Міністерство освіти і науки України

Херсонський державний університет

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПЕРШЕ ЗНАЙОМТВО УЧНІВ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ З НЕСКІНЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти " магістр"

Виконала: студентка 2-го курсу, 12-221М групи

Спеціальності: 014 Середня освіта

Спеціалізація: 014.04 Математика

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Землякова Катерина Василівна

Керівник доктор фізико-математичних наук,

професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент доцент кафедри інформаційних технологій та фіз.-мат. дисциплін Херсонського навч.-наук. інституту Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова, кандидат фізико-математичних наук,

Штанько О.Д.

Івано-Франківськ – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Поняття нескінченності одне із найважливіших та водночас «загадкових» в науці. З давніх часів велика кількість філософів та математиків розмірковували над суперечливістю цього поняття. Ф. Енгельс писав: «Протиріччям є вже те, що нескінченність повинна складатися з одних лише кінцевих величин, а між іншим, це саме так. Обмеженість матеріального світу призводить до не менших протиріч, ніж його безмежність, і будь-яка спроба усунути ці протиріччя веде до нових, гірших суперечностей. Саме тому, що нескінченність є протиріччям, вона являє собою нескінченний процес, що нескінченно розгортається в часі і просторі. Знищення цього протиріччя було б кінцем нескінченності».

В математиці суперечності, пов'язані з ідеєю нескінченності, загострилися наприкінці XIX ст. після появи теорії нескінченних множин і незабаром після виявлення парадоксів, що з нею пов'язані. У той час, поки багато вчених, ігноруючи ці парадокси, активно застосовували теорію множин у своїх дослідженнях, інші науковці піддавали теоретико-множинні методи в математиці жорстокій критиці.

Суперечки навколо теорії множин загострилися, коли група французьких математиків, які писали під псевдонімом Ніколя Бурбакі, виступила з ініціативою побудувати всю будівлю математичної науки, спираючись виключно на поняття множини. Ця спроба, яка була з ентузіазмом сприйнята багатьма математиками та суттєво вплинула на розвиток науки XX століття, отримала критику від інших науковців за надмірну формалізацію і спробу відокремити математику від її живильних практичних застосувань.[23]

Велика кількість науковців, філософів, математиків, таких як : Зенон, Платон, Арістотель, Г. Галілей, Г. Лейбніц, Р. Бекон, Б. Больцано, Г. Кантор, Д. Гільберт й багато інших досліджували нескінченність. Вона вимагала вихід за межі класичного розуміння математики.

Ознайомлення учнів з поняттям нескінченності та нескінченних множин — це складне, але вкрай важливе та захопливе завдання. В сучасній математиці нескінченні множини мають ключове значення як в теоретичному, так і в прикладному аспектах. Ефективне вивчення нескінченних множин у школі ґрунтується на поєднанні теоретичних знань із практичними вправами.

Мета дослідження **—** розгляд питання можливості ознайомлення здобувачів освіти з нескінченними множинами на початковому етапі вивчення математики в середній школі.

Об'єкт дослідження є навчальна діяльність здобувачів в процесі вивчення математики.

Предмет дослідження **—** перше знайомство учнів закладів загальної середньої освіти з нескінченними множинами.

Завдання дослідження:

- дослідити основні проблеми та теоретичні положення, що стосуються теорії множин та нескінченності;
- розкрити історичний аспект вивчення нескінченності;
- розглянути «Першу проблему Гільберта»;
- проаналізувати навчальні програми з математики загальноосвітніх навчальних закладів;
- виокремити деякі завдання, які можуть бути використані для закріплення знань з теми «Нескінченні множини».

Теоретичне значення роботи полягає у визначенні питань теорії нескінченних множин, доступних для вивчення учнями в рамках шкільного курсу математики. ***Практичне значення*** роботи зумовлене можливістю використання її матеріалів як учнями, так і вчителями закладів середньої освіти.

Для розв'язання поставлених завдань було використано такі ***методи***: ознайомлення з літературою з теми дослідження, аналіз освітніх програм, а також вивчення й узагальнення педагогічного досвіду.

Апробація результатів дослідження. За результатами проведеного дослідження було опубліковано:

1.1) тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів природничо-математичних дисциплін в умовах цифровізації вищої освіти» (17-18 жовтня 2024 року, Херсонський державний університет);

1.2) тези в збірнику робіт VIII Міжнародної науково-практичної конференції «Perspectives of contemporary science: theory and practice» (16-18 вересня 2024 року, Львів).

Дипломна робота структурована у три основні розділи. Перший розділ присвячений теоретичним основам теорії множин та проблематики нескінченності. В другому розділі розкрито питання першої проблеми Гільберта та її вирішення. Третій розділ має практичну спрямованість і містить методичні рекомендації щодо вивчення нескінченних множин учнями закладів загальної середньої освіти.

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТА ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1 Проблеми нескінченності і теорії множин

З часу виникнення у VI-V ст. до Різдва Христового математики як теоретичної науки, найбільші труднощі у ній пов'язані з поняттям нескінченності. Думка Арістотеля, що актуальної нескінченності немає, що вона не потрібна математиці, підтримувалася багатовіковою традицією. Г. Галілей та Г. Лейбніц, К. Гаусс та Н. І. Лобачевський, Ж. Лагранж та О. Коші виключали актуальну нескінченність [32] з розгляду. Такий підхід, незважаючи на ефективність практичного застосування математики та на всі більш значні темпи, з якими будувався будинок математичної науки, не дозволяв поставити цю величну будівлю на надійний фундамент[28].

Довгий час абсолютно надійним розділом математики вважалася геометрія. Саме з неї почав свої «Начала» Евклід, підкресливши тим самим, за Платоном і Арістотелем, значення саме цієї дисципліни. Протягом двох наступних тисячоліть геометрія продовжувала вважатися найнадійнішим розділом математики.[21] «Все, що виходить за рамки геометрії, виходить за рамки нашого розуміння», — говорив Б. Паскаль. Б. Спіноза написав свою «Етику» за лекалами «Начал», І. Ньютон, наслідуючи Евкліду, виклав механіку в «Математичних засадах натуральної філософії», а І. Кант у «Критиці чистого розуму» говорив про геометрію як про апріорне знання.

Відмінність між наукою про кількість (арифметикою) та наукою про величину (геометрією), запроваджену Платоном у «Державі», існувала, за словами Прокла, вже у піфагорійців.[1] І якщо в геометрії аж до появи результатів М. І. Лобачевського не виникало жодних проблем, то в арифметиці були складнощі, пов'язані з існуванням ірраціональних чисел, існуванням арифметичного аналога геометричної величини, яка отримується при спробі вимірювання діагоналі квадрата із заданою стороною. Піфагорійці зберігали в таємниці знання про арифметичну несумірність геометричних величин, і навіть наприкінці XIX ст. Л. Кронекер не приймав ірраціональні числа, кажучи, що «цілі числа створив Бог, а решта є творіння людини». Ті ж, хто беруть на розгляд ірраціональні числа, називають їх квадратним коренем із відповідної величини, але «навіть «кінцеві» ірраціональні числа, – каже Г. Кантор, – не можна обґрунтувати з науковою строгістю без рішучого залучення до справи актуально нескінченних множин».

