Міністерство освіти і науки України

Херсонський державний університет

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДІЙСНІ ЧИСЛА І ДОСКОНАЛА КАНТОРОВА МНОЖИНА

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Соломатіна Яна Борисівна

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова Штанько Олександр Дмитрович.

Івано-Франківськ – 2024

ПЛАН

ВСТУП

Число в математиці, як час у фізиці, відомо кожному, але не зрозуміло лиш спеціалістам.

Універсал математичного всесвіту Анрі Пуанкаре писав: «Єдиний дійсний предмет математичної думки є ціле число. Неперервність була нав'язана нам зовнішнім світом. Вона, безсумнівно була винайдена нами, але винайти її нас змусив зовнішній світ. Математика має допомагати філософу вглублятися в поняття числа, простору і часу» [3.с 65]

Будівля сучасної математики вже висока. Її логічна зв’язність і стійкість потребують систематичного укріплення фундаменту. В фундаменті ж лежать такі зрозумілі об’єкти як число, простір і час.

Математичні теорії, як правило, знаходять свій вихід в тому, що дозволяють перероблювати один набір чисел (вихідні дані) в другий набір чисел, складаючий проміжну або кінцеву ціль обчислень. По цій причині особливе місце в математиці та її прилягаючим займають числові функції. Вони (точніше, так звані диференційовані числові функції) складають головний об’єкт дослідження класичного аналізу.

Дійсні числа є одним з фундаментальних понять у математиці, оскільки вони охоплюють як раціональні, так і ірраціональні числа, створюючи неперервність на числовій осі. Завдяки своїм властивостям повноти та щільності дійсні числа відіграють важливу роль у математичному аналізі, теорії функцій та багатьох інших галузях науки [5. с 102].

Одним із найцікавіших і нетривіальних об'єктів серед дійсних чисел є канторова множина — класичний приклад множини, яка втілює складні топологічні й фрактальні властивості. Відкрита Георгом Кантором наприкінці XIX століття ця множина є досконалою в математичному сенсі, маючи низку унікальних характеристик, таких як нульова міра Лебега, нескінченна кількість точок і властивість замкнутості. Незважаючи на те, що канторова множина займає нульовий обсяг на відрізку [0, 1], вона виявляє глибокі зв’язки з поняттям континууму та фракталів.

Актуальність теми дослідження дійсних чисел та канторової множини є важливим напрямом сучасної математики, оскільки ці поняття лежать в основі математичного аналізу, теорії функцій та топології. Дійсні числа забезпечують неперервність на числовій осі, а канторова множина є класичним прикладом множини з фрактальними властивостями. Вивчення цих об'єктів не лише розширює теоретичні уявлення, але й сприяє розвитку методів, що можуть бути застосовані в різних галузях науки та технологій, таких як фізика, комп'ютерні науки та фрактальний аналіз.

Наукова робота складається з трьох розділів – «дійсні числа та їх властивості», «канторова множина та її побудова», «задачі, пов’язані з досконалою канторовою множиною»

Зв'язок роботи з науковими програмами.

Кваліфікаційну роботу (проєкт) виконано відповідно до тематичного плану науково-дослідної роботи кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, напрям наукового пошуку: «Формування професійної компетентності майбутніх учителів математики в умовах цифровізації вищої освіти», номер державної реєстрації 0123U103793.

Метою цієї роботи є дослідження властивостей дійсних чисел та досконалої канторової множини, а також аналіз їхнього взаємозв'язку. Зокрема, завдання полягає в тому, щоб розкрити математичну сутність канторової множини, пояснити її побудову, властивості та особливе місце серед інших множин дійсних чисел.

У цій роботі ми розглянемо визначення дійсних чисел та їх властивості, процес побудови канторової множини та її математичні особливості.

Завдання дослідження.

1. Описати визначення дійсних чисел та їх властивості.
2. Проаналізувати процес побудови канторової множини.
3. Дослідити математичні властивості канторової множини, такі як її нульова міра Лебега, замкнутість та фрактальна структура.
4. Встановити логічний зв'язок між канторовою множиною та множиною дійсних чисел.

5. Розглянути приклади застосування канторової множини в сучасній науці.

Об'єктом дослідження є дійсні числа та їхні підмножини, зокрема канторова множина.

Предметом дослідження є математичні властивості дійсних чисел і канторової множини, їх взаємозв'язок та застосування в теоретичній і прикладній математиці.

Методи дослідження.

У роботі використовуються методи математичного аналізу, теорії множин, топології та фрактальної геометрії. Теоретичний аналіз включає дослідження властивостей дійсних чисел та побудови канторової множини, її неперервного відображення, а також їх графічну і фрактальну інтерпретацію.

Наукова новизна.

Наукова новизна роботи полягає в систематизації знань про дійсні числа, їх властивості, канторову множину та її унікальні властивості у контексті сучасної математики.

Практичне значення результатів.

Отримані результати можуть бути використані в математичних дослідженнях для глибшого розуміння властивостей дійсних чисел та фрактальних об'єктів, а також у викладанні математики, теорії множин і фрактальної геометрії.

Апробація результатів роботи.

За результатами виконаного дослідження було написано і опубліковано статті для: конференція «Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» на базі Херсонського державного університету у 2024 році; VIII Міжнародна науково-практична конференція у Львові 16-18.09.2024.

Публікації:

1. Соломатіна Я.Б. Знайомство здобувачів освіти з побудовою неперервного відображення досконалої канторової множини на відрізок / Соломатіна Я.Б. // «Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» на базі Херсонського державного університету у 2024 році;
2. Соломатіна Я.Б. Перше знайомство учнів закладів середньої освіти з канторовою множиною / Соломатіна Я. Б. // VIII Міжнародна науково-практична конференція — 2024. URL: https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya

РОЗДІЛ 1.
ДІЙСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Означення дійсних чисел та їх властивості

Ще древнім математикам було відомо, що – ірраціональне число (тобто те, що не є раціональним – Піфагор) [2.с 95].

Висновок: множину раціональних чисел потрібно поповнювати.

Множину дійсних чисел вводять по-різному.

1 Дедикінд вводить її за допомогою перерізів:

Дедекіндовий переріз є одним із способів побудови дійсної прямої на основі раціональних чисел.

Дедикіндовий переріз введений Р. Дедикіндом (1872) при побудові дійсних чисел, коли ірраціональні числа розуміються як такі перерізи множини раціональних чисел, для яких в A немає найбільшого, а в B немає найменшого раціонального числа [9.с 55].

Дедикіндовий переріз, розбиття множини дійсних чисел R (або множини раціональних чисел Q) на дві непустих множини A і B, що в сумі дають R (Q) таких, що для кожного виконується нерівність .

