Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет
ФАКУЛЬТЕТ КОМП’ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи
Спеціальності: 014 Середня освіта
Спеціалізація: 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Поворозник Тетяна Миколаївна
Керівник: кандидатка педагогічних наук, старша викладачка Григор’єва Валентина Борисівна
Рецензент: кандидатка педагогічних наук, доцентка кафедри природничо-наукової підготовки ХДМА Спичак Т.С.

Івано-Франківськ – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування актуальності теми дослідження. Прикладні задачі – це математичні задачі, які моделюють реальні ситуації або проблеми з різних галузей знань, таких як фізика, економіка, біологія, техніка тощо. Мета таких задач – показати, як математичні знання можуть бути використані для вирішення практичних проблем у реальному житті. Вони дозволяють здобувачам зрозуміти прикладне значення математики і бачити її користь за межами теоретичних понять.

Основні характеристики прикладних задач є практичний контекст (задачі беруться з реального життя або професійних сфер, наприклад, обчислення витрат, фінансовий аналіз, розрахунок швидкості тощо); міждисциплінарний характер (вони часто потребують використання знань із різних предметів, наприклад, фізики, хімії або економіки); проблемний підхід (часто прикладні задачі не мають єдиного вірного способу розв'язання, що стимулює здобувачів шукати найоптимальніший підхід до розв'язання).

Ціла низка математиків-методистів займалися впровадженням прикладних задач. Так, П.С. Александров, один із видатних математиків і педагогів, акцентував увагу на значенні завдань практичного характеру в навчанні. Він вважав, що залучення прикладних задач допомагає здобувачам краще зрозуміти математичні концепції та підвищити інтерес до предмета [1]. А.М. Колмогоров також був активним прихильником реформи шкільної математичної освіти. Він приділяв велику увагу практичним застосуванням математики та важливості її використання для розв'язання реальних задач. В.А. Зелінський – математик і методист, який багато працював над розробкою методичних посібників і підручників з математики. Він підкреслював важливість прикладних задач у навчанні та впроваджував методи, які дозволяють здобувачам наочно бачити застосування математичних знань. Педагог і методист, відомий своєю роботою над створенням підручників і методик з алгебри та геометрії, Г.П. Бевз активно включав прикладні задачі в програми навчання, підкреслюючи їх роль у розвитку логічного мислення [2]. Також можна відмітити і Н.І. Прокопенка, також математика-методиста, який займався дослідженням і впровадженням прикладних задач у шкільну програму. Він вважав, що такі задачі сприяють формуванню математичної компетентності й допомагають здобувачам адаптуватися до реальних умов життя.

Метою дослідження є розкриття питання методики використання прикладних задач на уроках алгебри, які сприятимуть посиленню міжпредметних зв'язків і зв'язку з життям.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри в базовій школі. *Предметом* дослідження є методика використання задач з практичним змістом на уроках алгебри.

Для досягнення поставленої мети було визначені основні *завдання*:

1. Визначити роль задач практичного змісту у формування мотивації і розвитку пізнавальної зацікавленості учнів.

2. Розглянути методичні особливості щодо розв'язавання задач прикладного змісту на уроках алгебри.

3. Розробити систему задач прикладного характеру, яка може бути запропонована здобувачам на уроках алгебри.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що було систематизовано та узагальнено основні методичні аспекти використання задач прикладного змісту на уроках алгебри. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу здобувачами вищої освіти та вчителями закладів середньої освіти.

Для розв'язання поставлених завдань дослідження застосовувалися наступні ***методи***: теоретичний аналіз методичної та психолого-педагогічної літератури з теми дослідження, а також вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів загальноосвітніх закладів.

Дослідження здійснювалося в межах теми науково-дослідної роботи кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики в умовах цифровізації вищої освіти» (державний реєстраційний номер 0123U103793).

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ розкриває роль задач прикладного змісту у навчанні алгебри. Він містить аналіз проблеми використання задач з практичним змістом в шкільному навчанні, а також класифікацію задач даного типу. У другому розділі розглянуто питання стосовно особливостей прикладних задач з алгебри. В третьому розділі наведено методичні рекомендації використання задач з практичним змістом на уроках алгебри, а також наведено систему задач практичного та прикладного змісту, які можуть бути запропоновані здобувачам.

РОЗДІЛ 1
РОЛЬ ЗАДАЧ З ПРАКТИЧНИМ ЗМІСТОМ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Аналіз проблеми використання задач з практичним змістом в шкільному навчанні

Використання задач з практичним змістом в шкільному навчанні є актуальним з кількох причин, які пов'язані як із потребами сучасного суспільства, так і з метою освіти в цілому. Ось основні з них:

1. *Зв'язок теорії з практикою*

Задачі з практичним змістом допомагають учням зрозуміти, як теоретичні знання з алгебри застосовуються в реальному житті. Це підвищує їхню мотивацію до навчання, оскільки учні бачать, що математика не є абстрактною наукою, а має конкретне застосування в різних сферах.

2. *Формування критичного мислення та навичок вирішення проблем*

Завдання з реального життя часто вимагають від учнів аналітичного мислення, уміння розпізнавати проблеми, формулювати запитання та шукати рішення. Ці навички є важливими в сучасному світі, де учні стикаються з комплексними ситуаціями, що потребують критичного підходу [12].

3. *Підготовка до майбутньої професійної діяльності*

Сучасні учні готуються до роботи в умовах, де навички аналізу даних, прийняття рішень та використання математичних знань є необхідними. Задачі з практичним змістом формують цінні навички, які знадобляться в майбутньому, незалежно від професії.

4. *Міжпредметні зв'язки*

Практичні задачі часто інтегрують знання з різних предметів, таких як фізика, хімія, економіка, географія тощо. Це сприяє більш глибокому розумінню матеріалу, оскільки учні бачать, як знання з однієї галузі можуть бути застосовані в іншій.

5. *Розвиток математичної грамотності*

У сучасному світі важливо, щоб учні мали не лише математичні знання, а й уміння їх застосовувати. Задачі з практичним змістом допомагають розвивати математичну грамотність, що є важливою для прийняття зважених рішень у повсякденному житті.

6. *Інтерес до навчання*

Завдання, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями, можуть підвищити інтерес учнів до предмета [9]. Коли учні бачать, що вони можуть використовувати свої знання для вирішення актуальних проблем, їхня мотивація до навчання зростає.

7. *Виклики сучасного світу*

Сучасні проблеми, такі як зміна клімату, економічні кризи, глобалізація та технологічний розвиток, вимагають від молодого покоління високого рівня обізнаності та навичок. Задачі з практичним змістом можуть допомогти учням аналізувати ці проблеми з математичної точки зору, розробляти стратегії вирішення і робити прогнози.

8. *Зростаюча роль технологій*

Зараз, коли технології стають невід'ємною частиною нашого життя, знання з алгебри і математики допомагають розуміти основи програмування, статистики та обробки даних. Задачі з практичним змістом можуть бути пов'язані з використанням технологій, що робить навчання більш релевантним.

Таким чином, використання задач з практичним змістом у навчанні алгебри є не лише актуальним, а й необхідним для формування «всебічно розвиненої особистості, готової до викликів сучасного світу» [21]. Це забезпечує глибше розуміння матеріалу, розвиток важливих навичок і підвищення мотивації до навчання, що в свою чергу сприяє успішному навчанню учнів.

Дослідження застосування прикладних задач в навчанні алгебри та математики взагалі стало предметом уваги багатьох педагогів, методистів та дослідників. Ось кілька відомих постатей та основні моменти, на які вони звертали увагу у своїх працях:

1. Василь Сухомлинський. Василь Сухомлинський, український педагог, підкреслював важливість практичного навчання та використання прикладних задач у шкільній освіті [25]. Він акцентував увагу на тому, що «навчання має бути зв'язане з життєвими ситуаціями», що дозволяє учням бачити реальну цінність знань.

2. Лев Ландау. Лев Ландау, відомий педагог та методист, у своїх працях зазначав важливість інтеграції математичних знань з реальним життям. Він виступав за використання практичних задач, які б «спонукали учнів до активного розв'язання проблем і розвитку критичного мислення» [16].

3. Микола Дрозд. Микола Дрозд звертав увагу на роль практичних задач у формуванні мотивації учнів до навчання математики. Він досліджував, як прикладні задачі можуть сприяти розвитку пізнавальних інтересів та здібностей учнів [5].

4. Геннадій Вершков. Геннадій Вершков зосередився на розробці методичних підходів до використання прикладних задач в навчальному процесі. Він вказував на необхідність «адаптації задач до віку і рівня підготовки учнів», а також на важливість міжпредметних зв'язків [8].

5. Тетяна Кравченко. Тетяна Кравченко досліджувала вплив використання задач з практичним змістом на результати навчання учнів. Вона вказувала на те, що такі задачі не лише підвищують зацікавленість учнів, але й покращують їхні результати в навчанні алгебри [19].