Р. Декарт шляхом введення системи координат зробив значний крок у напрямку встановлення відповідності між двома розділами математики та створенням єдиної універсальної математичної теорії, яка мала стати такою ж надійною, якою залишалася протягом тривалого часу геометрія. Однак у 1820-ті роки. Лобачевський встановив, що геометрія Евкліда не є ані апріорним, ані абсолютним знанням. Він показав, що вимога п'ятого постулату, який відрізнявся від інших не лише своєю незвичайною формою, а й присутністю у формулюванні поняття нескінченності, незалежно від інших постулатів та загальних положень (перейменованих на аксіоми) системи і, отже, може бути замінено альтернативною установкою.[26]

Чергова актуалізація питання про те, як працювати з нескінченністю, була викликана використанням нескінченно малих величин у диференціальних та інтегральних обчисленнях. У спробах строгого обґрунтування аналізу нескінченно малих Коші ввів як основне поняття границю, а Вейєрштрасс запропонував класичне визначення цього поняття мовою епсилон-дельта. Небезпека такого обґрунтування полягала в тому, що у визначенні границі використовувалося поняття нескінченності (католик Коші говорив тільки про потенційну нескінченність, залишаючи актуальну нескінченність як винятковий атрибут Бога). Отже, математика потребувала теорії, що визначає і описує роботу з нескінченністю. Вирішуючи цю проблему, математики змушені були вийти за межі своїх спеціальних досліджень та вирушити у пошуках відповідей на поля філософії [3].

Платон замислився над питанням: скільки всього існує у світі? Неоплатоніки, послідовники його ідей, продовжили ці міркування. Вони представляли світ, використовуючи поняття «єдиного» та «великого» (у розумінні кількості. Прокл, один із неоплатоників, стверджував, що все суще є єдине ціле, а не множина окремих речей або пустота. Він доводив це з протилежного. Якби світ складався з множини речей, то кожна річ була б складена з нескінченно великих нескінченностей, що більше, ніж просто нескінченність. А якби світ був пустотою, то й усі його частини, і будь-які їхні поєднання теж були б нічим. Прокл вважав обидва ці висновки неможливими, тому світ може бути ні множиною, ні пустотою. У неоплатоників "єдине" - це не просто все існуюче, а універсальний принцип, першооснова, з якої виникає все інше.[24]

Обидва положення, відкинуті Проклом як абсурдні, були прийняті Кантором, який сформулював і довів основні результати теорії множин. Ним було введено поняття порожньої множини, що визначається як така, що не містить жодного елемента. З інших визначень теорії випливало, що порожня множина єдина і що вона є елементом будь-якої множини. Більше того, так звана порожня множина, що має нульову потужність, породжувала множину будь-якої потужності. «Нескінченно великі нескінченності» теж були прийняті Кантором, проблемна ситуація вирішувалася за допомогою введення кардинальних чисел, що впорядковують нескінченності згідно з відповідними потужностями.

Г. Кантор прийняв положення, що нескінченна величина може бути строго меншою за деяку іншу величину, але не перейшов звідси до висновку про неможливість будь-якої нескінченної величини. Кожне дійсне число Кантора представлялося нескінченною кількістю символів, що дозволяло в певному сенсі фіксувати і ірраціональні числа. Ухвалення абсурдних, з погляду Прокла, положень призвело до деяких контрінтуїтивних результатів. Виходило, що множини натуральних, цілих, раціональних чисел – однакової потужності. Також строго доводилася взаємна однозначна відповідність між множинами точок прямої та деякого інтервалу на ній.

Теорія множин вирізнялася граничною абстрактністю. Математика остаточно відривалася від будь-яких зв'язків із уявленнями про реальність. Звичні арифметичні чи геометричні інтерпретації ставали лиш деякими з можливих моделей. Множина, ключове для канторівської системи поняття, визначалося ним як сукупність елементів будь-якої природи, мислима як єдине ціле. Крім того, таке визначення допускає, можливість розуміння самої множини як елемента, що призводить до самоаналізу, який пізніше породив знамениті парадокси.

1.2 Канторівська теорія множин

В даний час існування актуально нескінченних множин перетворилося на догму, в яку вірить більшість математиків. Більше того, математики намагаються навіяти віру в цю догму іншим людям. У той же час ми не можемо вказати якусь актуально нескінченну множину в реальному світі – тут ми маємо справу з конструкцією, що розширює реальний світ та якісно перевершує межі можливостей наших спостережень. Таким чином, твердження про нескінченні множини втрачають свій феноменологічний зміст. В результаті подальший розвиток теорії множин повністю залежить від формальних міркувань, які виявляються єдиним надійним поводирем у темряві, що згустилася навколо множини.

Ця обставина призвела до труднощів вже на початку цієї теорії. Виявилося, що природних постулатів канторівської теорії множин недостатньо для вирішення питання про істинність аксіоми вибору. Водночас питання стало настільки насущним, що неможливо було очікувати формального підтвердження незалежності цієї аксіоми. Для неї не було жодних мотивувань, аналогічних до мотивувань попередніх постулатів. Врешті решт, аксіома вибору отримала загальне визнання з чисто формальних причин – ця аксіома значно спрощує структуру нескінченних множин і приводить до деяких теорем. Спроби мотивувати аксіому вибору її істинністю для кінцевих множин були підірвані аксіомою детермінованості, яка може бути мотивована її істинністю для кінцевих множин, але несумісна з аксіомою вибору.

Сьогодні відома помітна кількість незалежних суджень теорії множин, тобто суджень, які не доводяться і є незаперечними за допомогою базисних аксіом. Математики не можуть запропонувати цікавих принципів, достатньо сильних для вирішення їхньої істинності. Типовим прикладом є континуум-гіпотеза. Прийняття континуум-гіпотези дає деякі технічні переваги, але і теорія множин із запереченням континуум-гіпотези також досить цікава. Отже, немає єдиної теорії множин, натомість є різні теорії множин, для яких вихідною та загальною основою є канторівська.

Спроби математиків остаточно осягнути актуальну нескінченність виявилися безуспішними. Але це не зменшує важливості канторівської теорії множин, що залишається свідченням прагнення людини розсунути межі простору способом, що не має жодної аналогії в історії.

ЇЇ значення для математики визначається не тільки нею самою, але і її становищем в математиці. Незабаром після виникнення теорії множин стало зрозуміло, що вона корисна головним чином за наступних трьох причин.[18]

Усі математичні об'єкти, створені в до теоретико-множинній математиці можуть бути заново побудовані як структури теоретичних множин. Точніше, ці об'єкти можна задавати в теорії множин їх канонічними моделями так, щоб вивчення оригінальних об'єктів замінювалося вивченням відповідних моделей. У деяких випадках ця заміна впливає на вихідні поняття і тягне за собою їх модифікацію відповідно до аналізованої моделі. В якості прикладів можна взяти дійсні числа, обчислення нескінченно малих і т.д.

У до теоретико-множинній математиці зустрічалися нескінченності різних видів, наприклад, нескінченність як необмежена можливість конструювання об'єктів деякого виду, нескінченність як деяка необмежена кількість, нескінченність, де зустрічаються дві паралельні прямі тощо. Всі ці види нескінченності були зведені до актуальної нескінченності, з якою має справу теорія множин, яка стала загальною теорією нескінченності.

Теорія множин дала математиці найбагатшу в комбінаторному відношенні структуру, а саме структуру кінцевих і актуально нескінченних множин. Це спричинило виникнення нових математичних дисциплін. У деяких із них використовуються структури множин, принаймні частково такою є топологія, теорія міри і т.п. Вона є невичерпним різноманіттям різних абстрактних структур. [8]

Канторівська теорія множин стала, таким чином, світом, куди вмістилася вся математика загалом. Деякі математичні дисципліни були позбавлені відповідальності за свою несуперечність, оскільки ця відповідальність була покладена на теорію множин.

Вона відкрила шлях до вивчення неосяжної кількості різних структур та до безпрецедентного зростання знань щодо них. Це спричинило розпилення математики. Крім того, більшість результатів такого роду набуває сенсу лише за рахунок існування відповідної структури в канторівській теорії множин. [11]

Таким чином, сучасна математика вивчає конструкцію, відношення якої до реального світу, щонайменше, проблематично. Більше того, ця конструкція не єдина можлива, та й насправді не найкраща з точки зору самої математики. Це ставить під питання роль математики як наукового та корисного методу. Математика може бути зведена до простої гри, що відбувається в деякому штучному світі [17]. Це не небезпека для математики в майбутньому, а безпосередня криза у самій математиці.

