УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVII, вып. 1

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Киев — 1975

УДК 517.544

О некоторых свойствах адамаровских композиций регулярных в круге функций

В. И. Горбайчук, В. И. Кузьмич

1. Обозначим через H_p, $p > 0$, класс функций $f(z)$, регулярных в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и таких, что для каждой из них интеграл $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta$ ограничен при $0 < r < 1$. Известно [1, стр. 389], что каждая функция $f(z) \in H_p$, $p > 0$, имеет почти всюду на $\gamma = \{z : |z| = 1\}$ определенные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию $f(e^{i\theta})$. Из теоремы Фату [2, стр. 66] следует, что $f(e^{i\theta}) \in L_p$ в $(0, 2\pi)$, т. е. $\left\{\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$. Через h_p, $p > 0$, в дальнейшем будем обозначать класс функций $u(r, \theta)$, гармонических в круге D и таких, что для каждой из них интеграл $\int_0^{2\pi} |u(r, \theta)|^p d\theta$ ограничен при $0 < r < 1$.

Пусть в круге D регулярные функции $f(z)$ и $g(z)$ определены рядами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \tag{1}$$

Образуем функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n, \tag{2}$$

которую называют адамаровской композицией функций $f(z)$ и $g(z)$ (см. [3], а также [4, стр. 37, 38]).

В книге Л. Бибербаха [4] изложены глубокие результаты по изучению свойств функции $F(z)$, группирующиеся вокруг теоремы Адамара об умножении особенностей (там же приведена обширная библиография по этим вопросам).

Изучением структурных свойств функции $F(z)$ в зависимости от структурных свойств функций $f(z)$ и $g(z)$ занимались Дайович [5, 6], Н. А. Давыдов [7], Чю Фа-ти [8] (см. [9]), Милашевич [10]. Характерными для этого круга вопросов являются такие результаты.

Теорема. 1. *Если $f(z) \in H_p$ и $\operatorname{Re} g(z) \in h_q$ в D, где $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $F(z)$ ограничена в D и на γ имеет почти всюду угловые граничные значения.*

2. *Если $f(z) \in H_p$ и $\operatorname{Re} g(z) \in h_1$, то $F(z) \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Первая часть теоремы принадлежит Дайовичу [6] и передоказана в работе [8], а вторую часть доказал Чю Фа-ти [8] и как следствие более общих соображений получил Милашевич [10].

В работах [6] и [10] для получения сформулированных результатов использован интеграл Пуассона. Как отмечено в работе [11], эти результаты могут быть получены с помощью контурного интеграла Парсеваля

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t)\, g\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t}, \tag{3}$$

где C — замкнутый спрямляемый контур, лежащий в области регулярности подынтегральной функции.

Мы проверили, что этим методом первую часть теоремы можно доказать (см. ниже доказательство необходимости условий теоремы 4), а вторую часть удается доказать лишь для $p > 1$, так как приходится пользоваться одной теоремой М. Рисса [1, стр. 380], справедливой лишь при $p > 1$.

Чю Фа-ти [8] использует следующее интегральное представление:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) f(r, e^{i(\theta-\varphi)}) \, d\varphi + c_0, \tag{4}$$

где $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = r^2$, $0 < \rho < 1$, $g(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, c_0 — некоторая постоянная.

Для изучения других (граничных) свойств функции $F(z)$ Чю Фа-ти [8] использует в предположениях теоремы (часть 1 или 2) равенство

$$\lim_{\rho \to 1-0} F(\rho, e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi) f(1, e^{i(\theta-\varphi)}) d\varphi + c_0. \tag{5}$$

Но, как справедливо замечает Г. Ц. Тумаркин [12], интеграл в правой части соотношения (5) при этих условиях может оказаться расходящимся.

