МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Киев КГПИ 1979

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Киев КГПИ 1979

В сборник включены работы, рассматривающие вопросы асимптотических решений систем дифференциальных уравнений, а также методов типа Рунге-Кутта, Цурмюля, Чезаро, Вороного и др.

Сборник рассчитан на студентов, аспирантов и преподавателей физико-математических факультетов.

УДК 5I7-9I/94

АЛИШЕВ А.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

При исследовании ряда актуальных задач физики и техники приходится сталкиваться с одним из важных вопросов теории колебаний - это вопрос исследования нелинейных дифференциальных уравнений с "медленно меняющимися коэффициентами [I].

В данной работе исследуется нелинейная система, когда нелинейность степенная,методом из [2] при наличии нулевого корня у характеристического уравнения.

Отметим, что данная работа своим появлением во многом обязана исследованиям [3].

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = A_0(\tau) X(\tau,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i A_i(\tau) X^i(\tau,\varepsilon) + F(\tau,\varepsilon), \qquad /I/$$

где

$X(\tau,\varepsilon)$, $A_i(\tau)$ $(i=\overline{1,k})$, $F(\tau,\varepsilon)$ $(n \times n)$ - матрицы $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ малый параметр, $\tau = \varepsilon t$ - "медленное время", $\tau \in [0; L]$, $L > 0$ фиксирование числа, k - натуральное число.

Предполагаем, что $F(\tau,\varepsilon)$ представляется асимптотическим рядом

$$F(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_s(\tau), \qquad /2/$$

который может быть и конечным.

Рассмотрим вопрос построения решений для системы /I/ в том случае, когда характеристическое уравнение

$$\det \| A_0(\tau) - \lambda E \| = 0 \qquad /3/$$

УДК 5I7.52

КУЗЬМИЧ В.И.

О ВКЛЮЧЕНИИ И РАВНОСИЛЬНОСТИ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО АБСОЛЮТНОГО СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

В работах [I-3] установлен ряд теорем, дающих условия включения и равносильности консервативных методов суммирования рядов. В настоящей работе часть этих результатов переносится на абсолютно консервативные методы. С основными понятиями и определениями можно ознакомиться по [4]. На протяжении всей работы используются матричные преобразования ряда в ряд.

Теорема I. Для того, чтобы $|C_p| \subset |A|$, где C_p - матрица Чезаро натурального порядка p, $A = (a_{nk})$ - нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_k k^{p+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty, \qquad /I/$$

где
$$\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{a_{n,k+i}}{k+i}.$$

Доказательство: Поскольку матрица C_p нормальна, то для включения $|C_p| \subset |A|$, по известной теореме [4, теорема I2.I], необходимо и достаточно, чтобы матрица $X = A C_p^{-1}$ была абсолютно консервативной. Если положить $k/n = 1$ при $k = n = 0$, то элементы матрицы C_p^{-1} определяются следующим образом:

$$\bar{c}_{nk} = \frac{k}{n} E_k^p E_{n-k}^{-p-1},$$

где $E_k^p = \frac{(p+1)\cdots(p+k)}{k!}$ /см. [4, стр.86] /. Поэтому

$$x_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k+i} \bar{c}_{k+i,k} = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k+i} \frac{k}{k+i} E_k^p E_i^{-p-1} =$$

$$= k E_k^p \sum_{i=0}^{n-k} E_i^{-p-1} \frac{a_{n,k+i}}{k+i} = (p+1) E_{k-1}^{p+1} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{-p(1-p)\cdots(i-1-p)}{i!} \frac{a_{n,k+i}}{k+i} =$$

$$= (p+1) E_{k-1}^{p+1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{a_{n,k+i}}{k+i} = (p+1) E_{k-1}^{p+1} \Delta^p \frac{a_{nk}}{k}, \; k = 1,2,\ldots; \; x_{n0} = a_{n0}, \; n = 0,1,\ldots$$

По теореме Кноппа-Лоренца / [4, теорема 4.I] / для того, чтобы матрица $X = (x_{nk})$ была абсолютно консервативной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |x_{nk}| < \infty. \qquad /2/$$

Поскольку матрица A абсолютно консервативна, то ряды $\sum_{n=k}^{\infty} |a_{nk}|$, $k = 0,1,\ldots$ сходятся. Поэтому сходятся и ряды $\sum_{n=k}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right|$, $k = 1,2,\ldots$.

