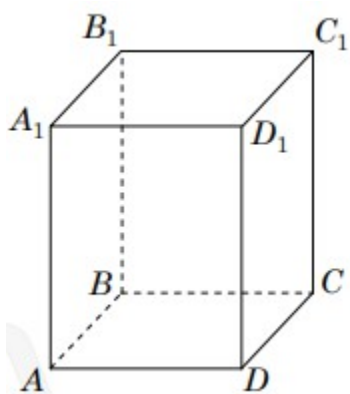
Г перпендикулярні».

Д мимобіжні».

*Відповідь: А.*

*Завдання №2 (01.06.2024).*

На рисунку зображено пряму чотирикутну призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Укажіть пряму, яка паралельна грані  $AA_1 D_1 D$ .

<p>А <math>C_1 D</math>  Б <math>A_1 B</math>  В <math>CB_1</math>  Г <math>C_1 D_1</math>  Д <math>BD</math></p>	
---	--

*Відповідь: В.*

*Завдання №2 (03.06.2024).*

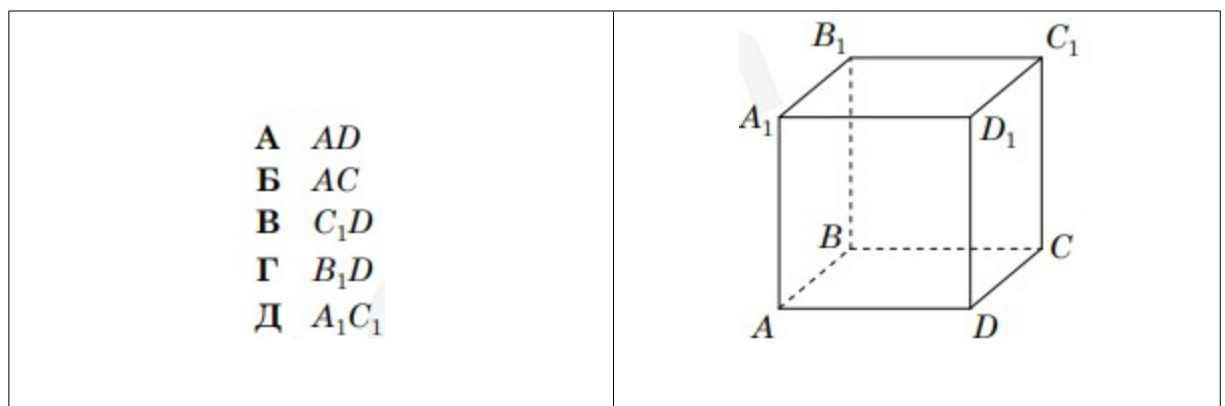
Укажіть тіло обертання, у якого твірні паралельні осі обертання.

А	Б	В	Г	Д
сфера	конус	куля	циліндр	призма

Відповідь: Г.

Завдання № (11.06.2024).

На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажіть пряму, яка паралельна площині  $AA_1 B_1 B$ .



Відповідь: В.

### 2.3. Зображення просторових фігур на площині

Зображення просторових фігур у геометрії відрізняються від креслень, створених за правилами нарисної геометрії. Для зображення тривимірних фігур на площині у шкільній геометрії використовуються деякі умовності. Проте такі зображення повинні відповідати кільком основним принципам, визначеним ще в 1940-х роках М. Ф. Четверухіним. Виділимо три ключові принципи [8].

**Коректність зображення:** зображення повинно точно передавати форму об'єкта, тобто бути одним із видів паралельної проєкції. Це означає, що в стереометричних рисунках необхідно враховувати властивості паралельної проєкції.

**Наочність:** зображення має створювати просторове уявлення об'єкта.

Наприклад, куб зображують так, щоб було видно кілька його граней, а не як квадрат, щоб уникнути спотворень. Призми і піраміди слід зображати так, щоб було видно якомога більше їхніх граней, а кулі, циліндри та конуси — із зображенням основ як еліпсів [39].

Простота виконання: рисунок не повинен вимагати складних побудов, які не стосуються самої задачі чи доведення теореми.

Рекомендується починати креслення призм і циліндрів із верхньої основи, де зручно видно всі лінії. Після цього ребра або твірні зручніше проводити вниз.

Для зображення просторових фігур застосовують два типи паралельного проектування: косокутну (прямі нахилені під довільним кутом до площини) і прямокутну (або ортогональну, коли промені перпендикулярні до площини). У школах за рекомендацією Брадїса використовують прямокутну проекцію, а також косокутну, зокрема кабінетну проекцію [5].