РОЗДІЛ 2 ПЕРША ПРОБЛЕМА ГІЛЬБЕРТА: КОНТИНУУМ-ГІПОТЕЗА

2.1 Еквівалентність множин

Континуум-гіпотеза, перша проблема Гільберта, відноситься до задач, які є фундаментом математики та теорії множин. Вона тісно пов’язана з такими простими і природними питаннями, як «Скільки?», «Більше чи менше?», і на практиці, будь-який учень старшої школи може зрозуміти, у чому полягає ця проблема. Проте, перед тим, як сформулювати проблему, нам потрібні деякі додаткові відомості.

Розглянемо деякий приклад, який дозволить нам сформувати представлення про еквівалентність множин. В університеті відбувається вечір танців. Як з’ясувати, кого більше на цьому вечорі: дівчат чи хлопців?

Можна, звичайно, перерахувати тих та інших і порівняти два отриманих числа. Але набагато простіше дати відповідь, коли заграє музика і всі студенти розіб’ються на пари. Тоді, якщо всі присутні танцюють, значить кожному знайшлась пара, тобто маємо однакову кількість хлопців та дівчат. Якщо ж залишилися лише хлопці, це означає, що їх більше, і навпаки.

Цей спосіб, іноді природніший, ніж безпосередній перерахунок, називається принципом розбиття на пари, або принципом взаємно однозначної відповідності.

Тепер розглянемо сукупність об’єктів довільної природи – множину. Об’єкти, що входять до множини, називаються її елементами. Якщо елемент x входить до множини X , це позначають так: $x \in X$. Якщо множина міститься в множині , тобто всі елементи

множини є також елементами , то кажуть, що — підмножина , і

скорочено записують так: $\subset$.

Множина скінченна, якщо кількість її елементів скінченна. Множини можуть бути скінченними (наприклад, множина учнів в класі), та нескінченними (наприклад, $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел $\{1,2,3,...\}$). Множини, елементами яких є числа, називаються числовими.[12]

Нехай *X* та *Y* — дві множини. Кажуть, що між цими множинами встановлено взаємно однозначне відношення, якщо всі елементи цих

множин розбить на пари вигляду $(x;y)$, де : $x \in X$, $y \in Y$, до того ж,

кожен елемент з X і кожен елемент з Y утворюють лише одну пару.

Приклад, коли всі дівчата та хлопці на танцювальному вечорі розбиваються на пари, можна вважати прикладом взаємно однозначної відповідності між множиною дівчат і множиною хлопців.

Множини, між якими можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються еквівалентними або рівносильними. Дві скінченні множини еквівалентні тоді, коли кількість їх елементів однакова. Тому, очевидно вважати, що якщо одна множина еквівалентна іншій, то в ній «стільки ж» елементів. Однак, спираючись на таке визначення еквівалентності, можна отримати досить несподівані властивості нескінченних множин.

2.2 Нескінченні множини

Розглянемо будь-яку скінченну множину та її підмножину (не порожню і не відповідну самій множині). Тоді елементів в підмножині менше , ніж в самій множині, тобто частина менше цілого.

Чи властива нескінченним множинам така характеристика? І чи може бути доречним стверджувати, що в одній нескінченній множині є «менше» елементів, ніж в іншій, також нескінченній? Адже наразі ми можемо лише визначити, чи є дві нескінченні множини еквівалентними чи ні. А чи існують взагалі нееквівалентні нескінченні множини?

Розглянемо нескінченність на прикладі парадокса Гільберта про Великий готель.[31] У цьому готелі є нескінченна кількість номерів(кімнат), але, як і слід очікувати, всі кімнати пронумеровані, тому для будь-якого натурального числа n існує кімната з цим номером.

В один із моментів, всі кімнати готелю виявилися зайнятими, тому, коли на рецепцію прибув новий гість, адміністратор стикнувся з проблемою. Але він швидко знайшов рішення, запропонувавши кожному гостю перейти в наступну кімнату: гість з кімнати №1 переходить в кімнату №2, гість з кімнати №2 — в кімнату №3, і так далі. Тобто, відвідувач, що живе в номері k, переїде в номер $k+1$. Таким чином, кімната №1 звільняється і новий гість може заселитися, оскільки номерів у готелі нескінченно багато.[40]

Відвідувачі готелю займали всі номери, отже між множиною гостей і множиною ℕ було встановлено взаємно однозначну відповідність: кожному гостю дали номер, на дверях якого було написане відповідне йому натуральне число. Природньо вважати, що гостей було «стільки ж», скільки є натуральних чисел. Але приїхала ще одна людина, її теж поселили, і кількість мешканців збільшилася на 1. Але їх знову залишилось «стільки ж», скільки й натуральних чисел: адже всі помістилися у готелі. І якщо визначити кількість гостей через , то ми отримаємо «тотожність» = +1. Ні для якого кінцевого , воно, зрозуміло що, не виконано.

Ми прийшли до дивовижного висновку: якщо до множини, яка є еквівалентним ℕ, додати ще один елемент, отримується множина, що буде знову еквівалентна ℕ. Але цілком зрозуміло, що мешканці є частиною тієї величезної кількості відвідувачів, які поселилися в готелі після того, як приїхав новий гість. В данному випадку це значить, що частина не «менша» цілого, а «дорівнює» цілому.

Отже, з визначення еквівалентності (яке не призводить до якихось «дивацтв» у випадку скінченних множин) випливає, що частина нескінченної множини може бути еквівалентна всій множині.

Можливо, відомий математик Бернард Больцано, який намагався у своїх міркуваннях застосувати принцип взаємно однозначної відповідності, злякався таких незвичних ефектів і тому не став далі розвивати цю теорію. Вона здалася йому абсолютно абсурдною. Але Георг Кантор у другій половині XIX століття знову зацікавився цим питанням, почав досліджувати його і створив теорію множин, важливий розділ основ математики.

Та в готелі виникає нова проблема — до його воріт прибуває нескінченний автобус з нескінченною кількістю пасажирів. Це завдання виявилося дуже складним. Але й у цьому випадку знайшовся вихід.[43]

Адміністратор просить кожного гостя перейти в кімнату з номером, вдвічі більшим за поточний. Тобто, гість з кімнати №1 переходить в кімнату №2, гість з кімнати №2 — в кімнату №4, загалом, з кімнати *n* — до кімнати номер *2n-1*. Таким чином він звільнив нескінченну множину непарних кімнат і зміг розселити всіх відвідувачів. В результаті, парні номери виявилися зайнятими «старими» гостями, а непарні — пасажирами автобуса. Пасажир, який стояв у черзі під номером *n*-м, займав кімнату *2n-1*. І знову, всіх вдалося розмістити в готелі.

Отже, ще більш дивовижний ефект: при об'єднанні двох множин, кожна з яких еквівалентна, знову отримується — еквівалентна множина. Тобто, навіть при «подвоєнні» множини ми отримуємо множину, еквівалентну початковій.

2.3 Зліченні та незліченні множини

Розглянемо наступне: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$ — множина цілих

чисел, а $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел, вигляду p/q, де p та q — цілі, $q \neq 0$.) Всі ці множини нескінченні. Розглянемо їх еквівалентність.

Встановимо взаємо однозначну відповідність між $\mathbb{Z}$ та $\mathbb{N}$:

створимо пари вигляду ($n, 2n$) та ($-n, 2n+1$), $n \in \mathbb{N}$, а також пару (0,1) (

на перше місце в кожній парі стає число із множини $\mathbb{Z}$, а на друге — із множини $\mathbb{N}$).

