МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М.ГОРЬКОГО

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Киев КГПИ 1980

где $\varphi_{i,j}(x,y)$ – функции, определяемые таким образом:

$$\varphi_{i,j}(x,y)=0, \quad (x,y)\overline{\in}\,\overline{\Omega}_{i,j};$$

$$\varphi_{i,j}(x,y)=\sum_{k,s=0}^{1} P_{k,s}(x)\,Q^{k}_{i+s,j}(y)+\sum_{\ell,t=0}^{1} Q_{\ell,t}(y)\,P^{\ell}_{i,j+t}(x)-$$
$$-\sum_{k,\ell,s,t=0}^{1} P_{k,s}(x)\,Q_{\ell,t}(y)\,a^{(k,\ell)}_{i+s,j+s}, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}_{i,j}, \qquad /14/$$

$P_{k,s}(x)$, $Q_{\ell,t}(y)$ – кубические полиномы, коэффициенты которых определяются из равенств

$$\frac{d^q P_{k,s}(x_{i+t})}{dx^q}=\delta_{k,q}\,\delta_{s,t}, \quad \frac{d^q Q_{\ell,t}(y_{j+s})}{dy^q}=\delta_{\ell,q}\,\delta_{s,t} \qquad /15/$$

где $\delta_{k,q}$ – символ Кронеккера. $(k,\ell,s,t=0,1)$

Пример. Пусть в узлах сетки /I/ при $x_0=y_0=1$, $x_n=2$,

$y_m=1,5$, $x_{i+1}-x_i=0,2$, $y_{j+1}-y_j=0,1$ $(i,j=0,1,2,3,4)$

таблично задана функция $f(x,y)=e^{x+y^2}$. В этом случае сплайн /I3/ дает весьма хорошее приближение не только для функции $f(x,y)$, но и для ее производных. Для иллюстрации приводим таблицу, характеризующую поведение сплайна $\varphi(x,y)$ в ячейке сетки /I/ $\Omega_{3,3}=(1,6\le x\le 1,8;\ 1,3\le y\le 1,4)$

- $\varphi(1,7;1,3)=29,6632$ $\quad f(1,7;1,3)=29,666$
- $\varphi(1,7;1,4)=38,8574$ $\quad f(1,7;1,4)=38,861$
- $\varphi(1,6;1,35)=30,6281$ $\quad f(1,6;1,35)=30,6445$
- $\varphi(1,8;1,35)=37,4103$ $\quad f(1,8;1,35)=37,4310$
- $\varphi(1,7;1,35)=35,8384$ $\quad f(1,7;1,35)=33,8690$
- $\varphi^{(1,0)}(1,6;1,3)=26,8220$ $\quad f^{(1,0)}(1,6;1,3)=26,8430$

- $\varphi^{(0,1)}(1,6;1,3)=69,5227$ $\quad f^{(0,1)}(1,6;1,3)=69,79143$
- $\varphi^{(1,1)}(1,6;1,3)=69,4672$ $\quad f^{(1,1)}(1,6;1,3)=69,79$
- $\varphi^{(1,0)}(1,6;1,35)=30,6459$ $\quad f^{(1,0)}(1,6;1,35)=30,6459$
- $\varphi^{(0,1)}(1,7;1,3)=76,8258$ $\quad f^{(0,1)}(1,7;1,3)=77,1314$

Литература

I. Клименко В.Т., Остапенко В.Н. Аппроксимация функций нескольких переменных дифференциальными операторами. – ДАН УССР. Сер. А, 1978, № 4, с. 295–298.

2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., "Мир", 1972.

3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

УДК 517.521.8

КУЗЬМИЧ В.И.

О ТАУБЕРОВЫХ КОНСТАНТАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ с комплексными членами a_n и частными суммами S_n. Последовательность $\{S_n\}$ суммируется методом Чезаро порядка $\alpha>-1$ к числу S, если

$$C_\alpha(S_n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}\binom{n+\alpha}{n}^{-1}S_k\to S \quad (n\to\infty).$$

Теорема I. Соотношение $C_p(S_n)-C_q(S_n)\to S$ $(n\to\infty)$ выполнено, если и только если $C_{p+1}(na_n)\to S/T(p,q)$ $(n\to\infty)$;

где $T(p,q)=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{k+p+1}$, p и q – целые числа такие, что $0\le p<q$, S – конечное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем следующие обозначения.