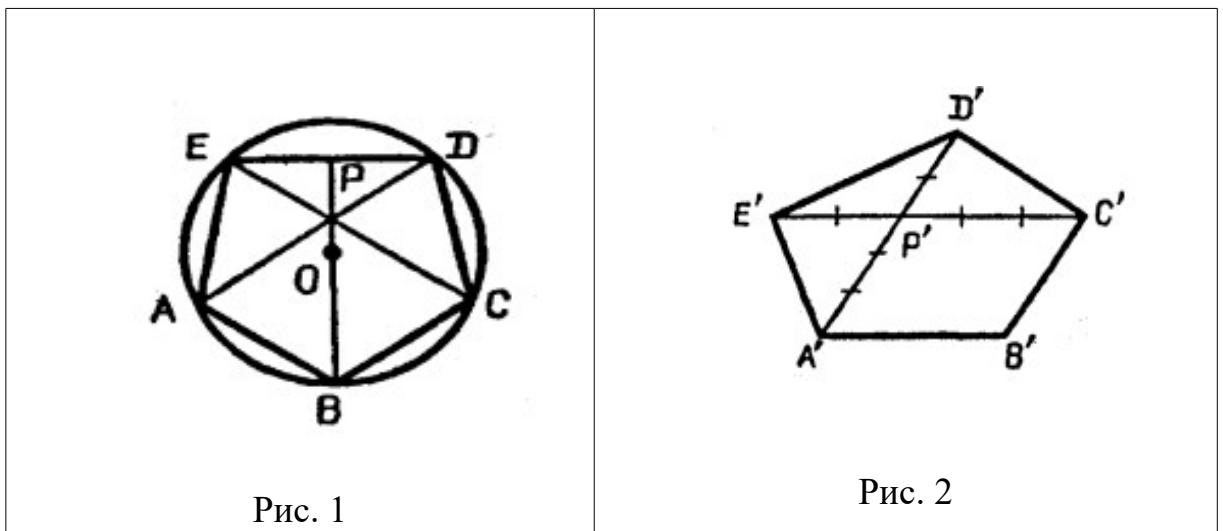
Розглянемо паралельні проекції деяких плоских фігур (табл. 6).

Таблиця 6.

	<p>проекція — трикутник будь-якої форми</p>
	<p>проекція — паралелограм будь-якої форми</p>
	<p>проекція — трапеція будь-якої форми</p>
	<p>проекція кола — еліпс</p>

Зображенням багатокутників і кола в довільній косокутній проекції.

За такого проектування будь-який трикутник можна розглядати як паралельну проєкцію наперед заданого трикутника. Зображенням квадрата, прямокутника, ромба, паралелограма може бути довільний паралелограм. Якщо задано довільний опуклий чотирикутник, то відношення відрізків діагоналей оригіналу має дорівнювати відношенню відповідних відрізків зображенням. Зображенням трапеції є трапеція із певним відношенням основ, якщо воно задане. Для побудови зображення правильних 5-кутника і 6-кутника враховуються їх оригінали. Можна довести, що в правильному п'ятикутнику  $ABCDE$  діагоналі  $AD$  і  $CE$  паралельні, відповідно сторонам  $BC$  і  $AB$ . І крім того, діляться точкою  $P$  у наближеному відношенні 3 до 2 (рис.1). Звідси випливає спосіб побудови зображення правильного п'ятикутника (рис. 2).



Правильний 6-кутник ділиться діагоналями на 6 правильних трикутників. Тому пари трикутників утворюють ромби (рис. 3). Існує кілька способів побудови зображення правильного шестикутника (Рис. 4).

Коло у косокутній проєкції зображається у вигляді несиметричного відносно горизонтального діаметра еліпса (рис. 5). Однак таке зображення кола не досить наочне, тому при зображенні тіл обертання послуговуються прямокутною проєкцією.

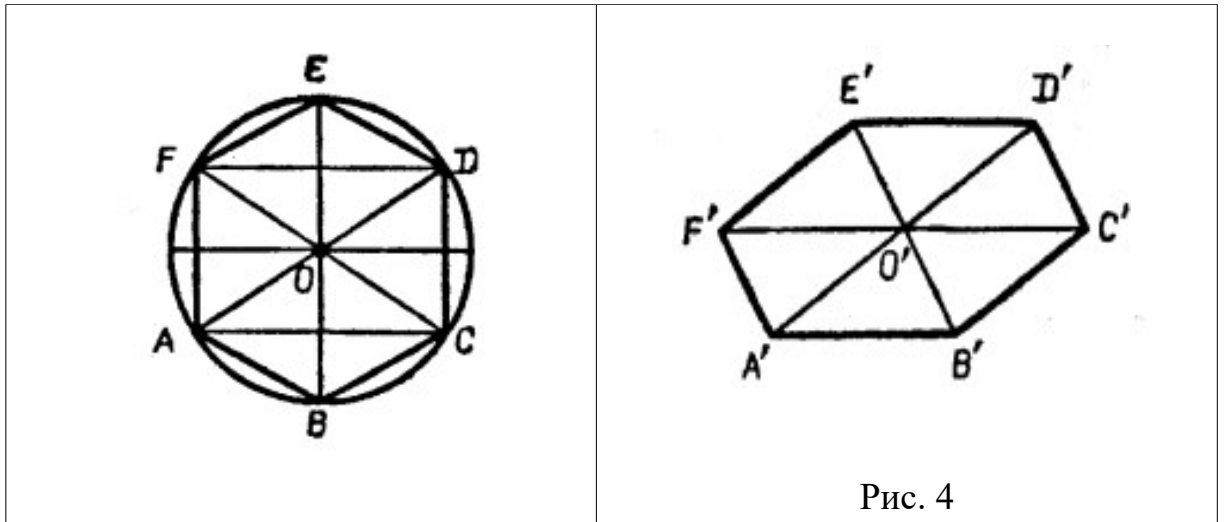


Рис. 4

При зображенні в кабінетній проєкції квадрата досить зобразити одну його сторону горизонтальним відрізком  $A'B'$ , що дорівнює стороні  $AB$  оригіналу. Із кінців цього відрізка провести до нього під кутом 45 градусів відрізки  $A'D'$  і  $B'D'$ , які дорівнюють половині  $A'B'$  (Рис. 6).