Існує й інший спосіб встановити цю відповідність, наприклад, виписати всі цілі числа в таблицю, як показано на (*рис.1*), і, обходячи ї по стрілочкам, присвоювати кожному цілому числу деякий номер.[15]

Таким чином, ми перерахуємо всі цілі числа: кожному $z \in \mathbb{Z}$ відповідне

деяке натуральне число(номер) та для кожного номера є ціле число, до якого цей номер приписують. При цьому, очевидну формулу виписувати необов'язково.[39]

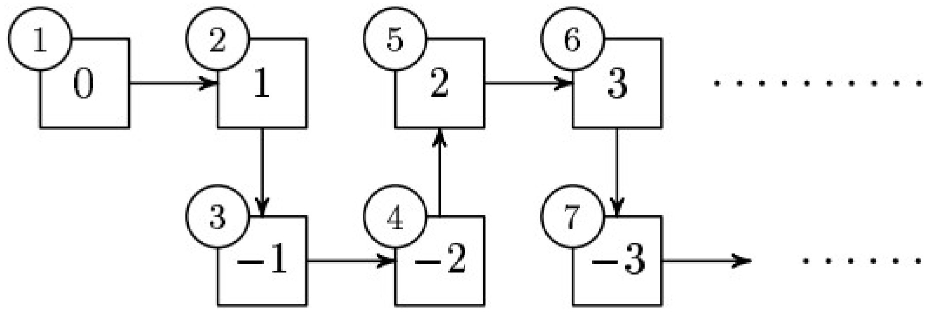

Рис.1

Таким чином, $\mathbb{Z}$ еквівалентно $\mathbb{N}$.

Будь-яка множина, що еквівалентна множині натуральних чисел, називається зліченною. Таку множину можна перерахувати, занумерувавши всі її елементи натуральними числами.[9]

На перший погляд, раціональних чисел на прямій набагато більше ніж цілих. Вони розташовані щільно, навіть на найменшому інтервалі їх нескінченно багато. Але виявляється, що множина $\mathbb{Q}$ також зліченна. Доведемо спочатку зліченність (множина всіх додатних раціональних чисел).[16]

Випишемо всі елементи в таку таблицю: в першому рядку — всі числа зі знаменником 1 (цілі), в другому рядку зі знаменником 2 і т.д.(Рис.2.). Кожне додатне раціональне число обов'язково зустрінеться в даній таблиці, і не одноразово. Наприклад, число зустрічається в кожному рядку цієї таблиці.

А тепер перерахуємо ці числа: рухаючись по стрілочках, присвоюємо кожному числу номер (або пропускаємо це число, якщо воно вже зустрічалося раніше в іншому записі). Оскільки ми рухаємося по діагоналях, то ми обійдемо всю таблицю, тобто рано чи пізно дістанемося будь-якого з чисел.

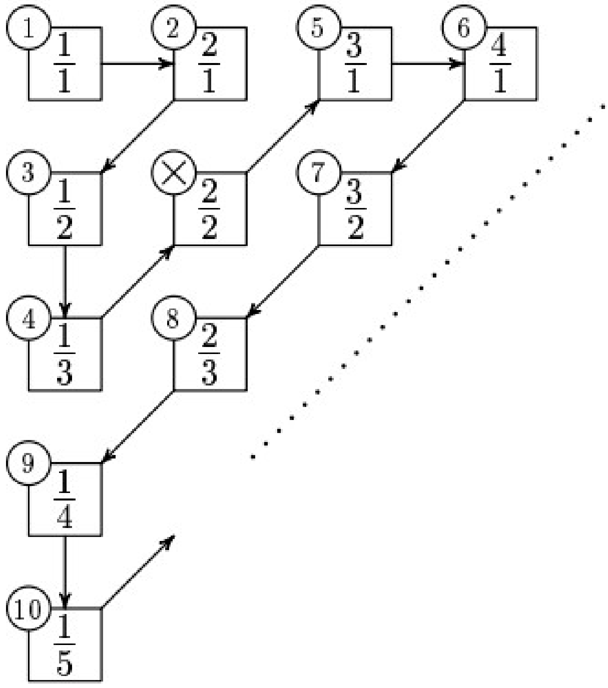

Рис.2.

Отже, ми вказали спосіб нумерації всіх чисел з , тобто довели, що зліченна.

Цей спосіб нумерації не зберігає порядку: з двох раціональних чисел більше може зустрітися раніше, а може й пізніше.

Та виникає питання, що ж робити з від'ємними раціональними числами? Те саме, що і з мешканцями великого готелю. Пронумеруємо не всіма натуральними числами, а тільки парними (дамо їм номери не 1, 2, 3,…., а 2, 4, 6,…), нулю призначимо номер 1, а всім від’ємним раціональним числам призначимо (за такою ж схемою, що й додатним) непарні номери, починаючи з 3.

Отже, всі раціональні числа занумеровані натуральними, відповідно множина $\mathbb{Q}$ — зліченна.[10]

Виникає питання: можливо, всі нескінченні множини зліченні?

Виявилося, що $\mathbb{R}$ — множина всіх точок на числовій прямій — незліченна. Цей результат, отриманий Кантором, справив не аби яке враження на математиків.

2.4 Діагональний процес Кантора

Діагональний процес Кантора став революційним вкладом у теорію множин. Він дозволяє продемонструвати, що множина дійсних чисел з інтервалу (0,1) незліченна. Основна ідея полягає у знаходженні числа, якого точно немає у списку занумерованих дійсних чисел.[33]

Розглянемо процес на прикладі.

Відомо, що десятковий дріб є одним із способів представлення кожного дійсного числа x:

$x=A,\alpha_1, \alpha_2, \dots, \dots$, де A - ціле число, та не обов’язково додатне, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \dots$ цифри (від 0 до 9). Таке представлення, як відомо, є неоднозначним: наприклад,

=0,500000…=0,49999…, (в першому варіанті запису, починаючи з другої цифри після коми, йдуть лише нулі, а в другому-лише дев’ятки). Щоб запис був однозначним, будемо використовувати тільки перший варіант. Тоді кожному числу відповідний лише один його десятковий запис.[34]

Припустимо, що нам вдалося занумерувати всі дійсні числа. Тоді їх можна впорядкувати наступним чином:

$x_1=A, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ldots$

$x_2=B, \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ldots$

$x_3=C, \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4\ldots$

$x_4=D, \delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4\ldots$

…………………

Щоб отримати протиріччя, побудуємо таке число y, яке не міститься в даній таблиці.

Для цього, для будь-якої цифри a визначимо цифру $\bar{a}$ таким чином:

Тобто маємо y=0, … числа k-та цифра після коми дорівнює 1 чи 2, в залежності від того, яка цифра стоїть на k-му місці після коми в десятковому записі числа).

Наприклад, якщо

$x_1=1{,}1235\ldots.$

$x_2=-2{,}3216\ldots.$

$x_3=9{,}5145\ldots.$

$x_4=-10{,}6781\ldots$

………………

То y=0, …=0,2112...

Отже, ми отримали дійсне число y, котре буде відрізнятися від всіх чисел в нашому списку, хоча б однією цифрою.[35]

Висунувши припущення, що можливо занумерувати всі дійсні числа, ми дійшли до протиріччя, указавши число, яке не міститься в списку. Отже, множина дійсних чисел не є зліченною.

