Кузьменков, С.Г. Про одну маловідому теорему [Текст] / С.Г. Кузьменков // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка. Вип. 99 / Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г. Шевченка; гол. ред. Носко М.О. – Чернігів: ЧНПУ, 2012. – С. 213–218. (Серія: Педагогічні науки).

УДК 378: 52

Кузьменков С.Г.

ПРО ОДНУ МАЛОВІДОМУ ТЕОРЕМУ

У статті наголошується про доцільність більш широкого застосування теореми віріала під час навчання фізики та астрономії у вищих навчальних закладах. Наводяться приклади розв'язання деяких астрофізичних задач за допомогою цієї теореми.

Ключові слова: *теорема віріала, фізична та астрономічна освіта, астрофізичні задачі.*

Відомо, що стійка рівновага системи матеріальних точок, які взаємодіють за законом обернених квадратів, – неможлива [2]. Тобто, в системі, де діють лише такі сили, стан з кінетичною енергією, що дорівнює нулю, не може бути стійким. Цей висновок стосується як електронів у атомі, так і частинок всередині зорі, зір у зоряних скупченнях або галактиках, галактик у спостережуваному Всесвіті.

Застосування *теореми віріала* (іноді кажуть – *про віріал Клаузіуса* [2, 5]) дає змогу визначати *повну енергію* системи частинок (однієї частинки, космічного тіла), що рухаються в обмеженій області простору під впливом сил, що діють за законом обернених квадратів, лише через *середню* (за достатньо великий проміжок часу) *кінетичну енергію* або лише через *середню потенціальну енергію*.

На нашу думку, теорема віріала є дуже корисною теоремою, що якось незаслужено мало використовується при навчанні як фізики, так і астрономії. Ця теорема зумовлена фундаментальними властивостями простору й часу (однорідністю простору й часу, ізотропністю та тривимірністю простору) і значно спрощує розв'язання широкого спектру задач. Її використання сприяє формуванню узагальнених вмінь як майбутнього фахівця-фізика, так і вчителя фізики та астрономії, і важливо з методологічної точки зору. Тому метою цієї статті є демонстрація на конкретних прикладах доцільності більш широкого використання теореми віріала при підготовці згаданих фахівців. Спочатку доведемо її.

Покажемо, що у випадку руху планети навколо Сонця по колу, її повна і кінетична енергії зв'язані співвідношенням $W = -W_k$, а у випадку руху по еліпсу – співвідношенням $W = -\overline{W}_k$, де риска над літерою означає осереднення за часом [2].

Повна енергія планети масою m дорівнює

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{GM_{\bigstar}m}{r}, \tag{1}$$

де υ – орбітальна швидкість планети, r – відстань до Сонця, $M_{\bigstar}$ – маса Сонця.

У випадку рівномірного руху по колу планета зазнає доцентрове прискорення, яке дорівнює прискоренню вільного падіння на Сонце

$$\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{GM_{\bigstar}}{r^2}. \tag{2}$$

Тоді отримуємо

$$W = -\frac{GM_{\bigstar}m}{2r} = -W_k. \tag{3}$$

У випадку руху по еліпсу можна міркувати таким чином [2]. Нехай $\vec{p}$ – імпульс планети, а $\vec{r}$ – радіус-вектор планети відносно Сонця. Тоді

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{r}) = (\vec{F}\vec{r}) + (\vec{p}\vec{\upsilon}) = -\frac{GM_{\bigstar}m}{r} + m\upsilon^2 = W_p + 2W_k = W + W_k, \tag{5}$$

де W_p – потенціальна енергія планети. Для періодичного руху середнє за часом значення $\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{r})$, очевидно, дорівнює нулю, звідки і дістаємо необхідний результат $W + \overline{W}_k = 0$. Теорему доведено.

Із співвідношень $W = -W_k$ і $W = -\overline{W}_k$ випливає важливий висновок: оскільки кінетична енергія завжди додатна, то у разі руху замкненою траєкторією повна енергія тіла, що здійснює рух, завжди буде від'ємною.

Слід зазначити, що теорему віріала часто записують у такому вигляді (що також випливає з (5)):

$$2W_k + W_p = 0. \tag{6}$$

Поєднуючи вираз (6) із законом збереження механічної енергії $W = W_k + W_p$, матимемо надзвичайно важливий результат

$$W = \frac{1}{2} W_p. \tag{7}$$

Зазначимо також, що теорему віріала для ізольованої системи матеріальних точок з урахуванням моменту інерції J системи відносно центра мас довів А. Пуанкаре у 1913 р. [5]. В його інтерпретації:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 J}{dt^2} = 2W_k + W_p. \tag{8}$$

Проте для стаціонарних систем $(J = const)$ або лінійно нестаціонарних $(J = J_0 + At)$ вираз (8) перетворюється на (6).

