УДК 511.72

ГЕОМЕТРІЯ S-АДИЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З ФІКСОВАНИМИ ЧАСТОТАМИ ЇХ СИМВОЛІВ

О.В. Котова. Херсонський державний університет.

There is represented an algorithm of building a continuum set of real numbers, which fractional part has a previously specified, particularly irrational, frequency of «i» symbol in s-adic picture. There is suggested a constructive method of finding an approximation for an equation $\neg_i^s(x) = x$ *with previously set accuracy, where* $\neg_i^s(x)$ *is a frequency of «i» symbol in s-adic picture of x number.*

***Keywords**: in s-adic picture, frequency of «i» symbol in s-adic picture of x number, normal number.*

.

Вступ

Сьогодні в математиці та за її межами використовуються різні системи зображення дійсних чисел. Поряд з класичною *s*-адичною системою, яка має просту геометрію, вживаються різні її узагальнення [5].

Нехай $A = \{0,1,...,s-1\}$, $i \in A,\ \yen_k \in A,\ \ k = 1,2,...$

$\Delta^s_{\yen_1(x)...\yen_k(x)} \equiv \frac{\yen_1}{s} + ... + \frac{\yen_k}{s^k} + ...$ – *s*-адичне зображення числа $x \in [0,1]$,

$N_i(x,n) = \#\{k : \yen_k(x) = i, k \le n\}$ – кількість цифр «*i*» в зображенні числа *x* серед перших *n* цифр.

Частотою цифри «*i*» в *s*-адичному зображенні числа *x* називається границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} \equiv \neg_i^s(x)$, якщо вона існує. Оскільки *s*-адично раціональні числа мають два зображення, то використовуватимемо те зображення, що має період (0).

Функцію частоти цифр використовували в своїх дослідженнях Е. Борель, Г. Торбін, А. Лебег, О. Постніков, М. Працьовитий, В. Серпінський [5; 6]. та інші. Саме в термінах частоти була встановлена абсолютна властивість дійсного числа – бути нормальним. Число називається нормальним (абсолютно нормальним), якщо для довільного натурального $s > 1$ *s*-адичний розклад цього числа використовує всі цифри з однаковою частотою $s-1$. Відома теорема (Е. Борель, 1909 р.) стверджує, що майже всі дійсні числа (в розумінні міри Лебега) є нормальними. Властивість числа «бути нормальним» є «абсолютною», оскільки не залежить від системи числення, як і бути «ірраціональним». Всі множини «не нормальних чисел» є множинами нульової міри Лебега, а отже, потенційно – фрактальними.

Аналіз останніх досліджень

Нормальні числа використовуються для означення нормальних послідовностей знаків, які застосовуються для вивчення рівномірного розподілення дробових часток показникової функції. Так, наприклад, відомо, що рівномірне розподілення дробових часток $\{\sim s^x\}$, $x = 1,2,...$, на відрізку [0;1] еквівалентне тому, що послідовність $a_1, a_2, a_3, ...$ нормальна [1, с. 233].

Функція частоти цифри відносно часто фігурує в наукових дослідженнях останніх років, зокрема при вивченні фрактальних множин (П. Біллінгслей, Л. Олсен, М. Працьовитий), сингулярних функцій та мір (М. Працьовитий), розподілів ймовірностей, зосереджених на нуль-множинах Лебега (А. Турбін, М. Працьовитий). Сьогодні відомо (М. Працьовитий, Г. Торбін), що множина чисел, для яких частота принаймні однієї цифри не існує, є суперфрактальною.

© *Котова О.В.,* 2013.

Більше того, суперфрактальною є і множина чисел, що не мають частоти жодної з цифр. Разом з цим, властивості функції частоти цифри числа досліджені ще недостатньо, а актуальність їх вивчення неодноразово підкреслювалася.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Не зважаючи на те, що майже всі дійсні числа нормальні, навести приклад (побудувати) конкретне нормальне число не так просто. Необхідно відмітити, що Е. Борель, який першим на основі теорії міри встановив існування цих чисел, назвавши їх абсолютно нормальними (E. Borel. Lecon sur la theorie des function, Paris, 1914) повідомив, що йому не вдалось побудувати жодного прикладу нормального числа. Вперше це зробив А. Лебег. Пізніше були створені цілі теорії, підпорядковані цій задачі [4].

Ми пропонуємо алгоритм побудови континуальної множини дійсних чисел, дробова частина яких має наперед задану, зокрема ірраціональну, частоту символа «i» в s-адичному зображенні. Якщо в алгоритм покласти $s = 2$ та $q = 0,5$, отримаємо континуальну множину нормальних чисел за основою 2.

Основна частина

Розглянемо властивості цілої частини числа, які ми будемо використовувати далі [2].