Зображення прямокутника в кабінетній проєкції виконується аналогічно, лише бічні сторони мають бути зображені у відношенні 1 до 2 з відповідними сторонами оригіналу. Зображаючи в кабінетній проєкції, правильний трикутник  $ABC$  слід враховувати, що його висота  $CD$  ( $AB$  помножене на корінь з 3 і поділене на 2), проведена під кутом 45 градусів до основи, зменшується при зображенні вдвоє і наближено дорівнює половині сторони  $AB$ , якщо зображення цієї сторони розміщене горизонтально (Рис. 7).

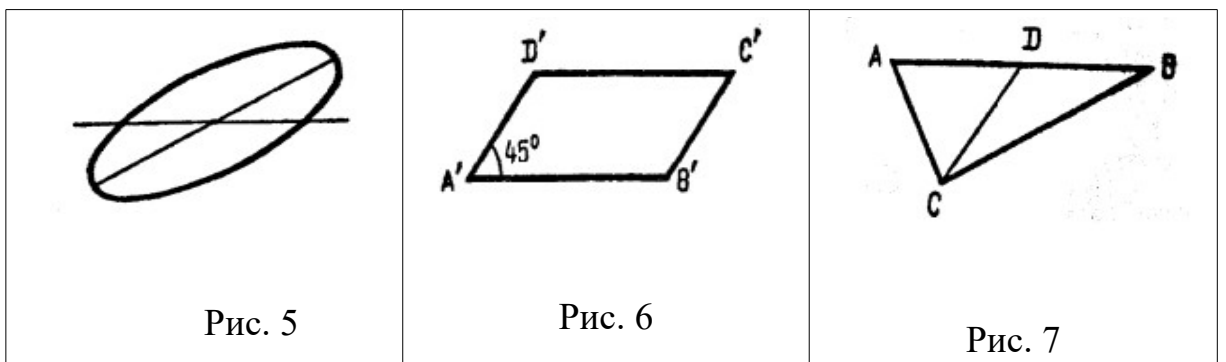


Рис. 5

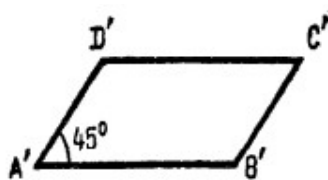


Рис. 6

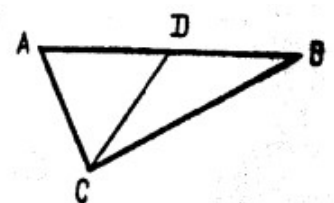
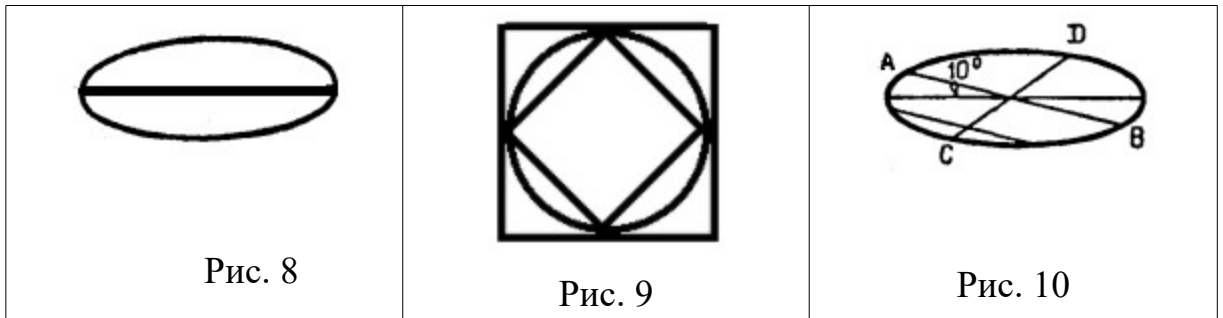


Рис. 7

Коло в ортогональній проєкції зображується у вигляді симетричного щодо горизонтального діаметра еліпса (рис. 8).

Зазвичай тіла обертання зображають в ортогональній проєкції [39]. При такому підході також доцільно відображати і многогранники, які комбінуються з тілами обертання. Якщо основи многогранників є правильними многокутниками, вписаними в коло або описаними навколо нього, можна скористатися правилами побудови їх зображень. Для використання готових зображень вписаних і описаних квадратів достатньо провести в колі два взаємно перпендикулярні діаметри, з'єднати їх кінці для побудови вписаного квадрата або провести дотичні до кола для побудови описаного квадрата (рис. 9).