Застосування теореми віріала в космонавтиці. *Теорема віріала*, наприклад, дає змогу досить елегантно – з енергетичної точки зору – розв'язати відомий парадокс, що існує в космонавтиці. Справа в тому, що опір повітря збільшує швидкість штучного супутника в верхніх шарах земної атмосфери. Як це може бути? Розглянемо для спрощення випадок колової орбіти.

Повна механічна енергія супутника W не зберігається внаслідок витрат, зумовлених опором повітря. Диференціюючи за часом повну енергію, отримуємо

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dW_k}{dt} \quad \text{та} \quad \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dW_p}{dt}. \tag{9}$$

Ці рівності означають, що швидкість витрат енергії на тертя об повітря $-\frac{dW}{dt}$ дорівнює швидкості приросту кінетичної енергії супутника $\frac{dW_k}{dt}$ і здійснюється це за рахунок зменшення його потенціальної енергії (половина її йде на збільшення кінетичної енергії, інша половина переходить у теплоту). Отже, опір повітря дійсно спричиняє збільшення швидкості супутника, при цьому зменшення потенціальної енергії означає перехід його на нижчу орбіту, що повністю відповідає третьому закону Кеплера.

Цю задачу можна конкретизувати, як це зроблено у збірнику задач "Сонячна система" [4]. Нехай штучний супутник Землі масою $m = 100$ кг і поперечним перерізом $S = 1 м^2$ рухається коловою орбітою на висоті $h = 150$ км, де густина атмосфери дорівнює $\rho \approx 10^{-9}$ кг/м^3. Оцінимо:

а) як змінюється висота супутника за один оберт навколо Землі;

б) як змінюється швидкість супутника за один оберт.

Нехай супутник рухається зі швидкістю υ. Тоді кількість ударів молекул газу об його обшивку за час dt дорівнює

$$N = nS\upsilon dt, \tag{10}$$

де n – концентрація газу. Під час зіткнення імпульс кожної молекули, якщо вважати удар непружним, змінюється на величину близько $m_0\upsilon$, де m_0 – маса молекули. Тоді сила опору повітря, яку зазнає супутник, за другим законом Ньютона дорівнює

$$F \approx \frac{d\left(Nm_0\upsilon\right)}{dt} = nm_0 S\upsilon^2 = \rho S\upsilon^2. \tag{11}$$

Підставляючи вираз для колової швидкості на висоті h, матимемо ($M_{\oplus}$ і $R_{\oplus}$ – маса і радіус Землі відповідно)

$$F = \frac{GM_{\oplus}\rho S}{\left(R_{\oplus} + h\right)}. \tag{12}$$

Зменшення повної енергії супутника дорівнює роботі, яка йде на подолання опору повітря, тобто за один оберт

$$A = -2\pi\left(R_{\oplus} + h\right)F = -2\pi GM_{\oplus}\rho S. \tag{15}$$

За *теоремою віріала* повна енергія дорівнює половині потенціальної енергії

$$W = \frac{W_p}{2} = -\frac{GM_{\oplus}m}{2\left(R_{\oplus} + h\right)}. \tag{16}$$

Із рівності

$$\Delta W = \frac{dW}{dh}\Delta h = A \tag{17}$$

отримуємо

$$\Delta h = -\frac{4\pi\rho S\left(R_{\oplus}+h\right)^2}{m} \approx -5,3 \text{ км}. \tag{18}$$

Зверніть увагу на те, що результат не залежить від маси Землі та гравітаційної сталої.

Знову ж таки за *теоремою віріала* маємо

$$W = -W_k = -\frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{19}$$

Отже, збільшення кінетичної енергії за один оберт дорівнює роботі, яка витрачається на подолання опору повітря. Тоді

$$m\upsilon\Delta\upsilon = F\upsilon T, \tag{20}$$

де T – період обертання супутника. Звідси

$$\Delta\upsilon = \frac{2\pi\rho S\sqrt{GM_{\oplus}\left(R_{\oplus}+h\right)}}{m} = 3,2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}. \tag{21}$$

Застосування теореми віріала для з'ясування природи планет-гігантів [4]. Вимірювання показують, що з надр Юпітера надходить потік теплоти у 1,9 рази більший, ніж потік енергії, що надходить від Сонця. Найбільш поширені гіпотези, що визначають джерела цієї величезної додаткової енергії, – це гравітаційна диференціація (за однією з гіпотез важчий Гелій повільно занурюється до центра планети), перехід Гідрогену у металічний стан з виділенням теплоти фазового переходу, а також гравітаційне стискання.