Множини $\mathbb{R}$ і $\mathbb{N}$ не є еквівалентними, та $\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$, тому всіх дійсних чисел в деякому сенсі “більше” ніж натуральних. Кажуть, що потужність множини R (потужність континуума) більше ніж потужність $\mathbb{N}$.[36]

2.5 Континуум-гіпотеза

Континуум гіпотеза або перша проблема Гільберта, має таке формулювання: будь-яка нескінченна підмножина континууму (множини, рівнопотужної множині дійсних чисел) є або зліченною, або континуальною.[27]

Кажучи іншими словами, необхідно з’ясувати чи існує множина проміжної потужності, тобто така множина , $\mathbb{N}\mathbb{R}$, котра не еквівалентна ні множині натуральних чисел, ні множині дійсних чисел.

Цією проблемою займалося велика кількість математиків. Шлях Георга Кантора до доведення гіпотези був сповнений труднощів: він неодноразово помилявся, хоча й був переконаний у правильності своїх міркувань.

Довести будь-яке твердження, означає вивести його з аксіом— вихідних положень, що приймаються без доведень.[13]

Звісно, у виборі аксіом, які закладаються в основу теорії, є деяке свавілля. Але зазвичай аксіоми виникають природним шляхом з пізнання дійсності. В теорії множин, частиною якої є конструкції, що були розглянуті в попередніх питаннях, також є загальновизнана система аксіом Цермело-Френкеля.[20]

Доведення континуум-гіпотези означає виведення її з цих аксіом. Спростування ж цієї гіпотези полягає в тому, щоб продемонструвати, що її додавання до цієї системи аксіом призводить до суперечливого набору тверджень.

Несподіваний результат щодо першої проблеми Гільберта отримав американський математик Пол Коен у 1963 році. Він довів, що континуум-гіпотеза не піддається ні доведенню, ні спростуванню в межах існуючої аксіоматики. [37]

Додавання континуум-гіпотези до системи аксіом Цермело-Френкеля (ZF) не призводить до суперечностей. Цікаво, що додавання заперечення континуум-гіпотези до ZF також не створює суперечностей. Це означає, що континуум-гіпотеза незалежна від системи аксіом (ZF).

Звідси випливає, що ні континуум-гіпотезу, ні її заперечення не можна вивести із стандартної системи аксіом. [38]

РОЗДІЛ 3 ЗАСТОСУВАННЯ НЕСКІНЧЕННИХ МНОЖИН НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

3.1 Основні аспекти вивчення нескінченних множин у шкільному курсі алгебри

Ознайомлення учнів із поняттям нескінченності та нескінченних множин є складним, але надзвичайно важливим завданням. На сучасному етапі розвитку математики нескінченні множини відіграють ключову роль у багатьох теоретичних і практичних аспектах науки. Вивчення цих множин у школі має базуватися на поєднанні теоретичних знань та практичних вправ. Спершу доцільно ознайомити учнів із зліченними множинами, а згодом перейти до складніших питань, таких як перша проблема Гільберта.

Щоб заохотити учнів до самостійного мислення та дослідження у світі нескінченних множин, ефективним методом є створення проблемних ситуацій. Наприклад, їм можна запропонувати знайти власні приклади зліченних множин та дослідити їхні властивості. Такий підхід до вивчення математики не лише пробуджує дослідницький інтерес, а й допомагає учням глибше зрозуміти складність математичних концепцій. Вони вчаться не просто запам'ятовувати факти, а й самостійно шукати відповіді на питання, аналізувати та робити висновки.[22]

Розглянемо основні аспекти, які необхідно враховувати під час вивчення нескінченних множин у шкільному курсі алгебри.[14]

1. Ознайомлення учнів з поняттям нескінченності варто здійснювати поступово, починаючи з простих прикладів нескінченних множин, наприклад, множини натуральних чисел, з якою вони знайомляться в 7 класі. Важливо пояснити, що нескінченність — це не конкретне число, а поняття, що описує множини без кінця.[5] Особливо цікавим відкриттям для учнів може стати відкриття, що множина парних

натуральних чисел містить стільки ж елементів, як і множина всіх натуральних чисел, хоча інтуїтивно здається, що елементів має бути менше, адже після кожного непарного числа йде парне.

2. Учні мають навчитися розрізняти та пояснювати відмінності між зліченними і незліченними множинами. Зокрема, зліченні множини (як множина натуральних чисел) можна впорядкувати у послідовність, тоді як незліченні множини (як множина дійсних чисел) мають «більшу» нескінченність, яку впорядкувати таким чином неможливо. Учням особливо цікаво знайомитися з діагональним методом Кантора, який є одним з методів доведення незліченності множини дійсних чисел.[4]

3. Для підвищення зацікавленості учнів у вивченні теми можна використовувати захопливі приклади, пов’язані з нескінченністю. Один з таких прикладів — парадокс Гільберта про «Grand hotel», де є безліч номерів, і навіть за постійного прибуття нових гостей завжди можна знайти вільну кімнату. Такі приклади демонструють несподівані властивості нескінченності та пробуджують інтерес до теми.[19]

4. Гіпотеза континууму, хоч і є складною темою, заслуговує на увагу, і важливо пояснити її на базовому рівні. Розгляд цієї гіпотези та її впливу на розвиток математики допомагає учням усвідомити значущість теорії множин і зв’язок цієї галузі з філософськими аспектами. Гіпотеза стверджує: будь-яка нескінченна підмножина континууму (множини, еквівалентної за потужністю множині дійсних чисел) є або зліченною, або має потужність континууму.

5. Для покращення розуміння понять нескінченності корисно використовувати візуалізації та моделі. [7] Наприклад, ілюстрації або діаграми, які демонструють нескінченні ряди або інші нескінченні множини, можуть допомогти учням інтуїтивно усвідомити, що таке нескінченна множина і чим вона відрізняється від скінченної.

6. Вивчення нескінченних множин сприяє розвитку критичного мислення, оскільки учні стикаються з абстрактними поняттями та

логічними парадоксами. Це спонукає їх до розмірковування, порівняння, аналізу та формулювання аргументів для своїх думок.[25]

Ці аспекти можуть відігравати вирішальну роль у тому, щоб зробити вивчення нескінченних захоплюючим і корисним для учнів, сприяючи не лише опануванню складних математичних концепцій, але й розвитку важливих навичок для подальшого навчання та особистого розвитку. [41]

3.2 Вправи та задачі для закріплення знань про нескінченні множини

Проаналізувавши навчальну програму з математики в загальноосвітніх навчальних закладах станом на 2024 рік,[29] можна зробити висновок, що вивченню теорії множин і зокрема нескінченним множинам, приділено мало уваги. Здебільшого, нескінченні множини вивчаються у курсах поглибленого вивчення математики або окремих математичних гуртках. [30]

Переконавшись, що учні розуміються на поняттях множини та її елементах, підмножини, операцій над множинами, взаємно однозначної відповідності, скінченних, нескінченних та зліченних множинах — можна запропонувати низку цікавих завдань.

Завдання 1

Необхідно встановити взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

Розв’язання:

nN

1	2	3	4	5	6	7	…	n
3	6	9	12	15	18	21	…	3n

Завдання 2

Необхідно встановити взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною чисел виду 4n+1(nN).

Розв’язання:

nN

1	2	3	4	5	6	7	…	n
5	9	13	17	21	25	29	…	4n+1

Завдання 3

Необхідно довести, що множини парних і непарних чисел рівнопотужні.

Розв’язання:

Оскільки між множинами парних і непарних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність, тобто кожному парному числу відповідає одне непарне, і навпаки, множини є рівнопотужними.

Завдання 4

Доведіть, що множина чисел виду (nN) зліченна.

Розв’язання:

nN

1	2	3	4	…	n
2	4	8	16	…	

Оскільки всі елементи множин чисел можна пронумерувати, то множина чисел виду (nN) зліченна.

Завдання 5

Необхідно довести, що множина чисел виду (nN) зліченна.

Розв’язання:

(nN)

1	2	3	4	…	n
				…	

Оскільки всі елементи множин чисел (nN) можна пронумерувати, тому вона є зліченною.