У ортогональній проєкції побудова вписаного та описаного квадратів зводиться до проведення двох взаємно перпендикулярних діаметрів. Якщо перший діаметр АВ розташувати під кутом 10 градусів до горизонталі, то перпендикулярний до нього діаметр CD зобразиться як відрізок меншої довжини, що не буде зручним через збіг зображень ребер призм і пірамід. Тому зручніше розміщувати діаметр АВ під кутом до горизонтального діаметра (рис. 10).



Для побудови діаметра, перпендикулярного до АВ, використовується властивість хорд, паралельних діаметру. Для цього проводиться будь-яка хорда паралельно АВ, ділиться навпіл, і через центр еліпса проводиться діаметр CD. Це і буде зображенням діаметра, перпендикулярного до АВ.

Зображення вписаного і описаного квадратів в ортогональній проєкції отримується з'єднанням кінців діаметрів для вписаного квадрата та проведенням дотичних у кінцях діаметрів для описаного (рис 11).

Для зображення вписаних і описаних правильних трикутників використовуються їх геометричні властивості. Сторона вписаного трикутника ділить радіус кола, перпендикулярний до неї, навпіл, тоді як сторони описаного трикутника є дотичними до кола і паралельні сторонам вписаного трикутника (рис.12). Вершини описаного трикутника лежать на продовженні висот вписаного трикутника, на відстані двох висот від відповідної вершини, що дозволяє сформулювати правила побудови [29].

Алгоритм побудови правильного вписаного трикутника (рис. 13):

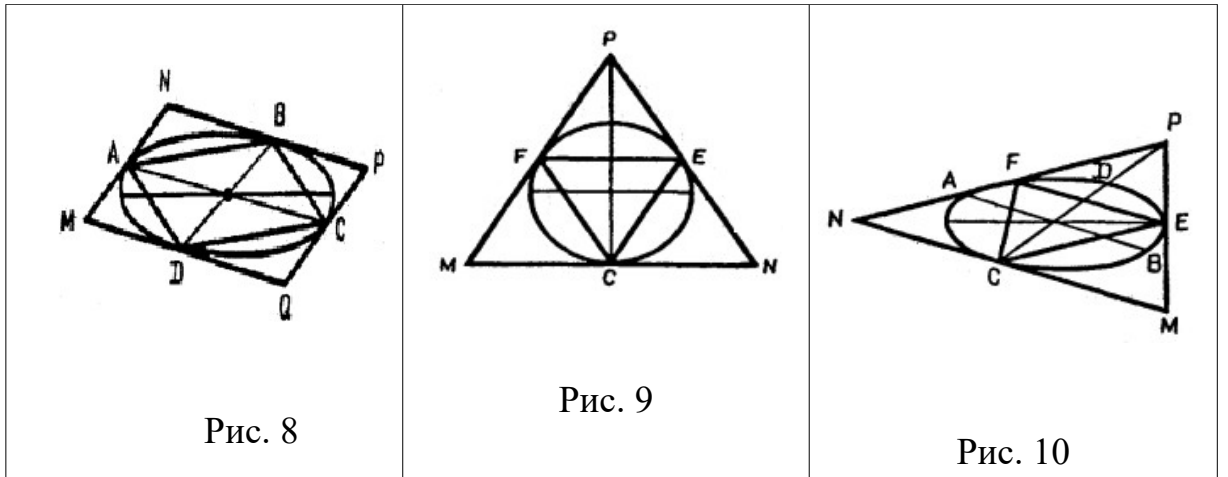
Побудувати еліпс і дві взаємно перпендикулярні осі  $AB$  і  $CD$ , як було описано вище.

Провести хорду  $EF$  паралельно діаметру  $AB$  через середину одного з радіусів.

З'єднати кінці хорди  $EF$  з кінцем  $C$  діаметра. Таким чином, трикутник  $ECF$  є ортогональним зображенням правильного вписаного в коло трикутника.

Ортогональну проєкцію правильного описаного трикутника легко виконати, якщо відкласти на продовженні будь-якої з висот вписаного трикутника відрізок рівний висоті і провести Одержану точку  $P$  і дві інші вершини  $E$  і  $F$  вписаного трикутника дотичні. Третю дотичну проводять через третю вершину вписаного трикутника паралельно його протилежній стороні або інакше відклавши на одній з побудованих дотичних, наприклад,  $PE$ , відрізок  $EM$  рівний  $PE$ , провести дотичну через точки  $M$  і  $C$ . При побудові зображення правильного вписаного трикутника можна ділити навпіл будь-який з чотирьох радіусів, але коли трикутник є основою многогранника, доцільно обрати такий, щоб дві грані останнього були видимі. Щоб зображення основи многогранника як описаного трикутника було більш наочним, потрібно повернути орієнтацію вписаного трикутника на  $180$  градусів.





Вивчаючи многогранники в 11 класі, учні повинні послуговуватись запровадженими правилами-орієнтирами відповідних зображень.

### РОЗДІЛ 3

## СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ

Основні підходи до викладання геометричних тем, таких як паралельність і перпендикулярність прямих і площин, відзначили значні зміни завдяки сучасним педагогічним методам і технологіям. Новітні цифрові ресурси та інтерактивні інструменти, такі як GeoGebra, Desmos та AR (доповнена реальність), залишаються більш наочними й ефективними засвоювати складні простори [34].