Оцінимо, як має зменшуватися радіус Юпітера внаслідок гравітаційного стискання, щоб забезпечити це додаткове нагрівання планети.

Нехай додаткове нагрівання Юпітера забезпечується зменшенням повної енергії W планети. Тоді тепловий потік із надр дорівнює

$$\Phi = -\frac{dW}{dt}. \tag{22}$$

За *теоремою віріала* (нехтуючи енергією осьового обертального руху і енергією магнітного поля) матимемо

$$W = \frac{W_g}{2} \approx -\frac{GM^2}{2R}, \tag{23}$$

де W_g – власна гравітаційна енергія планети, M і R – її маса і радіус. Вважаючи, що зменшення гравітаційної енергії відбувається лише за рахунок зменшення радіусу планети, підставляємо (23) у (22) і отримуємо

$$\Phi = -\frac{GM^2}{2R^2}\frac{dR}{dt}. \tag{24}$$

Із спостережень відомо, що

$$\Phi = 1,9\pi R^2\left(1-A\right)E, \tag{25}$$

де A – альбедо Юпітера ($A = 0,70$ [4]), E – освітленість планети Сонцем. Знаючи сонячну сталу $E_0 = 1,36\cdot10^3$ Вт/м^2 і відстань Юпітера від Сонця $r = 5,2028$ а.о. [4], неважко обчислити величину E, а саме $E = E_0/\left(5,2028\right)^2 = 50,24$ Вт/м^2.

Підставляючи (25) у (24), остаточно знаходимо

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2\Phi R^2}{GM^2} = -\frac{3,8\pi R^4\left(1-A\right)E}{GM^2} \approx -1\,\frac{\text{мм}}{\text{рік}}. \tag{26}$$

У 1973-74 рр. за допомогою космічних апаратів "Піонер-10" і "Піонер-11" було виявлено ще одне джерело енергії Юпітера – потоки метеорної речовини поблизу планети. Оцінимо, який потік метеорної речовини має падати на Юпітер, щоб забезпечити додаткове нагрівання видимої поверхні планети на 28 К (саме на стільки спостережувана температура більше очікуваної, тобто радіаційної [4]).

Без додаткових джерел енергії рівняння теплового балансу для планети має вигляд

$$4\pi R^2\sigma T_r^4 = \pi R^2\left(1-A\right)E, \tag{27}$$

де T_r – радіаційна температура видимої поверхні.

Із додатковим джерелом енергії –

$$4\pi R^2\sigma T^4 = \pi R^2\left(1-A\right)E + \Phi_м, \tag{28}$$

де $\Phi_м$ – потік теплоти, зумовлений випадінням на Юпітер метеорної речовини. З цих двох рівнянь отримуємо

$$\Phi_м = 4\pi R^2 \sigma\left(T^4 - T_г^4\right). \tag{29}$$

Цей потік теплоти $\Phi_м$ забезпечується зменшенням повної енергії Юпітера W, яка за *теоремою віріала* дорівнює половині гравітаційної енергії планети. Отже, об'єднуючи (22), (23), (29) і враховуючи, що зменшення гравітаційної енергії у цьому разі відбувається за рахунок збільшення маси, остаточно знаходимо

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi R^3 \sigma\left(T^4 - T_г^4\right)}{GM} = 2,5 \cdot 10^8 \ \frac{кг}{с}. \tag{30}$$

Застосування теореми віріала для з'ясування джерел енергії зір [3]. Р.Ю. Майєр, один із творців закону збереження енергії в сучасній формі, у 1848 р. припустив, що випромінювання Сонця підтримується випадінням на нього метеорної речовини із Сонячної системи. Знайдемо, як при цьому має збільшуватись маса Сонця щорічно.

Світність Сонця пов'язана із зменшенням повної енергії в одиницю часу очевидним співвідношенням

$$L = -\frac{dW}{dt}. \tag{31}$$

Згідно з *теоремою віріала* повна енергія становить $W = W_g/2$, де гравітаційна енергія Сонця з точністю до числового множника дорівнює

$$W_g = -\frac{GM^2}{R}. \tag{32}$$

Тоді отримуємо

$$L = \frac{GM}{R}\frac{dM}{dt}. \tag{33}$$

Звідси

$$\frac{dM}{dt} = \frac{LR}{GM} = 2 \cdot 10^{15} \ \frac{кг}{с} \approx 0,01 \frac{M_\oplus}{рік}. \tag{34}$$

Сьогодні ми знаємо, що такої кількості метеорної речовини немає в Сонячній системі. Такий механізм підтримування світності міг бути ефективним тільки на ранніх етапах формування Сонця як зорі.