В дальнейшем будем использовать интегральное представление (3). Для этого, полагая $C = \{t : |t| = \rho, \ |z| < \rho < 1\}$, получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\tau}) \, g\left(\frac{z}{\rho e^{i\tau}}\right) d\tau. \tag{6}$$

Для изучения граничных свойств функции $F(z)$ предположим, что интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(1, e^{i\tau}) \, g\left(\frac{z}{\rho e^{i\tau}}\right) d\tau$ и интеграл в правой части (5) сходятся. Иногда сходимость указанных интегралов является следствием условий, наложенных на подынтегральные функции, и неравенства Гельдера (это будет, например, в случае, когда $u(1, \varphi) \in L_p$, $p > 1$, $f(1, e^{i(\theta-\varphi)}) \in L_q$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Но в тех случаях, когда сходимость не следует из таких соображений, предположение о сходимости упомянутых интегралов расширяет возможности дальнейших рассмотрений, так как, например, функция $u(1, \varphi) f(1, e^{i(\theta-\varphi)})$ может быть суммируемой при условии, что одна из функций $u(1, \varphi)$ или $f(1, e^{i(\theta-\varphi)})$ будет несуммируема на том же промежутке.

В таком случае по теореме Ф. Рисса [1, стр. 390] возможен предельный переход под знаком интеграла и справедливы равенства:

$$F(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\tau}) \, g \, e^{i(\theta-\tau)} \, d\tau, \tag{7}$$

$$F(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) f(e^{i(\theta-\varphi)}) \, d\varphi + c_0 \tag{8}$$

(в соотношении (8) для сокращения записи положено $u(1, \varphi) = u(\varphi)$, $f(1, e^{i(\theta-\varphi)}) = f(e^{i(\theta-\varphi)})$).

При этих исходных предположениях и обозначениях в следующем пункте изучаются некоторые дифференциально-разностные свойства адамаровской композиции.

2. Пусть в круге D функция $\varphi(z) \in H_p$, $p > 1$, а $\varphi(\theta)$ является почти всюду на γ угловым граничным значением функции $\varphi(z)$. Тогда, как известно, $\varphi(\theta) \in L_{p[0,2\pi]}$. Интегральный модуль непрерывности k-го порядка $\omega_k^{(p)}(\varphi; t)$ функции $\varphi(\theta)$ определяется соотношением

$$\omega_k^{(p)}(\varphi; t) = \sup_{0<h\leqslant t} \left\{ \int_0^{2\pi} | \Delta_h^k \varphi(\theta) |^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где $\Delta_h^k \varphi(\theta) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \varphi(\theta + kh)$ — разность k-го порядка функции $\varphi(\theta)$, заданной на γ.

Теорема 1. *Пусть $z = re^{i\theta}$, $\operatorname{Re} g(z) \in h_1$, $f(z) \in H_p$, $p \geqslant 1$, интеграл в правой части* (8) *сходится и функция $f(e^{i\theta})$ имеет интегральный модуль непрерывности $\omega_k^{(p)}(f; t)$, то $F(e^{i\theta})$ имеет на γ интегральный модуль непрерывности $\omega_k^{(p)}(F; t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\omega_k^{(p)}(F; t) \leqslant C_1 \omega_k^{(p)}(f; t), \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Доказательство. По теореме п. 1, часть 2, имеем $F(z) \in H_p$, $p \geqslant 1$, а потому, пользуясь представлением (8), определением интегрального модуля гладкости при $|h| \leqslant t$ и обобщенным неравенством Минковского [13, стр. 601], получаем

$$\left\{ \int_0^{2\pi} | \Delta_h^k F(e^{i\theta}) |^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) \Delta_h^k f(e^{i(\theta-\tau)}) d\tau \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | u(\tau) | \left\{ \int_0^{2\pi} | \Delta_h^k f(e^{i(\theta-\tau)}) |^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \omega_k^{(p)}(f; t) \int_0^{2\pi} | u(\tau) | d\tau = C_1 \omega_k^{(p)}(f; t).$$

Теорема 1 доказана.

При $k = 1$ из теоремы 1 получаем одно предположение Чю Фа-ти [8, теорема 3].