Властивість неперервності (повноти) дійсних чисел за допомогою дедикіндового перерізу формується так: для кожного дедикіндового перерізу множини дійсних чисел існує таке число, яке є або найбільшим в A, або найменшим в B. Таке число називаються границею дедикіндового перерізу.

Розглянемо детальніше цей спосіб введення дійсних чисел Дедикіндом:

Нехай дано повністю упорядкована множина (X,). Розбиття {A, B} множини X називається дедикіндовим перерізом, якщо:

A замкнуте знизу, тобто (x;

B замкнуте зверху, тобто (b;

A не має найбільшого елемента, тобто , .

На сімействі дедикіндових перерізів може бути введено відношення порядку наступним чином.

Покладемо по визначенню

1.1

Еквівалентно

1.2

Упорядковане таким чином сімейство дедикіндових перерізів є повністю упорядкованою множиною, що задовольняє принципу повноти Вейерштрасса [1.с 81].

Розглянемо множину раціональних чисел Q з стандартним порядком. Тоді вона ізоморфна підмножині сімейства дедикіндових перерізів Q.

1.3

Існують дедикіндові перерізи, котрі не відповідають не одному раціональному числу в розумінні визначеного вище ізоморфізму. Наприклад, 1.4

Таким чином сімейство дедикіндових перерізів на можна розглядати як осяжну множину, яка містить в якості особистої підмножини. Ця осяжна множина називається множиною всіх дійсних чисел.

Об'єднання раціональних і ірраціональних чисел утворює множину дійсних чисел, елементи якої називаються дійсними числами. Арифметичні операції з дійсними числами визначаються як неперервне продовження операцій з раціональними числами, подібно до методів теорії нескінченних десяткових дробів. [18.с 115].

2 Кантор вводить множину дійсних чисел за допомогою послідовностей:

У підході Кантора дійсне число розуміється як границя числової послідовності раціональних чисел. Щоб ця послідовність була збіжною, на неї накладається умова Коші:

1.5

Суть цієї умови полягає в тому, що для будь-якої наперед заданої відстані існує такий номер елемента послідовності, після якого всі наступні елементи будуть розташовані один від одного на відстані, меншій за цю задану величину. Послідовності, що відповідають умові Коші, називають фундаментальними. [15.с 93].

Дійсне число, яке визначається фундаментальною послідовністю раціональних чисел {}, позначимо .

Два дійсних числа

і ,   1.6

що, визначені відповідно фундаментальними послідовностями {} і {}, називають рівними, якщо = 0

Якщо задані два дійсних числа , то їх добутком і сумою називаються числа, визначені відповідною добутком і сумою послідовностей {} і {}:

1.7

Відношення порядку на множині дійсних чисел встановлюється за допомогою такої домовленості: число за означенням більше числа , тобто , якщо

1.8

Побудова множини дійсних чисел за допомогою фундаментальних послідовностей раціональних чисел є окремим випадком процесу поповнення будь-якого метричного простору. Подібно до загального випадку, отримана таким чином множина дійсних чисел стає повною, тобто включає границі всіх своїх фундаментальних послідовностей [2.c 79].

3 Вейєрштрасс вводить множину дійсних чисел за допомогою нескінченних десяткових дробів:

Дійсне число позначається як нескінченний десятковий дріб, тобто вираз вигляду

1.9

де є одним із символів + або - , який називається знаком числа, – ціле невід’ємне число, - послідовність десяткових знаків, тобто елементів числової множини {0, 1, …, 9}.

Нескінченний десятковий дріб інтерпретується як таке число, яке на числовій прямій лежить між раціональними точками вигляду

для всіх n = 0, 1, 2, … 1.10

Порівняння дійсних чисел в формі нескінченних десяткових дробів проводиться по розрядах. Наприклад, нехай задано два невід'ємних числа

1.11

Якщо , то ; якщо , то . У випадку рівності переходять до порівняння наступного розряду. І так далі.

Якщо , то після скінченного числа кроків зустрінеться розряд n такий, що . Якщо , то ; якщо , то

.

Але при цьому треба враховувати, що число =.

Якщо запис одного з порівнюваних чисел, починаючи з певного розряду, представлений періодичним десятковим дробом з 9 у періоді, його слід замінити на еквівалентний запис з нулем у періоді. Арифметичні операції з нескінченними десятковими дробами визначаються як неперервне продовження відповідних операцій над раціональними числами [17.с 119]. Наприклад, сумою дійсних чисел назвемо дійсне число , яке задовольняє наступну умову:

Аналогічно визначається операція множення нескінченних десяткових дробів.

Роглянемо загальноприйняте визначення дійсних чисел:

Дійсні числа — це елементи числової системи, яка включає раціональні числа і сама є частиною комплексних чисел. Ця математична абстракція виникла для вирішення задач, пов'язаних з вимірюванням геометричних і фізичних величин, а також для виконання операцій, таких як добування коренів, обчислення логарифмів і розв'язування алгебраїчних рівнянь [6.с 105].

Поняття дійсного числа можна наочно представити за допомогою числової прямої. Вибравши на ній напрям, початкову точку і одиницю вимірювання для відрізків, кожному дійсному числу можна зіставити унікальну точку на прямій, і, навпаки, кожна точка на цій прямій відповідатиме певному дійсному числу. Завдяки цій відповідності числову пряму часто розглядають як синонім множини дійсних чисел [13.с 90].

Множина R називається множиною дійсних чисел, а його елементи дійсними числами, якщо виконаний наступний комплекс умов, названий аксіоматикою дійсних чисел.

На множині R є операція додовання (+), множення (), а також відношення порядку ().

а) Операція (+) співставляє кожній упорядкованій парі (x, y) елементів x, y з R деякий елемент x+y R, названий сумою x і y. При цьому виконані наступні умови:

1. Існує нейтральний елемент 0, такий що x+0+0+x=x для будь-якого x R.

2. Для будь-якого елементу x R є елемент - x R, названий протилежним до x, такий, що x+(-x)=(-x)+x=0.

3. Операція асоціативна, тобто, x+(y+z)=(x+y)+z для будь-яких x, y, z з R.

4. Операція комутативна, тобто x+y=y+x для будь-яких x, y з R.

Якщо на якійсь множині G визначена операція, що задовольняє аксіомам 1, 2, 3, то говорять, що на G задана структура групи або що G є група. Якщо операцію називають додаванням, то групу називаються адитивною. Якщо крім того, відомо, що операція комутативна, тобто виконується умова 4, то групу називають комутативною або абелевою [11.с 75].

Отже, аксіоми 1-4 говорять, що R є адитивною абелевою групою.

b) Операція () співставляє кожній упорядкованій парі (x, y) елементів x, y з R деякий елемент xy R, названий добутком x і y. При цьому виконані наступні умови:

1. Існує нейтральний елемент 1 R, такий що x1=1x=x для будь-якого x R.

2. Для будь-якого елемента x R (x0) є елемент R, названий оберненим, такий, що x = x = 1.