Следовательно, условие /2/ равносильно условию:

$$\sup_k (p+1) E_{k-1}^{p+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty. \qquad /3/$$

Но $E_{k-1}^{p+1} \sim \frac{k^{p+1}}{(p+1)!}$, $k \to \infty$, поэтому условие /3/ равносильно условию /I/. Теорема I доказана.

Если матрица A абсолютно регулярна и удовлетворяет условию /I/, то матрица X, по доказанному выше, абсолютно консервативна. Так как $\sum_{n=k} a_{nk}$ = I для к = 0,I,2... / [4, стр. 35] /, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} = 1, \quad \sum_{n=k}^{\infty} x_{nk} = \sum_{n=k}^{\infty} k E_k^p \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} =$$

$$= k E_k^p \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{1}{k+i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k+i} = k E_k^p \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{1}{k+i} = 1, \quad k = 1,2,\ldots$$

Поэтому матрица X - абсолютно регулярна и матрицы C_p и A совместны / [4, теорема I2.I] /. Таким образом справедливо

Следствие I. Для включения $|C_p| \subset |A|$ и совместности матриц C_p и A, где A - нижняя треугольная абсолютно регулярная матрица, p - натуральное число, необходимо и достаточно выполнение условия /I/.

Следствие 2. Если нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица A удовлетворяет условиям:

7 ×

$$\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\geq 0\ ,\quad k_0\leq k\leq n-p,$$

$$\Delta^{i}a_{k}=O\left(\frac{1}{k^{i}}\right)\ ,\quad i=1,2,\ldots,p, \qquad /4/$$

$$\sum_{i=0}^{p-1}|a_{k,k-i}|=O\left(\frac{1}{k^{p}}\right),$$

где $a_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_{nk}$ /условие /4/ выполнено, если матрица A абсолютно регулярна/, то $|C_p|\subset|A|$ / p – натуральное число/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись известными соотношениями [4, стр. I49, I80], легко установить следующее равенство:

$$(p+1)E_{k-1}^{p+1}\Delta^{p}\frac{b_k}{k}=\sum_{i=0}^{p}E_{k-1}^{i}\Delta^{i}b_k, \qquad /5/$$

где $\{b_k\}$ – некоторая последовательность чисел. Пользуясь условиями следствия 2 и равенством /5/, получим:

$$(p+1)E_{k-1}^{p+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\right|=(p+1)E_{k-1}^{p+1}\sum_{n=k}^{k+p-1}\left|\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\right|=(p+1)E_{k-1}^{p+1}\sum_{n=k+p}^{\infty}\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\leq$$

$$\leq\binom{p}{\left[\frac{p+1}{2}\right]}kE_k^{p}\sum_{n=k}^{k+p-1}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{|a_{n,k+i}|}{k+i}+(p+1)E_{k-1}^{p+1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i}\frac{a_{k+i}-\sum_{n=k+i}^{k+p-1}a_{n,k+i}}{k+i}\leq$$

$$\leq\binom{p}{\left[\frac{p+1}{2}\right]}E_k^{p}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1}|a_{k+j,k+j-i}|+\binom{p}{\left[\frac{p+1}{2}\right]}E_k^{p}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{n=k+i}^{k+p-1}|a_{n,k+i}|+$$

$$+\sum_{i=0}^{p}E_{k-1}^{i}|\Delta^{i}a_k|\leq 2\binom{p}{\left[\frac{p+1}{2}\right]}E_k^{p}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1}|a_{k+j,k+j-i}|+\sum_{i=0}^{p}E_{k-1}^{i}|\Delta^{i}a_k|=O(1).$$

Следовательно, выполняется условие /I/, и следствие 2 доказано.

Аналогично доказывается

Следствие 3. Если нижняя треугольная матрица A удовлетворяет условиям:

$$\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\geq 0\ ,\quad k\geq k_0,$$

$$\Delta^{i}a_k=O\left(\frac{1}{k^{i}}\right)\ ,\quad i=1,2,\ldots,p,$$

/второе условие выполнено для всякой абсолютно регулярной матрицы/, то $|C_p|\subset|A|$, где p – натуральное число.