Застосування теореми віріала для з'ясування природи зір [3]. Використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho \tag{35}$$

та рівняння, що визначає розподіл речовини зорі за радіусом

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr, \tag{36}$$

отримаємо для зорі співвідношення, відоме як *теорема віріала*.

Помножимо ліву і праву частини рівняння (35) на $4\pi r^3$ та перепишемо його так

$$4\pi r^3 dP = -4\pi GM \rho r dr. \tag{37}$$

Зробимо заміну $dr \to dM$ за допомогою рівняння (36). Тоді матимемо

$$4\pi r^3 dP = -\frac{GM}{r} dM. \tag{38}$$

Інтегрування по всій зорі дає

$$3\int_{P_c}^{P_s} V dP = -\int_0^{M_s} \frac{GM}{r} dM, \tag{39}$$

де межі інтегрування P_s та P_c означають тиск на поверхні та у центрі зорі, а відповідно M_s – повну масу зорі.

Права частина цієї рівності являє собою гравітаційну потенціальну енергію зорі [1, 2]. Ця величина від'ємна та чисельно дорівнює роботі, яку потрібно виконати, щоб віддалити усі шари зорі на нескінченність.

Після інтегрування лівої частини по частинам, рівність набуває вигляду

$$3[PV]_c^s - 3\int_0^V P dV = W_g. \tag{40}$$

Перший член лівої частини на нижній межі інтегрування перетворюється на нуль, оскільки $V_c = 0$. Тиск на поверхні зорі не дорівнює нулю, але він набагато порядків менше, ніж тиск у центрі. Тому цілком можна вважати, що цей член перетворюється в нуль і на верхній межі інтегрування.

Отже, дістаємо

$$3\int PdV + W_g = 0. \qquad (41)$$

Це співвідношення і становить зміст *теореми віріала* для зір.

Зауваження 1. *Теорему віріала* для зір записують іноді в іншому вигляді. Використаємо відоме співвідношення для теплової енергії

$$W_T = c_V \int_0^M TdM = \frac{k}{(\gamma-1)\mu m_H}\int_0^M TdM, \qquad (42)$$

де c_V – питома теплоємність за сталого об'єму, як зазвичай, $\gamma = c_P/c_V$, k – стала Больцмана, μ – відносна молекулярна маса зоряної речовини, m_H – маса атома Гідрогену, M – маса зорі, T – температура зоряної речовини. Використовуючи рівняння стану ідеального газу

$$P = \frac{\rho}{\mu m_H}kT, \qquad (43)$$

отримуємо

$$W_T = \frac{1}{\gamma-1}\int_0^M \frac{P}{\rho}dM = \frac{1}{\gamma-1}\int_0^V PdV. \qquad (44)$$

Порівнюючи (44) з (41), дістаємо

$$W_T = -\frac{1}{3(\gamma-1)}W_g. \qquad (45)$$

Це інший запис *теореми віріала*.

Для одноатомного газу (а повністю іонізований газ всередині зорі можна вважати одноатомним) $\gamma = 5/3$, і тоді матимемо

$$W_T = -\frac{W_g}{2}, \qquad W = W_T + W_g = \frac{W_g}{2} = -W_T. \qquad (46)$$

Зауваження 2. Такий самий результат можна отримати інакше. Відомий зв'язок тиску із середньою кінетичною енергією окремої частинки:

$$P = \frac{2}{3}n\overline{W}_{0k}, \qquad (47)$$

де n – концентрація частинок.

Отже,

$$3\int PdV = 2\overline{W}_{0k}\int ndV = 2W_k, \qquad (48)$$

де W_k – повна кінетична енергія теплового руху частинок, які складають зорю.

Тоді остаточно отримуємо

$$2W_k + W_g = 0. \qquad (49)$$

Зауваження 3. Строго кажучи, отримані результати справедливі в разі, коли обертанням зорі і наявністю в ній магнітного поля можна знехтувати. В іншому разі *теорема віріала* набуває такого вигляду [5]:

$$2(W_T + W_{rot}) + W_g + W_B = 0, \qquad (50)$$

де W_{rot} – енергія обертання, W_B – енергія магнітного поля зорі. Проте для переважної більшості зір величини W_{rot} і W_B набагато менше величин W_g і W_T, тому їх можна не враховувати.