*Інтерактивні програми.* Використання динамічних геометричних середовищ дозволяє учням маніпулювати геометричними об'єктами, змінювати їх параметри та наочно вивчати взаємне розташування прямих і площин. Це додатково учням краще розуміти абстрактні поняття завдяки самостійним практичним завданням.

Учні можуть змінювати параметри прямих і площин, спостерігаючи за їх взаємним положенням у реальному часі. Так, у GeoGebra можна розташувати пряму та площину в просторі й дослідити, за якими умовами вони будуть паралельними або перпендикулярними.

Інтерактивні програми дають можливість не лише змінювати положення. Cabri 3D та SketchUp можуть обертати моделі, змінювати їхнє розташування та навіть створювати тривимірні конструкції, які тепер краще сприймають просторові відносини.

З використанням таких інструментів, як Desmos, учні можуть наочно розв'язувати завдання з курсу геометрії. Наприклад, вони можуть будувати різні конфігурації. Використовуючи SketchUp, наприклад, можна спроектувати макет будівлі й дослідити, як паралельні й перпендикулярні елементи впливають на стійкість конструкції. Програми, такі як GeoGebra та Desmos, сприяють розвитку самостійного мислення, після чого учні можуть експериментувати з наявними об'єктами, перевіряти різні варіанти побудови та досліджувати гіпотези щодо паралельності та перспективи.

Інтерактивні програми дають можливість самостійно доводити теореми й перевіряти їх заУчні GeoGebra можуть створювати перпендикуляри до площини або паралельні прямі й перевіряти правильність своїх побудов через аналіз властивостей цих об'єктів [35].

До переваг інтерактивних програм можна віднести підвищену мотивацію та зацікавленість учнів, розвиток просторового мислення та індивідуальний підхід. Завдяки динамічним моделям і можливості працювати з об'єктами, учні підтримують більший захоплюючий і практичний досвід. Інтерактивні програми дозволяють кожному учню працювати у власному темпі, обираючи найзручніше.

*Проектне навчання.* Завдання на основі реальних ситуацій, таких як моделювання архітектурних об'єктів, допомагають учням отримати знання про паралельність і перпендикулярність у практичних ситуаціях, стимулюючи їхню креативність [38].

Розглянемо основні етапи проектного навчання.

Перший етап. Визначення мети проекту. На початковому етапі учням дається завдання, пов'язане з дослідженнями паралельності й перпендикулярності. Наприклад, об'єкт можна покласти у створенні макету будівлі, де необхідно зберегти паралельність і перпендикулярність конструктивних елементів (наприклад, стіни та опори).

Другий етап. Дослідження та планування. Учні досліджують основні теоретичні аспекти теми, вивчаючи, як паралельні й перпендикулярні елементи створені в реальності. Використовують GeoGebra або SketchUp , для створення ескізів та планів.

Третій етап. Розробка та реалізація проекту. Учні починають роботу над практичною частиною проекту, створюючи фізичні або цифрові моделі.

Четвертий етап. Презентація та обговорення. Учні представляють результати своєї роботи.

П'ятий етап. Рефлексія та аналіз. Завершальний етап включає

рефлексію, де учні аналізують процес, обговорюють труднощі та оцінюють результати.

Можна, наприклад, запропонувати створити модель мосту з дотриманням паралельності та перпендикулярності основних опорних елементів або створити модель будівлі (дизайн кімнат та розташування меблів), враховуючи розташування стін, вікон і дверей, які повинні відповідати принципам паралельності та перпендикулярності.

До переваг даного методу можна віднести практичну значущість, розвиток ключових навичок та підтримку активного навчання. Замість того, щоб просто вивчити теорію, учні бачать, як геометрія діє в реальному житті. Це інтерес до теми й мотивація до навчання. Робота над проектом розвитку комунікативних, креативних та аналітичних здібностей. Учні вчаться працювати в команді, обговорювати та обґрунтовувати свої ідеї, знаходити шляхи вирішення складних завдань. Проектне навчання спонукає учнів до самостійного дослідження та критичного мислення, що є місцем для формування глибокого розуму.

*STEM-інтеграція* у вивченні геометрії, зокрема тій паралельності та перпендикулярності прямих і площин, поєднує математику з іншими дисциплінами — наукою, технологіями та інженерією. Цей підхід дозволяє учням вивчати геометричні концепції на практиці, розвиваючи навички застосування теорії в реальних проектах, які відображають реальне використання паралельних і перпендикулярних об'єктів [34, 35].

Основні напрями STEM-інтеграції в темі паралельності та перпендикулярності:

- Використання робототехніки та програмування. Завдяки робототехнічним наборам, наприклад, LEGO Mindstorms , учні можуть створювати прості конструкції, де паралельні й перпендикулярні елементи забезпечують стійкість і рівновагу робіт. Відтворюючи задані умови паралельності чи перпендикулярності в програмах, одночасно засвоюючи базові алгоритми та кодування, що

згодом підтримує їхню здатність до логічного та алгоритмічного мислення.