3. Операція асоціативна, тобто x (yz)=(xy)z для будь-яких x, y, z з R.

4. Операція комутативна, тобто xy= y x для будь-яких x, y з R.

Примітимо, що по відношенню до операції множення множина R\0, як можна перевірити, є мультиплікативною групою.

c) Зв'язок додавання і множення виражається розподільною властивістю (дистрибутивністю) множення по відношенню до додавання: (x+y) z= xz+yz.

Відмітимо, що з огляду комутативності множення остання рівність збережеться, якщо в обох його частинах змінити порядок множників.

Якщо на якійсь множині G діють дві операції, що задовольняють всім переліченим аксіомам, то G називається алгебраїчним полем або просто полем [4.с 90].

d) Відношення () порядку в R називається відношенням нерівності. Для елементів x, y з R установлено, чи виконуються x y чи ні. При цьому мають задовільнятися наступні умови:

1. x для будь-якого x R.

2. x y і y x тягне x = y.

3. x y і y z тягне xz.

4. Для будь-яких x і y з R виконано x y або y x.

Множина, між деякими елементами якого є відношення, що задовольняє аксіомам 1, 2, 3, як відомо, називається частково упорядкованою. Якщо ж до того виконується 4 аксіома, то множина називається лінійно упорядкована.

Таким чином, множина дійсних чисел лінійно упорядкована відношенням нерівності між її елементами.

e) Зв’язок додавання і порядку в R є в тому, що x y тягне x+z y+z для будь-яких x, y, z з R.

f) Зв’язок множення і порядку в R є в тому, що якщо 0 x і 0 y, то

0 xy.

Всім цим аксіомам задовольняють вже раціональні числа. Їх множину зазвичай позначають через Q. Ми знаємо, що в множині дійсних чисел є ще ірраціональні числа, наприклад .

g) Аксіома повноти або неперервності множини дійсних чисел складається в наступному.

Якщо X і Y – непусті підмножини R, що володіють, тою властивістю, що для будь-яких елементів x X і y Y виконано x y, то існує таке c R, що x для будь-яких елементів x X і y Y.

Цим завершується список аксіом, виконання яких на якій-небудь множині R дозволяє вважати цю множину моделлю дійсних чисел.

Дійсні числа формують неперервну числову пряму, яка відображає всі можливі значення, що можна отримати шляхом обчислень. [10.с 79].

1.2 Класифікація дійсних чисел

- **Раціональні числа** — це числа, які можна подати у вигляді відношення двох цілих чисел, де знаменник не дорівнює нулю (наприклад, Вони мають скінченне або періодичне десяткове представлення.
- **Ірраціональні числа** — це числа, які не можна представити як відношення двох цілих чисел. Їхнє десяткове представлення є нескінченним і неперіодичним (наприклад, число π) [9.с 203].

Властивості дійсних чисел

- **Повнота**: Однією з ключових властивостей множини дійсних чисел є її повнота. Це означає, що будь-яка збіжна послідовність дійсних чисел має границю, яка також є дійсним числом. Ця властивість дозволяє будувати точні математичні докази й аналізувати функції.

- **Щільність**: Множина дійсних чисел є щільною, тобто між будь-якими двома дійсними числами завжди існує інше дійсне число. Тобто: між будь-якими двома дійсними числами x і y (x знайдеться принаймні, одне дійсне число z: . Це забезпечує неперервність і можливість нескінченного поділу відрізків на числовій прямій.
- **Нескінченність**: Дійсні числа утворюють нескінченну множину, що охоплює всю числову пряму, включаючи як додатні, так і від'ємні числа, а також нуль [20.с 182].
- **Неперервність**: на числовій прямій кожній точці відповідає дійсне число, і кожне дійсне число має відповідну йому точку на числовій прямій.

Роглянемо ряд важливих теорем:

Теорема 1.1. Серед дійсних чисел немає найбільшого і немає найменшого числа [7.с 205].

Доведення

Припустимо, що існує найбільше дійсне число, позначимо його M. Однак, розглянемо число M+1, яке, очевидно, більше за M, оскільки . Це суперечить припущенню, що M є найбільшим числом. Отже, найбільшого числа не існує.

Теорема 1.2. Які б не були дві різних дійсних числа x і yx, можна знайти нескінченно багато раціональних чисел, що лежать між ними [6.с 175].

Доведення

Ми маємо показати, що між x і y існує нескінченно багато раціональних чисел. Для цього візьмемо будь-яке ціле число n, більше за 0. Розглянемо інтервал між x і y, тобто (x,y) і поділимо цей інтервал на рівні частини довжиною . Це розділить інтервал на нескінченно багато рівних частин.

Оскільки множина раціональних чисел щільна на множині дійсних чисел, для будь-яких двох різних дійсних чисел завжди можна знайти раціональне число між ними. Тобто, між x і y завжди знайдеться раціональне число де p і q — цілі числа. Для кожного поділу на , ми завжди можемо знайти раціональне число всередині інтервалу (x,y).

Оскільки n можна обирати довільно великим, ми можемо знайти нескінченно багато таких поділів інтервалу між x і y, і в кожному з цих поділів існуватиме хоча б одне раціональне число. Отже, між будь-якими двома різними дійсними числами існує нескінченна кількість раціональних чисел.

Теорема 1.3. Який би не був переріз (A, B) в множині всіх дійсних чисел, завжди або існує найбільше число в A, або найменше в B, при чому одна з цих можливостей виключає іншу [25.с 112].

Доведення

Нехай (A,B) — це переріз множини всіх дійсних чисел, тобто:

- A — це підмножина дійсних чисел, такі що всі елементи $a \in A$ менші

  або дорівнюють деякому числу, і

- B — це підмножина дійсних чисел, такі що всі елементи $b \in B$ більші за

  це число.

Іншими словами, множина A складається з чисел, що менші або рівні деякому значенню, а множина B — з чисел, що більші цього значення.

Оскільки множина дійсних чисел впорядкована і неперервна, то переріз (A,B) не може бути порожнім, і завжди існує деяка межа між елементами з A і B.

Нехай c — це така межа (або супремум множини A, або інфімум множини B).

- Якщо c належить до A, то c є найбільшим елементом у множині A,

  оскільки для всіх $a \in A$, $a \le c$, і немає жодного числа більше за c, яке

  також належить до A.
- Якщо c належить до B, то c є найменшим елементом у множині B,

  оскільки для всіх $b \in B$, $b \ge c$, і немає жодного числа менше за c, яке

  належить до B.

Граничне число c не може одночасно бути найбільшим у A і найменшим у B, оскільки за визначенням множини A і B всі числа з A строго менші за всі числа з B. Отже, одна з можливостей виключає іншу:

Якщо c є найбільшим числом у A, то воно не належить до B, і найменшого числа в B немає.