Лемма I. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и $\Delta^{\alpha}x_n\geq 0$, $n=0,1,\ldots$ при $\alpha>0$, то $\Delta^{\beta}x_n\geq 0$ при $0<\beta<\alpha$; если $\alpha\geq 1$, то $E_n^{\beta}\Delta^{\beta}x_n=O(1)$ при $0<\beta\leq\alpha-1$.

Это утверждение доказано в [5].

Следствие 4. Если положительная нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица A удовлетворяет условию:

$$\Delta^{p+1}a_{nk}\geq 0\ ,\quad k\geq k_0, \qquad /6/$$

то $|C_p|\subset|A|$, где p – натуральное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в равенстве /5/ $b_k=a_{nk}$ получим, что при условии /6/ $\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\geq 0$, $k\geq k_0$. Из условия /6/ легко получить, что $\Delta^{p+1}a_k\geq 0$, $k\geq k_0$. Из абсолютной консервативности матрицы A следует ограниченность последовательности $\{a_k\}$. Поэтому, по лемме I, $\Delta^{i}a_k=O\left(\frac{1}{k^{i}}\right)$, $i=1,2,\ldots,p$. Выполнены все условия следствия 3, поэтому следствие 4 верно.

Если в условиях следствий 2, 3 и 4 матрицу A взять абсолютно регулярной, то по следствию I матрицы C_p и A будут совместны.

Лемма 2. Для того, чтобы $|A|\sim|B|$, где A – нижняя треугольная, а B – нормальная абсолютно консервативные матрицы, необходимо и достаточно, чтобы матрица $X=AB^{-1}$ была равносильна абсолютной сходимости.

Это утверждение, для случая обычной суммируемости, доказано в [I]. Доказательство леммы 2 проводится аналогичным образом, с заменой обычной суммируемости на абсолютную и с использованием теоремы I2.I в [4].

Лемма 3. Если нормальная абсолютно консервативная матрица удовлетворяет условию:

$$\varliminf_{k\to\infty}\left(|a_{kk}|-\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_{nk}|\right)>0,$$

то она равносильна абсолютной сходимости.

Это утверждение доказано в [6].

Из лемм I, 2 и доказательства теоремы I следует

Теорема 2. Если нормальная абсолютно консервативная матрица A удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty, \qquad /7/$$

$$\varliminf_{k\to\infty}k^{p+1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0, \qquad /8/$$

то $|C_p|\sim|A|$, где p – натуральное число.

Следствие 5. Если нормальная абсолютно консервативная матрица удовлетворяет условиям:

$$\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\geq 0\ ,\quad k\geq k_0, \qquad /9/$$

$$\Delta^{i}a_k=o\left(\frac{1}{k^{i}}\right),\quad i=1,2,\ldots,p, \qquad /I0/$$

$$a_{kk}=O\left(\frac{1}{k^{p}}\right), \qquad /II/$$

$$\varliminf_{k\to\infty}\left(2E_k^{p}a_{kk}-a_k\right)>0 \qquad /I2/$$

/условие /I0/ выполнено для всякой абсолютно регулярной матрицы/, то $|C_p|\sim|A|$, где p – натуральное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия /9/ следует, что $a_{kk}>0$ для $k\geq k_0$, поэтому получим:

$$(p+1)E_{k-1}^{p+1}\frac{a_{kk}}{k}-(p+1)E_{k-1}^{p+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}=2(p+1)E_{k-1}^{p+1}\frac{a_{kk}}{k}-(p+1)E_{k-1}^{p+1}\times$$

$$\times\sum_{n=k}^{\infty}\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}=2E_k^{p}a_{kk}-(p+1)E_{k-1}^{p-1}\Delta^{p}\frac{a_k}{k}=2E_k^{p}a_{kk}-\sum_{i=0}^{p}E_{k-1}^{i}\Delta^{i}a_k.$$

Из полученного равенства и условия /I0/ следует, что если будет выполнено условие /I2/, то будет выполнено и условие /8/ теоремы 2. А выполнение условий /8/ и /II/ влечет выполнение условия /7/ теоремы 2. Следствие 5 доказано.