6. Лариса Бурдєєва. Лариса Бурдєєва акцентувала увагу на методах розв'язання прикладних задач в навчанні математики. Вона вважала, що навчання має базуватись на практичному застосуванні математичних концепцій, що допомагає учням краще засвоювати матеріал [4].

Основні акценти в дослідженнях:

- Актуалізація знань: педагоги підкреслювали важливість зв'язку навчального матеріалу з реальними життєвими ситуаціями.

- Мотивація учнів: використання практичних задач допомагає підвищити інтерес до навчання, адже учні бачать цінність у знаннях.

- Розвиток навичок: задачі сприяють розвитку критичного мислення, аналітичних здібностей та навичок розв'язання проблем.

- Міжпредметні зв'язки: багато дослідників акцентували увагу на важливості інтеграції знань з різних предметів для більш глибокого розуміння матеріалу.

- Методичні підходи: педагоги пропонували різні методи та стратегії впровадження прикладних задач у навчальний процес.

Таким чином, питання застосування прикладних задач в алгебрі розглядалося багатьма педагогами і методистами, які підкреслювали їхню важливість для формування у учнів практичних навичок, критичного мислення та мотивації до навчання. Вони пропонували різноманітні підходи та методи для ефективної інтеграції таких задач у навчальний процес.

1.2. Роль та місце прикладних задач в шкільному курсі алгебри

Прикладні задачі займають важливе місце в курсі алгебри і виконують кілька ключових функцій у навчальному процесі. Ось основні аспекти, які підкреслюють їх значення:

1. *Зв'язок теорії з практикою*

Прикладні задачі допомагають учням зрозуміти, як алгебра може бути використана для розв’язання реальних життєвих проблем. Це робить навчання більш зрозумілим і релевантним, адже учні бачать, як математичні концепції застосовуються у повсякденному житті.

2. *Розвиток критичного мислення*

Прикладні задачі сприяють розвитку аналітичних навичок, критичного мислення та уміння вирішувати проблеми. Учні вчаться формулювати запитання, аналізувати інформацію та знаходити ефективні рішення, що є важливими навичками в сучасному світі.

3. *Мотивація до навчання*

Задачі з практичним змістом підвищують інтерес учнів до предмета. Коли учні бачать, що знання можуть бути корисними для вирішення реальних проблем, їхня мотивація до навчання зростає. Це може також зменшити страх перед математикою, оскільки учні бачать її корисність.

4. *Формування математичної грамотності*

Прикладні задачі сприяють розвитку математичної грамотності учнів. Вони вчать учнів використовувати математичні знання для прийняття обґрунтованих рішень у реальному житті, що є важливим аспектом їхнього загального розвитку.

5. *Міжпредметні зв'язки*

Прикладні задачі часто інтегрують знання з інших предметів, таких як фізика, економіка, біологія тощо. Це сприяє більш глибокому розумінню навчального матеріалу та демонструє учням, як математика взаємодіє з іншими науковими дисциплінами.

6. *Включення в різні рівні навчання*

Прикладні задачі можуть бути адаптовані для різних рівнів підготовки учнів, що дозволяє вчителям використовувати їх у різноманітних формах: від простих обчислень до складних проєктних завдань. Це забезпечує диференційований підхід до навчання і дозволяє кожному учневі працювати на своєму рівні.

7. *Застосування різних методик навчання*

Використання прикладних задач сприяє впровадженню активних методів навчання, таких як групова робота, проєктна діяльність, дискусії. Це дозволяє учням краще засвоювати матеріал, оскільки вони не лише слухають, а й активно беруть участь у навчальному процесі.

Отже, прикладні задачі в курсі алгебри посідають важливе місце, оскільки вони не лише збагачують навчальний процес, але й формують у учнів необхідні навички, мотивацію та математичну грамотність. Використання таких задач робить навчання більш ефективним і значущим, сприяючи підготовці учнів до реальних викликів у житті.

Прикладні задачі в шкільному курсі алгебри доречно розглядати під час вивчення багатьох тем, оскільки вони допомагають учням краще зрозуміти матеріал, бачити його зв'язок із реальним життям та розвивати навички критичного мислення. Ось основні теми, де використання прикладних задач є найбільш ефективним:

1. *Лінійні рівняння та нерівності*

- Прикладні задачі: завдання, пов’язані з фінансами (розрахунок бюджету, прості кредитні розрахунки [15]), плануванням часу та ресурсів, порівнянням вартості товарів і послуг.

- Мета: навчити учнів складати лінійні рівняння та нерівності на основі реальних ситуацій та розв'язувати їх, щоб приймати обґрунтовані рішення.

2. *Системи лінійних рівнянь*

- Прикладні задачі: ситуації, пов’язані з оптимізацією витрат і ресурсів (наприклад, визначення кількості товарів для отримання певного прибутку), транспортні задачі, аналіз пропозицій і витрат.

- Мета: розвивати навички моделювання реальних задач за допомогою систем рівнянь та вчити оптимізації рішень.

3. *Квадратні рівняння*

- Прикладні задачі: задачі з фізики (наприклад, рух за рівняннями, розрахунок траєкторії об'єктів), архітектури (визначення оптимальних розмірів або форми), економіки (обчислення максимальної або мінімальної вартості).

- Мета: навчити учнів застосовувати квадратні рівняння для моделювання різних ситуацій, таких як максимізація і мінімізація.

4. *Функції та їх графіки*

- Прикладні задачі: задачі з аналізу зміни показників у часі (наприклад, зростання населення, коливання цін, попиту на ринку), задачі на залежність між кількістю та вартістю [12].

- Мета: допомогти учням зрозуміти поняття залежності між змінними, навчитись будувати та інтерпретувати графіки функцій.

5. *Пропорції, відсотки та дроби*

- Прикладні задачі: фінансові задачі (розрахунок відсотків, знижок, податків, інфляції), задачі з дозування речовин у хімії, масштабування в географії та картографії.

- Мета: навчити учнів розраховувати та інтерпретувати відсоткові співвідношення, розуміти поняття пропорції у реальних умовах.

6. *Прогресії (арифметична і геометрична)*

- Прикладні задачі: задачі на прогнозування (зростання населення, нарахування складних відсотків, розвиток технологій), задачі з накопичення та амортизації.

- Мета: формувати в учнів уявлення про закономірності розвитку, вчити прогнозуванню майбутніх показників на основі поточних тенденцій [6].

7. *Елементи комбінаторики та ймовірності*

- Прикладні задачі: задачі на прогнозування ймовірностей подій (наприклад, розіграш лотереї, ймовірність успіху в певних ситуаціях), управління ризиками в економіці та бізнесі.

- Мета: вчити учнів обчислювати ймовірності та розуміти їх практичне значення, що є важливим для аналізу випадкових подій.

8. *Логарифми*

- Прикладні задачі: задачі з економіки та банківської справи (наприклад, розрахунок періоду накопичення за певної відсоткової ставки), задачі з фізики (розпад радіоактивних елементів), звукова і світлова шкали.

- Мета: дати розуміння того, як використовуються логарифми в реальному житті, навчити учнів виконувати розрахунки для задач, що містять експоненційне зростання чи спад.

9. *Статистика та обробка даних*

- Прикладні задачі: завдання з обробки даних соціологічних досліджень, аналіз даних у медицині, економіці, демографії.
- Мета: навчити учнів аналізувати дані, використовувати їх для прийняття рішень і формування прогнозів.

Використання прикладних задач є доречним у багатьох темах курсу алгебри, оскільки вони дозволяють учням застосовувати теоретичні знання для вирішення реальних проблем, розвивати навички критичного мислення і практичного застосування математики. Це підвищує не лише розуміння теми, а й мотивацію учнів до вивчення предмета.

РОЗДІЛ 2
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

2.1. Класифікація прикладних задач з алгебри

Класифікація прикладних задач з алгебри є важливою темою в методиці навчання, адже правильно підібрана задача допомагає учням краще зрозуміти алгебраїчні концепції та їх застосування. Методисти та педагоги розробили різні підходи до класифікації прикладних задач, залежно від мети навчання, складності, галузі застосування та структури задачі.

Ось основні методисти та їх підходи до класифікації прикладних задач з алгебри:

1. Леонід Абрамович Зільберман

- Основні ідеї: Зільберман розділив задачі на репродуктивні (для тренування основних навичок), творчі (для розвитку креативного мислення) і дослідницькі (для поглибленого розуміння теми) [7].

- Типи задач:

  - Репродуктивні задачі: орієнтовані на застосування формул та відпрацювання навичок (наприклад, обчислення площі фігури з відомими сторонами).

  - Творчі задачі: вимагають нестандартного підходу до вирішення (наприклад, оптимізаційні задачі).

  - Дослідницькі задачі: включають аналіз і синтез інформації для вирішення (наприклад, аналіз економічних даних з побудовою математичних моделей).

