УДК 511.72

О. В. Котова (Нац. пед. ун-т, Київ)

КОНТИНУАЛЬНІСТЬ МНОЖИНИ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ РІВНЯНЬ, ЯКІ МІСТЯТЬ ФУНКЦІЮ ЧАСТОТИ ТРІЙКОВИХ ЦИФР ЧИСЛА

We study the equation $\nu_1(x) = x$, where $\nu_1(x)$ is the function of frequency of the digit 1 in ternary expansion of x. We prove that this equation has a unique rational solution and a continuum set of irrational solutions. An algorithm for the construction of solutions is proposed. We also describe the topological and metric properties of the set of all solutions. Some additional facts about equations $\nu_i(x) = x$, $i = 0, 2$, are also given.

Исследуется уравнение $\nu_1(x) = x$, содержащее функцию $\nu_1(x)$ частоты 1 в троичном разложении x. Доказано, что оно имеет только один рациональный корень и континуальное множество иррациональных корней. Приведен алгоритм построения корней. Описаны топологометрические свойства множества всех корней. Изложены некоторые факты, касающиеся уравнений $\nu_i(x) = x$, $i = 0, 2$.

Вступ. Нехай $0,c_1c_2\ldots c_m\ldots$ — формальний (символічний) запис деякого числа $x \in [0, 1]$ в трійковій системі числення, $c_i = c_i(x) \in \{0, 1, 2\}$, тобто

$$x \equiv 0,c_1c_2\ldots c_m\ldots = \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-m}c_m. \tag{1}$$

Відомо, що кожне ірраціональне x має єдиний розклад (1), а деякі раціональні числа мають їх два (такі називаються *трійково-раціональними*). Справді,

$$0,c_1\ldots c_{m-1}c_m00\ldots0\ldots = 0,c_1\ldots c_{m-1}(c_m-1)22\ldots2\ldots, \quad \text{де} \quad c_m \neq 0.$$

Домовимось далі для трійково-раціонального числа $0,c_1\ldots c_m0\ldots0\ldots$ використовувати запис $0,c_1\ldots c_m$.

Нехай

$$N_i(x,n) = \#\{k : c_k(x) = i,\ k \le n\}$$

означає кількість цифр „i" у трійковому розкладі числа x до n-го місця включно. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_i(x,n)}{n}$, то її значення $\nu_i(x)$ називається *частотою* (або *асимптотичною частотою*) *цифри* „i" у трійковому зображенні числа x, $i = 0, 1, 2$.

Легко навести приклад числа, у якого:

1) існують частоти всіх трійкових цифр [1],
2) не існує частота принаймні однієї цифри [2, 3],
3) жодна трійкова цифра не має частоти [4].

Легко бачити, що існування і значення функції $\nu_i(x)$ не залежать від довільної скінченної кількості перших трійкових цифр x. Число, всі трійкові цифри якого мають частоту $1/3$, називають *нормальним* за основою 3. Відомо [1, 5], що множина таких чисел має міру Лебега 1. Тому числа, що не є нормальними за основою 3, утворюють множину нульової міри Лебега. Поняття частоти широко використовується в метричній теорії чисел [5, 6]. Функція частоти цифри відносно часто фігурує в наукових дослідженнях останніх років [1, 3 – 10], зокрема при вивченні фрактальних множин [1, 6], сингулярних функцій та мір [1], розподілів імовірностей, зосереджених на нуль-множинах Лебега [5]. Сьогодні відомо [1, 3], що множина чисел, для яких не існує частота принаймні однієї цифри, є суперфрактальною. Більш того, суперфрактальною є і множина чисел, що не мають частоти жодної з цифр [4, 8]. Разом з цим властивості частоти цифри числа досліджено ще недостатньо, а актуальність їх вивчення неодноразово відмічалася [1, 4, 8]. Зрозуміло, що в залежності від числа x частота $\nu_i(x)$ може не існувати і може існувати та набувати різних значень. Які ж властивості має функція $y = \nu_i(x)$?

В даній роботі ми досліджуємо множину розв'язків рівняння $\nu_1(x) = x$ або, іншими словами, множину інваріантних точок відображення $y = \nu_1(x)$.