Лема 1. Якщо $x \in [0,1], mx \in Z, k \in Z,$ то мають місце рівності:

1). $[x+k] = [x]+k,$

2). $r = [(k+1)x] - [kx] \in \{0,1\},$

3). $[(m-1)x] = mx - 1.$

Теорема 1. Якщо $\{\pounds_n\}$ – довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то число

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pounds_i}{s^{p_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{{}_{ij}}{s^{p_j+i}},$$

де:

$$_{in} = [(p_n+i)q] - [(p_n+i-1)q],$$

$$p_n = (n+1)! + 1,$$

$$e_n = p_{n+1} - p_n - 1 = (n+2)! - (n+1)! - 1,$$

є розв’язком рівняння $\neg_1^s = q$, $q \in [0,1]$.

Доведення.

Нехай $\{\pounds_n\}$ – задана нескінченна послідовність нулів та одиниць.

Розглянемо число

$$x = \Delta^{s}_{\underbrace{\underbrace{\underbrace{00\pounds_1}_{p_1}\ {}_{11}\ {}_{21}\cdots\ {}_{e_1 1}\pounds_2}_{p_2}\cdots\ {}_{1k}\ {}_{2k}\cdots\ {}_{e_1 k}}_{p_k}\pounds_{k+1}\cdots},$$

визначене числами e_i, p_i, $\pounds_i \left(i = \overline{1,\infty}\right)$ і $_{ij} \left(j = \overline{1,\infty}, i = \overline{1,e_j}\right)$:

$_{11} = [(p_1+1)q] - [p_1 q] = [4q] - [3q],$

$_{21} = [(p_1+2)q] - [(p_1+1)q] = [5q] - [4q],$

$_{31} = [(p_1+3)q] - [(p_1+2)q] = [6q] - [5q],$

……………………………………,

$_{1k} = [(p_k+1)q] - [p_k q],$

$${}_{2k} = \left[\left(p_k + 2\right)q\right] - \left[\left(p_k + 1\right)q\right],$$
……………………………………,
$${}_{jk} = \left[\left(p_k + j\right)q\right] - \left[\left(p_k + j - 1\right)q\right],$$
……………………………………,
$${}_{e_k k} = \left[\left(p_k + e_k\right)q\right] - \left[\left(p_k + e_k - 1\right)q\right] = \left[\left(p_{k+1} - 1\right)q\right] - \left[\left(p_{k+1} - 2\right)q\right],$$
……………………………………,

Для довільного n існує таке k, що $n = s_{{}_{k+1}} + j$, де
$0 \le j < p_{k+2} - p_{k+1} = \left(k+3\right)! - \left(k+2\right)!$
Нехай:
$e'_k = e_k - \left[\left(p_k + e_k + 1\right)q\right] - \left[\left(p_k + e_k\right)q\right].$
Тоді, враховуючи, що ${}_{ij} \in \left\{0,1\right\}$, знаходимо

$$N_1(x,n) = \sum_{i=1}^{k+1} e'_k - \left[\left(p_{k+1} + j\right)q\right] - \left[p_1 q\right] =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} e'_k - \left[p_1 q\right] - \left\{\left(p_{k+1} + j\right)q\right\}\right) + \left(p_{k+1} + j\right)q.$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{p_{k+1} + j} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k+1} e'_k}{p_{k+1} + j} -$$
$$-\lim_{n\to\infty}\frac{\left[p_1 q\right]}{p_{k+1} + j} - \lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\left(p_{k+1} + j\right)q\right\}}{p_{k+1} + j} + \lim_{n\to\infty}\frac{p_{k+1} + j}{p_{k+1} + j} q = q.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо $\{£_n\}$ – довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то:

1) число $x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{£_i}{s^{p_i}} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{e_j}\frac{1 - {}_{ij}}{s^{p_j + i}}$ є розв'язком рівняння $¬_0^s = q$,

2) число $x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{£_i}{s^{p_i}} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{e_j}\frac{¥ \cdot {}_{ij}}{s^{p_j + i}}$ є розв'язком рівняння $¬_{¥}^s = q$,

де
$${}_{in} = \left[\left(p_n + i\right)q\right] - \left[\left(p_n + i - 1\right)q\right],$$
$$p_n = \left(n+1\right)! + 1,$$
$$e_n = p_{n+1} - p_n - 1 = \left(n+2\right)! - \left(n+1\right)! - 1.$$

Наслідок 2. Функція $¬_i^s\left(x\right)$ набуває всіх значень з відрізка $\left[0,1\right]$. Кожне значення вона набуває в континуальній множині *x*.

Оскільки вказаний в доведені теореми 1 алгоритм для довільної послідовності $\{£_n\}$ нулів та одиниць дозволяє однозначно вказати такий *x*, що $¬_1^s = q$, а таких послідовностей існує континуум, то і множина розв'язків даного рівняння є континуальною.

