О.В. Котова (Херсонський державний університет, Херсон, Україна) *e-mail: Olga-Kotova@ukr.net*

Фрактальність множини інваріантних точок одного неперервного недиференційовного відображення

В доповіді представляються результати досліджень фрактальності множини $E = \{x : x - f(x) = 0\}$, де $f(x)$ — неперервна, ніде не диференційовна функція, визначена рівностями $f(x) = f\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\alpha_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\beta_k, \alpha_k \in \{0,1,2\}, \beta_k \in \{0,1\}$,

$$\beta_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha_1(x) = 0, \\ 1 & \text{при} \quad \alpha_1(x) \neq 0, \end{cases} \qquad \beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1} & \text{при} \quad \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1 - \beta_{k-1} & \text{при} \quad \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x). \end{cases}$$

Доведено, що розмірність Хаусдорфа — Безиковича множини E є небільшою, ніж $\dfrac{1}{3}$, знайдено $\int\limits_0^a f(x)dx$.

Нехай $a \equiv \Delta^3_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$, тоді $f(a) \equiv \Delta^2_{\beta_1 \ldots \beta_k} \ldots$.

Отримуємо послідовність $\{X^i_j\}, j = 3\beta_i + \alpha_i, i = 1, 2 \ldots$

$X^i_0 \to (X^{i+1}_0, X^{i+1}_4, X^{i+1}_5)$, $X^i_1 \to (X^{i+1}_3, X^{i+1}_1, X^{i+1}_5)$, $X^i_2 \to (X^{i+1}_3, X^{i+1}_4, X^{i+1}_2)$,
$X^i_3 \to (X^{i+1}_3, X^{i+1}_1, X^{i+1}_2)$, $X^i_4 \to (X^{i+1}_0, X^{i+1}_4, X^{i+1}_2)$, $X^i_5 \to (X^{i+1}_0, X^{i+1}_1, X^{i+1}_5)$.
$X^1_0 = X^1_1 = X^1_2 = \frac{2}{21}$, $X^1_3 = X^1_4 = X^1_5 = \frac{1}{14}$, $X^i_j = \frac{1}{6}X^{i-1}_j$.

$$\int\limits_0^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

де S_i визначається наступним чином.

$X^{i-1}_j \to (X^i_{j^1_i}, X^i_{j^2_i}, X^i_{j^3_i})$, тобто в послідовності $\{X^i_j\}$ на i-му місці можливе одне з трьох значень $X^i_{j^1_i}$, $X^i_{j^2_i}$, $X^i_{j^3_i}$.

1. Якщо $X^i_{j^1_i}$, то $S_i = 0$.

2. Якщо $X^i_{j^2_i}$, то

   $S_i = X^i_0 + \frac{h}{3^i}$, для $X^i_{j^1_i} = X^i_0$,

   $S_i = X^i_3 + \frac{1}{6^i} + \frac{h}{3^i}$, для $X^i_{j^1_i} = X^i_3$.

   $h = \sum\limits_{k=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2^k}\right)^l$, $l = [\frac{j}{3}]$.

3. Якщо $X^i_{j^3_i}$, то

$S_i = X^i_0 + \frac{h}{3^i} + X^i_1 + \frac{h}{3^i}$, для $X^i_{j^1_i} = X^i_0$, $X^i_{j^2_i} = X^i_1$,

$S_i = X^i_0 + \frac{h}{3^i} + X^i_4 + \frac{h}{3^i} + \frac{1}{6^i}$, для $X^i_{j^1_i} = X^i_0$, $X^i_{j^2_i} = X^i_4$,

$S_i = X^i_3 + \frac{1}{6^i} + \frac{h}{3^i} + X^i_1 + \frac{h}{3^i}$, для $X^i_{j^1_i} = X^i_3$, , $X^i_{j^2_i} = X^i_1$,

$S_i = X^i_3 + \frac{1}{6^i} + \frac{h}{3^i} + X^i_4 + \frac{h}{3^i} + \frac{1}{6^i}$, для $X^i_{j^1_i} = X^i_3$, $X^i_{j^2_i} = X^i_4$.

Література

[1] *Banach S.* Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionnenmengen // Stud. Math. — 1931. — 3. — P. 174–179.

[2] *Mazurkiewicz S.* Sur les functions non derivables // Stud. Math. — 1931. — 3. — P. 244.

[3] *Коваль В. В.* Самоафінні графіки функцій//Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки —Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2004, №5.— С. 292–299

[4] *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. —С. 95–105.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції//Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова . — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. —Вип.3.— С. 351–362.

[6] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.