Завдання 6

Необхідно встановити взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду (nN) і множиною десяткових дробів виду 0,1; 0,01; 0,001;….

Розв’язання:

				…
0,1	0,001	0,001	0,0001	…

Показнику степеню можна поставити у відповідність кількість нулів у запису десяткового дробу.

Завдання 7

Необхідно показати, що множини точок сторони й діагоналі квадрата рівнопотужні.

1) Уявімо квадрат на координатній площині так, щоб одна з його вершин збігалася з початком координат (0, 0), а сторони лежали на осях координат. Тоді точки сторони квадрата матимуть координати (x, 0), де $0 \leq x \leq a$ (a - довжина сторони квадрата), а точки діагоналі - (x, x), де $0 \leq x \leq a$.

2) Розглянемо функцію f(x, 0) = (x, x). Ця функція ставить у відповідність кожній точці (x, 0) на стороні квадрата точку (x, x) на діагоналі.

3) Кожній точці на стороні (x, 0) відповідає єдина точка на діагоналі (x, x).

4) Кожній точці на діагоналі (x, x) відповідає єдина точка на стороні (x, 0).

Функція f(x, 0) = (x, x) встановлює взаємно однозначну відповідність між точками сторони і діагоналі квадрата, що доводить їх рівнопотужність.

Завдання 8

Необхідно показати, що множини точок будь-яких двох концентричних кіл рівнопотужні.

Розв’язання:

Побудуємо відповідність.(*Рис.3.*)

1) Візьмемо довільну точку A на меншому колі.

2) Проведемо промінь OA з початком у центрі O, що проходить через точку A.

3) Цей промінь перетне більше коло в єдиній точці B.

4) Таким чином, кожній точці A на меншому колі ми поставили у відповідність точку B на більшому колі.

Оскільки, кожній точці B на більшому колі відповідає єдина точка A на меншому колі, і навпаки, множини точок будь-яких двох концентричних кіл є рівнопотужними.

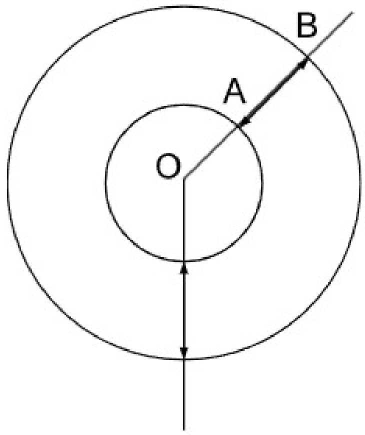

Рис.3.

Завдання 9

Необхідно вказати спосіб, за допомогою якого можна встановити взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду (nN) і множиною натуральних чисел, у десятковому записі яких використано тільки цифри 1 і 0.

Розв’язання:

				…
1 0	100	1000	10000	…

Ідея полягає в тому, що кожному числу виду можна поставити у відповідність число, яке в десятковій системі записується як одиниця з n кількістю нулів.

Завдання 10.

Необхідно довести, що будь-яка підмножина зліченної множини є або скінченною, або зліченною.

Розв'язання

Пронумеруємо елементи заданої зліченної множини. Нехай дана зліченна множина A має елементи, які можна впорядкувати у вигляді послідовності:

A={,… }. Кожен елемент множини A має свій номер n, де nN — натуральне число.

Нехай — підмножина множини A. Для множини B, яка є підмножиною зліченної множини A, виберемо тільки ті елементи, які належать B. Позначимо їх номерами де ….

Отже, якщо підмножина B містить лише скінченну кількість елементів, то і множина { } є скінченною. А коли підмножина B містить нескінченну кількість елементів, то множина { } є зліченною, оскільки вона є підмножиною множини натуральних чисел N, яка також є зліченною.

Завдання 11

Розгляньте множину відрізків, які належать координатній прямій, попарно не перетинаються, а їхні довжини не менші від 1. Необхідно довести, що ця множина є або скінченною, або зліченною.

Розв'язання:

Кожен відрізок містить принаймні одне раціональне число (число, яке можна представити у вигляді дробу, де чисельник і знаменник - цілі числа). Це випливає з того, що множина раціональних чисел є щільною на числовій прямій: між будь-якими двома дійсними числами завжди можна знайти раціональне число.

Для кожного відрізка з нашої множини виберемо одне раціональне число, яке йому належить. Оскільки відрізки попарно не перетинаються, то вибрані раціональні числа будуть різними для кожного відрізка. Таким чином, ми встановили відповідність між множиною відрізків та деякою підмножиною раціональних чисел. Кожному відрізку відповідає одне раціональне число, і ці числа різні для різних відрізків.

Множина всіх раціональних чисел є зліченною. Це можна довести, наприклад, за допомогою методу «діагональної нумерації» Кантора. Оскільки множина вибраних нами раціональних чисел є підмножиною зліченної множини (множини всіх раціональних чисел), то вона сама є або скінченною, або зліченною (як було доведено в *Завданні 10*).

Множина відрізків має стільки ж елементів, скільки і множина вибраних раціональних чисел. Отже, множина відрізків є або скінченною, або зліченною, що і треба було довести.

Завдання 12

Покажіть, що множина точок прямої та множина точок кола з «виколотою» точкою рівнопотужні.

Розв’язання:

1. Побудуємо коло, що буде дотичне до прямої (*Рис.4.*);
2. На колі виберемо точку, та позначимо її як «виколоту», тобто, ця точка не належить до множини точок кола, яку ми розглядаємо. «Виколота» точка необхідна для того, щоб відповідність була взаємно однозначною. Якби ми включили цю точку до множини точок кола, то точка на прямій, через яку проходить пряма, що сполучає центр проектування з виколотою точкою, не мала б образу на колі. ;
3. Оберемо точку поза колом, вона буде слугувати центром проектування;
4. Для кожної точки на прямій проведемо пряму через «виколоту» точку та центр проектування. Точка перетину прямої з колом (за винятком випадку, коли пряма проходить через виколоту точку) є

образом точки на прямій. Кожній точці прямої відповідає єдина точка на колі (за винятком «виколотої»), і навпаки.

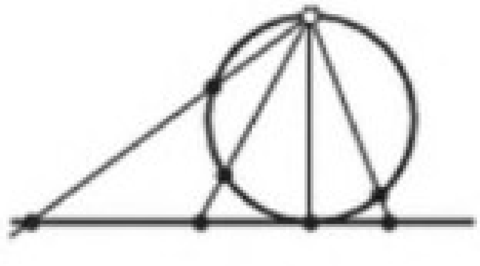

Рис.4.

Побудова на малюнку ілюструє спосіб встановлення взаємно однозначної відповідності між точками прямої та точками кола з «виколотою» точкою, що доводить рівнопотужність цих множин.

Завдання 13

На координатній прямій позначили точки O (0), A (1), B (5). Необхідно довести, що: 1) множина точок відрізка OA рівнопотужна множині точок відрізка OB;

2) множина точок відрізка OA з «виколотою» точкою O рівнопотужна множині точок променю AB.

Розв’язання:

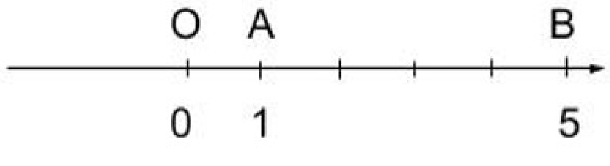

Рис.3.

1) Кожній точці M () відрізка AO можна поставити у відповідність точку N (5) відрізка OB. Кожне значення відрізку OB можна поділити на 5 і отримати відповідне значення на відрізку OA.

Оскільки ми встановили взаємно однозначну відповідність, множини точок відрізків AO і OB рівнопотужні.