Теорема 2. *Пусть в круге D $\operatorname{Re} g(z) \in h_1$ и $f(z) \in H_p$, $p > 1$, интеграл в правой части* (8) *сходится, а интегральный модуль непрерывности $\omega_1^{(p)}(f; t)$ граничной функции $f(e^{i\theta})$ удовлетворяет неравенству $\omega_1^{(p)}(f; t) \leqslant \omega(t)$, где $\omega(t)$ — функция типа модуля непрерывности. Тогда при всех $r \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$\left\{ \int_0^{2\pi} | F'(\rho e^{i\theta}) |^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2 \frac{\omega(1-r)}{1-r}, \quad \rho = r^2 < 1, \quad C_2 = \text{const} > 0. \qquad (9)$$

Доказательство. Положим $F(\rho e^{i\theta}) = U(\rho, \theta) + iV(\rho, \theta)$.

Так как $F(\rho e^{i\theta})$ — регулярная в D функция и, согласно теореме п. 1, часть 2, $F(z) \in H_p$, $p > 1$, то функции $U(\rho, \theta)$ и $V(\rho, \theta)$ будут гармоническими в D с ограниченными при $0 \leqslant \rho < 1$ интегралами

$$\int\limits_0^{2\pi} |U(\rho, \theta)|^p d\theta, \qquad \int\limits_0^{2\pi} |V(\rho, \theta)|^p d\theta,$$

а потому эти функции в каждой точке $z = \rho e^{i\theta} \in D$ представимы в виде интеграла Пуассона:

$$U(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} U(\varphi) P(\rho, \theta - \varphi) d\varphi,$$

$$V(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} V(\varphi) P(\rho, \theta - \varphi) d\varphi,$$

где $U(\theta) + iV(\theta) = F(\theta) = \lim\limits_{r \to 1-0} F(\rho e^{i\theta})$, $P(\rho, \theta - \varphi)$ — ядро Пуассона. Справедливо равенство

$$F'(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \left[\frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \theta} - i \frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right]. \tag{10}$$

По лемме работы [14], перенося рассуждения на случай интегральной метрики, имеем для $0 \leqslant \rho < 1$

$$\left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\partial U(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C' \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}, \qquad \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C'' \frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}.$$

Тогда из (10), применяя обобщенное неравенство Минковского и используя свойства функции $\omega(t)$, получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Оценку, подобную оценке (9), получил Чю Фа-ти [8, теорема 4], но в его оценке нормы производной $F'(\rho e^{i\theta})$ в аргументе функции $\omega(t)$ фигурирует дополнительный логарифмический множитель от $(1-r)$, ухудшающий оценку.

Следуя Р. Н. Ковальчуку [15], будем говорить, что действительная функция $\omega(t)$, заданная на некотором отрезке $[0, l]$, принадлежит классу Ω_2, если для $\omega(t)$ выполнены следующие условия:

1) $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t \in (0, l]$;
2) $\omega(t)$ не убывает вместе с t;
3) $\omega(t)$ непрерывна на $[0, l]$;
4) для произвольного $\lambda > 0$ $\omega(\lambda t) \leqslant A(1+\lambda)^2 \omega(t)$, где A — некоторая положительная постоянная, не зависящая от t и λ.

Т е о р е м а 3. *Пусть в круге D $\mathrm{Re}\, g(z) \in h_1$, $f(z) \in H_p$, $p \geqslant 1$, а интегральный модуль непрерывности $\omega_2^{(p)}(f; t)$ граничной функции $f(e^{i\theta})$ удовлетворяет неравенству $\omega_2^{(p)}(f; t) \leqslant \omega(t)$, где $\omega(t) \in \Omega_2$. Тогда при всех $r \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$\left\{ \int\limits_0^{2\pi} |F''(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_3 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \tag{11}$$

где $C_3 > 0$ — постоянная, не зависящая от r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по теореме п. 1, часть 2, $F(\rho e^{i\theta}) \in H_p$, $p \geqslant 1$, то неравенство (11) является непосредственным следствием теоремы 1 работы [15].