1. Деякі властивості цілої частини числа. Далі будемо використовувати поняття цілої частини числа a (символічно $[a]$). Тому нагадаємо, що цілою частиною числа x (символічно $[x]$) називають найбільше ціле число, що не перевищує x. Згідно з цим означенням, рівність $[x] = n$ рівносильна $n \le x < n+1$, $n \in Z$.

Розглянемо властивості цілої частини числа, які ми будемо використовувати далі.

Теорема 1. *Якщо* $x \in [0, 1)$, $mx \in Z$, $k \in Z$, *то мають місце рівності*:

1) $[x+k] = [x] + k$;
2) $r = [(k+1)x] - [kx] \in \{0,1\}$;
3) $[(m-1)x] = mx - 1$.

Доведення. 1. З означення цілої частини числа випливає

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Додавши до всіх частин нерівності ціле число k, отримаємо

$$[x] + k \le x + k < [x] + k + 1.$$

Оскільки число $[x]+k$ є цілим, то за означенням цілої частини $[x+k] = [x] + k$.

2. Нехай d — ціла частина числа kx, тобто $d \le kx < d+1$. Додавши до всіх частин нерівностей x, отримаємо

$$d + x \le (k+1)x < d+x+1 < d+2.$$

Остання нерівність випливає з того, що $x < 1$. Крім того, $x \ge 0$, а тому $d + x \ge d$. Таким чином, $d \le (k+1)x < d+2$.

Можливі два випадки: $(k+1)x < d+1$ або $(k+1)x \ge d+1$. В першому випадку $d \le (k+1)x < d+1$. Тому $[(k+1)x] = d$ і

$$r = [(k+1)x] - [kx] = d - d = 0.$$

У другому випадку $d+1 \le (k+1)x < d+2$, тому

$$r = [(k+1)x] - [kx] = d + 1 - d = 1.$$

Отже, $r = 0$ або $r = 1$.

3. Справді, $(m-1)x = mx - x < mx$, оскільки $x > 0$.

З іншого боку, оскільки $(m-1)x = mx - x$ і $x < 1$, то

$$mx - x > mx - 1.$$

Отже, $mx - 1 < (m-1)x < (mx-1)+1$. Оскільки $(mx-1)$ — ціле число, то $[(m-1)x] = mx - 1$.

Теорему доведено.

2. Існування та кількість розв'язків рівняння.

Лема 1. *Рівняння* $\nu_1(x) = x$ *не має трійково-раціональних коренів, крім* $x = 0$.

Справді, для довільного трійково-раціонального числа $x = 0,\alpha_1 \ldots \alpha_k$ отримуємо $\nu_1(x) = 0 \neq x$. Тому при $x \neq 0$ маємо $\nu_1(x) \neq x$.

Теорема 2. *Якщо* $\{\varepsilon_n\}$ *— довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то число*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}, \tag{2}$$

де

$$x_1 = 0,00\varepsilon_1, \tag{3}$$

$$\beta_{in} = [(s_n+i)x_n] - [(s_n+i-1)x_n], \tag{4}$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}, \tag{5}$$

$$s_n = (n+1)! + 1, \tag{6}$$

$$e_n = s_{n+1} - s_n - 1 = (n+2)! - (n+1)! - 1, \tag{7}$$

є розв'язком рівняння $\nu_1(x) = x$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n\}$ — задана нескінченна послідовність нулів та одиниць. Число x, визначене рівностями (2), є границею послідовності трійково-раціональних точок x_k, яка будується таким чином:

$x_1 = 0,00\varepsilon_1$.

Число s_1 трійкових цифр числа x_1 дорівнює $3 = 2! + 1 = s_1$.

$x_2 = 0,00\varepsilon_1\beta_{11}\beta_{21}\ldots\beta_{e_1 1}\varepsilon_2$, де число $e_1 = 3$ визначається рівністю (7), $s_2 = s_1 + e_1 + 1 = 3! + 1$ — кількість трійкових цифр числа x_2 — визначається рівністю (6) і

$\beta_{11} = [(s_1+1)x_1] - [s_1 x_1] = [4x_1] - [3x_1]$,

$\beta_{21} = [(s_1+2)x_1] - [(s_1+1)x_1] = [5x_1] - [4x_1]$,

$\beta_{31} = [(s_1+3)x_1] - [(s_1+2)x_1] = [6x_1] - [5x_1]$.