2) Кожній точці M () відрізка OA (крім точки O) можна поставити у відповідність точку N () променя AB. Оскільки ми встановили взаємно однозначну відповідність, множини точок відрізка OA з виколотою точкою O і променю AB рівнопотужні.

Завдання 14

Покажіть, що множини точок будь-яких двох відрізків рівнопотужні.

Розв'язання:

Нехай дано два відрізка AB і CD, тоді кожній точці M () відрізка AB можна поставити у відповідність точку E () відрізка CD (*Рис.5.*).

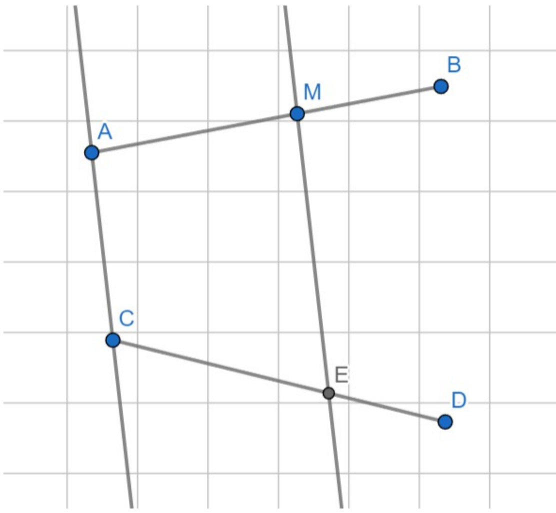

Рис.5.

Побудова:

1) Розглянемо два довільні відрізки AB і CD;
2) Розмістимо ці відрізки на площині таким чином, щоб вони не перетиналися і не були паралельними;
3) Проведемо пряму AC;

4) Для кожної точки М на відрізку АВ проведемо пряму, паралельну АС, яка перетинає відрізок CD в точці Е;

5) Таким чином, кожній точці М на відрізку АВ ми поставили у відповідність точку Е на відрізку CD.

Кожній точці Е на відрізку CD відповідає єдина точка М на відрізку АВ. Для цього достатньо провести пряму, паралельну АС, через точку Е і знайти точку її перетину з відрізком АВ. Оскільки ми побудували взаємно однозначну відповідність між точками двох довільних відрізків АВ і CD, ці множини рівнопотужні.

Завдання 15

Необхідно довести, що множина точок *(x; y)* координатної площини таких, що числа x і y — цілі, є зліченною.

Розв'язання:

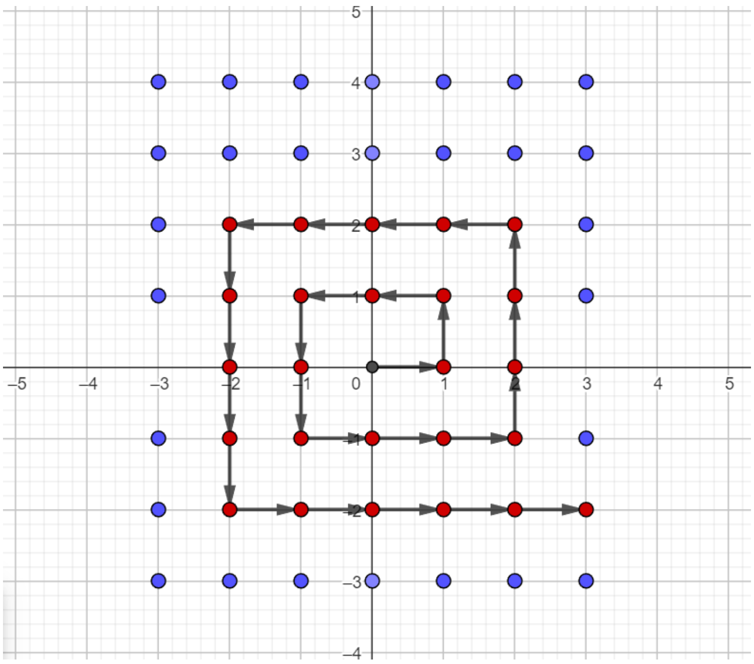

Рис.6.

Опишемо схему нумерації (*рис.6.*) елементів даної множини.

Точки на площині мають координати, що є цілими числами. Нумерація починається з точки перетину прямої з віссю ординат (віссю

Y). Наприклад, точки мають такі координати, як (0;0), (1;0), (0;1), (-1;0), (0;-1),.., і т.д.

Схема нумерації показує, як кожній точці на площині можна поставити у відповідність натуральне число, тобто впорядкувати точки в певну послідовність. Нумерація починається з центральної точки (0,0), яка має № 1. Далі схема показує рух з центру по спіралі, де точки нумеруються по черзі: спочатку точка (1;0) отримує № 2, точка (0;1) —№ 3, точка (-1;0) — № 4, точка (0;-1) — №5, і так далі.

Таким чином, всі точки на площині з цілими координатами будуть пронумеровані спіральним шляхом, який починається з точки (0;0) і поступово охоплює всі інші точки. Цей процес нумерації охоплює всі точки на площині, і кожна точка отримує свій унікальний номер.

Отже, множина точок (x;y) на координатній площині, де x і y — цілі числа, є зліченною, оскільки існує взаємно однозначна відповідність між множиною точок і множиною натуральних чисел.[2]

Завдання 16

Необхідно довести, що існує нескінченно багато простих чисел, що дають при діленні на 3 остачу 2.[6]

Розв'язання:

Припустимо, що простих чисел виду 3k+2 лише скінченна

множина, і нехай … — всі ці числа. Число $B = 3\ldots +2$ не ділиться на жодне з чисел … і не ділиться на 3. Тому, якщо розкласти число *B* на прості множники: B = …, то серед цих множників не буде жодного з чисел 3, … . Інакше кажучи, всі ці прості множники будуть числами виду *3k+1*. Але добуток чисел виду 3k+1 знову є числом того ж виду, в той час як *B* є числом виду *3k+2*. Отримане протиріччя і доводить, що простих чисел виду *3k+2* нескінченно багато.

ВИСНОВКИ

Під час дослідження теми «Перше знайомство учнів закладів загальної середньої освіти» було, по-перше, розглянуто основні проблеми та теоретичні положення, що стосуються теорії множин та нескінченності. Ще з давніх часів багато філософів і математиків розмірковували над протиріччями, пов'язаними з цим поняттям.

Розкриваючи історичний аспект вивчення нескінченності, ми з’ясували, що протиріччя, пов'язані з її ідеєю, загострилися наприкінці XIX ст. після створення теорії нескінченних множин і невдовзі після відкриття парадоксів цієї теорії. Поки багато науковців активно застосовували теорію множин у своїх дослідженнях, не зважаючи на такі парадокси, інші ставилися до теоретико-множинних методів у математиці з різкою критикою.

Під час дослідження, також було розглянуто першу проблему Гільберта, та всі її вихідні поняття, а саме: еквівалентність множин; нескінченні множини; зліченні та незліченні множини; діагональний процес Кантора; континуум-гіпотезу. Континуум гіпотеза або перша проблема Гільберта формулюється наступним чином: будь-яка нескінченна підмножина континууму (множини, рівнопотужної множині дійсних чисел) є або зліченною, або континуальною. Ця гіпотеза довгий час хвилювала математиків, включаючи Георга Кантора, який намагався її довести, але безуспішно. Лише у 1963 американський математик Пол Коен отримав несподіваний результат щодо першої проблеми Гільберта та довів, що континуум-гіпотеза не піддається ні доведенню, ні спростуванню в межах існуючої аксіоматики.

Нами було розглянуто декілька основних аспектів, на які рекомендовано звернути увагу під час вивчення нескінченних множин у шкільному курсі алгебри:

1. Введення поняття нескінченності варто здійснювати поступово, починаючи з простих прикладів нескінченних множин.