2. Геннадій Вершков

- Основні ідеї: Вершков пропонував класифікацію прикладних задач на основі галузі застосування та характеру математичних операцій [4].

- Типи задач:

- Фізичні задачі: застосування алгебри для розв'язання задач з фізики (наприклад, розрахунок швидкості чи сили).

- Економічні задачі: задачі, пов'язані з фінансами, відсотками, оптимізацією витрат.

- Соціологічні задачі: використання алгебраїчних моделей для обробки соціальних даних.

- Біологічні та хімічні задачі: розрахунки концентрацій, росту популяцій.

3. Євгенія Гребньова

- Основні ідеї: Гребньова запропонувала класифікацію задач з акцентом на методі розв'язання та видах математичних моделей [6].

- Типи задач:

- Лінійні задачі: задачі, які можна розв’язувати за допомогою лінійних рівнянь або нерівностей.

- Квадратичні задачі: задачі, що вимагають квадратних рівнянь (наприклад, задачі на оптимізацію площі чи об'єму).

- Експоненційні та логарифмічні задачі: задачі, де використовуються експоненційні та логарифмічні функції (наприклад, задачі на зростання чи спад).

- Статистичні задачі: задачі, які потребують аналізу даних та використання статистичних методів.

4. Олександр Колмогоров

- Основні ідеї: Колмогоров у своїх роботах надавав особливої уваги задачам на моделювання. Він вважав, що задачі мають навчати учнів будувати математичні моделі реальних процесів [17].

- Типи задач:

- Моделювання економічних процесів: побудова моделей для аналізу доходів, витрат і прибутків.

- Моделювання фізичних процесів: задачі на моделювання руху, температурних змін, сил.

- Моделювання в біології: моделі росту популяцій, взаємодії видів.

5. Тетяна Лук'яненко

- Основні ідеї: Лук'яненко класифікувала задачі залежно від їх освітнього призначення [19].

- Типи задач:

- Ілюстративні задачі: для демонстрації теоретичних положень.

- Тренувальні задачі: для відпрацювання певних умінь і навичок.

- Контрольні задачі: для перевірки рівня засвоєння матеріалу.

- Розвивальні задачі: задачі, що вимагають творчого підходу і сприяють розвитку мислення.

6. Петро Таранухін

- Основні ідеї: Таранухін пропонував класифікувати прикладні задачі за ступенем складності та глибиною математичного змісту [23].

- Типи задач:

- Елементарні задачі: базові задачі для початкового рівня.

- Складні задачі: задачі, що потребують декількох етапів розв’язання і поєднання різних математичних тем.

- Інтегровані задачі: задачі, що вимагають знання з кількох тем одночасно.

Узагальнена класифікація прикладних задач

Виходячи з напрацювань методистів, можна виділити кілька загальних типів прикладних задач для шкільного курсу алгебри:

1. *За галуззю застосування*: фізичні, економічні, соціологічні, біологічні.

2. *За математичною моделлю*: лінійні, квадратні, експоненційні, логарифмічні, статистичні.

3. *За призначенням*: ілюстративні, тренувальні, контрольні, розвивальні.

4. *За складністю*: елементарні, середнього рівня, складні, інтегровані.

Класифікація прикладних задач дозволяє вчителям ефективніше добирати задачі для навчання, залежно від цілей уроку, рівня підготовки учнів та тематичної спрямованості.

2.2. Аналіз програмного матеріалу під кутом можливостей використання прикладних задач з алгебри

Аналіз програмного матеріалу з алгебри дозволяє визначити, в яких темах і класах доцільно використовувати прикладні задачі. Прикладні задачі сприяють не лише кращому засвоєнню теоретичного матеріалу, а й розвитку навичок застосування математики в реальному житті. Розглянемо основні теми в алгебрі, де можна використовувати прикладні задачі, з акцентом на класи.

6 клас

1. *Числові вирази та їхні властивості*
   - Прикладні задачі: оптимізація витрат часу або ресурсів (наприклад, розрахунок витрат на покупки, обчислення відстані за даними швидкості та часу).
2. *Лінійні рівняння з однією змінною*
   - Прикладні задачі: розрахунок витрат і доходів, вирішення задач на пропорції (наприклад, складання бюджетів, визначення вартості товарів зі знижкою).
3. *Прямо і обернено пропорційна залежність*
   - Прикладні задачі: швидкість і час, робота і продуктивність, розрахунок вартості товару за вагу або об'єм.

7-8 клас

1. *Квадратні рівняння*

- Прикладні задачі: моделювання траєкторії руху (наприклад, кидок предмета), оптимізація витрат (мінімізація чи максимізація).

2. *Функції (лінійна, квадратична)*

- Прикладні задачі: аналіз залежностей у реальних даних (наприклад, залежність витрат від часу, оцінка прибутковості бізнесу).

3. *Системи рівнянь*

- Прикладні задачі: планування кількості ресурсів у різних варіантах, задачі на суміші та сплави, транспортні задачі.

9 клас

1. *Розширення понять про функції* (зворотна пропорційність, степенева функція)

- Прикладні задачі: розрахунки фізичних процесів (наприклад, залежність сили від площі або тиску), економічні залежності.

2. *Ірраціональні вирази*

- Прикладні задачі: оцінка довжин діагоналей в архітектурі чи будівництві, задачі з фізики (розрахунок відстаней).

3. *Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей*

- Прикладні задачі: аналіз ризиків, ймовірність виграшу в лотереях, планування стратегій.

10–11 класи

1. *Тригонометричні функції*

- Прикладні задачі: розрахунки в інженерії, аналіз коливальних процесів (фізика), задачі геодезії.

2. *Похідна та інтеграл*

- Прикладні задачі: оптимізація у бізнесі (максимізація прибутків), розрахунок площ поверхонь чи об'ємів у фізичних задачах.

3. *Елементи математичного моделювання*

- Прикладні задачі: створення економічних моделей, прогнозування змін клімату, аналіз даних у біології чи соціальних науках.

Загальні прикладні задачі

У всіх класах актуальними є задачі, що моделюють:

- транспортні проблеми (оптимальний маршрут, розрахунок витрат на паливо);
- економічні розрахунки (бюджет, відсоткові ставки);
- фізичні задачі (розрахунок енергії, сили, часу).

Таким чином, у кожній темі алгебри можна знайти можливості для застосування прикладних задач. Головне – адаптувати рівень складності задач до віку та рівня підготовки учнів.

При виборі форм роботи з учнями для розв’язування прикладних алгебраїчних задач важливо враховувати їхній вік, рівень підготовки, а також мету навчання. Наведемо декілька ефективних форм роботи, які можна використовувати:

1. *Індивідуальна робота*

- Коли застосовувати:
  - Для розвитку самостійності, відповідальності та критичного мислення.
  - Якщо потрібно оцінити індивідуальний рівень знань учня.
- Приклади:
  - Учень розв’язує задачу про планування бюджету родини або оптимізацію витрат.
  - Створення власного проекту: наприклад, розрахунок маршруту подорожі з мінімальними витратами.
- Інструменти:
  - Друковані або електронні задачники.
  - Освітні онлайн-платформи (наприклад, GeoGebra, Desmos).

2. *Робота в парах*

- Коли застосовувати:
  - Для розвитку комунікативних навичок та взаємодопомоги.
  - При розв'язанні задач із кількома способами розв'язку.

- Приклади:
  - Одна пара складає систему рівнянь на основі прикладної задачі (наприклад, задачі про змішування розчинів), інша – розв’язує та перевіряє.
  - Розрахунок спільного проекту, наприклад, витрат на захід (купівля матеріалів, розподіл обов’язків).
- Інструменти:
  - Таблиці Google для спільної роботи.
  - Розподіл ролей: один складає рівняння, інший перевіряє.

3. *Групова робота*

- Коли застосовувати:
  - Для великих прикладних задач, які потребують розподілу обов’язків.
  - При навчанні моделюванню або проектуванню.
- Приклади:
  - Створення бізнес-плану: визначення оптимальної кількості товарів, які потрібно виготовити для отримання максимального прибутку (квадратична функція).
  - Задачі на транспортну оптимізацію: знайти оптимальний маршрут або спосіб доставки.
- Інструменти:
  - Візуалізація за допомогою програм Excel, Canva або Prezi.
  - Розподіл задач між учасниками: одні збирають дані, інші моделюють рівняння чи функції.

4. *Проектна робота*

- Коли застосовувати:
  - Для інтеграції знань із різних предметів (математики, фізики, економіки).
  - При роботі над довготривалими задачами.
- Приклади:

  - Проект "Енергозбереження в побуті": аналіз витрат електроенергії в домі, складання формул для оцінки зменшення витрат за умов різних тарифів.
  - Аналіз даних: дослідження тенденцій у використанні ресурсів, наприклад, води чи палива.
- Інструменти:
  - Використання презентаційних платформ.
  - Створення звітів і моделей із реальними даними.