В частности получим:

Следствие 6. Если нормальная абсолютно регулярная матрица A удовлетворяет условиям:

$$(k+1)a_{nk}\geq k\,a_{n,k+1}\ ,\quad k\geq k_0,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty}k\,a_{kk}<+\infty, \qquad /I3/$$

$$\varliminf_{k\to\infty}k\,a_{kk}>\frac{1}{2},$$

/условие /I3/ выполнено для всякой положительной матрицы такой, что $a_{nk}\geq a_{n,k+1}$/, то $|C_1|\sim|A|$.

Если в условиях теоремы 2 и следствий 5, 6 матрицу A взять абсолютно регулярной, то по следствию I матрицы C_p и A будут совместны. Следствия 5, 6 легко перефразировать на случай, когда разности порядка p отрицательны.

Рассмотрим случай, когда матрица A бесконечнострочная. Легко доказывается следующая

Лемма 4. Пусть $A=(a_{nk})$ – произвольная, а $B=(b_{nk})$ – нормальная абсолютно консервативные матрицы, удовлетворяющие условиям:

$$\sup_n\sum_{k=k_0}^{\infty}|a_{nk}|<\infty\ ,\quad \sup_n\sum_{k}^{\infty}|b_{nk}|<\infty,$$

причем существует матрица $X=(x_{nk})$ такая, что $XB=A$ и

$$\sup_n\sum_{k=k_0}^{\infty}|x_{nk}|<\infty.$$

Если матрица X абсолютно консервативна, то $|B|\subset|A|$ на множестве рядов $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, для которых

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk} u_k| < \infty, \quad n=0,1,2,\dots, \qquad /14/$$

в частности на множестве рядов с ограниченными членами.

Лемма 5. Если матрица A удовлетворяет условию:

$$k^{p-2} a_{nk} = o(1), \quad k \to \infty, \quad n=0,1,2,\dots,$$

где p – натуральное число, то существует единственная матрица $X = (x_{nk})$, такая, что $XC_p = A$. Элементы матрицы X определяются следующим образом:

$$x_{n0} = a_{n0}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Доказательство леммы 5 проводится аналогично доказательству леммы 6 работы [1].

Из лемм 4 и 5 следует

Теорема 3. Если абсолютно консервативная матрица A удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty, \qquad /15/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} k E_k^p \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty, \qquad /16/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$k^{p-2} a_{nk} = o(1), \quad k \to \infty, \quad n = 0,1,2,\dots,$$

то $|C_p| \subset |A|$ на множестве рядов, для которых выполнено /14/ / p – натуральное число/.

Следствие 7. Если абсолютно консервативная матрица удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \geq 0, \quad k \geq k_0, \qquad /17/$$

$$\Delta^i a_k = O\left(\frac{1}{k^i}\right), \quad i = 1,2,\dots,p, \qquad /18/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$k^p a_{nk} = o(1), \quad k \to \infty, \quad n=0,1,2,\dots, \qquad /19/$$

то $|C_p| \subset |A|$ на множестве рядов, для которых выполнено /14/ / p – натуральное число/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий /17/, /18/ и абсолютной консервативности матрицы A получим:

$$(p+1) E_{k-1}^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} = (p+1) E_{k-1}^{p+1} \Delta^p \frac{a_k}{k} = \sum_{i=0}^{p} E_{k-1}^{i} \Delta^i a_k = O(1), \quad k \geq k_0,$$