$E^{(1)}$ – матрица с элементами: $e^{(1)}_{nk}=0$ $(k,n\ge 0,\ k\ne n-1,n)$,

$$e^{(1)}_{n+1,n}=-1\ (n\ge 0),\quad e^{(1)}_{nn}=1\ (n\ge 0);$$

$E(x_n)$ – матрица с элементами: $e_{nk}=0$ $(n,k\ge 0,\ k\ne n)$, $e_{nn}=x_n$ $(n\ge 0)$, где $\{x_n\}$ – некоторая числовая последовательность;

$\mathcal{D}$ – матрица с элементами: $d_{nk}=(-1)^k\binom{n}{k}$ $(0\le k\le n)$,

$$d_{nk}=0\quad(0\le n<k);$$

C_p – матрица Чезаро порядка p.

Легко показать справедливость следующих матричных равенств.

$$\mathcal{D}\mathcal{D}=E(1),\quad \mathcal{D}=E^{(1)}\mathcal{D}E^{(1)},\quad \mathcal{D}E(n)=E(n)E^{(1)}\mathcal{D}.$$

В дальнейшем будем пользоваться также равенством: $C^0_p=\mathcal{D}E\left(\binom{n+p}{n}^{-1}\right)\mathcal{D}$ [I, с.141, следствие 19.2] . Приняв во внимание, что умножение нижних треугольных матриц ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, получим:

$$C^0_p-C^0_q=\mathcal{D}E\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{q}^{-1}\right)\mathcal{D}=\mathcal{D}E\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{q}^{-1}\right)\left(E^{(1)}\mathcal{D}E^{(1)}\right)=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\left(E(n)E^{(1)}\mathcal{D}\right)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)(\mathcal{D}\mathcal{D})E\left(\binom{n+p+1}{n}^{-1}\right)\mathcal{D}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}C^0_{p+1}E(n)E^{(1)}.$$

Методом математической индукции легко доказывается равенство:

$$\binom{n+p}{n}^{-1}=1-\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n+k+1}{n+1}^{-1}\quad(p\ge 1,\ n\ge 0).$$

Пользуясь им, получим:

$$\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)=\frac{1}{n+1}\binom{n+p+1}{n}\left(\sum_{k=0}^{q-1}\binom{n+k+1}{n+1}^{-1}-\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n+k+1}{n+1}^{-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{q-p-1}\binom{n+p+1}{n}\binom{n+k+p+1}{n+1}^{-1}\frac{1}{n+1}=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{p+1}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}.$$

Полученное равенство справедливо и при $p=0$. Поскольку $\mathcal{D}E(T(p,q))=E(T(p,q))\mathcal{D}$, то можно записать:

$$C^0_p-C^0_q=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{T(p,q)n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}E(T(p,q))C^0_{p+1}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{T(p,q)(p+1)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}\right)\mathcal{D}E(T(p,q))C^0_{p+1}E(n)E^{(1)}.$$

Заметим, что $\left(C^0_{p+1}E(n)E^{(1)}\right)(S_n)=C^0_{p+1}(na_n)$, поэтому теорема будет доказана, если покажем, что матрица

$$\mathcal{D}E\left(\frac{1}{T(p,q)n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{T(p,q)(p+1)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}\right)\mathcal{D}\qquad /I/$$

всякую сходящуюся к числу S последовательность суммирует к числу S / т.е. является регулярной/ и не суммирует ни одной расходящейся последовательности /т.е. является равносильной сходимости/. Заметим, что матрица /I/ является матрицей Хаусдорфа [I, с. 139, 140] . Для $k>0$ имеем:

$$\frac{1}{T(p,q)(p+1)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}=\frac{1}{T(p,q)}\binom{k+p}{k-1}\int_0^1 t^{n+p+1}(1-t)^{k-1}dt=$$

$$=\int_0^1 t^n d\left(-\frac{(k+p)!}{T(p,q)}\sum_{i=0}^{p+1}\frac{t^{p+1-i}(1-t)^{k+i}}{(k+i)!(p+1-i)!}\right).$$

Кроме того, при $k=0$ имеем:

$$\frac{1}{T(p,q)(p+1)}=\int_0^1 t^n d\varphi(t) \quad \text{, где} \quad \varphi(t)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\le t<1,\\ \frac{1}{T(p,q)(p+1)}, & \text{если } t=1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{T(p,q)(p+1)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}=\int_0^1 t^n d\psi(t) \quad \text{, где}$$

$$\psi(t)=\varphi(t)-\sum_{k=1}^{q-p-1}\frac{(k+p)!}{T(p,q)}\sum_{i=0}^{p+1}\frac{t^{p+1-i}(1-t)^{k+i}}{(k+i)!(p+1-i)!}-\frac{1}{T(p,q)(p+1)}+1.$$

Функция $\psi(t)$ имеет ограниченное изменение на промежутке $[0,1]$ и кроме того $\psi(+0)=\psi(0)=0$, $\psi(1)=1$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{T(p,q)(p+1)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1} \qquad (n\ge 0),$$

является последовательностью регулярных моментов [2, с. 318], а это необходимое и достаточное условие регулярности матрицы Хаусдорфа.