- 3D-друк для моделювання геометричних фігур. У проектах, пов'язаних із геометричним моделюванням, учні можуть використовувати 3D-принтери для створення фізичних моделей, які відображають паралельні й перпендикулярні відносини між площинами та прямими. Це дозволяє їм бачити об'єкти в реальному розмірі та обсязі, що сприяє розвитку просторового мислення. Наприклад, вони можуть проектувати куб чи паралелепіпед у програмі Tinkercad , враховуючи умови паралельності й перпендикулярності [37].
- Фізичні експерименти та інженерні проекти. В інженерних проектах, таких як будівництво мостів або каркасів будівель, випускаються паралельні та перпендикулярні елементи. Під час створення таких моделей учні використовують знання з фізики, як-от закони рівноваги, жорсткість конструкції та розподіл навантаження. Це не лише у закріпленні геометричних знань, а й у розумінні фізичних законів, які діють у реальному світі.
- Інтеграція з інформаційними технологіями. Використання таких програм, як GeoGebra , Desmos , та спеціалізованих CAD-програм (наприклад, AutoCAD або SketchUp ), дозволяє учням створювати тривимірні моделі та креслення, де можна детально вивчити паралельність та перпендикулярність прямих і площин. За допомогою цих програм учні вчаться отримати теоретичні знання у створених складних технічних креслень, що є місцем для розуміння них архітектурних та інженерних принципів.
- Розвиток STEM-програм із паралельністю та перпендикулярністю. Учням пропонується виконати практичні завдання з моделями будівель, транспортних засобів навіть або меблів, що вимагають точних розрахунків і дотримання геометричних принципів.

Наприклад, розробка плану для містобудівництва чи паркування автомобілів, де важливо лінії руху та зони, повинні бути паралельними чи перпендикулярними для забезпечення безпеки та зручності.

До основних переваг STEM-інтеграції у вивченні геометрії можна віднести практичну спрямованість, розвиток міждисциплінарних навичок, формування дослідницьких навичок, розвиток технічних компетентностей [34].

STEM-інтеграція показує, як геометричні поняття застосовуються в реальних галузях, підвищуючи інтерес учнів у вивченні математики. Учні одночасно володіють знаннями з кількох галузей, що формує їхню здатність до комплексного вирішення проблеми. Виконуючи дослідницькі проекти, учні навчаються самостійно знаходити інформацію, експериментувати та робити висновки, що сприяє їх науковому розвитку. Використання таких програм, як 3D-моделювання і CAD, формує у школярів початкові навички роботи з професійним програмним забезпеченням, що важливо для їх подальшої освіти та кар'єри.

Таким чином, STEM-інтеграція є ефективним підходом у вивченні геометричних тем, такі як паралельність і перпендикулярність, після чого учням розуміти практичне значення геометрії і готуватися до використання знань у майбутній професійній діяльності.

*Проблемне навчання.* Завдання, які вимагають вирішення реальних проблем (наприклад навігація або конструювання), допомагають учням розвивати навички критичного мислення та самостійного дослідження.

Розглянемо основні етапи застосування методу проблемного навчання.

Створення проблемної ситуації. На початку уроку вчитель ставить перед учнями запитання, які виходять за рамки звичайного завдання і вимагають нового підходу. Наприклад, можна або запропонувати завдання, де потрібно застосувати, які можуть бути одночасно паралельними або

перпендикулярними третій площі дві площі, ж розташувати конструкцію паралельно та перпендикулярно в реальних архітектурних умовах.

Висування гіпотез. Учні висувають можливі варіанти розв'язання проблеми. Важливо, щоб кожен мав можливість висловити свою думку або гіпотезу, обґрунтувати її, навіть якщо вона виявляється неправильною.

Пошук рішень. На цьому етапі учні розглядають знання про паралельність і перпендикулярність у практичних задачах. Наприклад, їм можна запропонувати використати моделі чи програму GeoGebra для побудови паралельних і перпендикулярних прямих і площин. Учні можуть обчислювати кути, аналізувати результати та перевіряти свої гіпотези.

Обговорення та аналіз отриманих рішень. Після завершення роботи учні обговорюють отримані результати, порівнюють їх, обґрунтовують правильність чи хибність певних гіпотез, виправляють помилки. У цьому процесі вчитель керує обговореннями, підсумовує основні висновки та узагальнює їх.

Формулювання висновків та закріплення знань. Учні самостійно або разом із учителем формулюють основні правила паралельності та перпендикулярності, що підсумовують їх дослідження.

До переваг методу проблемного навчання для цієї теми можна віднести розвиток мислення, застосування знань на практиці, мотивацію та залучення учнів.

Виділимо ще кілька сучасних підходів до викладання геометричних тем.

*Доповнена реальність (AR).* технологія доповненої реальності передає геометричні об'єкти в реальний світ, дозволяючи учням вивчати паралельність.

*Кооперативне навчання та рефлексія.* Спільна робота в малих групах та обговорення допомагають учням обмінюватися ідеями та підтримувати мотивацію до навчання, а рефлексія покращує глибше осмислене матеріал.