Якщо c є найменшим числом у B, то воно не належить до A, і найбільшого числа в A немає.

Деякі множини дійсних чисел:

1) Сегмент чи відрізок [a,b]
2) Півсегмент чи інтервал [a,b) (a,b].
3) Інтервал (a,b).
4) Числова пряма (-)=R.

5) Півряма або промінь:

Промінь:

А) відкритий (a;), (-)

Б) замкнений [a;), (-].

6) точки a (a-; a+), 0.

7) Окіл точки a – будь-який інтервал, який містить a.

8) Множина M називається щільною в собі, якщо будь-який окіл будь-якої точки із M містить точки із M, відмінні від самої точки.

1.3 Алгебраїчні та трансцендентні дійсні числа

Назву алгебраїчних та трансендентних чисел запропонував Ейлер в 1775 році. В ті часи ще не була відома трансцендентність жодного відомого числа.

Алгебраїчні поля, що відрізняються від раціонального, став розглядати Гаус. При обгрунтуванні теорії біквадратичних віднімань він розвинув арифметику цілих гаусових чисел, тобто чисел виду , де – цілі числа [19.с 107].

Продовження досліджень Гауса привело до побудови загальної теорії алгебраїчних чисел. Далі, вивчаючи теорію кубічних віднімань, Якобі і Ейзенштейн створили арифметику чисел виду , де)/2 – кубічний корінь з одиниці, де – цілі числа [9.с 160].

У 1844 році Ліувілль довів теорему, яка стверджує, що корені многочленів із раціональними коефіцієнтами не можуть бути надто точно наближені раціональними дробами. Це відкриття привело до формального введення понять алгебраїчних і трансцендентних чисел.

Далі розглянемо кожне з них:

Алгебраїчне число над полем F – елемент алгебраїчного замикання поля F, тобто корінь многочлена (не рівний тотожно нулю) з коефіцієнтами з F.

Якщо поле не вказане, то пропонується поле раціональних чисел, тобто F=Q, в цьому випадку поле алгебраїчних чисел зазвичай позначається A. Ця множина є підполем поля комплексних чисел.

Цілими алгебраїчними числами називаються корені многочленів з цілими коефіцієнтами і зі старшим коефіцієнтом, рівним одиниці.

Приклади алгебраїчних дійсних чисел

- Раціональні числа, і тільки вони, є алгебраїчними числами першої степені.
- Уявна одиниця *i* та є алгебраїчними числами другого степеня.
- Гаусові цілі числа, степінь у них також друга.
- Золотий переріз як корінь многочлена .
- – алгебраїчне число третьої степені, корінь многочлена .
- Для будь-якого натурального числа *n* число є алгебраїчним числом степені *n*.

Трансцендентні числа

Вперше поняття трансендентного числа (і сам цей термін) ввів Леонард Ейлер в роботі «De relation inter tres pluresve quantitates instituenda» (1775 рік). Ейлер займався цією темою ще в 1740 році, він заявив, що значення логарифму для раціональних чисел *a, b* не являються алгебраїчними «радикальними», за виключенням випадку, коли для деякого раціонального *c*. Це твердження Ейлера виявилось вірним, але не було доведено аж до XX століття [16.с 88].

Існування трансцендентих чисел довів Жозеф Ліувілль в 1844 році, коли опублікував теорему про те, що алгебраїчне число неможливо дуже добре приблизити раціональним дробом. Ліуілль побудував конкретні приклади, які стали першими прикладами трансцендентних чисел.

Дійсне або комплексне число, що не є алгебраїчним, називається трансцендентним [10.с 103].

В 1873 році Шарль Ерміт довів трансцендентність числа *e*, основи натуральних логарифмів. В 1882 році Ліндеман довів теорему про трансцендентність степені числа *e* з нульовим алгебраїчним показником, тим самим довів трансцендентність числа і нерозв'язність задачі квадратури круга [7.с 211].

З точки зору теорії множини, трансцендентних чисел набагато більше, чим алгебраїчних: множина трансцендентних чисел континуальна, а множина алгебраїчних злічена [9.с 62].

Кожне трансцендентне дійсне число є ірраціональним, але навпаки невірно.

Наприклад, число – ірраціональне, але не трансцендентне: воно є коренем рівняння (і тому є алгебраїчним).

На відміну від множини алгебраїчних чисел, яка є полем, трансцендентні числа не утворюють ніякої алгебраїчної структури відносно арифметичних дій – результат додавання, віднімання, множення та ділення трансцендентних чисел може бути як трансцендентним, так і алгебраїчним числом.

Однак, деякі обмежені способи отримати трансцендетне число з іншого трансцендентного числа існують.

1. Якщо t - трансцендентне число, то $-t$ і $1/t$ також трансцендентні.
2. Якщо a – не нульове алгебраїчне число, а t – трансцендентне число, то трансцендентні.
3. Якщо t - трансцендентне число, а n - натуральне число, то трансцендентні.

Міра ірраціональності майже всякого (в мірі Лебеги) трансцендентного числа рівна 2.

Приклади трансцендентних чисел

- Число ;
- Число ;
- Стала Гельфонда ;
- ;
- Десятковий логарифм будь-якого натурального числа, крім чисел виду ;

і , для будь-якого ненульового алгебраїчного числа .

Недивлячись на обширне вивчення трансцендентних чисел, в цій області ще залишаються значні питання, відповіді на які поки не знайдені, ось деякі з них:

1. Існування трансцендентних чисел з певними властивостями

Відомо, що майже всі числа трансцендентні (в тому сенсі, що множина трансцендентних чисел має повну міру Лебега), але знайти конкретне трансцендентне число з певними властивостями буває крайнє складно. Наприклад, доведено, що такі числа як та , трансцендентні, але аналогічні питання для інших відомих чисел залишаються відкритими [8.с 62].

2. Гіпотиза Ліндеманна-Веєрштрасса:

Хоча доведено для ряду випадків, гіпотизи про те, що експоненти алгебраїчних чисел залишаються трансцендентними, все ще виникають питання, особливо в більш складних узагальненнях. Наприклад, для складних експоненційних функцій на комплексних числах і їх комбінацій суворі докази не завжди існують.

Наведемо декілька конкретних прикладів застосування невирішених питань, пов'язаних з трансцендентними числами:

1. Трансцендентність числа - :

Відомо, що числа та обидва трансцендентні, але залишається невідомим, чи являється різниця – трансцендентною або алгебраїчною. Це відноситься до чисел, котрі уявляють собою комбінацію невідомих трансцендентних чисел, але самі не доведені як трансцендентні або алгебраїчні [14.с 209].

2. Трансцендентність * ;

Питаня аналогічне попередньому. Не доведенно, чи являється добуток * трансцендентним. Оскільки обидві ці конструкції трансцендентні, існує гіпотиза, що їх добуток теж має бути трансцендентним, але доказів цьому немає [22.с 108].