Аналогічно визначаються трійково-раціональні числа $x_3, x_4, \ldots$.

Якщо число $x_k = 0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{s_k}$, $s_k = (k+1)! + 1$, $\gamma_{s_k} = \varepsilon_k$ побудовано (воно визначено числами e_{k-1}, s_k, ε_k і $\beta_{11}, \ldots, \beta_{e_{k-1}(k-1)}$), то наступний член послідовності x_{k+1} знаходимо таким чином.

Будуємо число $x_{k+1} = 0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{s_k}\beta_{1k}\beta_{2k}\ldots\beta_{e_k k}\varepsilon_{k+1}$, де $s_{k+1} = s_k + e_k + 1 = (k+2)! + 1$. Звідси знаходимо $e_k = (k+2)! - s_k$ і

$\beta_{1k} = [(s_k+1)x_k] - [s_k x_k]$,

$\beta_{2k} = [(s_k+2)x_k] - [(s_k+1)x_k]$,

. . . .

$\beta_{jk} = [(s_k+j)x_k] - [(s_k+j-1)x_k]$,

. . . .

$\beta_{e_k k} = [(s_k+e_k)x_k] - [(s_k+e_k-1)x_k] = [(s_{k+1}-1)x_k] - [(s_{k+1}-2)x_k]$.

1. Виразимо відношення $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}}$.

Підрахуємо кількість одиниць у трійковому розкладі числа x_{k+1}.

Оскільки $\beta_{ij} \in \{0,1\}$, то кількість одиниць серед β_{ij} дорівнює їх сумі:

$$N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + \sum_{j=1}^{e_k}\beta_{jk} + \varepsilon_{k+1} = N_1(x_k) + [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + \varepsilon_{k+1}.$$

Відносна частота одиниць у трійковому розкладі числа x_{k+1} дорівнює

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = \frac{N_1(x_k) + [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + \varepsilon_{k+1}}{s_{k+1}}$$

і т. д. Тоді $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ і $\alpha_n(x) = \alpha_n(x_k)$ при $n = \overline{1, s_k}$ для всіх k.

2. Виразимо функцію $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k$ і оцінимо її:

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k = \frac{N_1(x_k) + [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + \varepsilon_{k+1} - s_{k+1}x_k}{s_{k+1}},$$

$$\left|\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k\right| = \left|\frac{N_1(x_k) + [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + \varepsilon_{k+1} - s_{k+1}x_k}{s_{k+1}}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}}\right| + \left|\frac{[(s_{k+1}-1)x_k] - s_{k+1}x_k + \varepsilon_{k+1}}{s_{k+1}}\right| + \left|\frac{[s_k x_k]}{s_{k+1}}\right| \le$$

$$\le \frac{s_k}{s_{k+1}} + \frac{2}{s_{k+1}} + \frac{s_k}{s_{k+1}} = \frac{2s_k+2}{s_{k+1}} = \frac{2(k+1)!+4}{(k+2)!+1} < \frac{2}{k+2} + \frac{4}{(k+2)!}.$$

Таким чином,

$$\left|\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k\right| < \frac{2}{k+2} + \frac{4}{(k+2)!}.$$

Якщо $k \to \infty$, то $\dfrac{2}{k+2} + \dfrac{4}{(k+2)!} \to 0$ і $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} \to x_k$.

3. Доведемо, що $\nu_1(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = x$.

Якщо трійковим розкладом числа x є $0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots$, то через u_n позначимо число, трійковим розкладом якого є $0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$. Тоді $x_1 = u_{s_1}$, $x_2 = u_{s_2}$, … …, $x_k = u_{s_k}$, де $s_k = (k+1)!+1$. Для довільного n існує таке k, що

$$x_{k+1} \le u_n < x_{k+2}, \quad s_{k+1} \le n < s_{k+2},$$

і $n = s_{k+1} + j$, де j — деяке натуральне число або 0,

$$0 \le j \le (k+3)!+1-s_{k+1} = (k+3)!-(k+2)!.$$

За означенням числа u_n маємо

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1}+j)x_{k+1}] - [s_{k+1}x_{k+1}] + N_1(x_{k+1}). \tag{8}$$

Перепишемо $N_1(x_{k+1})$ у вигляді

$$N_1(x_{k+1}) = [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + N_1(x_k) + \varepsilon_{k+1}. \tag{9}$$