3. Некоторые исследователи [16, 11] при изучении свойств адамаровской композиции (2) ставили задачу, в некотором смысле обратную той, которая решается теоремой п. 1, а именно: по свойствам функции (2) и свойствам одной из функций (1) описать свойства другой из них. Такое обращение теоремы Дайович получено, например, в [11], но при довольно жестких ограничениях на тейлоровские коэффициенты одной из функций (1). Это ограничение, названное в работе [11] условием G, включает положительность всех коэффициентов и специальное условие на относительный рост этих коэффициентов. В работе [11] основной результат доказан только для случая $1 < p \leqslant 2$. Оказывается, что последнее ограничение $p \leqslant 2$ и условие G не вызваны существом вопроса и могут быть сняты.

Введем обозначения

$$\|f(z)\|_p = \left\{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad z = re^{i\theta}, \quad p > 0;$$

$$\|f(z, \varphi)\|_{p,\varphi} = \left\{\int_0^{2\pi} |f(z, \varphi)|^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad p > 0;$$

$$\|f(z)\|_\infty = \sup_{z\in D} |f(z)|; \qquad \|f(z, \varphi)\|_{\infty,\varphi} = \sup_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \\ z\in D}} |f(z, \varphi)|.$$

Теорема 4. *Пусть функция $g(z)$ регулярна в круге D, а $f(z) \in H_p$, $p > 1$, в этом круге. Тогда для того чтобы $g(z) \in H_q$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, в круге D, необходимо и достаточно, чтобы $F(z) \in H_\infty$ в этом круге для всех $f(z) \in H_p$.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы доказана в [6 и 8] с помощью представления (4) функции $F(z)$. Мы используем представление (6) для этой функции. Тогда, применяя неравенство Гельдера и введенные выше обозначения, получим

$$\|F(z)\|_\infty = \sup_{z\in D} |F(z)| = \sup_{z\in D} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\tau})\, g\left(\frac{z}{\rho e^{i\tau}}\right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \|f(\rho e^{i\tau})\|_p \sup_{z\in D} \left\| g\left(\frac{z}{\rho e^{i\tau}}\right)\right\|_{q,\tau} < \infty.$$

Для доказательства достаточности потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $F(z, \varphi)$ и $G(z, \varphi)$ — регулярные по z и непрерывные по φ в D функции (φ — действительный параметр, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$). Тогда, если $\|F(z, \varphi)\|_{q,\varphi} > 0$, то справедливо равенство*

$$\|F(z, \varphi)\|_{q,\varphi} = \sup_{G(z,\varphi)} \left| \int_0^{2\pi} F(z, \varphi)\, G(z, \varphi)\, d\varphi \right|, \tag{12}$$

где супремум берется по всевозможным функциям $G(z, \varphi)$ таким, что $\|G(z, \varphi)\|_{p,\varphi} \leqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Утверждение остается справедливым и при $\|F(z, \varphi)\|_{q,\varphi} = +\infty$.

Доказательство. Обозначим

$$I_G = \int_0^{2\pi} F(z, \varphi)\, G(z, \varphi)\, d\varphi.$$

Тогда по неравенству Гельдера

$$|I_G| \leqslant \| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi} \| G(z, \varphi) \|_{p,\varphi} \leqslant \| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi}.$$

Это соотношение верно и в случае, когда $\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi} = +\infty$. Если $\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi} < +\infty$, то положим*

$$G_0(z, \varphi) = \frac{|F(z, \varphi)|^{q-1} e^{-i \arg F(z,\varphi)}}{(\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi})^{q-1}}. \quad (13)$$

Для этой функции имеем

$$\| G_0(z, \varphi) \|_{p,\varphi} = \frac{1}{(\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi})^{q-1}} \left\{ \int_0^{2\pi} |F(z, \varphi)|^q d\varphi \right\}^{\frac{1}{q}(q-1)} = 1.$$

Кроме того,

$$I_{G_0} = \int_0^{2\pi} F(z, \varphi) \frac{|F(z, \varphi)|^{q-1} e^{-i \arg F(z,\varphi)}}{(\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi})^{q-1}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi})^{q-1}} \int_0^{2\pi} |F(z, \varphi)|^q d\varphi = \| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi}.$$

Таким образом, указана функция $G_0(z, \varphi)$, для которой $\| G_0(z, \varphi) \|_{p,\varphi} = 1$ и для которой достигается супремум в соотношении (12).