## ВИСНОВКИ

Аналіз методичних джерел з теми дослідження дозволяє зробити висновок, що вивчення паралельності та перпендикулярності прямих і площин є ключовою темою для подальшого освоєння геометричного курсу. Ця тема охоплює як планіметричний, так і стереометричний курси шкільної геометрії. Їхнє вивчення розвиває просторове мислення та допомагає краще розуміти взаємозв'язки між об'єктами. Вміння розв'язувати задачі на паралельність та перпендикулярність прямих і площин має важливе значення не тільки для успішного складання Національного мультипредметного тесту, але й для подальшого навчання та практичного застосування в різних сферах життя.

Основне завдання вчителя при вивченні даних тем полягає у забезпеченні чіткого розуміння базових понять; систематизації уявлень учнів щодо внутрішнього розташування прямих на площині та у просторі; формуванні здатності розпізнавати основні випадки взаємного розташування прямих та площин. На початкових етапах вивчення важливо уникати складних формулювань, зосереджуючись на візуальних образах і наочних демонстраціях. Учитель повинен допомогти учням зрозуміти, як компонувати теоретичні знання на практиці, зокрема в завданнях з реальними аналогами.

Ці розділи у шкільному курсі геометрії висвітлені досить докладно, і відведеного навчального часу достатньо для його повного засвоєння учнями. Методика викладання початкових розділів планіметрії забезпечує поступовий перехід від конкретного до загального, з постійними прикладами з реального життя та максимальними видами наочності. Акцент робиться на розвиток умінь логічного мислення, обґрунтування та доведення тверджень.

В існуючій шкільній літературі послідовність викладу тем паралельності та перпендикулярності відрізняються. В роботі вивчено дане



питання. Ми погоджуємось з рекомендаціями багатьох авторів, зокрема Зінаїди Іванівни Слєпкань, що оптимальна послідовність вивчення тем у підручниках повинна бути такою:

Паралельність прямих. Учні вивчають паралельні прямі у площині та їхні властивості, включаючи аксіоми та теореми.

Паралельність площин і прямих у просторі. Додається поняття тривимірного простору, де прямі можуть бути паралельними площинам або іншим прямим.

Перпендикулярність прямих у площині. Переходять до понять кутів між прямими та знайомлять учнів із ознаками перпендикулярності.

Перпендикулярність прямих і площин у просторі. Вивчається нормаль до площини та способи знаходження перпендикулярів у тривимірному просторі.

Такий підхід сприяє поступовому розвитку уявлення про простір і логічно впорядковує матеріал для кращого засвоєння.

В роботі також вивчаються можливості використання новітніх технологій і методик, які значно підвищують ефективність навчального процесу. Це інтерактивні геометричні програми, такі як GeoGebra та Desmos; проєктне навчання та STEM-інтеграція; методи кооперативного навчання і доповненої реальності (AR). Спільні проєкти розвивають соціальні навички, тоді як AR-технології допомагають уявляти геометричні структури в просторі. Завдяки таким підходам учні не тільки краще засвоюють теорію, але й навчаються її застосовувати на практиці, що є необхідним для їх подальшої академічної та професійної діяльності.

У перспективі подальше впровадження інтерактивних матеріалів і цифрових технологій дозволить підвищити якість навчання геометрії, особливо в темах, що вимагають високого рівня абстракції та просторового мислення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І.А. Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи : монографія / І.А. Акуленко. Черкаси: видавець Чабаненко Ю., 2013. – 460 с.
2. Апостолова Г.В. Хитроумний модуль: Посіб. для 6–11 кл. – К.: Поліграф-сервіс, 2001. – 252 с.
3. Баран О.І., Васильєва Л.Я. Задачі для олімпіад, конкурсів, змагань. Математика. 6-11 класи. – Х.: Видавнича група «Основа», 2020. – 239 с.
4. Бевз Г.П. Методи навчання математики. – Х.: Основа, 2003. – 96 с.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1989. – 352 с.
6. Бевз Г.П. Виховання учнів математикою. – Харків: Основа, 2004. – 96 с.
7. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: [навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів]. – К.: НПУ імені М. п. Драгоманова, 2004. – 312 с.
8. Блох О.Я., Канін Є.С., Килина Н.Г. Методика викладання математики в середній школі. – Х.: Основа, 1992. – 304 с.
9. Будаєв В.Д., Васильєва Л.Я., Ніколаєнко С.В. Елементарна математика. Тригонометрія. – Миколаїв: МДУ, 2006. – 87 с.
10. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти // Педагогіка і психологія. – 1996. – №1. – С. 40–45.
11. Василенко О.О. Між алгеброю і гармонією. – Х.: Основа, 2009. – 112 с.
12. Васильєва Л.Я., Пархоменко О.Ю. Елементарна математика. Національні рівняння та нерівності. – Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2017. – 56 с.
13. Годованюк Т.Л. Метод навчальних проєктів в курсі методики

навчання математики [Електронний ресурс] – Режим доступу:

[http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc\\_gum/pednauk/2010\\_2/295.pdf/](http://archive.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/pednauk/2010_2/295.pdf/)