то-есть условие /15/ теоремы 3 выполнено. Далее имеем:

$$\sum_{k=k_0}^{M} k E_k^p \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} = \sum_{k=k_0}^{M} (p+1) E_{k-1}^{p+1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{a_{n,k+i}}{k+i} =$$

$$= (p+1) \sum_{k=k_0}^{k_0+p-1} \sum_{i=0}^{k-k_0} (-1)^i \binom{p}{i} E_{k-1-i}^{p+1} \frac{a_{nk}}{k} + (p+1) \sum_{k=k_0+p}^{M} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} E_{k-1-i}^{p+1} \frac{a_{nk}}{k} +$$

$$+ (p+1) \sum_{k=M+1}^{M+p} \sum_{i=k-M}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} E_{k-1-i}^{p+1} \frac{a_{nk}}{k} \leq C_1 \sum_{k=k_0}^{k_0+p-1} |a_{nk}| + (p+1) \sum_{k=k_0+p}^{M} |a_{nk}| +$$

$$+ C_2 \sum_{k=M+1}^{M+p} E_k^{p+1} \frac{|a_{nk}|}{k} = O(1), \quad M \to \infty,$$

равномерно относительно n. C_1 и C_2 – постоянные, не зависящие от n и M. Следовательно, условие /16/ выполнено. Следствие 7 доказано.

Лемма 6. Пусть матрицы A и B удовлетворяют условиям леммы 4. Для того, чтобы $|A| \sim |B|$ на множестве рядов с ограниченными членами, достаточно, чтобы матрица X была равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство леммы 6 проводится аналогично доказательству леммы 4.

Лемма 7. Если абсолютно консервативная матрица A удовлетворяет условиям:

8-5810

$$\sup_n \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \left(|a_{kk}| - \sum_{n=0}^{\infty}{}^{*} |a_{nk}| \right) > 0,$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{\infty}{}^{*} |a_{nk}| \right) > 0,$$

/ $\sum_{k=0}^{\infty}{}^{*} |a_{nk}|$ – обозначает отсутствие члена $|a_{kk}|$ /, то матрица A равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами.

Это утверждение доказано в [7].

Из лемм 6, 7 и предыдущих утверждений следует

Теорема 4. Если абсолютно консервативная матрица A удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} k E_k^p \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$k^{p-2} a_{nk} = o(1), \quad k \to \infty, \quad n = 0,1,2,\dots,$$

$$\varliminf_{k \to \infty} k^{p+1} \left(\left| \Delta^p \frac{a_{kk}}{k} \right| - \sum_{n=0}^{\infty}{}^{*} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) > 0,$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(n E_n^p \left| \Delta^p \frac{a_{nn}}{n} \right| - \sum_{k=k_0}^{\infty}{}^{*} k E_k^p \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) > 0, \qquad /20/$$

то $|C_p| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами / p – натуральное число/.

Следствие 8. Если абсолютно консервативная матрица удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p a_{nk}/k \geq 0, \quad k \geq 0,$$

$$\Delta^i a_k = O(1/k^i), \quad i = 1,2,\dots,p,$$

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$k^p a_{nk} = o(1), \quad k \to \infty, \quad n = 0,1,2,\dots,$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \left(2k E_k^p \Delta^p a_{kk}/k - a_k \right) > 0,$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(2 E_n^{p+1} \Delta^p a_{nn}/n - a_n^* \right) > 0, \qquad /21/$$

где $a_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, то $|C_p| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами / p – натуральное число/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предыдущих рассуждений следует, что для доказательства следствия 8 достаточно показать, что из условий следствия вытекает справедливость условия /20/. Имеем:

$$n E_n^p \Delta^p a_{nn}/n - \sum_{k=k_0}^{\infty}{}^{*} k E_k^p \Delta^p a_{nk}/k = 2n E_n^p \Delta^p a_{nn}/n - \sum_{k=k_0}^{\infty} (p+1) E_{k-1}^{p+1} \Delta^p a_{nk}/k =$$

$$= 2(p+1) E_{n-1}^{p+1} \Delta^p a_{nn}/n - (p+1) \sum_{k=k_0}^{\infty} E_{k-1}^{p+1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{a_{n,k+i}}{k+i} =$$

$$= 2(p+1) E_{n-1}^{p+1} \Delta^p a_{nn}/n - (p+1) \sum_{k=k_0}^{k_0+p-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{p}{i} E_{k-1-i}^{p+1} a_{nk}/k -$$

$$- (p+1) \sum_{k=k_0+p}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} E_{k-1-i}^{p+1} a_{nk}/k = 2(p+1) E_{n-1}^{p+1} \Delta^p a_{nn}/n - (p+1) a_n^* - o(1), \quad k \to \infty.$$

Из полученного равенства и условия /21/ следует условие /20/. Следствие 8 доказано.