Если $\| F(z, \varphi) \|_{q,\varphi} = +\infty$, то нужно показать, что существует такая функция $G(z, \varphi)$, для которой $\| G(z, \varphi) \|_{p,\varphi} \leqslant 1$ и интеграл I_G существует и как угодно велик. Обозначим

$$F^n(z, \varphi) = \begin{cases} F(z, \varphi), & \text{если } |F(z, \varphi)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |F(z, \varphi)| > n. \end{cases}$$

Аналогично построению функции (13) полагаем

$$G^n(z, \varphi) = \frac{|F^n(z, \varphi)|^{q-1} e^{-i \arg F^n(z,\varphi)}}{(\| F^n(z, \varphi) \|_{q,\varphi})^{q-1}}.$$

Если n достаточно велико, то величина $\| F^n(z, \varphi) \|_{q,\varphi} > 0$ конечна, а потому $\| G^n(z, \varphi) \|_{p,\varphi} = 1$ и имеет место равенство

$$I_G = \int_0^{2\pi} F^n(z, \varphi) G^n(z, \varphi) d\varphi = \| F^n(z, \varphi) \|_{q,\varphi}.$$

Это означает, что I_G неограниченно возрастает вместе с n. Лемма доказана.

Отметим, что лемма является частичным распространением на однопараметрическое семейство регулярных в круге функций (параметр φ изменяется в пределах сегмента $[0, 2\pi]$) одного известного предложения (см. [17, стр. 39]).

---

* Если в некоторой точке (z, φ) будет $F(z, \varphi) = 0$, то полагаем $\arg F(z, \varphi) = 0$. Аналогичное замечание относится и к построению в дальнейшем функций $G^n(z, \varphi)$ и $t_0(z, \varphi)$.

Докажем достаточность условий теоремы 4. Для этого, полагая в (6) $\tau = \varphi + \arg z$, $z \in D$, получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\varphi+\arg z)})\, g\left(\frac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right) d\varphi,$$

и рассмотрим для применения леммы два случая:

1) $\| f(z,\varphi)\|_{p,\varphi} \leqslant 1$,

2) $\| f(z,\varphi)\|_{p,\varphi} > 1$.

В случае 2) вместо функции $f(z,\varphi)$ можно рассматривать функцию $f_1(z,\varphi) = \dfrac{f(z,\varphi)}{\| f(z,\varphi)\|_{p,\varphi}}$, не теряя при этом общности.

Для каждого фиксированного $z \in D$ имеем $\left\| g\left(\dfrac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right)\right\|_{q,\varphi} < \infty$, что следует из регулярности функции $g(z)$ внутри D. Условия леммы выполнены, следовательно, из (12) имеем

$$\left\| g\left(\frac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right)\right\|_{q,\varphi} = \sup_{f(r,\varphi)}\left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\varphi+\arg z)})\, g\left(\frac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right) d\varphi\right|,$$

где супремум берется по всем $f(z,\varphi)$, для которых выполнено условие 1). Этот супремум достигается, согласно (13), для функции

$$f_0(z,\varphi) = \frac{\left| g\left(\dfrac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right)\right|^{q-1} e^{-i\arg g\left(\frac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right)}}{\left(\left\| g\left(\dfrac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right)\right\|_{q,\varphi}\right)^{q-1}}.$$

Таким образом,

$$\left\| g\left(\frac{z}{\rho e^{(\varphi+\arg z)}}\right)\right\|_{q,\varphi} \leqslant \sup_{z\in D}\left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(z,\varphi)\, g\left(\frac{z}{\rho e^{i(\varphi+\arg z)}}\right) d\varphi\right| = \| F(z,\varphi)\|_{\infty,\varphi}.$$

Но так как по условию теоремы величина $\| F(z,\varphi)\|_{\infty,\varphi}$ для каждой функции $f(z) \in H_p$ равномерно ограничена внутри D константой, не зависящей от ρ и z, то отсюда следует, что $g(z) \in H_q$, $z \in D$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в круге D, а $f(z) \in H_\infty$ в этом круге. Тогда для того, чтобы $g(z) \in H_1$ в D, необходимо и достаточно, чтобы $F(z) \in H_\infty$ в этом круге для всех $f(z) \in H_\infty$.*

Необходимость условий этой теоремы доказана в [7]. Доказательство достаточности можно провести методом, аналогичным методу доказательства достаточности теоремы 4.