Наостанок покажемо, як *теорема віріала* допомагає дізнатися, що буде відбуватися з зорею, якщо якимось чином відняти від неї певну кількість теплоти. Взагалі, не уточнюючи джерел енергії зір, ця теорема допомагає з'ясувати за рахунок чого забезпечується теплова стійкість зір.

Згідно з (46) для зміни повної енергії матимемо

$$\Delta W = -\Delta W_T. \qquad (51)$$

Якщо забирати енергію у зорі, наприклад, через випромінювання $(\Delta W < 0)$, то вона має нагріватись $(\Delta W_T > 0)$ і навпаки, якщо якимось чином додавати енергію зорі $(\Delta W > 0)$, то вона буде охолоджуватись $(\Delta W_T < 0)$.

Оскільки

$$W = \frac{W_g}{2}, \quad \text{а} \quad W_g \approx -\frac{GM^2}{R}, \tag{52}$$

то зоря буде підтримувати себе у гідростатичній рівновазі, змінюючи радіус.

Ми стикаємось із парадоксальним фактом: віднімаючи у зорі енергію, її неможливо охолодити. Будь-яка спроба відібрати у зорі енергію спонукає її стискатися та вивільняти гравітаційну енергію у такій кількості, що не тільки компенсує витрати енергії з поверхні, але ще й нагріває зоряну речовину. Така "поведінка" зорі фактично означає, що вона має *від'ємну теплоємність*.

Цей висновок важко переоцінити.

Застосування теореми віріала для оцінки мас скупчень зір і галактик. Повна маса скупчень, як і маса $M(R)$ всередині певного радіусу R несе важливу інформацію про особливості формування скупчень і про співвідношення між темною та баріонною (видимою) матерією. Питання про існування прихованої маси виникло вперше саме в результаті виявлення суперечності між оцінками мас, що були отримані, з одного боку, за допомогою інтегральної світності галактик (зір) у скупченнях, з іншого – внаслідок вимірювання швидкостей їх відносного руху. Ця суперечність отримала назву *віріального парадоксу* [1].

Якщо відомо середньоквадратичне значення променевих швидкостей галактик (для зоряних скупчень іноді вдається визначити просторові швидкості зір) відносно середньої швидкості скупчення $\Delta\upsilon$, то повну масу скупчення можна знайти за допомогою *теореми віріала*:

$$M \sim \alpha \frac{(\Delta\upsilon)^2 R}{G}, \tag{53}$$

де α – модельний коефіцієнт порядка одиниці, що залежить від характеру змін густини з радіальною координатою R.

Цей метод оцінки маси дав змогу виявити, що маса багатих скупчень галактик у кілька разів (іноді – в десятки разів) перевищує сумарну масу видимої речовини галактик, котрі входять до них [1]. Звідси й випливає фундаментальний висновок про значну перевагу темної – небаріонної матерії у спостережуваному Всесвіті.

Отже, *теорема віріала* не тільки значно полегшує розв'язання багатьох задач, але й дає змогу отримувати відповіді на фундаментальні питання. На нашу думку, її використання в фізичній та астрономічній освіті є особливо актуальним в контексті фундаменталізації цієї освіти.

Використані джерела

1. Засов А.В. Общая астрофизика / А.В. Засов, К.А. Постнов. – Фрязино, 2006. – 496 с.
2. Киттель Ч. Берклеевский курс физики: В 6 т. Т. 1. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман; пер. с англ. под ред. А.И. Шальникова и А.С. Ахматова. – [3-е изд., испр.] – М.: Наука, 1983. – 448 с.
3. Кузьменков С.Г. Зорі: Астрофізичні задачі з розв'язаннями: навч. посіб. / С.Г. Кузьменков. – К.: Освіта України, 2010. – 206 с.
4. Кузьменков С.Г. Сонячна система: Зб. задач: Навч. посіб. / С.Г. Кузьменков, І.В. Сокол. – К.: Вища шк., 2007. – 168 с.
5. Ленг К. Астрофизические формулы. Руководство для физиков и астрофизиков. Часть 1 / К. Ленг; пер. с англ. под ред. Л.А. Покровского и В.Л. Хохловой. – М.: Мир, 1978 – 448 с.

Kuzmenkov S.G.

ABOUT ONE OF THE LITTLE KNOWN THEOREM

The author emphasizes an expediency of wider application of virial theorem while studying physics and astronomy in universities. The examples of solution of some astrophysical problems using this theorem are considered in the article.

Key words: *virial theorem, physical and astronomical education, astrophysical problems.*

Стаття рекомендована кафедрою фізики Херсонського державного університету.

Надійшла до редакції 26. 03. 2012.