УДК 004.9

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО[1], О.В. КОТОВА[2], С.І. БЕЗЕРДЯН[1]
[1]Херсонський національний технічний університет
[2]Херсонський державний університет

ПОБУДОВА БАЗИСІВ ТРИКУТНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЯКІ АДАПТОВАНІ ДО ВИДУ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ (ПОВІДОМЛЕННЯ 1)

В статті у межах загального підходу до побудови базисів трикутних скінченних елементів, які складаються із функцій, що задовольняють рівнянню граничної задачі, яку передбачається розв'язувати із використанням цих скінченних елементів, запропоновано використовувати метод Рітца. Розглянуті приклади побудови трикутних скінченних елементів другого порядку, які адаптовані до розв'язання задач еліптичного типу. Досліджено властивості запропонованих елементів.

Ключові слова: трикутний скінченний елемент, граничні задачі еліптичного типу.

G.Ya. TULUCHENKO[1], O.V. KOTOVA[2], S.I. BEZERDYAN[1]
[1]Kherson National Technical University
[2]Kherson State University

BUILDING BASES TRIANGULAR FINITE ELEMENTS ADAPTED TO THE TYPE OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM (POST 1)

Annotation

In an article in the general approach to the construction of bases of triangular finite elements, consisting of functions that satisfy the boundary value problem, which is expected to solve using these finite elements is proposed to use the Ritz. We consider examples of the construction of bases of triangular finite elements of order, adapted to solve the elliptic boundary value problem. The properties of the proposed elements have been studied.

Key words: triangular finite element, elliptic boundary value problem.

Постановка проблеми. Стандартні базиси скінченних елементів (СЕ) вищих порядків, як правило, не задовольняють диференціальним рівнянням крайових і граничних задач, що розв'язуються із їх використанням. На відміну від СЕ вищих порядків функції, що входять до складу базисів лінійних і білінійних скінченних елементів, є гармонічними. В той же час завжди існує можливість наближеного розв'язання граничної задачі, до складу якої входить диференціальне рівняння із задачі, що передбачається досліджувати, а у якості граничних умов використовуються стандартні базисні функції. Побудовані у такий спосіб функції точно або наближено (в залежності від обраного методу розв'язання граничної задачі) задовольняють усім вимогам до базисних функцій.

Крім того, такі функції володіють мало дослідженою властивістю: всередині області скінченного елемента вони задовольняють досліджуваному диференціальному рівнянню, а біля границь елемента існує перехідна смуга, в якій точність відповідності диференціальному рівнянню суттєво порушується, оскільки граничні умови не відповідають цьому рівнянню.

Також доцільним є дослідження впливу на точність методу скінченних елементів використання базисів, які адаптовані до полів, що моделюються за цим методом.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [1] запропонований підхід до побудови гармонічних базисів скінченних елементів за допомогою методу Фур'є.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Показати можливість побудови базисів трикутних скінченних елементів, що складаються із функцій, які задовольняють диференціальному рівнянню граничної задачі, яку передбачається розв'язувати за допомогою методу Рітца. Дослідити властивості базисів трикутних скінченних елементів другого порядку, які адаптовані до розв'язання граничних задач еліптичного типу.

Основна частина. Стандартні базисні функції для трикутного скінченого елемента другого порядку у барицентричних координатах $\{L_1, L_2, L_3\}$ мають вигляд:

$$NS_1 = L_1(2L_1 - 1); \quad NS_4 = 4L_2L_3. \tag{1}$$

Для зручності виконання розрахунків напишемо рівняння базисних функцій (1) у декартовій системі координат для скінченного елемента у формі правильного трикутника, який вписано в одиничне коло і розміщено як показано на рис. 1:

$$NS_1 = \frac{1}{9}(2x+1)(4x-1); \quad NS_4 = \frac{4}{9}\left(x-1-\sqrt{3}y\right)\left(x-1+\sqrt{3}y\right) \tag{2}$$