Наслідок 3. При $s = 2$, $q = 0,5$ множина

$$x = \Delta^s_{\underbrace{\underbrace{\underbrace{00£_1}_{p_1}\ {}_{11}\ {}_{21}\cdots {}_{e_1 1}£_2}_{p_2}\cdots {}_{1k}\ {}_{2k}\cdots {}_{e_k k}£_{k+1}}_{p_k}\cdots},$$

є континуальною підмножиною множини нормальних чисел за основою 2.

Наслідок 4. Множина $D_i = \left\{ x \in [0,1] \middle| ¬_i^s = q \right\}$ $(i = \overline{0, s-1})$ є фрактальною множиною.

Розглянемо множини рівнів функції $¬_i^s(x)$. З цією метою, зафіксуємо *i* та *s*. Підмножиною розв'язків рівняння є множина $¬_1^s = q,\ \ q \in [0,1]$, є

$$M\left[s, \left(p_0, q, p_2, ..., p_{s-1} \right) \right] -$$

множина дійсних чисел з відрізка $[0,1]$ з фіксованими частотами

$$¬_0^s = p_0, ¬_1^s = q, ¬_2^s = p_2, \ldots, ¬_{s-1}^s = p_{s-1}.$$

Поклавши $p_0 = 1 - q$, отримаємо нижню оцінку розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини розв'язків рівняння $¬_1^s = q$:

$$-\frac{\ln q^q (1-q)^{1-q}}{\ln s}.$$

Теорема 2. Множина *M* чисел відрізка [0,1], для яких виконується рівність $¬_1^s(x) = x$, є:

1) всюди щільною;
2) всюди розривною;
3) нуль-множиною (в розумінні міри Лебега).

Доведення.

Твердження 1 і 2 випливають безпосередньо з того факту, що належність числа *x* множині *M* не залежить від будь-якої скінченної кількості знаків.

Для доведення твердження 3, скористаємось тим, що міра Лебега множини нормальних чисел відрізка [0,1] дорівнює 1.

Оскільки для будь-якого *x*, що належить множині *M*,

$$¬_1^s(x) \neq \frac{1}{s},$$

то множина *M* не містить жодного нормального за основою *s* числа, тобто *M* є підмножиною множини *W* ненормальних чисел, а отже,

$$ª(M) = ª(W) = 0.$$

Теорему доведено.

Наслідок 5. Множина *M* є фрактальною множиною.

Функція $¬_i^s(x)$ має єдину *s*-адично раціональну інваріантну точку ($x = 0$). Справді, для довільного *s*-адично раціонального числа *x* отримуємо, що $¬_i^s(x) = 0$. Тому при $x \neq 0$ маємо $¬_i^s(x) \neq x$.

Для того щоб побудувати *s*-адично ірраціональну інваріантну точку функції $¬_i^s(x)$ з точністю не менше ¢:

1) Зафіксуємо k:

$$k! + 1 < ¢ < (k+1)! + 1$$

2) В алгоритм, запропонований в першій теоремі, покладемо замість фіксованого q змінну *x*.

Тоді:

$$x_1 = \Delta^s_{00£_1},$$

$$x_2 = \Delta^s_{00£_1\ 11\ \ 21 \cdots\ e_1 1£_2},$$

………………………………….,

$$x_k = \Delta^{s}_{00£_1\ 11\ 21\cdots\ e_1 1£_2\cdots\ 1k\ 2k\cdots\ e_1 k£_{k+1}},$$

x_k – шукане значення.

В роботі [3] отримано нижню оцінку розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини розв'язків рівняння $\neg_1^3(x) = x$:

$$\frac{1}{5}\log_3 2.$$

Тому це значення приймаємо за нижню оцінку розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини розв'язків рівняння $\neg_1^s(x) = x$.

Висновки

Функція частоти цифри $v_i^s(x)$ має непрості властивості. Вона є всюди розривною. В залежності від числа *x* частота $v_i^s(x)$ може не існувати і може існувати та набувати різних значень. Множиною значень функції $v_i^s(x)$ є відрізок [0,1]. Запропоновані в роботі алгоритми дозволяють знаходити інваріантні точки функції $v_i^s(x)$ з будь-якою наперед заданою точністю та будувати континуальну множину чисел з наперед заданою частотою.

Відкритими залишились задачі про точну розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини інваріантних точок функції $v_i^s(x)$. Викликають інтерес також рівняння виду $v_i^s(x) = f(x)$, $v_i^s(x) + f(x) = kx$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Коробов, Н. М. О некоторых вопросах равномерного распределения / Н. М. Коробов // Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. – 14 (– 1950), – 215-231.
2. Котова, О. В. Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа / О. В. Котова // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 10. – С. 1414-1421.
3. Котова, О. В. Фрактальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа / О. В. Котова // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – К. : – 2006. – № 7. – С.152-159.
4. Постников, А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1960. – Т. 57. – С. 3-84.
5. Працьовитий, М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. – К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
6. Торбін, Г. М. Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання / Г. М. Торбін. – К., 1998. – № 1. – С. 53-55.

Отримано редакцією 12.09.2013 р.

Котова Ольга Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.