Поскольку функция $\psi(t)$ абсолютно непрерывна в промежутке $]0,1[$, то, как следует из теоремы Питтта [3, с. 122, теорема 15], для доказательства того, что матрица /1/ равносильна сходимости, достаточно показать, что

$$\inf_{\operatorname{Re} z\ge 0}\left|\frac{1}{T(p,q)z}\binom{z+p+1}{z}\left(\binom{z+p}{z}^{-1}-\binom{z+q}{z}^{-1}\right)\right|>0. \qquad /2/$$

Легко убедиться в том, что функция, стоящая под знаком модуля в неравенстве /2/, не обращается в ноль в точках полуплоскости $\operatorname{Re} z\ge 0$, $z\ne 0$. Кроме того эта функция равна 1 в точке $z=0$, и так как она непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} z\ge 0$,

то на каждом замкнутом ограниченном множестве этой полуплоскости ее модуль достигает минимума, отличного от ноля. Далее имеем:

$$\frac{1}{T(p,q)z}\binom{z+p+1}{z}\left(\binom{z+p}{z}^{-1}-\binom{z+q}{z}^{-1}\right)\to\frac{1}{T(p,q)(p+1)}>0 \quad (z\to\infty),$$

т.е. неравенство /2/ выполняется и в достаточно малой окрестности бесконечно удаленной точки. Таким образом, матрица /1/ равносильна сходимости, и теорема 1 доказана.

Положим:

$$H_0(S_n)=S_n,\ H_1(S_n)=C_1(S_n),\ H_p=H_1(H_{p-1}(S_n)) \ (p=1,2,3,\dots).$$

Последовательность $\{S_n\}$ суммируется методом Гельдера порядка p к числу S, если $H_p(S_n)\to S$ $(n\to\infty)$.

Используя равенство: $H_p=\mathcal{D}E((n+1)^{-p})\mathcal{D}$ [1, с. 141], аналогично доказательству теоремы 1 можно доказать следующее утверждение.

<u>Теорема 2</u>. Соотношение $H_p(S_n)-H_q(S_n)\to S$ $(n\to\infty)$ выполнено, если и только если $H_{p+1}(na_n)\to S/(q-p)$ $(n\to\infty)$, где p и q – целые числа такие, что $0\le p<q$, S – конечное число.

Последовательность $\{S_n\}$ суммируется логарифмическим методом к числу S, если

$$\ell(S_n)=\frac{1}{\mathcal{P}_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}S_k\to S\ (n\to\infty), \text{ где } \mathcal{P}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \quad (n\ge 0).$$

<u>Теорема 3</u>. Соотношение $S_n-\ell(S_n)\to S$ $(n\to\infty)$ выполнено, если и только если $\ln^{-1}(n+2)\sum_{k=0}^{n}a_k\ln(k+1)\to S$ $(n\to\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$S_n - \ell(S_n) = \mathcal{P}_n^{0\,-1} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}^0_{k-1} a_k \qquad (\mathcal{P}^0_{-1} \equiv 0).$$

Теорема 3 будет доказана, если докажем, что матрицы $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$, где $a_{nk} = \mathcal{P}^0_k / \mathcal{P}^0_{n+1}$ $(0 \le k \le n)$, $a_{nk} = 0$ $(0 \le n < k)$, и $b_{nk} = \ln(k+2)/\ln(n+3)$ $(0 \le k \le n)$, $b_{nk} = 0$ $(0 \le n < k)$,

равносильны и совместны /т.е. суммируют одни и те же последовательности к одним и тем же числам/. Для этого достаточно показать, что матрица $AB^{-1} = (c_{nk})$ регулярна и равносильна сходимости [4, с. 32, лемма 2]. Поскольку $B^{-1} = (b'_{nk})$, где