Таким чином, дійсні числа є невід'ємною частиною багатьох математичних теорій, забезпечуючи фундамент для розуміння більш складних математичних об'єктів, таких як канторова множина.

РОЗДІЛ 2.
КАНТОРОВА МНОЖИНА ТА ЇЇ ПОБУДОВА

2.1. **Історія відкриття канторової множини**

Важливим стимулом для обґрунтування математики стало вчення про множини, розроблене Георгом Кантором (1845–1918). Кантор ввів у математику такі нові поняття, як потужність множини, цілком впорядкована множина, різниця між потенційною та актуальною нескінченністю, класи чисел тощо. Це призвело до раніше небаченої потреби у чіткій логічній систематизації основних понять математики. Особливо важливим було те, що в процесі з'явилися протиріччя, пов'язані з канторовим вченням про множини [18.с 49].

Основним поняттям математики, яке запропонував Кантор, було поняття "множини", а його головним ученням стала "теорія множин". Можливо, після введення античними математиками поняття числа (що з'явилося ще раніше в цивілізаціях стародавнього Вавилона, Єгипту, Індії та Китаю), а математиками нового часу — поняття функції, введення "множини" стало одним із найбільш значущих етапів у розвитку математики. «Під…множиною, - пояснював Георг Кантор, - я розумію взагалі будь-яку річ, яку можна осмислити як одне ціле, тобто будь-яку сукупність відповідних елементів, які можуть бути пов’язані в одне ціле за допомогою деякого закону…» [21.с 94].

Канторова множина була відкрита німецьким математиком Георгом Кантором наприкінці XIX століття в ході його досліджень неперервності та природи нескінченності. Кантор досліджував дійсну числову пряму та намагався зрозуміти, як вона розподіляється між раціональними та ірраціональними числами. Ці дослідження привели його до відкриття досконалої, але водночас нульової за мірою множини, яка стала відомою як канторова множина.

Відкриття канторової множини було важливим кроком у розумінні тонкої структури дійсної числової осі, а також дало змогу побудувати нові абстрактні математичні об'єкти з цікавими властивостями, зокрема множини з нульовою мірою Лебега.

2.2 Процес побудови канторової множини

1. Початковий відрізок

Візьмемо відрізок [0,1] на числовій прямій. Це буде наш початковий об'єкт, з якого ми почнемо побудову досконалої канторової множини.

2. Перше видалення

- Розділення: Розділімо відрізок [0,1] на три рівні частини. Це створює три підінтервали: [0,1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1].
- Видалення середнього: Видаляємо відкритий середній інтервал [1/3, 2/3]. Після цього залишаться два закриті інтервали: [0, 1/3], [2/3, 1].

3. Наступні ітерації

- Повторення процесу: На кожному наступному етапі розділяємо кожен з залишених інтервалів на три рівні частини та видаляємо середній інтервал. Тобто, кожен з залишених інтервалів знову поділяється на три частини, і знову видаляється середній інтервал [27].

4. Формування канторової множини

- Нескінчений процес: Цей процес можна повторювати нескінченно. На кожному кроці буде більше інтервалів, що залишаються, але кожен з них буде коротший, і середній інтервал буде видалений.

  Досконала множина: В результаті нескінченного повторення цього процесу, отримаємо досконалу канторову множину C.

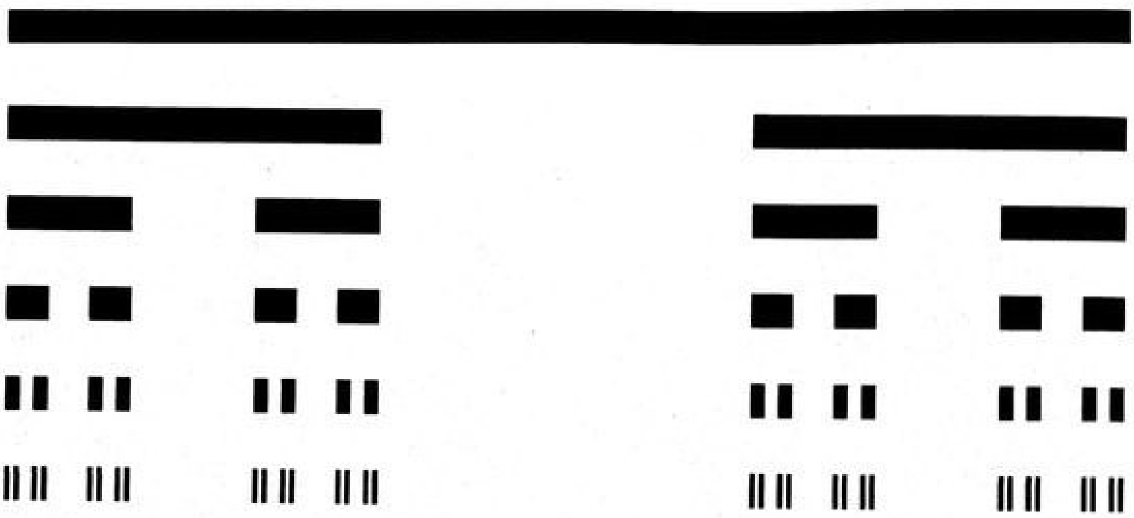

Рисунок 2.1

Оскільки множина кантора визначається як множина не видалених точок, то можна визначити відношення цієї множини до одиничного інтервалу через загальну довжину видалених підінтервалів.

Загальна довжина дорівнює сумі геометричної прогресії:

. 2.1

На перший погляд результати обчислень можуть здаватися дивними — здається, що після видалення інтервалів щось все одно залишається, і сума довжин видалених частин дорівнює довжині початкового інтервалу. Однак, якщо придивитися до цього процесу, стає зрозуміло, що деяка частина повинна залишитися, оскільки видалення "середньої третини" кожного інтервалу означає видалення відкритого інтервалу (тобто інтервалу, який не включає своїх меж). Наприклад, видалення сегмента (1/3, 2/3) з початкового інтервалу залишає точки 1/3 та 2/3. У подальшому ці межові точки не видаляються, оскільки інтервали, що видаляються, є відкритими щодо тих, що залишаються. Отже, множина кантора не є порожньою.

2.3 Властивості канторової множини

Канторова множина є прототипом фракталу. Вона є самоподібною, оскільки вона дорівнює двом своїм копіям, якщо кожну копію зменшити втричі та перенести [26].