В заключение авторы благодарят Р. Н. Ковальчука за постановку задач и постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
2. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
3. J. Hadamard, Theoreme sur les series entieres, Acta math., vol. 22, 1899, p. p. 55—63.

4. Л. Бибербах, Аналитическое продолжение, «Наука», М., 1967.
5. V. Daïovitch, Sur l'existence des valuers limites de la rèsultante des fonctions, appartenant a la classe H_δ, $0 < \delta < 1$, et encore de certaines auters classes de fonctions analytiques, Compt. Rend. Acad. Sci. vol. 241, N 21, 1955, p. p. 1441—1444.
6. V. Daïovitch, Sur l'existence des valuers limites de la rèsultante des fonctions appartenant á la classe H_δ, $\delta > 1$. Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србиje, vol. 8, N 1—2, 1956, p. p. 23—28.
7. Н. А. Давыдов, Об одной ошибочной теореме Дайович, УМН, т. 12, вып. 3, 1957.
8. Чю Фа-ти, О некоторых свойствах функций, аналитических в круге, Acta Mathematica Sinica, vol. 9, N 4, 1959, с. 382—388 (китайск., резюме русс.).
9. Qiu Hua-Ji, Some properties of functions analytie in a disc, Chinese Mathematics (Amerikan Mathematical Society), vol. 9, N 6, 1967.
10. J. P. Milaszewicz, Remarcs on some properties of holomorphic functions in a disc, Boll. Unione mat. ital., vol. 2, N 3, 1969, p. p. 409—415.
11. Russel A. Whiteman, A converse form of Daïovich's Theorem, Duke Mathem. J., vol. 31, N 2, 1964, p. p. 321—324.
12. Г. Ц. Тумаркин, РЖ Мат., 1960, 11518.
13. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
14. Ю. А. Брудный и И. Е. Гопенгауз, Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда, Матем. сб., 52 (94), № 3, 1960.
15. Р. Н. Ковальчук, О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса H_p ($p \geqslant 1$), Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 9, Изд. ХГУ, 1969.
16. R. C. Buck, Converse form of the Hadamard product theorem, Duke Mathem. J., vol. 26, 1959, p. p. 133—136.
17. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, «Мир», М., 1965.

Поступила 30.VI 1973 г.
Луцкий педагогический институт

УДК 512

Характеризация нильпотентных групп на языке характеров

В. С. Дроботенко

Пусть G — конечная группа, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — неприводимые представления группы G над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, $\chi_1, \ldots, \chi_s$ их характеры, $g_1, \ldots, g_s$ представители классов сопряженных элементов группы G. Л. Соломон [1] показала, что

$$|A| \leqslant \sum_{i,j=1}^{s} \chi_i(g_j) \leqslant |G|,$$

где A — максимальный абелев нормальный делитель группы G, причем равенство слева достигается тогда и только тогда, когда группа G абелева, а равенство справа тогда и только тогда, когда G — нильпотентная группа класса 2. Этот результат можно трактовать как характеризацию нильпотентных групп класса $k \leqslant 2$ на языке характеров.

В данной работе находится условие, характеризующее нильпотентность и класс нильпотентности конечной группы на языке характеров.

Пусть Γ — комплексное представление группы G, $\Gamma = n_1\Gamma_1 + \ldots + n_s\Gamma_s$ — разложение представления Γ в сумму неразложимых компонент, $\chi = n_1\chi_1 + \ldots + n_s\chi_s$ — соответствующее разложение характера представления Γ. Сверткой характера χ назовем характер $\chi^* = n_1\chi_1\bar{\chi}_1 + \ldots + n_s\chi_s\bar{\chi}_s$, где черта обозначает операцию комплексного сопряжения. Условимся также ядром характера χ называть ядро представления Γ, а точным характером называть характер точного представления. Наконец через 1_G обозначим главный характер группы G.