$b'_{nk} = 0$ $(k \ne n-1, n)$, $b'_{n+1,n} = -1$ $(n \ge 0)$, $b'_{nn} = \ln(n+3)/\ln(n+2)$ $(n \ge 0)$

то получаем:

$$c_{nk} = \frac{\mathcal{P}^0_k \ln(k+3)}{\mathcal{P}^0_{n+1} \ln(k+2)} - \frac{\mathcal{P}^0_{k+1}}{\mathcal{P}^0_{n+1}} \quad (0 \le k < n), \quad c_{nn} = \frac{\mathcal{P}^0_n \ln(n+3)}{\mathcal{P}^0_{n+1} \ln(n+2)} \quad (n \ge 0),$$

$$c_{nk} = 0 \quad (0 \le k < n).$$

Далее имеем:

$$c_{nk} = \frac{1}{\mathcal{P}^0_{n+1}} \left(\frac{\mathcal{P}^0_k}{\ln(k+2)} \ln\frac{k+3}{k+2} - \frac{1}{k+2} \right) > \frac{1}{\mathcal{P}^0_{n+1}} \left(\frac{\ln(k+2) + C + X_k}{\ln(k+2)} \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{(k+3)\mathcal{P}^0_{n+1}} \left(\frac{C + X_k}{\ln(k+2)} - \frac{1}{k+2} \right)$$

/ C – постоянная Эйлера, $X_k \to 0$ при $k \to \infty$ /.

Поэтому при $k \ge k_0$ $c_{nk} \ge 0$. Так как $c_{nk} \to 0$ $(n \to \infty,\ k = 0, 1, \dots)$,

то получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} |c_{nk}| = \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} + O(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mathcal{P}^0_{n+1}} \left(\frac{\mathcal{P}^0_k}{\ln(k+2)} \ln\frac{k+3}{k+2} - \frac{1}{k+2} \right) +$$

$$+ O(1) < \frac{1}{\mathcal{P}^0_{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{P}^0_k}{(k+2)\ln(k+2)} - \frac{1}{k+2} \right) + O(1) = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Так как $c_{nn} \to 1$ $(n \to \infty)$, то матрица AB^{-1} удовлетворяет условиям регулярности [2, с. 63, теорема 2] и условиям теоре-

мы Агнью [5], из которой следует, что эта матрица равносильна сходимости. Теорема 3 доказана.

<u>Лемма</u>. Если

$$C_{p+1}(na_n) \to 0 \quad (n \to \infty), \qquad /3/$$

то

$$C_p(S_n) - (1 - X_n) \sum_{k=0}^{\infty} S_k X_n^k \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где

$$X_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $B = (b_{nk})$ матрицу с элементами:

$$b_{nk} = \left(\binom{n-k+p}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} - X_n^k \right) \frac{1}{k} \quad (0 < k \le n), \quad b_{nk} = -\frac{X_n^k}{k} \quad (0 \le n < k),$$

$$b_{n0} = 0 \quad (n \ge 0).$$

Так как из /3/ следует, что $a_n = o(n^p)$ $(n \to \infty)$ [2, с. 132, теорема 46] и кроме того $b_{nk} k^q \to 0$ $(k \to \infty;\ n, q = 0, 1, \dots)$, то выбрав номер N достаточно большим в сравнении с n и пользуясь известными тождествами [6, с. 83, з], получим:

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k} \binom{k-i+p}{k-i} \binom{k+p+1}{k}^{-1} i a_i \binom{k+p+1}{k} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \binom{p+1}{j} b_{n,k+j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-p-1} k a_k \left(\sum_{i=0}^{p} b_{n,k+i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{p+1}{j} \binom{i-j+p}{i-j} + \sum_{i=p+1}^{N-k} b_{n,k+i} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \times \right.$$

$$\left. \times \binom{p+1}{j} \binom{i+j-1}{i+j-p-1} \right) + o(1) = \sum_{k=0}^{N-p-1} k a_k \sum_{i=0}^{p} b_{n,k+i} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{j+p}{j} \binom{p+1}{i-j} + o(1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-p-1} k a_k b_{nk} + o(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+p}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} a_k - \sum_{k=0}^{N-p-1} a_k X_n^k + o(1) \quad (N \to \infty)$$

11-16058

Так как выражение, стоящее в правой части полученного равенства, стремится к пределу при $N \to \infty$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+p}{k-i}\binom{k+p+1}{k}^{-1} i a_i \binom{k+p+1}{k}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\binom{p+1}{j} b_{n,k+j} =$$

$$= C_p^0(S_n) - (1-x_n)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x_n^k .$$