5. *Ігрові форми*

- Коли застосовувати:
  - Для підвищення мотивації та зацікавлення учнів.
  - У молодших класах або для розрядки в старших.
- Приклади:
  - Математичний квест: кожна команда має вирішити прикладну задачу, щоб отримати підказку для наступного завдання.
  - "Аукціон задач": учні вибирають задачі різної складності та намагаються "заробити" найбільше балів.
- Інструменти:
  - Карточки із задачами, QR-коди, інтерактивні вікторини (Kahoot, Quizizz).

6. *Використання цифрових технологій*

- Коли застосовувати:
  - Для інтерактивних уроків та підготовки до реальних викликів сучасного світу.
- Приклади:
  - Моделювання фізичних або економічних процесів за допомогою програм (GeoGebra, Desmos, WolframAlpha).
  - Вирішення задач, пов’язаних із великими даними (Big Data), використовуючи Excel або Google Sheets.
- Інструменти:

   - Онлайн-курси, інтерактивні симуляції.
   - Робота зі штучним інтелектом (наприклад, для розрахунків і аналізу).

7. *Дискусії та дебати*

- Коли застосовувати:
   - Для старших класів, щоб навчити учнів аргументувати свої ідеї.
- Приклади:
   - Обговорення найкращих стратегій оптимізації (наприклад, задачі планування витрат на подорож).
   - Аналіз різних підходів до вирішення однієї задачі (лінійними або квадратичними функціями).

Поєднання кількох форм роботи (наприклад, групової роботи та використання технологій) значно підвищить ефективність навчання. Гнучкий підхід дозволить залучити учнів із різним рівнем підготовки та підтримувати їхню зацікавленість.

РОЗДІЛ 3
МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ

3.1. Методичні особливості навчання учнів розв'язуванню прикладних алгебраїчних задач

Задачі підвищеної складності, які містяться в спеціальних розділах шкільних підручників алгебри, досить різноманітні і за тематикою, і за формою, в якій вони поставлені, і за способами їх розв'язання, і за навчально-виховними функціями, які на них покладено. З цих задач легко виділити ті, розв'язання яких сприяє закріпленню знань, умінь і навичок, придбаних учнями в процесі вивчення тієї чи іншої теми. Умови багатьох задач підвищеної трудноші дозволяють і вчителеві, і учневі досить легко визначити, який математичний апарат необхідно застосувати при їх розв'язуванні, закріпленню яких знань, умінь і навичок, передбачених обов'язковою програмою шкільного курсу математики, сприяє розв'язання цих задач.

Найбільші труднощі в учнів, як правило, викликає розв'язування так званих нестандартних задач, які займають значне місце серед задач підвищеної складності в шкільних підручниках.

Яка ж задача називається нестандартною? «Нестандартні задачі – це такі, для яких в курсі математики немає загальних правил і положень, що визначають точну програму їх розв'язання» [11].

Проте слід зауважити, що поняття «нестандартна задача» є відносним. Одна і та ж задача може бути стандартною або нестандартною в залежності від того, чи відомі учню способи розв'язування задач такого типу чи ні. Наприклад, задача «Подайте вираз $2x^2+2y^2$ у вигляді суми двох квадратів» [4] є для учнів нестандартною до тих пір, поки учні не познайомилися зі способами розв'язування таких завдань. Але якщо після розв’язання цієї задачі учням запропонувати кілька аналогічних завдань, такі задачі стають для учнів стандартними. Аналогічно, задача «При яких натуральних значеннях x і y вірна рівність $3x+7y=23$?» [24] є нестандартною для учнів VII класу до тих пір, поки вчитель не познайомить їх із способом розв’язування таких задач (що, до речі, можна зробити при навчанні учнів математиці вже в VI класі).

Таким чином, нестандартна задача – це задача, алгоритм розв’язання якої учням невідомий, тобто учні не знають заздалегідь ані способу її вирішення, ані того, на який навчальний матеріал спирається розв’язання.

На жаль, іноді вчителя єдиним методом навчання розв’язувати задачі вважають показ способів розв’язування певних видів задач, після чого слідує часом виснажлива практика з оволодіння ними. Не можна не погодитися з висловом відомого американського математика і методиста Д. Пойа, що, якщо викладач математики «заповнить відведений йому навчальний час натаскуванням учнів в шаблонних вправах, він уб'є їх інтерес, загальмує їх розумовий розвиток і упустить свої можливості» [26].

Як же допомогти учням навчитися розв’язувати нестандартні задачі? Універсального методу, що дозволяє розв’язати будь-яку нестандартну задачу, на жаль, немає, так як нестандартні задачі в якійсь мірі неповторні. Однак досвід роботи багатьох передових вчителів, які домагаються хороших результатів у математичному розвитку учнів як у нас в країні, так і за кордоном, дозволяє сформулювати деякі методичні прийоми навчання учнів способам розв’язування нестандартних задач.

В літературі (вітчизняної та зарубіжної) методичні принципи навчання учнів умінням розв’язувати нестандартні задачі описані непогано [26], [31], [54]. Розглянемо окремі методичні прийоми навчання учнів VII-IX класів вмінь розв’язувати нестандартні алгебраїчні задачі.

Насамперед відзначимо, що навчити учнів розв'язувати задачі (в тому числі і нестандартні) можна тільки в тому випадку, якщо в учнів буде бажання їх розв’язувати, тобто якщо задачі будуть змістовними і цікавими з точки зору учня. Тому проблема першорядної важливості, що стоїть перед учителем, – викликати в учнів інтерес до розв'язання тієї чи іншої задачі. Необхідно ретельно відбирати цікаві задачі і робити їх привабливими для учнів. Як це зробити – вирішувати самому вчителеві. Одне безперечно: найбільший інтерес викликають в учнів задачі, взяті з навколишнього їхнього життя, задачі, природним чином пов'язані зі знайомими учням речами, досвідом, що служать зрозумілій учневі меті.

Учитель повинен уміти накопичувати цікаві для учнів задачі і своєчасно пропонувати їх. Наприклад, вчитель, який бажає навчити учнів розв'язувати в натуральних числах рівняння виду $ax + by = c$, може, звичайно, запропонувати учням виконати звичайну вправу. Але, як показують спостереження, учні легше і з великим інтересом навчаються способам розв'язування таких рівнянь, якщо їм запропонувати, наприклад, наступне завдання: «Щоб купити річ, треба сплатити 19 грн. У покупця тільки монети по 1 та 2 грн., у касира тільки по 10 грн. Чи може покупець розплатитися за покупку? А якщо у касира тільки монети по 5 грн.?»

Великий інтерес, що є для учнів стимулом для придбання умінь і навичок розв'язування невизначених рівнянь першого степеня з двома невідомими в натуральних і цілих числах, викликає, як правило, в учнів VI-VII класів наступне завдання: «У кімнаті стоять стільці і табуретки. У кожної табуретки три ніжки, у кожного стільця чотири ніжки. Коли на всіх стільцях і табуретках сидять люди, в кімнаті 39 «ніг». Скільки стільців і табуреток у кімнаті? »(Якщо стільців x, табуреток y то маємо рівняння $4x + 3y + 2(x + y) = 39$, звідки $5y = 39 - 6x, x = 4, x = 3$).

Звичайно, не можна привчати учнів розв'язувати ті задачі, які викликають у них інтерес. Але не можна і забувати, що такі задачі учень розв'язує легше і свій інтерес до розв'язання однієї або кількох задач він може в подальшому перенести і на «нудні» розділи, неминучі при вивченні будь-якого предмету, в тому числі і математики.

Таким чином, вчитель, який бажає навчити школярів розв'язувати задачі, повинен викликати у них інтерес до задач, переконувати, що від розв’язання математичної задачі можна отримати таке ж задоволення, як від розгадування кросворду або ребусу.

Далі, задачі не повинні бути занадто легкими, але й не повинні бути занадто важкими, оскільки учні, не розв’язавши задачу або не розібравшись у розв’язанні, запропонованому вчителем, можуть втратити віру в свої сили. Тому не слід пропонувати учням задачі, якщо немає впевненості, що вони зможуть їх розв’язати.

Ну а як же допомогти учневі навчитися розв’язувати задачі, якщо інтерес до розв'язування задач у нього є й труднощі розв’язання його не лякають? У чому має полягати допомога вчителя учневі, що не зумів розв’язати цікаву для нього задачу? Як ефективним чином спрямувати зусилля учня, який має певні труднощі із самостійним розв’язанням задач?

Перш за все, не варто йти найлегшим в цьому випадку шляхом – ознайомити учня з готовим розв’язанням. Не слід і підказувати, до якого розділу шкільного курсу математики відноситься запропонована задача, які відомі учням властивості і теореми потрібно застосовувати при розв’язанні.