- Нескінченність: Канторова множина містить нескінченну кількість точок.
- Нульова міра Лебега: Незважаючи на те, що канторова множина складається з нескінченної кількості точок, сукупна довжина видалених відрізків прямує до 1. Це означає, що канторова множина має нульову міру Лебега, тобто "обсяг" цієї множини дорівнює нулю.
- Замкнутість і досконалість: канторова множина є замкнутою і компактною, оскільки містить усі свої граничні точки. Вона також є досконалою множиною, оскільки кожна точка цієї множини є граничною точкою — немає ізольованих точок.
- *C* щільна в собі, тому що кожна відкрита множина, яка містить точку , містить точки , відмінні від . Таким чином, не розсіяна, і з того, що вона замкнена, випливає, що вона досконала.
- Множина кантора ніде не щільна у відрізку [0,1], тому що вона замкнуна і будь-який відкритий інтервал в [0,1] перетинається хоча б з одним викинутим інтервалом.

Зв'язок канторової досконалої множини з дійсними числами полягає в тому, що вона є підмножиною дійсної числової осі, але має унікальні властивості, які відрізняють її від інших множин дійсних чисел. Ось ключові аспекти цього зв'язку:

1. Розміщення на дійсній осі

Канторова множина будується на відрізку [0,1] числової осі. Це означає, що вона є підмножиною множини дійсних чисел. Процес побудови канторової множини передбачає нескінченне видалення центральних частин відрізка, але частина точок залишається. В результаті, канторова множина є сукупністю нескінченної кількості дійсних чисел, хоча її міра Лебега дорівнює нулю.

2. Замкнутість і досконаліст

Канторова множина є досконалою підмножиною дійсних чисел. Це означає, що вона містить усі свої граничні точки і не має ізольованих точок. Будь-яка точка цієї множини є граничною, що вказує на те, що множина є замкнутою в топологічному сенсі.

3. Наявність ірраціональних і раціональних чисел

Хоча канторова множина належить до відрізка [0,1], що містить як раціональні, так і ірраціональні числа, її структура така, що більшість точок множини є ірраціональними. Втім, канторова множина містить і деякі раціональні числа, наприклад, 0 і 1, які не були видалені під час побудови. Це вказує на складний взаємозв'язок між ірраціональними і раціональними числами всередині канторової множини.

4. Щільність у дійсній осі

Вже в елементарній алгебрі, виходячи з наївного представлення про пряму лінію, показується як, взявши на прямій дві точки, - нульову точку (початок координат) і одиничну, - можна нанести на цій прямій сітку так званих раціональних точок, що знаходяться на взаємно однозначній відповідності з раціональними числами.

Цей процес побудови множини всіх раціональних точок прямої може бути строго обгрунтований, тобто виведений з систем аксіом елементарної геометрії.

Ці ж аксіоми дозволяють поставити інші (не раціональні) точки прямої в взаємно однозначну відповідність з ірраціональними числами, так що в результаті встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною всіх точок прямої і множиною всіх дійсних чисел. Встановивши раз і назавжди таке співвідношення, ми говоримо про «числову пряму» [11.с 213].

Хоча канторова множина є підмножиною відрізка [0,1], вона не є щільною на цій осі. Це означає, що між будь-якими двома точками канторової множини існують дійсні числа, які не належать до цієї множини. Таким чином, хоча канторова множина є нескінченною, вона не охоплює всі дійсні числа в межах відрізка [0,1].

5. Континуум канторової множини

Канторова множина є прикладом континууму — нескінченної множини, яка має таку ж потужність, як множина всіх дійсних чисел. Це означає, що, попри видалення відрізків, кількість точок, що залишилися в канторовій множині, нескінченно велика і має таку ж "кардинальну" чисельність, як множина всіх дійсних чисел.

6. Самоподібність і фрактальна природа

Однією з важливих властивостей канторової множини є її самоподібність: будь-яка її частина схожа на всю множину в цілому, хоча і в менших масштабах. Це типова властивість фракталів. У цьому сенсі канторова множина демонструє складні структури, які виникають всередині неперервної числової осі, що є підмножиною дійсних чисел.

Підсумок

Канторова множина є унікальним математичним об’єктом, що демонструє, як нескінченні процеси можуть призвести до цікавих результатів, зокрема до множин, які є нескінченними, але мають нульову міру. Ця множина грає важливу роль у багатьох сучасних дослідженнях, зокрема в теорії фракталів та топології.

РОЗДІЛ 3.
ЗАДАЧІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ДОСКОНАЛОЮ КАНТОРОВОЮ МНОЖИНОЮ

3.1. Неперервне відображення канторової множини

Пояснення неперервного відображення

Ознайомлюючись з поняттям неперервного відображення здобувачі освіти мають зрозуміти що таке відображення деформує простір, не розриваючи його, при цьому окремі точки або частини простору можуть склеїтися (поєднатися), але близькі точки залишаються близькими [26].

- *Загальні властивості неперервних функцій*:

1. Досконалість

- **Визначення**: Досконала множина — замкнута множина, що не має ізольованих точок, тобто така, що збігається з множиною своїх граничних точок [26].

- **Конструкція**: Для побудови досконалої канторової множини використовується процес ітераційного видалення. Розпочинаючи з відрізка [0, 1], видаляються середні частини на кожному етапі, залишаючи усе більше і більше точок у новоутворених відрізках.

2. Фрактальна структура

- **Визначення**: Досконала канторова множина має фрактальну природу, що означає, що вона є самоподібною, тобто її частини є копіями самої себе в зменшеному масштабі.

3. Компактність

- **Визначення**: Множина M метричного простору (X, p) називається компактною, якщо із всякого її покриття відкритими множинами можна виділити скінчене підпокриття.

  Досконала канторова множина є компактною, тобто кожне її відкрите покриття має скінченне підпокриття [26].

- **Властивості**: Компактність важлива для забезпечення існування неперервного відображення, оскільки компактні множини мають властивість, що всі їх неперервні відображення є обмеженими і досягають своїх крайніх значень.

4. Наявність внутрішніх точок

- **Визначення**: У досконалій канторовій множині немає внутрішніх точок, оскільки в ній немає жодної точки, яка б мала окіл, що повністю належить до цієї множини [26].
- **Властивості**: Це важливо для забезпечення неперервності відображення, оскільки досконала канторова множина не має властивостей, які б принципово могли призвести до розривів у відображенні.

Побудова неперервного відображення канторової множини

Побудуємо відображення канторової досконалої множини С на відрізок [0, 1]. Як відомо, канторова досконала множина складається з точок, які можна записати за допомогою трійкової системи, використовуючи лише цифри 0 і 2.

Візьмемо точку *a* *C*; також зазначимо, що точка *a* визначає нескінчену послідовність (), де {0; 2}. Щоб визначити відображення, всі елементи послідовності помножимо на ½. Таким чином, отримуємо послідовність , таку, що {0; 1}. Якщо вказану послідовність розглядати як двійковий запис, координати точки відрізка [0, 1], то отримуємо шукане відображення.

. 2.2

Отже, ми побудували відображення множини С на відрізок [0, 1]. Звідси випливає ще одне доведення, що канторова множина має потужність континуум, тобто містить стільки ж точок, скільки і весь відрізок [0, 1].