14. Гончаров І.В., Скафа О.І. Евристика в геометрії: факультативний курс. – Х.: Основа, 2004. – 112 с.
15. Грохольська А.В., Яценко С.Є. Методика навчання математики в старших та вищих школах. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007.
16. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф., Єршов С.В. – Х.: Ранок, 2016. – 256 с.
17. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Х.: Гімназія, 2016. – 208 с.
18. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастичності з комп'ютерною підтримкою. – К.: Шкільний світ, 2006. – 119 с.
19. Збірник задач з математики. 5–9 класи: Наскрізні лінії компетентностей та їх реалізація / Васильєва Д.В., Василюк Н.І. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 112 с.
20. Збірник навчально-методичних задач з методики навчання геометрії: навчально-методичний посібник / Матяш О.І., Воевода А.Л., Михайленко Л.Ф., Наконечна Л.Й. – Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2012. – 393 с.
21. Концепція Нової української школи [Електронний ресурс] // Міністерство освіти і науки України. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/tag/nova-ukrainska-shkola>.
22. Корольський В.В., Крамаренко Т.Г., Семериков С.О., Шокалюк С.В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання: навчальний посібник. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. – 324 с.
23. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 148 с.

- 24.Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник (укладачі В.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк). – Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2013. – 224 с.
- 25.Лосева Н.М., Брусило З.О. Педагогічні технології. їх застосування до навчання математики. – Донецьк: ДонНУ, 2012. – 164 с.
- 26.Matematyka i jej historia / W. Wieslaw.— Opole: NOWIK, 1997.— 416 s.—SBN 83-905456-7-5
- 27.Математика: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Х.: Гімназія, 2016. – 208 с.
- 28.Математика. 5–11 класи: навчальні програми, методичні рекомендації щодо викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 н. р. / Гладковський Р.В. – Харків: Ранок, 2019. – 160 с.
- 29.Методика навчання математики: підручник для студентів мат. спеціальностей пед. навч. закладів / Слєпкань З.І. – К.: Вища школа, 2006. – 512 с.
- 30.Москаленко О.А., Черкаська Л.П. Шкільний курс математики і методики його викладання. – Полтава: ПДПУ, 2006. – 68 с.
- 31.Моторіна В.Г. Професійна компетентність вчителя математики профільної школи. – Харків: ХНПУ, 2014. – 267 с.
- 32.Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. Друге доповнене і виправлене видання –Х.: Видавець Іванченко І. С., 2012. – 318 с.
- 33.Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018: режим доступу: [https://testportal.gov.ua/wpcontent/uploads/2019/12/PISA\\_2018\\_Report\\_UKR.pdf](https://testportal.gov.ua/wpcontent/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf).
- 34.Поліхун Н. І., Постова К. Г., Сліпухіна І. А., Онопченко Г. В., Онопченко О. В. Упровадження STEM-освіти в умовах інтеграції формальної і неформальної освіти обдарованих учнів. Київ: Інститут

- обдарованої дитини НАПН України, 2019. 80 с.
35. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra як інструменту реалізації STEM-освіти: навч. посіб. / Гризун Л. Е., Пікалова В. В., Русіна І. Д., Цибулька В. А. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2018. 80 с.
36. Прус А. В., Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. - Житомир: "Рута", 2011 - 388с 19. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во «Рута», 2016. 468 с. <https://kirdey.com/zadachi-z-parametrami>
37. Рашевська Н. В. Перспективи застосування засобів доповненої реальності у процесі навчання майбутніх інженерів. Науковий вісник Ужгородського університету. серія: «Педагогіка. Соціальна робота». 2018. Вип.2 (43). С. 226–228. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvuuped\\_2018\\_2\\_45](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvuuped_2018_2_45)
38. Романовська М. Б. Метод проектів у навчальному процесі: методичний посібник. Харків: Веста: Видавництво «Ранок», 2007. 160 с.
39. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів / З. І. Слепкань. – К.: Зодіак, 2000. – 512 с.
40. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. - 240 с. 18
41. Фахове періодичне видання “Математика в школах України” (вид-во “Основа”).
42. Фахове періодичне видання “Математика” (вид-во “Шкільний світ”).
43. Фахове періодичне видання “Математика в школі”, “Математика в сучасній школі” (вид-во “Педагогічна преса”).
44. Шищенко І. В. Забезпечення прикладної спрямованості шкільного

курсу математики в класах з гуманітарним профілем навчання // Фізико-математична освіта : науковий журнал. 2016. Випуск 3(9). С. 125-130. 19. PISA: математична грамотність / уклад. Т. С. Вакуленко, В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко; перекл. К. Є. Шумова. К. : УЦОЯО, 2018. 60 с.

## INTERNET РЕСУРСИ

46. Навчальні програми. Режими доступу:

для учнів 10 – 11 класів:

рівень стандарту <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx>

профільний рівень <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx>

початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу:

<https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx>

<http://lv.testportal.gov.ua:8080/guide?subject=0%2C6&show=%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B6%D0%B8%D1%82%D0%B8>

47. [https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-pryami\\_ta\\_ploshini\\_u\\_prostori/](https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-pryami_ta_ploshini_u_prostori/)

   <https://ilearn.org.ua/>