Розв'язання нестандартної задачі – дуже складний процес, для успішного здійснення якого учень повинен вміти думати, здогадуватися. Необхідні також добрі знання фактичного матеріалу, володіння загальними підходами до розв’язування задач, досвід у розв’язуванні нестандартних задач.

В процесі розв’язування кожної задачі і учневі, що розв’язує задачу, і вчителю, що навчає розв’язанню задач, доцільно чітко розрізняти чотири ступені: 1) вивчення умови задачі; 2) пошук плану розв’язання та його складання; 3) здійснення плану, тобто оформлення знайденого розв’язання; 4) вивчення отриманого розв'язку – критичний аналіз результату розв’язання і відбір корисної інформації.

Спостереження показують, що навіть при розв’язуванні нескладної задачі учні дуже багато часу витрачають на міркування про те, за що взятися, з чого почати. Щоб допомогти учням знайти шлях до розв’язання задачі, учитель повинен вміти поставити себе на місце учнів, спробувати побачити і зрозуміти джерело їх можливих труднощів, направити їх зусилля в найбільш природне русло. Вміла допомога учневі залишає йому розумну частку самостійної роботи, дозволить учневі розвинути математичні здібності, накопичити досвід, який надалі допоможе знаходити шлях до розв’язування нових задач.

У чому ж має полягати допомога вчителя, щоб забезпечити максимальну самостійність учня при розв’язуванні ним задачі?

«Найкраще, що може зробити вчитель для учня, полягає в тому, щоб шляхом ненастирливої допомоги підказати йому блискучу ідею... Хороші ідеї мають своїм джерелом минулий досвід і раніше набуті знання... Часто виявляється доречним розпочати роботу з питання: «Чи відома вам якась споріднена задача?» [17]. Таким чином, хорошим засобом навчання розв’язуванню задач, засобом для знаходження плану розв'язку є допоміжні задачі. Уміння підбирати допоміжні задачі свідчить про те, що учень уже володіє визначеним запасом різних прийомів розв'язування задач. Якщо цей запас не великий (що цілком природно для учнів VII-VIII класів), то вчитель, побачивши труднощі учня, повинен сам запропонувати допоміжні задачі. Уміло поставлені навідні запитання, допоміжна задача або система допоміжних задач допоможуть зрозуміти ідею розв’язання. Необхідно прагнути до того, щоб учень відчув радість від розв’язування важкої для нього задачі, отриманого за допомогою допоміжних задач або навідних питань, запропонованих учителем.

Так, якщо учні не можуть розв’язати задачу «Знайдіть всі розв'язки рівняння $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0$» [23], то можна запропонувати такі допоміжні завдання:

Розв’язати рівняння:

а) $\left(x+1\right)^2 + y^2 = 0 \quad \left(x = -1, y = 0\right)$;

б) $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 0 \quad \left(x = 5, y = 0\right)$;

в) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5 = 0 \quad \left(x = 2, y = -1\right)$.

Якщо учні не можуть розв'язати задачу «Знайдіть значення виразу

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\text{»}$$

[14], то в якості задачі, покликаної підвести учнів до методу розв'язання, може запропонувати вправу: «Спростіть вираз

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)\text{».}$$

У разі труднощів при розв'язуванні цих задач можна допомогти учням, що для їх вирішення достатньо скористатися формулою $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Учитель, підказавши, якою формулою потрібно скористатися для розв'язання задачі, на долю учня залишає дуже мало. І все ж ця підказка набагато корисніше для учнів, ніж ознайомлення з готовим розв'язанням: вона може створити в учня ілюзію того, що він сам розв'язав запропоновану вчителем задачу; це дасть йому можливість повірити в свої сили, зміцнить його бажання вирішувати задачі.

Інший приклад. Якщо учні не можуть розв'язати за допомогою складання рівняння задачу «До деякого двозначного числа зліва і справа приписали по одиниці. В результаті отримали число, в 23 рази більше початкового. Знайдіть це двозначне число» [24], то в якості допоміжних задач їм доцільно запропонувати наступні:

1. До числа x приписали справа цифру 4. Уявіть отримане число у вигляді суми, якщо x: а) двозначне число; б) тризначне число.

2. До числа y припирали зліва цифру 5. Подайте отримане число у вигляді суми, якщо y: а) двохзначне число; б) тризначне число.

Ще приклад. Нехай учням запропонована задача: «Дано багатозначне число $\overline{abc\ldots kxyz}$. Відділивши від нього тризначне число, утворене трьома останніми цифрами, отримаємо два числа: $\overline{abc\ldots k}$ і $\overline{xyz}$. Доведіть, що якщо різниця отриманих чисел ділиться на 7 (або на 11, або на 13), то і дане число ділиться на 7 (або на 11, або на 13)» [46].

Якщо учням складно розв’язати цю задачу, вони не знають, з чого почати, то в якості допоміжних задач їм можна запропонувати наступні:

1. На які числа діляться числа виду $\overline{abcabc}$?
2. Доведіть рівність: $\overline{123\ldots k}\cdot 9+\left(k+1\right)=\underbrace{111\ldots 1}_{k+1 раз}$, $k\in N$.

Обидві ці задачі покликані надати істотну допомогу учням у пошуку шляхів розв’язання запропонованої (основної) задачі.

Звичайно, учень поставить питання: як самому, без допомоги вчителя, знаходити допоміжні задачі? Безумовно, учнів необхідно привчити самостійно складати допоміжні задачі або спрощувати умову запропонованих задач так, щоб без допомоги вчителя знайти спосіб їх розв’язання. Вміння знаходити допоміжні задачі, як і взагалі вміння розв’язувати задачі, набувається з практикою. Запропоновуючи учням задачу, слід запропонувати з’ясувати, чи не можна знайти зв'язок між даною задачею та якою-небудь задачею з відомим розв’язком або з задачею, яка розв’язується простіше.

Нехай, наприклад, учні мають труднощі під час розв’язування задачі «Є 4 шарики різної маси. За допомогою скількох зважувань на важільних вагах можна розташувати ці шарики у порядку спадання мас?» [55]. У цьому випадку можна рекомендувати спростити дану задачу, взяти замість чотирьох шариків три. Розв’язавши цю спрощену задачу, учні легше знайдуть спосіб розв’язання основної.

Для набуття навичок розв’язування доволі складних задач необхідно привчати школярів більше уваги приділяти вивченню отриманого розв’язку. Для цього дуже корисно учням видозмінювати умову задачі, щоб закріпити спосіб її розв’язання, придумувати задачі, аналогічні розв'язаним, більш або менш важкі, з використанням знайденого під час вирішення основної задачі способу розв'язання.

Проілюструємо зазначене вище прикладами. Розв'язавши задачу «Доведіть, що значення виразу $11^6 + 14^6 - 13^3$ кратне 10» [17], можна для закріплення способу розв'язання запропонувати учням наступні задачі:

1. У виразі $a^5 + b^4 - c^6$ замість a, b і c доберіть тризначні числа, щоб значення отриманого виразу було: а) кратне 2; б) кратне 5; в) кратне 10. Чи можна, базуючись на застосованому способі розв'язання, підібрати a, b і c такі, що б вийшов вираз, кратний трьом? Чому?

2. У виразі $215^x + 342^y - 113^z$ доберіть x, y і z такі, щоб значення отриманого виразу було: а) кратне 2; б) кратне 5; в) кратне 10.

Розв'яжіть задачу «У двох бочках було води порівну. Кількість води у першій бочці спочатку зменшилось на 10%, а потім збільшилось на 10%. Кількість води у другій бочці спочатку збільшилось на 10%, а потім зменшилось на 10%. У якій бочці стало більше води?» [24]. Доцільно учням задати питання: як зміниться відповідь задачі, якщо замість 10% взяти 20%, 30%? Який висновок можна зробити?

Розв'яжіть задачу «Є аркуш паперу. Його розрізають на 4 частини, потім деякі (або всі) отримані шматки знову розрізають на 4 частини і т.д. Доведіть, що при цьому не можна отримати 50 частин аркуша» [37]. При цьому корисно змінити її умову так: «Аркуш паперу розрізали на 5 частин, на 7 частин, ..., на n частин. Чи можна при цьому отримати 50 частин аркуша? 100 частин? ... k частин?

Систематично робота щодо вивчення способів розв'язання задач допоможе учням не тільки навчитися розв'язувати задачі, але і самостійно їх складати.

Так, розглянувши з учнями способи розв'язання задачі «Шестидесятизначне число написане за допомогою 30 нулів і 30 одиниць. Доведіть, що воно не може бути квадратом натурального числа», вчитель (при відповідній підготовці учнів) може запропонувати їм скласти аналогічну задачу з використанням застосованого способу розв’язання і ознак подільності чисел на 2 і 4 [22]. Такою задачею може бути, наприклад, наступна: «Доведіть, що не може бути квадратом натурального числа число записане: а) лише одними двійками; б) одними шестірками; в) лише двійками і шестірками».