З цим фактом також цікаво порівняти наступний результат: **сума довжин** 1/3+2/9+4/27+… **усіх викинутих інтервалів становить точно одиницю.**

Аналогічно, можна помітити, що на кожному кроці залишається 2/3 від довжини інтервалу, отриманого на попередньому кроці. Таким чином, отримуємо довжину інтервалу 2/3 × 2/3 × 2/3 × ..., нескінченний добуток, границя значень якого дорівнює 0 [26].

Теорема 2.1. Будь-яке число, що належить відрізку [0, 2] можна подати у вигляді суми двох чисел, кожне з яких належить канторовій досконалій множині.

Спробуємо **довести, що будь-яке число, що належить відрізку [0, 2] можна подати у вигляді суми двох чисел, кожне з яких належить канторовій досконалій множині.**

Нехай t є [0; 2], тоді = є [0; 1].

Запишемо число в трійковій формі запису:

a → () = , де є {0, 1, 2};

=

Запишемо через суму і , тобто = + .

Встановимо таке правило визначення і :

Якщо = 0, то = 0 і = 0 .

Якщо = 2, то = 1 і = 1 .

Якщо =1, то або = 1 і = 0; або = 0 і = 1

Таким чином отримуємо, що є {0, 1,}; є {0, 1,}, тобто в записі немає жодної двійки.

Збільшимо і вдвічі. Отримаємо:

= є C; = є C , то

+ =

+ =

+ = 2

+ = 2 *

+ = t

Доведено

Графічні та наочні матеріали

Для покращення розумінь та сприйняття здобувачів освіти доцільно використовування графіків для візуалізації відображення, щоб показати, як досконала канторова множина перетворюється на відрізок за допомогою конкретних функцій.

3.2. Приклади розв’язування задач

Для ознайомлення здобувачів освіти необхідна не лише зрозуміла теорія, а й якісна практика. Нижче пропонуємо ознайомитись з прикладами, які було б доцільно розглянути на уроках математики.

Приклад 1

Знайти число, яке в канторовій досконалій множині задається послідовністю:

2, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2………

Розв'язання

Запишемо в трійковій системі:

,

З третього члена цієї послідовності починається геометрична прогресія, де перший член = , знаменник q = . Знаходимо суму геометричної прогресії за формулою: S = ;

S = = * = . x = + = .

Отже, шукане число .

Приклад 2

Довести, що належить канторовій досконалій множині.

Розв'язання

Знайдемо послідовність, якою задається дане число. При поділі відрізка враховуємо, якщо число належить лівому відрізку, то ставимо в послідовність цифру 0. Якщо число належить правому відрізку, то ставимо в послідовність цифру 2.

Отримана послідовність: 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, ……

Трійкова форма: ,

Знайдемо суму геометричної прогресії, де перший член = , знаменник

q = .

x = = * = .

Оскільки, точці відповідає послідовність, в записі якої немає жодної одиниці, то дана точка належить канторовій досконалій множині.

Приклад 3

Представити число 1 , як суму двох чисел, кожне з яких належить канторовій досконалій множині.

Розв'язання

t = 1 = , тоді = = .

Знайдемо послідовність чисел, якою в трійковій системі можна задати :

= (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0 …). Очевидно, що число не належить канторовій досконалій множині, тому що в послідовності є число 1.

Переконаємось, що послідовність, дійсно, відповідає числу :

= + + + + + + … = + * + … + * + …

Знайдемо суму геометричної прогресії, де перший член = , знаменник q = .

= = * = .

Запишемо через суму і , тобто = + .

b = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0 …)

c = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0 …)

Збільшимо і вдвічі.

2b = = (2, 2, 0, 2, 2, 0, 2, 2, 0 …)

2c = = (0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0 …)

Очевидно, що отримані числа належать канторовій досконалій множині. Обрахуємо їх значення:

= + + + + + + … = + * + … + * + …

Знайдемо суму геометричної прогресії, де перший член = , знаменник

q = .

= = * = .

= + + + + + + … = + * + … + * + …

Знайдемо суму геометричної прогресії, де перший член = , знаменник

q = .

= = * = .

Отже, + = + = = 1 = t.

Приклад 4

Довести, що будь-яке число з відрізку [0, n] можна подати у вигляді суми чисел , кожне з яких належать канторовій досконалій множині.

Доведення

Якщо число *a* належить відрізку [0, 2], то використовується доведення за теоремою **2.1.**

Якщо число *a* належить відрізку [2, 3], то користуючись, тим, що одиниця є елементом канторової досконалої множини, отримуємо, що число *a-1* може бути представлене, як сума чисел , кожне з яких належить канторовій досконалій множині, отже *a* =.

Якщо число *a* належить проміжку [3, 4], то число *a-1-1* може бути представлене, як сума чисел , кожне з яких належить канторовій досконалій множині, отже *a* =.

Аналогічно, за цим доведенням будь-яке число *a* з проміжку [0, n] можна подати у вигляді суми чисел кожне з яких належить канторовій досконалій множині.

Приклад 5

Довести, що число можна подати у вигляді суми чисел , кожне з яких належать канторовій досконалій множині.

Оскільки число   [4, 5], що не задовольняє умову теореми **2.1,** скористаємось доведенням з прикладу **4**.

Оскільки число   належить проміжку [4, 5], то користуючись, тим, що одиниця є елементом канторової досконалої множини, отримуємо, що число *-1-1-1* може бути представлене, як сума чисел , кожне з яких належить канторовій досконалій множині, отже =.

ВИСНОВОК

Канторова множина — це унікальна підмножина дійсних чисел, яка поєднує в собі властивості замкнености, досконалості, нульової міри і самоподібності. Вона демонструє, як нескінченні процеси можуть створювати множини, що мають як нескінченну кількість точок, так і незвичну структуру порівняно з іншими множинами дійсних чисел. Це робить її важливим математичним об'єктом у теорії множин і топології.

У першому розділі розглянуто основні поняття дійсних чисел та їх властивості. Дійсні числа є фундаментальним об’єктом у математиці, що включають як раціональні, так і ірраціональні числа. Вони утворюють неперервну числову пряму і використовуються для вимірювання, обчислення та моделювання реальних процесів. Важливою властивістю дійсних чисел є їх щільність: між будь-якими двома дійсними числами завжди можна знайти інше дійсне число. Дійсні числа також володіють властивостями впорядкованості, що дозволяє їх порівнювати та проводити операції додавання, множення та інші алгебраїчні дії. Важливим аспектом є класифікація дійсних чисел на раціональні та ірраціональні, кожна з яких має свою власну структуру і характеристики. Цей розділ формує базу для подальшого вивчення складніших математичних об’єктів, таких як множина Кантора, яка є підмножиною дійсних чисел.