Тоді з (8) і (9) отримуємо

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1}+j)x_{k+1}] - [s_{k+1}x_{k+1}] + [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + N_1(x_k) + \varepsilon_{k+1}.$$

Зобразимо $[s_{k+1}x_{k+1}]$ у вигляді

$$[s_{k+1}x_{k+1}] = [s_{k+1}x_k] + [s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)] + \varepsilon,$$

де ε набуває значення 0 або 1. Тоді

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1}+j)x_{k+1}] - [s_{k+1}x_k] - [s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)] + \\ + [(s_{k+1}-1)x_k] - [s_k x_k] + N_1(x_k) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon$$

і відносна частота одиниць у трійковому розкладі числа u_n дорівнює

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} = \frac{[(s_{k+1}+j)x_{k+1}]}{s_{k+1}+j} - \frac{[s_{k+1}x_k]}{s_{k+1}+j} - \frac{[s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)]}{s_{k+1}+j} + \\ + \frac{[(s_{k+1}-1)x_k]}{s_{k+1}+j} - \frac{[s_k x_k]}{s_{k+1}+j} + \frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j} + \frac{\varepsilon_{k+1}-\varepsilon}{s_{k+1}+j},$$

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} = \frac{[(s_{k+1}+j)x_{k+1}] - (s_{k+1}+j)x_{k+1}}{s_{k+1}+j} - \frac{[s_{k+1}x_k]}{s_{k+1}+j} - \\ - \frac{[s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)]}{s_{k+1}+j} + \frac{[(s_{k+1}-1)x_k]}{s_{k+1}+j} - \frac{[s_k x_k]}{s_{k+1}+j} + \frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j} + \frac{\varepsilon_{k+1}-\varepsilon}{s_{k+1}+j}.$$

Тому

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1}\right| \le \left|\frac{[(s_{k+1}+j)x_{k+1}] - (s_{k+1}+j)x_{k+1}}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{[s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)]}{s_{k+1}+j}\right| + \\ + \left|\frac{[(s_{k+1}-1)x_k] - [s_{k+1}x_k]}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{[s_k x_k]}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{\varepsilon_{k+1}}{s_{k+1}+j}\right| + \left|\frac{\varepsilon}{s_{k+1}+j}\right| <$$

$$< \frac{1}{s_{k+1}} + \frac{s_{k+1}(x_{k+1}-x_k)}{s_{k+1}} + \frac{1}{s_{k+1}} + \frac{s_k}{s_{k+1}} + \frac{s_k}{s_{k+1}} + \frac{1}{s_{k+1}} + \frac{1}{s_{k+1}} =$$

$$= \frac{2s_k}{s_{k+1}} + \frac{4}{s_{k+1}} + (x_{k+1}-x_k).$$

Для $k > 1$ маємо $\frac{2s_k}{s_{k+1}} + \frac{4}{s_{k+1}} < \frac{3s_k}{s_{k+1}}$, тому

$$\left| \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} \right| < \frac{3s_k}{s_{k+1}} + (x_{k+1}-x_k). \tag{10}$$

Нехай μ — довільне додатне число. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, то існує натуральне число N_1 таке, що для $n > N_1$ виконується нерівність

$$|x_n - x| < \frac{\mu}{10}. \tag{11}$$

Тоді для $n > N_1$ і $r > N_1$

$$|x_n - x_r| = |x_n - x + x - x_r| \le |x_n - x| + |x - x_r| < \frac{\mu}{10} + \frac{\mu}{10} = \frac{\mu}{5},$$

$$|x_n - x_r| < \frac{\mu}{5}. \tag{12}$$

Оскільки $\frac{s_n}{s_{n+1}} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує натуральне число N_2 таке, що $\frac{s_n}{s_{n+1}} < \frac{\mu}{5}$ для всіх $n > N_2$.

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Для довільного натурального $n > s_1 = 3$ існує k таке, що $s_{k+1} < n \le s_{k+2}$. Тоді з умови $n > s_{N+2}$ випливає $k > N$.