Після розв’язання задачі «Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 30$ не має розв’язків в цілих числах» корисно запропонувати учням спробувати сформулювати розглянуту задачу у загальному вигляді. Це буде виглядати так: «Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 4p + 2$ (p – просте число) не має розв’язків в цілих числах».

Після розв’язання задачі «Я задумав ціле число, яке не перевищує 1000. Як, задавши не більше 10 питань, на які я буду відповідати лише «так» або «ні», можна дізнатися, яке число я задумав?» для закріплення способу розв’язання можна запропонувати учням придумати аналогічну задачу або самому вчителю сформулювати задачу, наприклад таку: «Скільки достатньо питань, на які відповідають лише «так» або «ні», щоб за відповідями дізнатися п’ятизначний номер телефону?»

Іноді корисно скласти і розв’язати задачі більш загальні, ніж дана, такі, щоб дана задача була окремим випадком складеної і її розв’язання випливало з розв’язання більш загальної задачі.

Вміння учнів складати нестандартні задачі, які розв’язують нестандартним способом, свідчить про культуру їх мислення, добре розвинуті математичні здібності.

Під час аналізу розв’язання задачі корисно скласти розв’язання даної задачі з раніше розв’язаних, встановивши можливість її узагальнення.

Вчитель повинен постійно пам’ятати, що розв’язування задач є не самоціллю, а засобом навчання. Обговорення знайденого розв'язку, пошук інших способів розв’язання, закріплення у пам’яті тих прийомів, які були використані, виявлення умов можливості застосування цих прийомів, узагальнення даної задачі – усе це дає змогу учням вчитися на задачі. Саме через задачі учні можуть дізнатися і глибоко засвоїти нові математичні факти, оволодіти новими математичними методами, накопичити певний досвід, сформулювати вміння самостійно і творчо застосовувати отриманні знання.

При розв'язуванні задач необхідно приділити належну увагу оформленню запису знайденого розв'язку. Запис розв'язання повинен бути чітким і достатньо повним, щоб, подивившись на неї, можна було встановити те, що може учню знадобиться при подальшому навчанні математики.

Надати учням правила, які дозволяють розв'язати будь-яку нестандартну задачу, неможливо, бо нестандартні задачі в якійсь мірі неповторні, а універсального методу, який дозволяє розв'язати будь-яку задачу, на жаль, немає. Навіть суворе виконання всіх вказівок і дотримання порад вчителя не зможе творчій процес пошуку розв'язання нестандартних задач вкласти у певні схеми.

3.2. Прикладні задачі з алгебри

В основному курсі алгебри вже розглядалися вправи на знаходження максимуму і мінімуму квадратного тричлена. При побудові графіків квадратних функцій визначення положення вершини параболи дає можливість знайти ті значення x, при яких квадратний тричлен має максимум або мінімум, і визначити ці значення максимуму або мінімуму. Застосовуючи властивості квадратного тричлена, можна розв'язати деякі задачі на максимум і мінімум, наприклад таку:

«Огорожею даної довжини $l = 100\,м$ треба обнести прямокутну ділянку, що прилягає до стіни. Які мають бути довжина і ширина ділянки, щоб вона мала найбільшу площу?»

Такі задачі іноді називають ще задачами на знаходження найвигідніших значень. Зрозуміло, що вони мають широке практичне застосування.

Деякі вправи на знаходження максимумів і мінімумів розв'язують без будь-яких додаткових теорем, а лише на основі загальних міркувань. Так. Очевидно. Що функція $y = x^2$ набуває найменшого значення, що дорівнює нулю, при $x = 0$. Вираз $y = \frac{1}{1+x^2}$ матиме найбільше значення при $x = 0$, і воно дорівнюватиме 1. Легко побачити, що коли $y = (x-5)^2$, то $y_{\min} = 0$ при $x = 5$, а $y = -(x+3^2)$ має $y_{\max} = 0$ при $x = -3$ і т. д. Вміння виділяти повний квадрат, як ми вже знаємо, допомагає знаходити максимуми і мінімуми квадратного тричлена.

Є загальні способи розв'язування задач на максимум і мінімум за допомогою так званого *диференціального числення.* Ми розглядаємо приклади таких задач, які розв'язуються елементарно.

Задача 1. Довести, що з усіх прямокутників даного периметра P найбільшу площу S має квадрат.

Розв'язання.

Нехай сторони прямокутника дорівнюють $\frac{p}{4} + x$ і $\frac{p}{4} - x$. Тоді

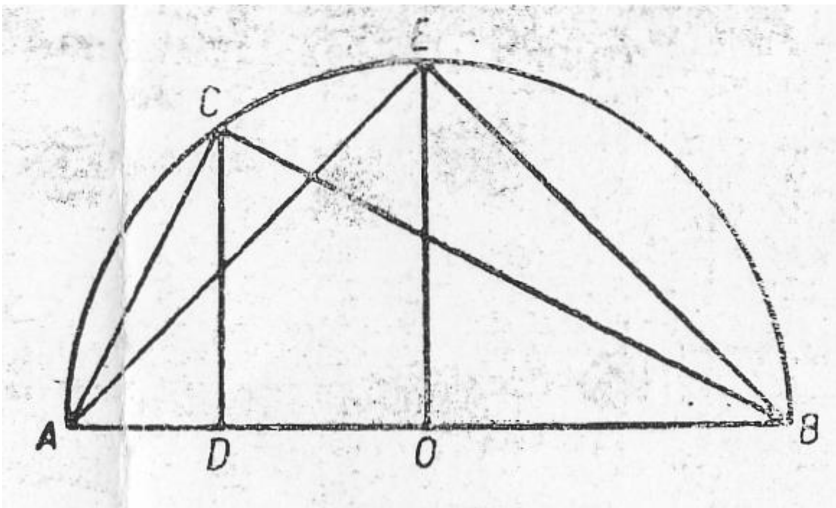
$$S = \left(\frac{p}{4} + x\right) \cdot \left(\frac{p}{4} - x\right) = \left(\frac{p}{4}\right)^2 - x^2 .$$

Звідси видно, що S має найбільше значення при $x = 0$, тобто коли кожна сторона прямокутника дорівнює $\frac{p}{4}$. Шуканий прямокутник – квадрат.

Задача 2. З усіх прямокутних трикутників, що мають дану гіпотенузу, знайти той, що має найбільшу площу.

Розв'язання.

На даній гіпотенузі AB $(рис.1)$ як на діаметрі опишемо півколо і побудуємо трикутник ABC, де кут C прямий. Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$. Будь-який інший прямокутний трикутник з даною гіпотенузою буде знову вписаний у це півколо. Очевидно, що найбільшу площу матиме той прямокутний трикутник з основою AB, у якого висота буде найбільша. Але EO - радіус кола і найбільша з півхорд. Отже, прямокутний трикутник з даною гіпотенузою має найбільшу площу тоді, коли він рівнобедрений.

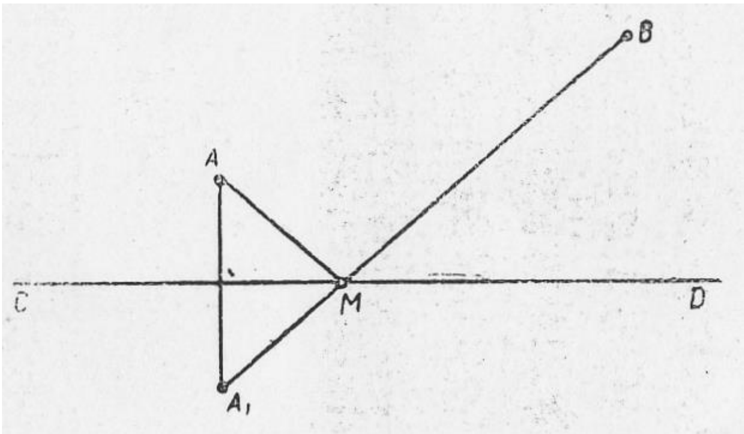


$(рис.1)$

Задача 3. На прямій CD $(рис.2)$ знайти таке положення точки M, при якому ламана ABM має найменшу довжину [4].

Розв'язання.