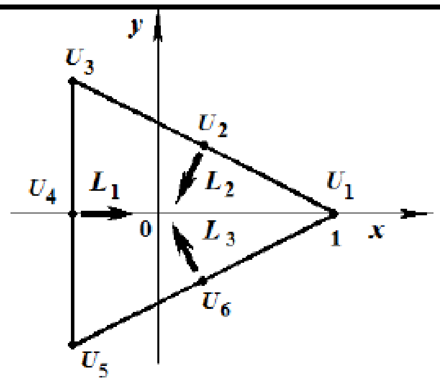

Рис. 1. СЕ ІІ порядку

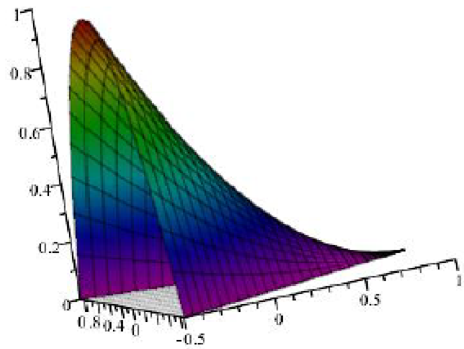

Рис. 2. Графік базисної функції NS_4

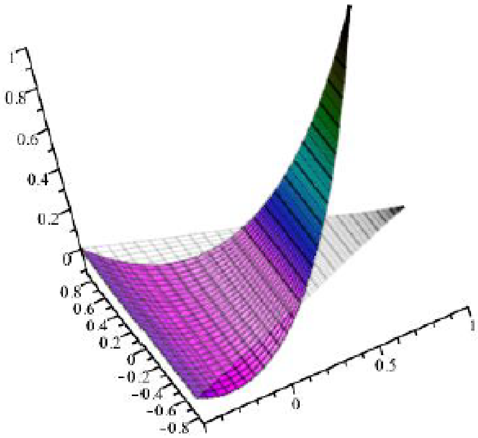

Рис. 3. Графік базисної функції NS_1

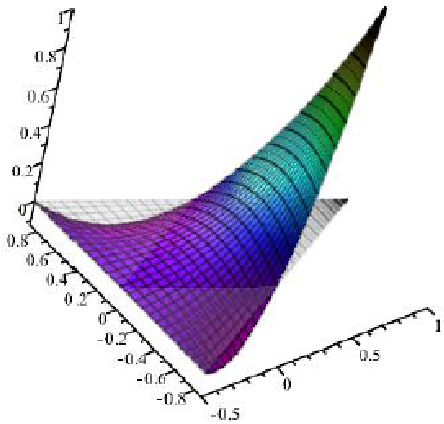

Рис. 4. Графік базисної функції NR_1

Легко перевірити, що оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ від функцій (2) дорівнює сталим величинам, тобто вони не є гармонічними.

Знайдемо функції NH_i, які є гармонічними всередині досліджуваного СЕ, а на границі G цього елемента співпадають із базисними функціями (2), тобто розв'яжемо граничну задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 NH_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NH_i}{\partial y^2} = 0 \\ NH_i\Big|_G = NS_i \end{cases} \tag{3}$$

Розв'язок задачі (3) будемо шукати у вигляді:

$$NH_i(x;y) = NS_i(x;y) + W_i(x;y) \tag{4}$$

за методом Рітца, тобто, як розв'язок еквівалентної задачі мінімізації функціонала

$$\iint \left(\left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y} \right)^2 + 2 f_i W_i \right) dxdy \to \min, \tag{5}$$

де $f_i = -\left(\left(\frac{\partial NS_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial NS_i}{\partial y} \right)^2 \right)$, $i = \overline{1,6}$.

Функції $W_i(x;y)$ в загальному випадку є частинними сумами степеневих рядів виду:

$$W_i(x;y) = g(x;y) \cdot \sum_{p=0}^{n_p} \sum_{q=0}^{n_q} k_{pq}^i x^p y^q, \tag{6}$$

де $g(x;y)$ – рівняння границі області, в нашому випадку добуток рівнянь сторін трикутника $U_1U_3U_5$.