Враховуючи (10), (12), маємо

$$\left| \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} \right| < \frac{3s_k}{s_{k+1}} + (x_{k+1}-x_k) < \frac{3\mu}{5} + \frac{\mu}{5} = \frac{4\mu}{5}.$$

Звідси, використовуючи (11), отримуємо

$$\left| \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x \right| = \left| \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} + x_{k+1} - x \right| \le$$

$$\le \left| \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x_{k+1} \right| + |x_{k+1} - x| < \frac{4\mu}{5} + \frac{\mu}{10} < \mu.$$

Отже, для будь-якого $\mu > 0$ існує натуральне число n $(n > s_{N+2})$ таке, що $\left| \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j} - x \right| < \mu$, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}$ і дорівнює x.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Рівняння* $\nu_1(x) = x$ *має континуальну множину розв'язків.*

Оскільки наведений у доведенні теореми 2 алгоритм для довільної послідовності $\{\varepsilon_n\}$ нулів та одиниць дозволяє однозначно вказати такий x, що $\nu_1(x) =$

$= x$, а таких послідовностей існує континуум, то і множина розв'язків даного рівняння є континуальною.

***Наслідок* 2.** *Якщо* $\{\varepsilon_n\}$ *— довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то число* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{1-\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$ *є розв'язком рівняння* $\nu_0(x) = x$, *де* $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{1-\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$, x_1, β_{in}, s_n, e_n *визначають рівностями* (3), (4), (6), (7) *відповідно.*

***Наслідок* 3.** *Якщо* $\{\varepsilon_n\}$ *— довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то число* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{2\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$ *є розв'язком рівняння* $\nu_2(x) = x$, *де* $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{2\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$, x_1, β_{in}, s_n, e_n *визначають рівностями* (3), (4), (6), (7) *відповідно.*

Теорема 2 має наступне узагальнення.

Теорема 3. *Якщо* $\{\varepsilon_n\}$ *— довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць,* k *— задане натуральне число, то число*

$$x = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{\gamma_i}{3^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}},$$

де

$$x_1 = 0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k+2}\varepsilon_1, \quad k \in N, \quad \gamma_i \in \{0, 1, 2\}, \tag{13}$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{\gamma_i}{3^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}, \tag{14}$$

$$s_n = k + (n+1)! + 1, \tag{15}$$

β_{in}, e_n *визначаються рівностями* (4), (7) *відповідно, є розв'язком рівняння* $\nu_1(x) = x$.

Доведення теореми 3 є аналогічним до доведення теореми 2.

***Наслідок* 4.** *Якщо* $\{\varepsilon_n\}$ *— довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то число*

$$x = 1 - \sum_{i=1}^{k+2} \frac{\gamma_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^{s_i}} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}},$$

де x_1, β_{in}, x_n, s_n, e_n *визначають рівностями* (13), (4), (14), (15), (7) *відповідно, є розв'язком рівняння* $\nu_1(x) = 1 - x$.

3. Тополого-метричні властивості множини розв'язків рівняння.

Теорема 4. *Множина* M *чисел відрізка* $[0, 1]$, *для яких виконується рівність* $\nu_1(x) = x$, *є*:

1) *скрізь щільною;*
2) *скрізь розривною;*
3) *нуль-множиною* (*в розумінні міри Лебега*).

Доведення. Твердження 1 і 2 випливають безпосередньо з того факту, що належність числа x множині M не залежить від будь-якої скінченної кількості трійкових знаків.

Для доведення твердження 3 скористаємось тим, що міра Лебега множини нормальних чисел відрізка $[0, 1]$ дорівнює 1.

Оскільки для будь-якого x, що належить множині M, $\nu_1(x) \neq 1/3$, то множина M не містить жодного нормального за основою 3 числа, тобто M є підмножиною множини W ненормальних чисел, а отже, $\lambda(M) = \lambda(W) = 0$.

Теорему доведено.

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. *Постников А. Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1960. – **57**. – 83 с.
3. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 971 – 975.
4. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. – 2005. – **129**, № 8. – P. 615 – 630.
5. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
6. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. – М.: Мир, 1969. – 238 с.
7. *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах зображення чисел // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – № 1. – С. 53 – 55.
8. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 9. – С. 1163 – 1170.
9. *Постников А. Г.* Вероятностная теория чисел. – М.: Знание, 1974. – 62 с.
10. *Olsen L.* Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their N-adic expansion // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 2004. – **136**, № 1. – P. 139 – 165.

Одержано 05.02.07