2. Учням необхідно навчитися розрізняти зліченні та незліченні множини, а також вміти пояснювати цю різницю.

3. Щоб зробити тему цікавішою, можна використовувати приклади, пов’язані з нескінченністю, такі як «Парадокс Гільберта» про готель з нескінченною кількістю номерів.

4. Хоча гіпотеза континууму є складною, варто ознайомити учнів з її основами.

5. Використання візуальних матеріалів і моделей допоможе учням краще зрозуміти поняття нескінченності.

Проаналізувавши навчальну програму закладів освіти, ми зробили висновок, що вивченню нескінченності присвячено вкрай мало уваги. Зокрема її вивчення відводиться для курсів поглибленого вивчення математики. Та й неможливо сперечатися з тим, що для того щоб пояснювати дітям поняття нескінченних множин, вони повинні володіти основами теорії множин, яким також, нажаль, присвячено не так багато уваги в стандартних навчальних програмах.

Також, нами було запропоновано низку завдань, які можна використати на уроках математики під час вивчення теми «Нескінченні множини».

Таким чином, вивчення нескінченних множин у закладах загальної середньої освіти відіграє важливу роль у формуванні сучасної математичної культури.[42] Це надає учням можливість не лише розширити свої знання з математики, але й зрозуміти, як сучасна наука підходить до розв’язання складних проблем. Досвід роботи над першою проблемою Гільберта демонструє, що вивчення нескінченних множин не тільки збагачує математичну освіту, а й розвиває здатність критично мислити, шукати нові способи вирішення задач і підходити до них з творчим та інноваційним поглядом.

Ознайомлення учнів з такими фундаментальними концепціями сприяє їхній підготовці до майбутніх викликів, формуючи глибоку зацікавленість у математиці та науці в цілому. Це також допомагає розвивати в них допитливість, здатність до аналітичного мислення та бажання досліджувати складні теми, що є важливими навичками для успішного навчання і подальшого життя.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра // Українська радянська енциклопедія : у 12 т. / гол. ред. М. П. Бажан ; редкол.: О. К. Антонов та ін. — 2-ге вид. — К. : Головна редакція УРЕ, 1974–1985.

2. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 384 с.

3. Асмус В.Ф.. Проблема інтуїції у філософії та математики. (Нарис історії: XVII - початок XX в .) М.: Думка, 1965. – 315 с.

4. Базилевич Л.Є.. Дискретна математика у прикладах і задачах : теорія множин, математична логіка, комбінаторика, теорія графів. — Математичний практикум. — Львів, 2013. — 486 с.

5. Бевз В. Розвиток індивідуальності дитини через індивідуальне навчання математики / В. Бевз, В. Кузьменко // Математика в школі. – 2009. – №3. – С. 16–19.

6. Бевз Г.П. Математика: Посібник для факульт. занять у 7 кл. / Бевз Г.П., Конфорович А.Г., Резніченко З.О., Ченакал Є.О. – К.: Рад. школа, 1982. – 152 с.

7. Бевз Г.П. Методи навчання математики / Г.Бевз – Х.: Вид. Група – Основа, 2003. – 96 с

8. Демчишин О.І., Шелестовський Б.Г. Д30 Вища математика: Навчальний посібник. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. — 592 с.

9. Дискретна математика: Підручник / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков; За ред. В. Є. Ходакова. — К.: Вища шк., 2002. — 287 с.

10. Кужель О. В. Елементи теорії множин і математичної логіки. — Київ : Радянська школа, 1977. — 160 с.

11. Конфорович А.Г. Нескінченність в математиці. – К.: Радянська школа, 1978. – 94с

12. Кравчук, М.П. Вступ до теорії множин.- Київ: Наукова думка, 2017.

13. Мельник, І. В. Математика для старшокласників: фрактали, множини та інші цікаві теми. – Київ: Освіта, 2021.

14. Михалін Г. О., Дюженкова Л.І. Елементи теорії множин і теорії чисел. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – 128 с.

15. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань – К.: Зодіак – Еко, 2000. – 512 с

16. Слюсаренко, П. М. Теорія множин та її використання в шкільному курсі математики. – Харків: Ранок, 2018.

17. Фішман І.М. Методологічні питання шкільного курсу математики: Посібник для самоосвіти / І.М Фішман. – К.: Рад. шк., 1985. – 214 с

18. Цукренко С. Дидактичні матеріали / С. Цукренко //Математика в школі. –2002.– №2.

19. Черватюк О.Г. Елементи цікавої математики на уроках математики/ О,Г. Черватюк, Г.Д. Шиманська. – К.: Радянська школа, 1988. – 298 с.

20. Cohen, P. J., A minimal model for set theory, Bull. Amer. Math. Soc., 1963 . —537-540pp.

21. Fraenkel, A., and Y. Bar-Hillel, Foundations of Set Theory. —1958.

22. Frascella, W. J., "The construction of a Steiner triple system on sets of the power of the continuum without the axiom of choice," Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 7 —1966., pp. 196-202

23. Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, Inc, 1988.

24. Kieth Devlin. The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory. — 2. — Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 1994. — 194 с.

25. Землякова К., Знайомство учнів закладів загальної середньої освіти з нескінченними множинами // Perspectives of contemporary science: theory and practice. Proceedings of the 8th International scientific and practical conference. SPC “Sci-conf.com.ua”. Lviv, Ukraine. 2024. Pp. 21-27. URL: https://sci-conf.com.ua/viii-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-perspectives-of-contemporary-science-theory-and-practice-16-18-09-2024-lviv-ukrayina-arhiv/.

26. Історія множин URL: https://studcon.org/istoriya-mnozhyn

27. Математики об’єднують поняття нескінченності та континууму чисел URL: https://chasnauki.com/matematika/kontinuum-chisel-ili-mul-tivselennaya-matematiki-ob-yedinyayut-oba-ponyatiya.html

28. Множина множин: наскільки велика нескінченність? URL: https://www.mmf.com.ua/ar/2028

29. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів URL: https://mon.gov.ua/staticobjects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf

30. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів URL: http://media.ippo.kubg.edu.ua/wp-content/uploads/2016/08/programa_dlia_9_klasu_matematyka.pdf

31. Поняття нескінченності в математиці. Запитання Давида Гілберта URL: https://chasnauki.com/ponyattya-neskinchennosti-v-matematici-zapitannya-davida-gilberta.html

32. Філософський енциклопедичний словник URL: https://shron1.chtyvo.org.ua/Shynkaruk_Volodymyr/Filosofskyi_entsyklopedychnyi_slovnyk.pdf

33. Cantors Diagonal Argument: Cantor's Diagonalization Proof URL:https://testbook.com/maths/cantors-diagonal-argument

34. Cantor Diagonal Method and the Continuum Hypothesis URL: https://www.researchgate.net/publication/365062709_cantor_diagonal_method_and_the_continuum_hypothesis

35. Cantor Diagonal Method URL: https://mathworld.wolfram.com/CantorDiagonalMethod.html

36. Cantor's Diagonal Proof URL: https://www.mathpages.com/home/kmath371.htm

37. Cohen and set theory URL: https://math.bu.edu/people/aki/14.pdf

38. Continuum hypothesis: електронний ресурс URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

39. Finite and Infinite Sets URL: https://byjus.com/maths/finite-and-infinite-sets/

40. Hospitality at the Hilbert Hotel URL: https://www.ias.edu/ideas/2016/pires-hilbert-hotel

41. The Sense of Sets at Secondary School URL:

https://www.jstor.org/stable/30212423

42. What Is The Infinite Hotel Paradox? URL: https://www.scienceabc.com/pure-sciences/what-is-the-infinite-hotel-paradox-definition-examples.html