Другий розділ присвячений канторовій множині, яка є одним із найяскравіших прикладів фрактальних об'єктів у математиці. Відкриття множини Кантора значно вплинуло на розвиток теорії множин та сучасної математики в цілому. Цей розділ починається з історичного огляду, що показує, як дослідження Г. Кантора привели до створення цього унікального об'єкта. Канторова множина будується через ітераційне видалення середньої третини відрізків на кожному етапі, що призводить до утворення множини, яка є нескінченною, замкненою і водночас не містить інтервалів. Однією з важливих властивостей є те, що вона має потужність континууму, незважаючи на те, що її довжина дорівнює нулю. Канторова множина є прикладом фракталу, тобто об'єкта, який має самоподібність на різних масштабах. Вивчення цієї множини дає глибокий інсайт у природу нескінченності та структури дійсної прямої.

У третьому розділі досліджуються різні операції та властивості досконалої канторової множини. Особливу увагу приділено її неперервним відображенням та їх ролі в аналізі. Канторова множина має унікальні властивості, які роблять її важливим об’єктом досліджень у багатьох областях математики, зокрема в топології та функціональному аналізі. Неперервні відображення демонструють, як канторова множина взаємодіє з іншими математичними об'єктами та перетворюється в процесі відображень.

Приклади задач, представлені в цьому розділі, ілюструють конкретні способи застосування канторової множини у вирішенні математичних задач. Крім того, дослідження логічного зв'язку між канторовою множиною та множиною дійсних чисел показує глибокі структурні властивості дійсної прямої.

Канторова множина є частиною багатьох важливих математичних об'єктів і дає змогу краще зрозуміти складні математичні структури через її фрактальну природу та неперервність.

Список використаних джерел

1. Düntsch G., Gediga G. Sets, Relations, Functions / G. Düntsch, G. Gediga. — 2000. — ISBN 1903280001.
2. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Set Theory [Архівовано 14 березня 2015 у Wayback Machine] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. — (англ.).

3. Steen L. A., Seebach J. A. Counterexamples in Topology / L. A. Steen, J. A. Seebach. — Berlin, New York: Springer-Verlag, 1995. — ISBN 978-0-486-68735-3.
4. The Wolfram Functions Site gives formulae and visualizations of many mathematical functions. — (англ.).
5. Верещагін Н. К., Шень А. Лекції з математичної логіки та теорії алгоритмів. Частина 1. Початки теорії множин / Н. К. Верещагін, А. Шень. — [Недоступне посилання з травня 2019].
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Частина 1 / А. Я. Дороговцев. — К.: Либідь, 1993. — 320 с. — ISBN 5-325-00380-1.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Частина 1 / А. Я. Дороговцев. — К.: Либідь, 1993. — 320 с. — ISBN 5-325-00380-1.
8. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Частина 1 / А. Я. Дороговцев. — К. : Либідь, 1993. — 320 с. — ISBN 5-325-00380-1.
9. Електронний підручник з теми «Теорія множин. Комбінаторика» [Архівовано 23 жовтня 2013 у Wayback Machine].
10. Єршов Ю. Л., Палютін Є. А. Математична логіка: Навчальний посібник / Ю. Л. Єршов, Є. А. Палютін. — 3-тє, стереотипне вид. — СПб.: Лань, 2004. — 336 с.
11. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз: Підручник / Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. — Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. — 416 с. — ISBN 978-966-613-512-9.
12. Завало С. Т. Елементи аналізу. Алгебра многочленів / С. Т. Завало. — Київ: Радянська школа, 1972. — 462 с.
13. Зорич В. А. Математичний аналіз / В. А. Зорич. — 10-те вид. — М.: МЦНМО, 2019. — Т. 1. — 564 с. — ISBN 978-5-4439-4029-8.

14.Зорич В. А. Математичний аналіз / В. А. Зорич. — 10-те вид. — М.: МЦНМО, 2019. — Т. 1. — 564 с. — ISBN 978-5-4439-4029-8.

15.Катасонов В. М. Борючись із нескінченним: Філософсько-релігійні аспекти генезису теорії множин Г. Кантора / В. М. Катасонов. — М., 1999.

16.Клепко В. Ю., Голець В. Л. Множина дійсних чисел // Вища математика в прикладах і задачах / Клепко В. Ю., Голець В. Л. — 2-ге видання. — К.: Центр учбової літератури, 2009. — С. 163. — 594 с.

17.Клепко В. Ю., Голець В. Л. Поняття множини // Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — 2-ге вид. — К.: Центр учбової літератури, 2009. — С. 162. — 594

18.Кудрявцев Л. Д. Математичний аналіз / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Вища школа, 2003. — Т. 1. — 703 с.

19.Куратовський К. Вступ до теорії множин та топології / К. Куратовський. — 8-ме вид. — Варшава: PWN, 1980. — ISBN 83-01-01372-9.

20.Куратовський К., Мостовський А. Теорія множин = Set Theory (Teoria mnogości) / К. Куратовський, А. Мостовський. — М.: Мир, 1970. — 416 с.

21.Куратовський К., Мостовський А. Теорія множин = Set Theory (Teoria mnogości) / К. Куратовський, А. Мостовський. — М.: Мир, 1970. — 416 с.

22.Математика онлайн. URL: FIZMA.neT

23.Поняття функції // Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. — 2-ге вид. — К. : Центр учбової літератури, 2009. — С. 174. — 594 с.

24.Пуркет В., Ільгаудс Х. І. Георг Кантор / В. Пуркет, Х. Ільгаудс. — Харків, 1991.

25.Рибніков К. А. Історія математики / К. А. Рибніков. — М.: Вид-во Київ, 1963. — Т. 2. — 336 с.

26.Соломатіна Я.Б. Знайомство здобувачів освіти з побудовою неперервного відображення досконалої канторової множини на відрізок / Соломатіна Я.Б. //«Формування професійної компетентності майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» на базі Херсонського державного університету у 2024 році;

27.Соломатіна Я.Б. Перше знайомство учнів закладів середньої освіти з канторовою множиною / Соломатіна Я. Б. // VIII Міжнародна науково-практична конференція — 2024. URL: https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya

28.Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення / Г. М. Фіхтенгольц. — 2024. — 2403 с.

29.Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення / Григорій Михайлович Фіхтенгольц. — 2024. — 2403 с.

30.Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення / Г. М. Фіхтенгольц. — 2024. — 2403 с.

31.Флоренський П. А. Про символи нескінченності (Нарис ідей Г. Кантора) // Твори в 4 т. / П. А. Флоренський. — М., 1994—1999. — Т. 1. — С. 79—128.

32.Функція // Універсальний словник-енциклопедія. — 4-те вид. — К. : Тека, 2006.

33.Хаусдорф Ф. Теорія множин / Ф. Хаусдорф. — М.;Харків: ОНТИ, 1937. — 304 с. — ISBN 978-5-382-00127-2.