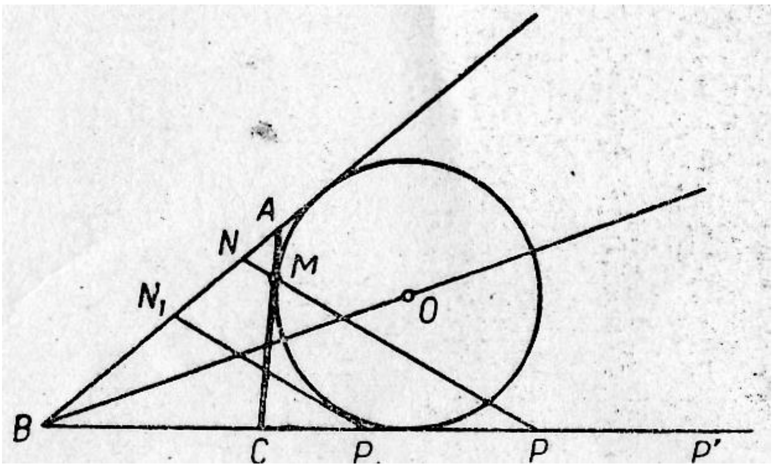
Побудуємо точку A_1, симетричну даній точці A відносно осі CD. Довжина ламаної ABM дорівнює довжині A_1BM, а відстань A_1B найкоротша, найменша між точками A_1 і B. Отже, положення шуканої точки M визначається точкою перетину прямих CD і A_1B.



$(рис.2)$

Задача 4. Через точку, дану всередині кута, провести пряму, що відтинає від кута трикутник найменшого периметра.

Розв'язання. Нехай всередині кута дано довільну точку M $(рис.3)$. Побудуємо коло, що проходить через точку M і дотикається до сторін кута. Через точку M проведемо дотичну AMC до побудованого кола. Трикутник ABC шуканий. Справді, проведемо через точку M довільну пряму NMP. Доведемо, що периметр трикутника NBP більший від периметра трикутника ABC. Проведемо пряму N_1P_1, яка паралельна NP і дотикається до кола. Периметр трикутника NBP більший від периметра трикутника N_1BP_1, а периметр останнього дорівнює периметру трикутника ABC.



$(рис.3)$

Ряд задач на максимуму і мінімум можна розв'язати на основі таких теорем:

Теорема 1. *Добуток двох додатніх множників, сума яких – величина стала, має найбільше значення, коли множники рівні.*

Щоб довести цю теорему, розглянемо тотожність:

$$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right].$$

При $x = y$ $(x-y)^2 = 0$ і вираз у квадратних дужках, а отже, і добуток xy набувають найбільшого значення, яке дорівнюватиме $\frac{1}{4}(x+y)^2$.

Цю теорему можна довести і так.

Нехай $S = xy$ - досліджуваний добуток, причому

$$x + y = a,$$

де a - певна стала величина. Тоді

$$y = a - x,\ S = x(a - x), \text{або } x^2 - ax + S = 0.$$

Звідси

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - S}, \text{ тобто } S_{\max} = \frac{a^2}{4},$$

а це може бути лише при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, тобто при $x = y$.

Теорема 2. *Сума двох додатних доданків, добуток яких – величина стала, має найменше значення, коли доданки рівні* [9].

Цю теорему доведемо, розглядаючи тотожність:

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy.$$

При $x = y$ $(x - y)^2 = 0$ і вираз $(x + y)^2$ матиме найменше значення, яке дорівнюватиме $4xy$.

Розглянемо приклади задач на застосування цих теорем.

Задача 5. З круглої дерев’яної колоди діаметра d треба вирізати балку прямокутного перерізу найбільшої площі.

Розв’язання.

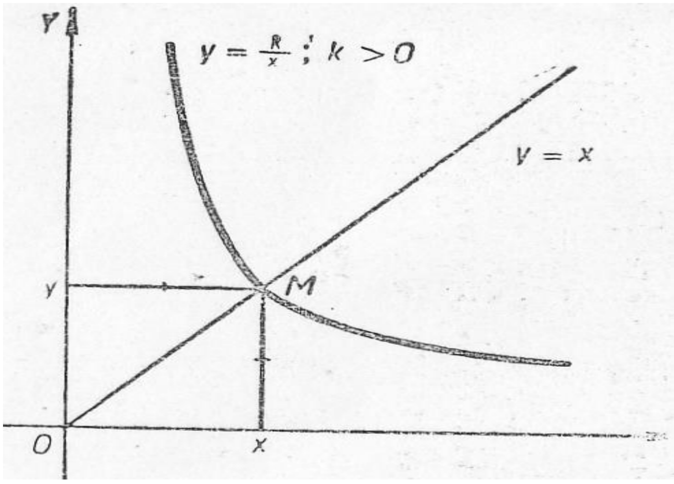
Якщо сторони прямокутника x і y, то вираз, що зв’язує їх з діаметром колоди, буде $x^2 + y^2 = d^2$, а вираз площі $xy = S$. Сума $x^2 + y^2$ - величина стала і дорівнює d^2. Добуток $x^2 \cdot y^2$ буде найбільшим, коли $x^2 = y^2 = \frac{d^2}{2}$. Значення xy буде найбільшим при $x = y = \frac{d\sqrt{2}}{2}$. Отже, переріз балки повинен мати форму квадрата, вписаного в коло діаметра d.

Задача 6. На графіку функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \rangle 0$, знайти точку, найближчу до початку координат.

Розв’язання.

Нехай x, y - координати шуканої точки M, a - її відстань від початку координат. Тоді $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, $xy = k$ $(k \rangle 0)$. Звідси $a^2 = x^2 + y^2$, $x^2 y^2 = k^2$.

Отже, a^2 матиме найменше значення при $x^2 = y^2$, тобто при $x = y$. Шукана точка M лежить на прямій $y = x$ і на графіку $y = \frac{k}{x}$. Це є точка перетину графіка $y = \frac{k}{x}$ і бісектриси першого і третього координатних кутів $(рис.4)$.



$(рис.4)$

Для розв'язування задач на максимум і мінімум можна використати і таку теорему, яку ми подаємо без доведення.

Теорема 3. *Добуток кількох додатних змінних множників, сума яких стала, досягає найбільшої величини, коли множники рівні* [16].

Задача 7. З усіх трикутників даного периметра $2p$ знайти трикутник найбільшої площі.

Розв'язання.

Площу трикутника можна визначити за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де p - півпериметр трикутника.

Розглянемо суму трьох змінних множників підкореневого виразу:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3p-(a+b+c) = 3p-2p = p.$$

Вона виявилась сталою. Отже, добуток цих множників буде максимальним, якщо вони рівні між собою: $p-a = p-b = p-c$, а це можливо тоді, коли $a = b = c = \frac{2}{3}p$. Звідси робимо висновок, що при даному периметрі $2p$ найбільшу площу матиме рівносторонній трикутник із стороною $\frac{2}{3}p$.

Задача 8. Знайти максимальне значення функції $y=-2x^3+ax^2$.

Розв'язання.

Запишемо дану функцію у вигляді добутку трьох множників:

$$y=x^2\cdot(-2x+a)=x\cdot x\cdot(-2x+a).$$

Сума цих множників – величина стала: $x+x+(-2x+a)=a$. Отже, значення функції (добутку) буде максимальним тоді, коли

$$x=x=-2x+a=\frac{a}{3},$$

а отже,

$$y_{\max}=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}.$$

Розглянемо ще задачі, для розв'язування яких треба вміти знаходити максимум або мінімум квадратного тричлена.

Задача 9. Визначити, при якому значенні x тричлен $y=x^2+px+q$ має найменше значення [18].

Розв'язання.

Перетворимо праву частину тричлена так:

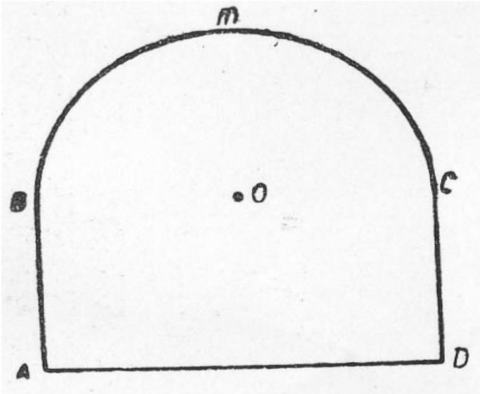
$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=q-\frac{p^2}{4}+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Звідси видно, що y має найменше значення тоді, коли другий доданок $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ дорівнює нулю.

Отже,

$$y_{\min}=q-\frac{p^2}{4}\text{ при }x=-\frac{p}{2}.$$

Задача 10. Вікно (нормандське) має форму фігури, утвореної трьома сторонами прямокутника і півколом. Які розміри повинна мати ця фігура, щоб при даному периметрі $2p$ вікно пропускало найбільше світла (*рис.*5)?



$(рис.5)$

Розв'язання.

Вікно пропускатиме найбільше світла тоді, коли його площа буде найбільшою. Площа вікна складається з площі прямокутника $ABCD$ і площі півкруга з центром у точці O. Щоб виразити площу вікна S як функцію якоїсь змінної, що зв'язана з розмірами вікна, введемо позначення: $AD = x$, $AB = y$. Тепер периметр вікна можна записати як суму довжин відрізків AB, AD, CD і довжини півкола BmC:

$$2p = x + 2y + \frac{\pi x}{2},$$

звідки

$$y = p - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}.$$

Визначаємо площу вікна як функцію x:

$$S = xy + \frac{\pi x^2}{8} = x\left(p - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8},$$

або

$$S = -\frac{4+\pi}{8}x^2 + px.$$

Ми дістали квадратний тричлен, у якого коефіцієнт при x^2 від'ємний. Отже, S може набувати максимального значення. Квадратний тричлен має максимальне або мінімальне значення при $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Для нашого випадку $x_0 = \frac{4p}{4+\pi}$. Отже, S матиме максимальне значення при $x = \frac{4p}{4+\pi}$ і $y = \frac{2p}{4+\pi}$.