Следствие 9. Если положительная абсолютно регулярная матрица удовлетворяет условиям:

$$(k+1) a_{nk} \geq k a_{n,k+1}, \quad k \geq k_0, \qquad /22/$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a_n^*, \quad n = 0,1,2,\dots, \qquad /23/$$

$$\varlimsup_{n \to \infty} a_n^* < \frac{1}{2},$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \left((k+1) a_{kk} - k a_{n,k+1} \right) > \frac{1}{2},$$

где a_n^* $n = 0,1,2,\dots$/ – конечные числа, то $|C_1| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следствие 9 будет вытекать из следствия 8, если покажем, что из условий /22/ и /23/ следует условие:

$$k a_{nk} = o(1), \quad k \to \infty, \quad n = 0,1,2,\dots.$$

Действительно, для фиксированного n имеем:

8*

$$d_{nm} \geq a_{n,m+1} + a_{n,m+2} + \cdots + a_{nk} \geq \frac{(m+1)+(m+2)+\cdots+k}{k} a_{nk} = \frac{k(k+1)-m(m+1)}{2k} a_{nk},$$

где $d_{nm} = \sum_{i=m+1}^{\infty} a_{ni}$. Отсюда $k a_{nk} \leq \frac{k^2}{k(k+1)-m(m+1)} 2 d_{nm}$.

Из условия /23/ следует, что $d_{nm} = o(1)$, $m \to \infty$, $n = 0, 1, \ldots$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Номер m выберем так, чтобы $2 d_{nm} < \varepsilon$. Номер k выберем настолько большим, чтобы $\frac{k^2}{k(k+1)-m(m+1)} < \frac{\varepsilon}{2 d_{nm}}$,

тогда получим, что $k a_{nk} < \varepsilon$, а это и значит, что $k a_{nk} = o(1)$, $k \to \infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Следствие 9 доказано.

Следствие 8 легко перефразировать на случай, когда разности порядка p отрицательны.

Если в условиях теорем 3, 4 и следствий 7, 8 матрицу A взять абсолютно регулярной, то аналогично следствию I можно установить, что матрицы C_p и A будут совместны.

Литература

I. Д а в ы д о в Н.А. О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов. - УМЖ, I967, т. I9, № 4, 29-47.
2. Д а в ы д о в Н.А. О включении и равносильности методов Теплица суммирования рядов. - УМЖ, I968, т. 20, № 4, 460-47I.
3. М и х а л и н Г.А. Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей. - УМЖ, I974, т. 26, № I, 95-98.
4. Б а р о н С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, "Валгус", I977, 280 с.

5. Н а к а м у р а Й о с и х и к о. Общие монотонные последовательности. "Токе суйсан дайгаку ронсю, Rept. Tokyo Univ. Fish. ", I970, № 5, 29-35.
6. Fridy J. A. Mercerian-type theorems for absolute summability, ,, Port. math." I974, 33, № 3-4, I4I-I45.
7. Н а г а й н и к А.Ф. Абсолютно консервативные матричные преобразования и теоремы типа Радо-Агнью. - Приближенные методы математического анализа. К., КПИ, I978.

УДК 5I7.52

КУЗЬМИЧ В.И.

/c/ - СВОЙСТВО ОДНОГО КЛАССА МЕТОДОВ ВОРОНОГО СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

Пусть дана последовательность действительных чисел, удовлетворяющих условиям: $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Последовательность чисел

$$W_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ будем называть средними Вороного для последовательности $\{S_n\}$.

Если $\lim_{n \to \infty} W_n = S$, то говорят, что последовательность $\{S_n\}$ суммируется методом Вороного (W, p_n) к числу S, и записывают $S_n \to S \ (W, p_n)$.

Метод $(W, 1)$ называют методом средних арифметических или методом Чезаро первого порядка.

В работах [I] и [2] Н.А.Давыдовым введено понятие /c/-множества для последовательности $\{S_n\}$ и установлено /c/-свойство методов Чезаро. С помощью этого свойства получен целый ряд теорем