Оператори Лапласа від стандартних базисних функцій СЕ II порядку NS_i відрізняються від нуля на константу, тому у частинній сумі ряду із формули (6) доцільно залишити тільки перший доданок k_{00}, і функції $W_i(x;y)$ у даному випадку набувають вигляду:

$$W_i(x;y) = k_{00}^i (2x+1)\left(x - 1 - \sqrt{3}y\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}y\right). \tag{7}$$

Розв'язавши задачу (5) для кожної базисної функції окремо і підставивши знайдені вирази у формулу (4), після спрощення отримуємо такі вирази гармонічних базисних функцій:

$$\begin{aligned} NH_1(x;y) &= \frac{1}{27}(2x+1)\left(2x+1-2\sqrt{3}y\right)\left(2x+1-2\sqrt{3}y\right); \\ NH_4(x;y) &= \frac{1}{27}(x-1)\left(x-1-\sqrt{3}y\right)\left(x-1+\sqrt{3}y\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Вирази усіх інших базисних функцій отримуються із формул (7) за допомогою перетворення повороту системи координат. Графік функції $NH_1(x;y)$ подано на рис. 4, а графік функції $NH_4(x;y)$ візуально не відрізняється від графіка функції $NS_4(x;y)$ (рис. 2).

Таблиця 1

Характеристики стандартного та гармонічного базисів СЕ II порядку

Характеристика	Стандартний базис	Гармонічний базис
Число обумовленості матриці Грама у метриці L_2	17,209	18,111
Визначник матриці Грама	$3{,}125 \cdot 10^{-7}$	$1{,}250 \cdot 10^{-7}$
Слід матриці жорсткості	8,660	7,737

Логічним узагальненням задачі (3) є пошук базисних функцій NP_i, які всередині досліджуваного СЕ задовольняють рівнянню Пуассона, а на границі G цього елемента співпадають із базисними функціями (2). У даній статті обмежимося дослідженням рівняння Пуассона із правою частиною у вигляді лінійної функції:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 NP_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NP_i}{\partial y^2} = Ax + By + C \\ &NP_i\Big|_G = NS_i \end{aligned} \tag{9}$$

При розв'язанні граничної задачі (9) за методом Рітца функції $W_i(x;y)$ будемо шукати у загальному вигляді (6) (а не (7), як у попередній задачі) і функції f_i будемо вважати рівними $f_i = Ax + By + C - \left(\left(\frac{\partial NS_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial NS_i}{\partial y}\right)^2\right)$.

Виявлено, що отримувані при цьому розв'язки не задовольняють одній із головних вимог до базисних функцій скінченних елементів, а саме, сума отриманих функцій NP_i в загальному випадку не дорівнює 1 і має вигляд:

$$1 - \frac{C}{2}\left(2x^3 - 6xy^2 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 1\right).$$

Тому характеристики базису далі обчислюються для випадку $C = 0$, тобто коли права частина рівняння (8) має вигляд: $Ax + By$. Слід матриці жорсткості в цьому випадку дорівнює

$$Trace = 0{,}0124A^2 - 9{,}1 \cdot 10^{-14} A + 7{,}736. \tag{10}$$

Очевидно, що найменше значення сліду матриці жорсткості (10) досягається при A=0, за умови нехтування доданком $9{,}1 \cdot 10^{-14} A$ в силу його малості.

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі [1] описана вище задача (3) розв'язується за допомогою методу Фур'є. І, відповідно, вирази базисних функцій отримуються у вигляді тригонометричних рядів. Застосування методу Рітца дозволяє отримати базисні функції для трикутного СЕ другого порядку у вигляді скінченних степеневих поліномів (6). Таке подання базисних функцій має очевидні переваги. Цікавим є дослідження виразів, до яких збігаються тригонометричні ряди, що знайдені за методом Фур'є.

Побудований у статті гармонічний базис (8) має кращі обчислювальні характеристики (табл. 1), ніж стандартний базис (1).

Дослідження можливостей побудови базису для трикутного СЕ другого порядку, функції якого задовольняють рівнянню Пуассона із лінійною правою частиною (9), показує, що така задача має розв'язки лише для окремих випадків, які, в силу їх обмеженості, нецікаві для практичного застосування.

Перспективи подальших досліджень пов'язані із переходом до дослідження аналогічних задач для трикутних СЕ інших вищих порядків та для тетраедральних СЕ.

Література

1. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Электронный ресурс] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. — Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. — С. 317—320. — Режим доступа к отчету: http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf