

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Том 62

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА • 1985

УДК 520.8

КУЗЬМЕНКОВ С. Г.

**ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ
СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.
УГЛОВЫЕ ДИАМЕТРЫ ЗВЕЗД**

Получено общее соотношение, определяющее нижнюю границу дисперсии оценки неизвестного параметра произвольного объекта по результатам измерения спектра мощности спекл-изображений как функцию обстоятельств наблюдения и характеристик наблюдаемого объекта. С помощью этого соотношения исследованы возможности метода спекл-интерферометрии при решении задачи измерения углового диаметра звезд. Предельная звездная величина для данных обстоятельств наблюдения определяется в связи с решением конкретной задачи измерения.

THE POTENTIAL ACCURACY OF THE SPECKLE INTERFEROMETRIC MEASUREMENTS. STELLAR ANGULAR DIAMETERS, by *Kuz'menkov S. G.*— A generalized expression is obtained which defines the lower limit of the variance of the unknown-parameter estimation of an arbitrary object from the speckle image power spectrum measurements as the function of the observation circumstances and characteristics of the observed object. With the help of this expression, the possibilities of speckle interferometry for the solution of the measurement problem of a stellar angular diameter are studied. The limiting magnitude for given observation circumstances is determined in connection with the solution of the concrete measurement problem.

Введение

Известно, что метод спекл-интерферометрии позволяет проводить измерения угловых размеров звезд или разделений в случае двойных звезд, находящихся на пределе разрешения применяемого телескопа. Под пределом разрешения подразумевается, как правило, разрешающая сила телескопа, которая определяется по известному критерию Рэлея. Однако современные представления о разрешении как о составной части процессов измерения [1–3] и (или) обнаружения [4] допускают, что в определенных случаях предел по разрешению в абсолютном смысле вообще отсутствует. Существуют лишь практические ограничения, накладываемые шумом.

Сейчас уже очевидно, что разрешающая способность в каждой конкретной ситуации определяется многими факторами, действующими в совокупности. К числу этих факторов Рончи [5] еще в 1961 г. отнес: 1) источник сигнала и его энергию, 2) оптический прибор и его возможности распределять энергию, 3) приемник и его характеристики чувствительности. К этому следует добавить, что, несомненно, многое может зависеть от методов сбора и обработки информации.

В связи с этим представляет интерес оценка точности в задаче измерения методом спекл-интерферометрии углового диаметра или параметров двойной системы и связь ожидаемой точности с тремя упоминаемыми Рончи факторами.

Фалькони [1] исследовал вопрос, насколько точно можно измерить угловой диаметр источника, который представляет собой равномерно светящийся диск. При этом предполагалось, что наблюдения выполняются с помощью дифракционно-ограниченного телескопа и единственным источником шума являются случайные флуктуации детектируемых фотонов. Фалькони [1] исследовал также задачу измерения разделения точечных источников (двойных звезд), если известно отношение их яркостей и положение средней точки между источниками (если разделение меньше дифракционного предела разрешения телескопа, то положение фотоцентра). Более общий случай, когда разделение, положение средней точки

(или фотоцентра) и отношение яркостей источников заранее неизвестны и определяются из измерений одновременно, проанализировал Фрид [2, 3]. Шум в анализе Фрида предполагался белым стационарным и аддитивным.

Проведенный в работах [1–3] анализ основывается на классических методах наблюдений, и полученные результаты относятся к тем случаям, когда измеряется непосредственно распределение интенсивности по изображению. Влияние на точность атмосферного замытия не рассматривалось.

В методе спекл-интерферометрии информация об интересующих нас параметрах объекта извлекается путем измерения спектров мощности или автокорреляционных функций, полученных по конечному набору спекл-изображений. Каждое спекл-изображение можно трактовать как дифракционную картину от отдельной реализации волнового фронта, искаженного атмосферной турбулентностью. Оно представляет собой случайное распределение интенсивности, однако содержит при этом информацию об объекте, который имеет детерминированный характер. Такое изображение в силу своей природы может рассматриваться как реализация случайного процесса. А это означает, что точность оценки спектра мощности или автокорреляционной функции должна зависеть от размера выборки, которая используется при их получении [6]. Это отличие спекл-интерферометрических измерений от традиционных [1–3] является существенным и не единственным, как будет показано ниже.

Постановка задачи

Нас будет интересовать точность оценки неизвестных параметров по результатам измерения спектров мощности спекл-изображений. Чтобы определить искомые параметры объекта из спектра мощности, будем предполагать, во-первых, что задача обнаружения уже решена и остается лишь задача измерения неизвестных параметров; во-вторых, при решении последней задачи необходимо задаться моделью объекта, т. е. необходима, как и при всяких измерениях вообще, априорная информация об объекте [7]. При спекл-интерферометрических измерениях она носит самый общий характер. Это предположения: об ограниченности источника в пространстве, о центральной симметрии распределения яркости и, наконец, о законе распределения яркости по объекту.

В данной работе рассмотрим задачу измерения угловых диаметров звезд. Для имеющихся телескопов объектами в этом случае могут быть красные гиганты, звезды типа Миры Кита и т. д. [7]. При решении этой задачи будем предполагать для звезды модель равномерно светящегося диска. Тогда остается один неизвестный параметр — угловой размер θ .

Чтобы выяснить предельные возможности спекл-интерферометрических измерений, воспользуемся введенным в статистической радиотехнике понятием потенциальной точности [8] как наивысшей достижимой при фиксированных условиях точности измерений. Под фиксированными условиями будем подразумевать вполне определенное отношение сигнал/шум, присущее данному методу получения и обработки сигнала, и определенные ограничения, наложенные на процедуру измерений, например конечный объем выборочных данных. В качестве критерия точности примем среднеквадратичное значение погрешности σ оценки искомого (в данном случае скалярного) параметра.

Общее решение

Для дальнейшего анализа требуется знать отношение сигнал/шум в каждой точке спектра мощности. Это отношение определяется известным образом:

$$S/N = \frac{\text{ожидаемое значение величины}}{\text{стандартное отклонение ее оценки}}.$$

Сигналом в методе спекл-интерферометрии принято считать величину

$$\langle |F(\mathbf{v})|^2 \rangle = \langle |g(\mathbf{v})|^2 \rangle |f(\mathbf{v})|^2, \quad (1)$$

где $f(\mathbf{v})$ — фурье-преобразование от распределения яркости по объекту, $g(\mathbf{v})$ — мгновенная оптическая передаточная функция (ОПФ) системы телескоп+атмосфера, \mathbf{v} — радиус-вектор пространственных частот. Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций — спекл-изображений.

Три фундаментальных явления влияют на оценку математического ожидания спектра мощности: 1) дисперсия самого спектра мощности, вызванная наличием спеклов в изображениях — так называемый спекл-шум, который, как уже упоминалось, обусловлен атмосферной турбулентностью; 2) квантовые флуктуации светового потока; 3) шумы, которые могут возникать в спекл-камере (усилитель яркости, детектор) и на стадии обработки спекл-изображений.

Шумы третьего вида часто полагают независимыми от сигнала. Несмотря на это, их учет затрудняет решение задачи в общем виде. Поэтому на данном этапе рассмотрим влияние на точность измерений спекл-шума и фотонных флуктуаций. В дальнейшем мы продемонстрируем воздействие на результат аддитивного шума, взяв в качестве детектора фотографическую пленку.

Интересующее нас выражение для отношения сигнал/шум было получено многими авторами (например, [9, 10]). Мы ограничим наш анализ случаем $n_T > 1$, где n_T — среднее число фотонов, детектируемых в одном спекл-изображении. Значение $n_T = 1$ соответствует, например, для 6-м телескопа и квантового выхода спекл-камеры $\eta = 10\%$ звездной величине $m_V = 20^m$ при наблюдениях в полосе $\Delta\lambda = 40$ нм с временем экспозиции 0,01 с. Такое ограничение вполне оправдано, поскольку случай $n_T < 1$, т. е. в среднем меньше одного фотона на спекл-изображение, представляет скорее академический интерес.

Итак, при $n_T > 1$ на частотах выше частоты атмосферного замытия, т. е. при $\nu > \nu_a = r_0/\lambda$, где $\nu = |\mathbf{v}|$, r_0 — корреляционный масштаб аберраций, наведенных атмосферной турбулентностью в плоскости апертуры (параметр Фрида [11]) и в отсутствие аддитивного шума имеем [9, 10]

$$(S/N)_M = \frac{M^{1/2} n_T \langle |F_n(\mathbf{v})|^2 \rangle}{1 + n_T \langle |F_n(\mathbf{v})|^2 \rangle}, \quad (2)$$

где $\langle |F_n(\mathbf{v})|^2 \rangle = \langle |g_n(\mathbf{v})|^2 \rangle |f_n(\mathbf{v})|^2$, индекс «н» обозначает, что сигнал нормирован и равен единице на нулевой пространственной частоте, а M — число статистически независимых спекл-изображений.

Было показано [10, 12], что в том случае, если флуктуации комплексной амплитуды на зрачке телескопа представляют комплексный гауссов процесс, то при условии, что $(D/r_0)^2 \gg 1$, а аберрации телескопа пренебрежимо малы для областей размером r_0 , нормированную функцию $\langle |g_n(\mathbf{v})|^2 \rangle$ на частотах $\nu_a \ll \nu \ll \nu_D = \nu_a$, где $\nu_D = D/\lambda$, можно представить в виде

$$\langle |g_n(\mathbf{v})|^2 \rangle \simeq 0,435 \left(\frac{r_0}{D} \right)^2 g_D(\nu), \quad (3)$$

где $g_D(\nu)$ — дифракционная ОПФ телескопа, D — диаметр (неэкранированного) зрачка телескопа. Удобно определить [10] среднее число спеклов на кадр N_s как

$$N_s = \frac{1}{0,435} \left(\frac{D}{r_0} \right)^2. \quad (4)$$

Тогда $\langle |g_n(\mathbf{v})|^2 \rangle \simeq g_D(\nu)/N_s$. И для отношения сигнал/шум в точке \mathbf{v} спектра мощности получаем

$$(S/N)_M = \frac{M^{1/2} n_s g_D(\nu) |f_n(\mathbf{v})|^2}{1 + n_s g_D(\nu) |f_n(\mathbf{v})|^2}, \quad (5)$$

где $n_s = n_T/N_s$ — среднее число фотособытий на спекл.

Пусть необходимо оценить неизвестный скалярный параметр объекта p . Обозначим для удобства квадрат модуля фурье-преобразования от распределения яркости по объекту через $\Phi(\mathbf{v}, p) = |f_n(\mathbf{v}, p)|^2$, где подчерк-

пута зависимость от параметра. Функцию $\Phi(\mathbf{v}, p)$ определяют в спекл-интерферометрии в результате операции деления $\langle |F(\mathbf{v}, p)|^2 \rangle$ на $\langle |g(\mathbf{v})|^2 \rangle$ (см. уравнение (1)), а функцию $\langle |g(\mathbf{v})|^2 \rangle$ получают из наблюдений заведомо неразрешаемой данным телескопом (точечной) звезды. Будем считать, что функция $\langle |g(\mathbf{v})|^2 \rangle$ определена по бесконечно большому набору спекл-изображений, т. е. известна точно. Это дает нам право в дальнейшем анализе учитывать погрешности измерения только спектра мощности протяженного источника.

Представим результат измерения величины $\langle |F(\mathbf{v}, p)|^2 \rangle / \langle |g(\mathbf{v})|^2 \rangle$ в i -й точке в виде

$$S_i = \Phi(\mathbf{v}_i, p) + v_i, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (6)$$

где k — общее число измерений, равное числу независимых точек отсчета в спектре мощности, v_i — случайная ошибка. При достаточно большом M в силу центральной предельной теоремы величина v_i будет распределена нормально с нулевым математическим ожиданием (в предположении адекватности модели $\Phi(\mathbf{v}, p)$). Что касается дисперсии, то ее несмещенной оценкой, согласно (5), является

$$\sigma_i^2 = \frac{[1 + n_s g_D(v_i) \Phi(\mathbf{v}_i, p)]^2}{n_s^2 (M-1) [g_D(v_i)]^2}. \quad (7)$$

Тогда каждому измерению соответствует вес $\omega_i = 1/\sigma_i^2$. Оценка максимального правдоподобия в этом случае имеет вид

$$\hat{p} = \Phi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^k \omega_i S_i}{\sum_{i=1}^k \omega_i} \right). \quad (8)$$

При этом предполагается, что существует функция $\Phi^{-1}(\cdot)$, обратная функции $\Phi(\cdot)$, и область изменения $\Phi(\mathbf{v}, p)$ включает величину $\frac{\sum_{i=1}^k \omega_i S_i}{\sum_{i=1}^k \omega_i}$.

Для дисперсии несмещенной оценки параметра p справедливо неравенство, известное как неравенство Крамера — Рао [13]:

$$\sigma_p^2 \geq \left\{ \sum_{i=1}^k \omega_i \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{v}_i, p)}{\partial p} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (9)$$

Если функция $\Phi(\cdot)$ нелинейна относительно искомого параметра, то ни один метод оценивания не позволяет достичь нижней границы для σ_p^2 [14]. Однако можно показать [14], что с увеличением k дисперсия оценки \hat{p} приближается к границе (9), т. е. оценка \hat{p} в этом случае является асимптотически эффективной.

Если спекл-изображение имеет эффективный размер $1,27\lambda/r_0$ [15], то частотное разрешение в спектре равно $\Delta v = r_0/1,27\lambda$. Тогда число независимых точек отсчета k есть

$$k = 2(1,27)^2 \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \approx 3,2 \left(\frac{D}{r_0} \right)^2. \quad (10)$$

В силу центральной симметрии спектра мощности вся информация, заключенная в изображениях, содержится в его половине. Но, измеряя весь спектр, всегда можно считать, что число точек отсчета равно $2k$. Так как $(D/r_0)^2 \gg 1$, то, во-первых, можно получить оценку, близкую к эффективной, если $\Phi(\mathbf{v}, p)$ является нелинейной функцией. Во-вторых, операцию суммирования в (9) можно заменить интегрированием по спектру. Причем, строго говоря, интегрирование должно вестись в интервале $v_a < v < v_b - v_a$. Однако, принимая во внимание тот факт, что $v_a \sim 0,01v_b$, интегрирование можно распространить на всю область значений v от 0 до v_b . Вычисления будем производить в полярных координатах $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v, \varphi)$.

Итак, для границы Крамера — Рао имеем

$$\frac{1}{\sigma_p^2} = 2(M-1) \int_0^\pi \int_0^{v_D} \frac{\left[n_s g_D(v) \frac{\partial \Phi(v, \psi, p)}{\partial p} \right]^2 v dv d\psi}{[1 + n_s g_D(v) \Phi(v, \psi, p)]^2}. \quad (11)$$

Обозначив интеграл через K_p , находим окончательно

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2(M-1)K_p}}. \quad (12)$$

Для низких световых уровней сигнала, т. е. при $n_s \ll 1$, слагаемым $n_s g_D(v) \Phi(v, \psi, p)$ в знаменателе подынтегрального выражения (11) можно пренебречь. Тогда

$$\sigma_p = \frac{1}{n_s \sqrt{2(M-1)K_p}}, \quad n_s \ll 1, \quad (13)$$

где

$$K_p = \int_0^\pi \int_0^{v_D} \left[\frac{\partial \Phi(v, \psi, p)}{\partial p} \right]^2 [g_D(v)]^2 v dv d\psi. \quad (14)$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) среднеквадратичная ошибка оценки искомого параметра p обратно пропорциональна корню квадратному из объема выборки, по которой получен был спектр мощности;

2) среднеквадратичная ошибка оценки p при низких уровнях сигнала ($n_s \ll 1$) обратно пропорциональна первой степени числа фотособытий на спекл. При $n_s \gg 1$ величина σ_p практически перестает зависеть от n_s ;

3) нетрудно показать, учитывая определение n_s и N_s (4), что

$$n_s = 0,342 \eta n_v t_E \Delta \lambda r_0^2, \quad (15)$$

где η — квантовый выход спекл-камеры, n_v — спектральная плотность потока от звезды (квантов/см²·с·нм), t_E — время экспозиции, $\Delta \lambda$ — полуширина спектральной полосы фильтра. Следовательно, при $n_s \ll 1$ величина σ_p обратно пропорциональна величинам η , n_v и r_0^2 . Зависимость $\sigma_p \propto 1/r_0^2$ означает, что даже если не принимать во внимание тот факт, что значения t_E и $\Delta \lambda$ должны выбираться также в зависимости от r_0 (чем больше r_0 , тем большими при прочих равных условиях могут быть t_E и $\Delta \lambda$), то точность спекл-интерферометрических измерений (при $n_s \ll 1$) в сильной степени определяется атмосферными условиями.

Точность оценки углового диаметра

Введем меру близости ε протяженного источника к дифракционному элементу разрешения

$$\varepsilon = \frac{\theta D}{\lambda}. \quad (16)$$

Далее введем безразмерную координату в фурье-плоскости $\xi = v/v_D$, $0 < \xi < 1$. Тогда нормированный квадрат модуля спектра объекта, если предполагается модель равномерно светящегося диска, имеет вид

$$\Phi(\xi) = \left[\frac{2J_1(\pi \varepsilon \xi)}{\pi \varepsilon \xi} \right]^2, \quad (17)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Известно, что дифракционная ОПФ телескопа с чистой круглой апертурой определяется выражением

$$g_D(\xi) = \frac{2}{\pi} (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2}). \quad (18)$$

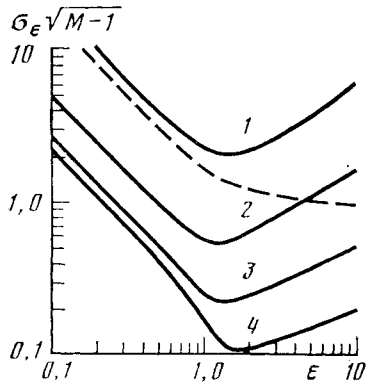


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость среднеквадратичной ошибки оценки углового диаметра протяженного источника σ_ϵ , умноженной на $\sqrt{M-1}$, от его величины $\epsilon = \theta D/\lambda$: 1 – среднее число фотособытий на дифракционный элемент разрешения $n_s=1$; 2 – $n_s=10$; 3 – $n_s=10^2$; 4 – $n_s=10^3$. Штриховая линия соответствует зависимости $\sigma_\epsilon n_s \sqrt{M-1}$ от ϵ при $n_s(1+\epsilon^2) \ll 1$

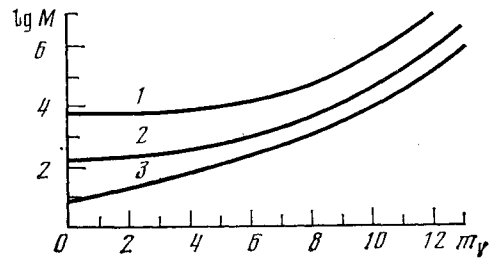


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость числа спекл-изображений M , необходимого для достижения 1%-ой точности измерения ϵ , от звездной величины m_V объекта: 1 – при $\epsilon=0,5$; 2 – $\epsilon=1,0$; 3 – $\epsilon=2,0$. Условия наблюдений: $r_0=10$ см, $t_E=0,01$ с, $\Delta\lambda=40$ нм, $\eta=10\%$

Подставляя (17), (18) и производную (17) по ϵ в (11), можно вычислить интеграл для разных n_s и ϵ . При этом нужно иметь в виду следующее. Изображение объекта с мерой близости ϵ является сверткой изображения точки с идеальным геометрическим изображением объекта. Следовательно, если под величиной n_s в (15) понимать число фотособытий, приходящихся на дифракционно-ограниченный элемент разрешения в объекте, то число фотособытий на спекл для протяженного источника должно быть $n_s(1+\epsilon^2)$. Это число будет расти с увеличением ϵ до предельного значения $n_s[1+(D/r_0)^2]$, которое будет иметь место при $\theta \geq \lambda/r_0$ [16].

При $n_s(1+\epsilon^2) \ll 1$, согласно (13) и (14), для среднеквадратичной ошибки оценки меры близости протяженного источника имеем

$$\sigma_\epsilon = \frac{\epsilon \sqrt{\pi}}{8n_s(1+\epsilon^2) \sqrt{2(M-1)H_\epsilon}}, \quad (19)$$

где

$$H_\epsilon = \int_0^1 \left[\frac{2J_1(\pi\epsilon\xi)}{\pi\epsilon\xi} \right]^2 \left[J_0(\pi\epsilon\xi) - \frac{2J_1(\pi\epsilon\xi)}{\pi\epsilon\xi} \right]^2 (\arccos \xi - \xi \sqrt{1-\xi^2})^2 \xi d\xi, \quad (20)$$

а J_0 – функция Бесселя нулевого порядка.

Можно показать, что для малых значений ϵ , а именно для $\epsilon < 2/\pi \approx 0,6$, произведение функций в квадратных скобках под интегралом в (20) приближенно равно $\frac{1}{4} \left(\frac{\pi\epsilon\xi}{2} \right)^4$. Интеграл H_ϵ в этом случае легко вычисляется:

$H_\epsilon \approx 0,0062(\pi\epsilon)^4$. Тогда, пренебрегая величиной ϵ^2 в множителе $(1+\epsilon^2)$ по сравнению с единицей, вместо (19) получаем

$$\sigma_\epsilon \approx \frac{1,613}{n_s \epsilon \sqrt{M-1}}, \quad \epsilon < 0,6, \quad n_s \ll 1. \quad (21)$$

Интеграл в (11) для разных n_s и ϵ вычислялся на ЭВМ «Напри-К». Графики зависимости величины σ_ϵ , умноженной на $\sqrt{M-1}$, от ϵ для некоторых значений n_s представлены на рис. 1. На этом же рисунке штриховой линией показана зависимость $\sigma_\epsilon n_s \sqrt{M-1}$ от ϵ для случая $n_s(1+\epsilon^2) \ll 1$.

Оценим звездную величину объекта с $\varepsilon=1$, которая при заданных обстоятельствах наблюдения позволяет достигнуть 1%-ой точности измерения величины ε . Это легко сделать, когда $n_s(1+\varepsilon^2) \ll 1$, что при $\varepsilon=1$ означает $n_s \ll 0,5$. Пусть $M=10^6$ (это число нужно рассматривать как предел, ибо получить и обработать такое количество статистически независимых спекл-изображений вряд ли возможно). Из рис. 1 (штриховая линия) находим $\sigma_s n_s \sqrt{M-1} = 10 n_s = 1,66$, откуда требуемое число фотособытий на спекл (в среднем) $n_s \approx 0,17$. Строго говоря, требуемое n_s не удовлетворяет неравенству $n_s \ll 0,5$ — выполняется более мягкое $n_s < 0,5$. В результате это приведет к немного завышенной оценке предельной для данных обстоятельств наблюдения звездной величины.

Предположим, что условия наблюдения таковы: $r_0=10$ см (это соответствует качеству изображения на 550 нм $\approx 1,4''$), $t_E=0,01$ с и $\Delta\lambda=40$ нм. Из соотношения (15) при $\eta=10\%$ находим спектральную плотность потока от звезды $n_V \approx 0,12$ квантов/см²·с·нм. Известно [17], что плотность потока от звезды нулевой величины в зеленой области спектра равна $n_0=10^4$ квантов/см²·с·нм. Значит, $m_V=2,5 \lg \frac{n_0}{n_V} \approx 12,3^m$. Если $\varepsilon=2$, то

для той же 1%-ой точности требуется 0,06 фотособытий на спекл, что соответствует $m_V=13,4^m$. Заметим, что здесь не учитываются потери света в атмосфере, в оптике телескопа и спекл-камеры, которые, естественно, уменьшают предельную звездную величину.

Представляет интерес величина объема выборки M , необходимой для решения данной задачи измерения. Из соотношения (12) следует

$$M=1 + \frac{1}{2K_\varepsilon \sigma_\varepsilon^2}, \quad (22)$$

где σ_ε — заданная точность. На рис. 2 изображена зависимость величины M от m_V , соответствующая требованию $\sigma_\varepsilon/\varepsilon=1\%$, когда $\varepsilon=0,5, 1$ и 2 . Рисунок 2 показывает пример расчета величины M для данной яркости объекта и, с другой стороны, дает представление о звездной величине объектов, доступных методу спекл-интерферометрии при решении конкретной задачи измерения.

Следует отметить, что измерения в точках, где $\Phi(\xi)=0$, имеют максимальный вес, равный, согласно (7), $\omega(\xi)=n_s^2(1+\varepsilon^2)^2(M-1)[g_D(\xi)]^2$. Если звезда описывается моделью равномерно светящегося диска (17), то функция $\Phi(\xi)$ имеет нули при $\varepsilon > 1,22$. Очевидно, если $\varepsilon > 1,22$ и $n_s \rightarrow \infty$, то интеграл $K_\varepsilon \rightarrow \infty$, а это означает, согласно (22), что для любого значения σ_ε , отличного от нуля, $M \rightarrow 1$. Следовательно, при наличии только спекл-шума и квантовых флуктуаций угловой диаметр, превышающий дифракционный (рэлеевский) предел разрешения телескопа, можно измерить при $n_s \rightarrow \infty$ с конечной точностью, используя для этого в пределе всего лишь одно спекл-изображение.

Аддитивный шум

При наличии аддитивного шума выражение для отношения сигнал/шум записывается следующим образом [9]:

$$(S/N)_M = M^{1/2} \left[1 + \frac{1}{n_T \langle |F_H(\mathbf{v})|^2 \rangle} + \frac{\sum_i \langle |Q(\mathbf{v})|^2 \rangle}{\langle |F(\mathbf{v})|^2 \rangle} \right]^{-1}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{v}_a, \quad (23)$$

где $\sum_i \langle |Q(\mathbf{v})|^2 \rangle$ — сумма спектров мощности всех источников шума, не зависящего от сигнала.

Предположим, что спекл-изображения регистрируются на киноплёнку, и будем рассматривать единственный источник шума — гранулярность.

При этом будем исходить из ряда простых предпосылок. Пусть все зерна имеют круглую форму с одинаковым эффективным диаметром d и являются абсолютно непрозрачными. Тогда спектр гранулярности описывается выражением [18]

$$\langle |Q(v)|^2 \rangle = \left[\frac{2J_1(\pi v d)}{\pi v d} \right]^2 \langle |Q(0)|^2 \rangle, \quad (24)$$

где $\langle |Q(0)|^2 \rangle$ — значение спектра гранулярности на нулевой частоте. Введем меру близости размера зерна к дифракционному элементу разрешения

$$\mu = \frac{dD}{\lambda R}, \quad (25)$$

где R — эквивалентное фокусное расстояние спекл-камеры. В области $v \leq v_D$, очевидно, $\pi v d = \pi \mu \xi$. Так как на практике μ обычно мало ($\mu \ll 1$), то спектр гранулярности слабо меняется в интервале $0 \leq \xi \leq 1$, поэтому можно считать, что $\langle |Q(\xi)|^2 \rangle \approx \langle |Q(0)|^2 \rangle$. Можно показать, основываясь на работе [18], что эта величина для одного спекла равна

$$\langle |Q(0)|^2 \rangle = C d^4 \eta_0 n_s, \quad (26)$$

где C — коэффициент пропорциональности, η_0 — квантовый выход пленки, т. е. $\eta_0 n_s$ представляет собой число зерен в одном спекле. Величина сигнала на нулевой частоте от одного спекла есть

$$\langle |F_s(0)|^2 \rangle = C \left(\frac{\lambda R}{D} \right)^4 (\eta_0 n_s)^2. \quad (27)$$

Константа C одинакова в обоих случаях. Находим

$$\frac{\langle |Q(0)|^2 \rangle}{\langle |F_s(0)|^2 \rangle} = \frac{\mu^4}{\eta_0 n_s}. \quad (28)$$

Так как изображение содержит N_s спеклов, то для отношения спектра шума к спектру сигнала в этом случае получаем

$$\frac{\langle |Q(\xi)|^2 \rangle}{\langle |F(\xi)|^2 \rangle} = \frac{A}{n_T \langle |F_n(\xi)|^2 \rangle} = \frac{A}{n_s g_D(\xi) |f_n(\xi)|^2}, \quad (29)$$

где $A = \mu^4 / \eta_0$.

Тогда отношение сигнал/шум при наличии аддитивного шума, обусловленного гранулярностью пленки, приобретает вид

$$(S/N)_M = \frac{M^2 n_s g_D(\xi) |f_n(\xi)|^2}{1 + A + n_s g_D(\xi) |f_n(\xi)|^2}. \quad (30)$$

В результате вместо (11) для нижней границы σ_p имеем

$$\frac{1}{\sigma_p^2} = 2(M-1) \int_0^{\pi} \int_0^{v_D} \frac{\left[n_s g_D(v) \frac{\partial \Phi(v, \psi, p)}{\partial p} \right]^2 v dv d\psi}{[1 + A + n_s g_D(v) \Phi(v, \psi, p)]^2}. \quad (31)$$

Для того чтобы аддитивный шум не оказывал влияния на точность измерений, необходимо выполнение условия $A \ll 1$ или $\mu^4 \ll \eta_0$. Величину $h = 1/\mu^2$ можно рассматривать как плотность упаковки зерен в спекле. Плотность упаковки для заданного диаметра телескопа D , согласно (25), определяется величиной эквивалентного фокусного расстояния R и эффективным размером зерна пленки d или, что равносильно, ее разрешающей способностью. Поэтому эти параметры следует подбирать таким образом, чтобы выполнялось условие $h \gg 1/\sqrt{\eta_0}$.

Следует отметить, что влияние шумов третьего вида можно учесть, не прибегая в некоторых случаях к рассмотрению шумовых характеристик конкретных типов приемников. Так, при правильном согласовании усилителя яркости с фотопленкой шумами последней можно пренебречь.

Что касается квантового выхода спекл-камеры, то в этом случае он будет равен квантовому выходу усилителя яркости [19]. Тогда влияние шумов можно с достаточной точностью учесть, если под η в формуле (15) подразумевать эквивалентный квантовый выход (DQE) [20, 21].

Заключение

1. Проведенный анализ неявно предполагал: а) наличие линейных приемников на всех этапах вплоть до измерения спектров мощности; б) выполнение условий [16]: $t_E \leq \tau_s$ и $\Delta\lambda/\lambda \leq r_0/D$, где τ_s — характерное «время жизни» спеклов, причем $\tau_s \propto r_0$ [22]; в) размеры объекта не выходят за пределы изопланатической области [16].

2. Потенциальная точность при спекл-интерферометрических измерениях, как и ожидалось, определяется типом объекта и его яркостью, ОПФ телескопа и свойствами светоприемника. Существуют, однако, и другие ограничения на точность, обусловленные спецификой сбора и обработки информации. Это конечное число спекл-изображений и их качество, которое определяется параметром r_0 .

3. Найденное соотношение для σ_s в случае измерения углового диаметра равномерно светящегося диска звезды дает возможность представить предельные возможности данного метода измерений, предсказать нижнюю границу σ_s при решении конкретной задачи (нижняя граница определяет потенциальную точность независимо от способа оценивания параметра) и, что, безусловно, важно, указывает пути достижения этой границы. По существу это решение задачи планирования эксперимента.

4. Очевидно, что спекл-интерферометрические измерения возможны и за дифракционным пределом (при $\epsilon < 1$), но лишь для очень ярких объектов. Приемлемая же точность в этом случае может быть получена, когда значения r_0 , η и M достаточно высоки. В то же время численные оценки показывают, что достигнуть высокой точности при измерениях слабых объектов невозможно при плохих атмосферных условиях, низком эквивалентном квантовом выходе и регистрации малых серий спекл-изображений. При этом нужно иметь в виду, что, пожалуй, единственный управляемый параметр во время наблюдений — это число спекл-изображений M . Даже величину λ мы не всегда можем выбирать произвольно, ведь ее значение часто диктуется астрофизическим аспектом задачи. Но поскольку этот параметр фигурирует в степени $1/2$, эффективность «управления» экспериментом с его помощью невысока.

В заключение отметим, что проведенный анализ легко распространяется на случай телескопов с центральным экранированием. Однако для реально существующих размеров центрального экрана численные результаты практически не изменятся. Во второй и третьей частях данной работы будут рассмотрены задачи измерения: а) углового диаметра и потемнения к краю диска звезды; б) разделения, позиционного угла и разности блеска компонентов двойных звезд.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Falconi O. J.* Opt. Soc. Amer., 1967, v. 57, p. 987.
2. *Fried D. L. J.* Opt. Soc. Amer., 1979, v. 69, p. 399.
3. *Fried D. L. J.* Opt. Soc. Amer., 1980, v. 70, p. 748.
4. *Harris J. L. J.* Opt. Soc. Amer., 1964, v. 54, p. 606.
5. *Ronchi V. J.* Opt. Soc. Amer., 1961, v. 51, p. 458.
6. *Бендар Дж., Нирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.
7. *Кузьменков С. Г., Вакулик В. Г.* Вестн. Харьковск. ун-та, 1981, № 223, вып. 16, с. 47.
8. *Цветков Э. И.* Основы теории статистических измерений. Л.: Энергия, 1979.
9. *Miller M. G. J.* Opt. Soc. Amer., 1977, v. 67, p. 1176.
10. *Dainty J. C., Greenaway A. H. J.* Opt. Soc. Amer., 1979, v. 69, p. 786.
11. *Fried D. L. J.* Opt. Soc. Amer., 1965, v. 55, p. 1427.
12. *Dainty J. C.* Opt. Commun., 1973, v. 7, p. 129.
13. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3-х т. Т. I. М.: Сов. радио, 1972.

14. *Sakrison D.* Лекции об аналоговой связи. М.: Мир, 1974.
15. *Roddier F.* Progress in Opt., 1981, v. 19, p. 281.
16. *Schneiderman A. M., Karo D. P.* Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 1976, v. 75, p. 70.
17. *Никонов В. Б.* В кн.: Курс астрофизики и звездной астрономии/Под ред. Михайлова А. А. М.: Наука, 1973, т. 1, с. 392.
18. *Фризер Х.* Фотографическая регистрация информации. М.: Мир, 1978.
19. *Бурслов М. М., Степанов Б. М., Фанченко С. Д.* Электронно-оптические преобразователи и их применение в научных исследованиях. М.: Наука, 1978.
20. *Jones R. C.* Photogr. Sci. Eng., 1958, v. 2, p. 57.
21. *Fellgett P. B.* Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 1958, v. 118, p. 224.
22. *Roddier F., Gilli J. M., Lund G. J.* Opt., 1982, v. 13, p. 263.

Астрономическая обсерватория
Харьковского гос. университета

Поступила в редакцию
12.VI.1984