Теперь для доказательства леммы достаточно показать, что матрица $\mathcal{D} = (d_{nk})$ с элементами:

$$d_{nk} = \binom{k+p+1}{k}\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\binom{p+1}{i} b_{n,k+i} \quad (n,k \geq 0)$$

сохраняет сходимость последовательности к нолю. Для этого матрица $\mathcal{D}$ должна удовлетворять двум условиям [2, с. 69, теорема 4]

$$d_{nk} \to 0 \ (n \to \infty,\ k = 0,1,2,\dots) \ \text{и} \ \sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}| = O(1). \quad /4/$$

Так как $b_{nk} \to 0$ $(n \to \infty,\ k = 0,1,2,\dots)$, то первое условие выполнено. Методом математической индукции легко доказать равенства:

$$\Delta^p\left(\binom{n-k+p-1}{n-k}\binom{n+p-1}{n}^{-1} - x^k\right)\frac{1}{k} = \Delta^p\frac{1-x^k}{k},$$

$$\Delta^p\frac{1-x^k}{k} = \frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\binom{k+p}{k-1}^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+p}{i}x^i,$$

где

$$\Delta^p y_k = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}y_{k+i} \quad (p = 1,2,\dots).$$

Из этих равенств следует, что $d_{nk} \geq 0$ $(n > n_0,\ 0 \leq k \leq n-p-1)$.

Кроме того $d_{nk} \leq 0$ $(0 \leq n < k)$. Далее имеем:

$$d_{nk} = -\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\frac{x_n^k}{k} + O(1) = -\binom{k+p+1}{k}\sum_{i=0}^{p+1}\binom{p+1}{i}\Delta^i x_n^k\,\Delta^{p+1-i}\frac{1}{k+i} +$$

$$+ O(1) \quad (n \to \infty,\ n-p \leq k \leq n).$$

Но $\Delta^{p+1-i}(k+i)^{-1} = O(k^{-p-2+i})$ $(k \to \infty,\ n-p \leq k \leq n)$,

а $\Delta^i x_n^k = x_n^k(1-x_n)^i = O(n^{-i})$ $(n \to \infty)$.

Поэтому $d_{nk} = O(1)$ $(n \to \infty,\ n-p \leq k \leq n)$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}| = \sum_{k=1}^{n-p-1}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\left(\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1} - x_n^k\right)\frac{1}{k} +$$

$$+ \sum_{k=n-p}^{n}\binom{k+p+1}{k}\left(\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{p+1}{i}\left(\binom{n-k-i+p}{n-k-i}\binom{n+p}{n}^{-1} - x_n^{k+i}\right)\frac{1}{k+i} +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=n-k+1}^{p+1}(-1)^i\binom{p+1}{i}\left(-\frac{x_n^{k+i}}{k+i}\right)\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\frac{x_n^k}{k} + O(1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-p-1}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=n-p}^{n}\binom{k+p+1}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \times$$

$$\times \binom{p+1}{i}\binom{n-k-i+p}{n-k-i}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k+i} - \sum_{k=1}^{n}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\frac{x_n^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\frac{x_n^k}{k} +$$

$$+ O(1) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\frac{x_n^k}{k} + 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k+p+1}{k}\Delta^{p+1}\frac{x_n^k}{k} +$$

$$+ O(1) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_n^k}{k} + 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty}\frac{x_n^k}{k} +$$

$$+ 2\sum_{k=n+1}^{n+p+1}\binom{k+p+1}{k}\sum_{i=0}^{n+p+1-k}(-1)^i\binom{p+i}{i}\frac{x_n^{k+i}}{k+i} + O(1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k} - \ln\frac{1}{1-x_n} + 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty}\frac{x_n^k}{k} +$$

$$+ 2\sum_{k=n+1}^{n+p+1}(-1)^{k-n-1}\Delta^{k-n-1}\binom{n+p+2}{n+1}\Delta^{n+p+1-k}\frac{x_n^k}{k} + O(1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k} - \ln\frac{1}{1-x_n} + 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty}\frac{x_n^k}{k} +$$

11

$$+2\sum_{k=n+1}^{n+p+1}(-1)^{k-n-1}\Delta^{k-n-1}\binom{n+p+2}{n+1}\sum_{i=0}^{n+p+1-k}\binom{n+p+1-k}{i}\Delta^i x_n^k \times$$

$$\times \Delta^{n+p+1-k-i}\frac{1}{k+i} + O(1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) + 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k\frac{1}{k} +$$

$$+ O(1) \quad (n\to\infty).$$

Из теоремы I следует, что первое слагаемое в правой части полученного равенства можно представить как $\ln(n+1)+C-T(0,p)+o(1)$ $/n\to\infty$, C – постоянная Эйлера/. Поскольку

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\to -1 \quad (n\to\infty),$$

то [7, с. 601, лемма 3] третье слагаемое есть ограниченная величина при $n\to\infty$. Таким образом выполнено второе условие /4/. Лемма доказана.