Вікно при цьому матиме таку форму, як на $(рис.5)$. У ньому AD буде в 2 рази більше від AB .

Використання прикладних задач з алгебри допомагає зробити навчання більш цікавим, практичним та корисним для здобувачів. Важливо, щоб вчитель дотримувався правильного підбору задач, акцентував увагу на реалістичності та актуальності, а також допомагав здобувачам зрозуміти, як математичні знання застосовуються для вирішення реальних проблем

ВИСНОВКИ

Питання залучення прикладних задач при вивченні шкільного курсу алгебри є актуальним і на сьогодні з кількох причин:

1. Практичне застосування знань: здобувачі часто не бачать зв'язку між алгеброю та реальним життям. Прикладні задачі демонструють, як алгебра використовується у різних сферах – економіці, інженерії, технологіях, що підвищує мотивацію до навчання.

2. Розвиток критичного мислення: прикладні задачі вимагають аналізу реальних ситуацій, де потрібно знайти оптимальні рішення. Це сприяє розвитку критичного мислення та навичок вирішення проблем.

3. Підготовка до майбутньої професії: багато професій вимагають здатності застосовувати математичні знання на практиці. Здобувачі, які бачать цінність алгебри в контексті реальних завдань, краще підготовлені до сучасних викликів на ринку праці.

4. Інтеграція з іншими науками: прикладні задачі дозволяють показати міждисциплінарний зв'язок алгебри з фізикою, біологією, хімією та іншими науками. Це сприяє комплексному баченню навчального матеріалу.

5. Формування життєвих навичок: розв'язання задач із реальними даними, такими як фінансові розрахунки чи статистичний аналіз, формує у здобувачів практичні навички, корисні в повсякденному житті.

Отже, прикладні задачі роблять алгебру більш зрозумілою, цікавою та корисною для здобувачів, що підвищує їхню успішність та підготовку до майбутнього. Залучення прикладних задач до навчального процесу підвищує мотивацію здобувачів, демонструючи, що математика є не лише теоретичною наукою, але й потужним інструментом для вирішення повсякденних завдань.

Застосування прикладних задач на уроках алгебри має свої методичні особливості, які допомагають зробити навчання більш цікавим та ефективним. Ось основні моменти, на які варто звернути увагу вчителю при використанні таких задач:

1. Вибір завдань, що відповідають віку та рівню підготовки: вчителю важливо підібрати прикладні задачі відповідно до вікових можливостей здобувачів та їхнього рівня знань. Задачі мають бути доступними для розуміння, але водночас стимулювати здобувачів до пошуку рішень і розвитку нових навичок.

2. Чітке формулювання умови задачі: прикладні задачі часто базуються на реальних ситуаціях, тому їхня умова може бути описана не так формально, як звичайні математичні задачі. Важливо, щоб здобувачі чітко розуміли контекст задачі та мали змогу правильно виділити з тексту необхідні математичні дані. Вчителю слід навчати здобувачів читати умови задачі уважно, розуміючи, які величини є ключовими для розв'язку.

3. Інтеграція з іншими предметами: прикладні задачі часто вимагають знань з інших галузей, таких як фізика, хімія, економіка або інформатика. Вчителю важливо показати здобувачам, як алгебра використовується для вирішення міждисциплінарних проблем.

4. Реалістичність задач: важливо, щоб задачі були пов’язані з реальними ситуаціями, зрозумілими здобувачам. Це підвищує інтерес і мотивацію.

5. Формування навичок аналізу та інтерпретації результатів: здобувачі повинні не просто виконати математичні обчислення, але й уміти інтерпретувати результати в контексті задачі.

6. Акцент на моделювання реальних процесів: прикладні задачі часто є моделлю реальних процесів, тому важливо, щоб здобувачі розуміли, як побудувати математичну модель.

7. Поступове ускладнення: при застосуванні прикладних задач необхідно поступово ускладнювати їхні умови, починаючи з простіших, а потім переходячи до складніших. Це дозволить здобувачам поступово адаптуватися до більш комплексних ситуацій і не викликатиме стресу

через надто складні завдання.

8. Використання технологій.

Використання прикладних задач з алгебри допомагає зробити навчання більш цікавим, практичним та корисним для здобувачів. Важливо, щоб вчитель дотримувався правильного підбору задач, акцентував увагу на реалістичності та актуальності, а також допомагав здобувачам зрозуміти, як математичні знання застосовуються для вирішення реальних проблем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабенко С. П., Маркова І. С. Усі уроки математики. 6 клас. І семестр (уроки 1 – 10). – Харків: Основа, 2014. – 284 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1989.
3. Бевз Г. П. Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії: посіб. для вчителя / Г. П. Бевз. К.: Видавниче підприємство «Перше вересня», 1999.
4. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2019, 272 с.
5. В'язнікова Л., Колтовська О., Андрух Ю. Використання міжпредметних зв'язків на уроках математики. Каталог статей. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: http://prilmom.at.ua/publ/1-1-0-8.
6. Вагіна Н. С. Навчальна практика як засіб реалізації прикладної спрямованості навчання математики в основній школі: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Бердянський державний педагогічний університет. Бердянськ, 2006.
7. Возняк Г. М. Прикладні задачі: від теорії до практики. – Тернопіль: Мандрівець, 2003.
8. Возняк Г. М., Маланюк М. П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики. Київ: Рад. шк., 1989.
9. Дутка Г. Я. Формування вмінь студентів розв'язувати прикладні задачі при навчанні математики в коледжах економічного профілю: диск. канд. пед. наук: 13.00.02. К., 1998.
10. Жерновникова О. А. Мікротехнології вивчення галузі «Математика»: навч.-метод. посіб. Х.: Мітра, 2016.

11. Зайцева Л. І. Формування математичної компетентності старших дошкільників. Методичний посібник. Харків: Ранок, 2008.

12. Застосування задач прикладного та практичного змісту при вивченні курсу математики 5-6 класу – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://naurok.com.ua/metodichka-zastosuvannya-zadach-prikladnogo-ta-praktichnogo-zmistu-pri-vivchenni-kursu-matematiki-5-6-klasu-150176.html (дата звернення 17.03.2024).

13. ЗНО онлайн з математики 2007 – 2022 – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/ (дата звернення 28.02.2024).

14. Ігнатенко М. Я. Методологічні і методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики. – Український державний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 1997.

15. Ігнатенко М. Я., Соколенко Л. О. Прикладні задачі в курсі математики // Рідна шк. – 1997.

16. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 11-го кл. заклад. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019.

17. Когтєв А. В. Прикладні задачі з математики як засіб розвитку життєво необхідних компетентностей: веб-сайт. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://vseosvita.ua/library/formuvanna-gromadanskoi-ta-nacionalnoi-samosvidomosti-uchniv-z-vadami-sluhu-na-urokah-matematiki-108931.html (дата звернення 11.03.2024).

18. Компетентнісно орінтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М, Хмара. – К.: Педагогічна думка, 2015.

19. Методика використання прикладних задач у шкільному курсі математики. Методичний посібник./уклад. А. П. Королюк. Рівне: РОІППО, 2018.

20. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами ІІ Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 18 жовтня 2018 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. – Вінниця, 2018.

21. Новицька Л. І. Роль прикладних задач у системі професійної освіти фахівця-аграрія // Збірник наукових праць «Педагогічні науки». – 2007.

22. Овчар О. Застосування пропорцій до розв'язування задач// Молодь і ринок. – 2008.

23. Панченко Л. В. Науково-методичні особливості та переваги навчання математичного моделювання студентів закладів вищої освіти. Освіта. Інноватика. Практика, 2019. № 1 (5).

24. Практико орієнтоване навчання геометрії в гімназії – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://ipvid.org.ua/index.php/psp/article/view/648/656 (дата звернення 03.03.2024).

25. Прогресії. Розв'язування задач прикладного змісту – [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу URL: https://subotcy.blogspot.com/p/blog-page.html?m=1 (дата звернення 20.03.2024).

26. Прус А. А. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. К., 1997.

27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. Київ: Вища шк., 2006.

28. Соколенко С. О. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Донецьк, 2009.

29. Солодченко Л. О. Розвиток життєвих компетентностей на уроках математики. – Т. – Х.: Ранок, 2011.

30. Чекмарьов Я. Ф. Методика навчання арифметики в школах робітничої молоді. Київ «Радянська школа». – 1961.