Известно [8, с. 168], что если $a_n-b_n\to 0\ (n\to\infty)$, то ядра последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ совпадают. Ясно, что и их производные множества будут совпадать. Поэтому из предыдущих теорем и леммы следуют такие утверждения:

Следствие I. Если $C_{p+1}(na_n)\to 0\ (n\to\infty)$, то ядра средних $C_\alpha(S_n)$ для $\alpha\geq p$ совпадают с ядром функции $f(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}S_k x^k$, кроме того производные множества средних $C_q(S_n)$ при целых $q\geq p\geq 0$ совпадают и содержатся в производном множестве функции $f(x)$.

Следствие 2. Если $H_{p+1}(na_n)\to 0\ (n\to\infty)$, то ядра средних $H_q(S_n)$ при целых $q\geq p\geq 0$ совпадают, и они имеют одно и то же производное множество.

Следствие 3. Если $\ln^{-1}(n+2)\sum_{k=0}^{n}a_k\ln(k+1)\to 0\ (n\to\infty)$, то ядро средних $l(S_n)$ совпадает с ядром последовательности $\{S_n\}$ и они имеют одно и то же производное множество.

В работе [9, с. 282, теорема 10] установлено, что при $C_1(na_n)\to 0\ (n\to\infty)$ ядро действительной последовательности $\{S_n\}$ совпадает с ядром средних Абеля-Пуассона. Это утверждение является частным случаем следствия I.

Другие условия совпадения ядер средних Чезаро, Гельдера, Абеля-Пуассона рассматривались в работах [9,10,11,12].

В заключение выражаю искреннюю благодарность Н.А.Давыдову за полезные советы и замечания.

Литература

1. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, "Валгус", 1977, 280 с.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИИЛ, 1951, 504 с.
3. Pitt H.R. Tauberian Theorems, Oxford Univ. Press, 1958, 174p
4. Давыдов Н.А. О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов. - Укр.мат.журн., 1967, 19, № 4, с. 29-47.
5. Agnew R.P. Equivalence of methods for evaluation of sequences, Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 550-565.
6. Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск, "Наука", 1977, 286 с.
7. Hartman P. Tauber's Theorem and absolute constans, Amer. J. Math., 1947, v. 69, № 3, 599-606.
8. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960, 470 с.
9. Щеглов М.П. К обобщению теорем Таубера. - Мат.сборник, 1951, 28 /20/, № 2, с. 245-282.

10. Давыдов Н.А., Михалин Г.А. О ядрах ограниченных последовательностей. - Мат.заметки, 1978, 23, № 3, с.537-550.

11. Михалин Г.А., Лотоцкий В.А. О ядрах средних Чезаро и Пуассона-Абеля. - Приближенные методы математического анализа. К., КГПИ, 1978, с. 87-94.

12. Михалин Г.А. Условия совпадения ядра последовательности с ядрами ее $/R, P_n, \alpha/$ и $/j, P_n/$ средних. - Укр. мат.журн., 1979, 31, № 5, с. 504-509.

УДК 519.3:62-50

ЛЕЙФУРА В.Н.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

В работах [1] - [2] исследовались задачи оптимального управления линейными системами с параметром при производной.

В настоящей статье рассматривается система n нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+B(t,\varepsilon)U+\varepsilon f(x,u,t,\varepsilon). \qquad /1/$$

Матрицы $A(t,\varepsilon)-(n\times n)$, $B(t,\varepsilon)-(n\times r)$ заданы при $t\geq 0$ вещественны, на сегменте $/0,T/$ имеют непрерывные производные до $/m+1/$-порядка включительно и представлены сходящимися рядами по степеням малого параметра $\varepsilon>0$

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(t), \quad B(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s B_s(t); \qquad /2/$$

вектор-функция f непрерывна по t, x, u, ε, удовлетворяет условию Липшица по переменным x, u в области R, содержащей

точки $x^0=x/0/$ и $x/T/=x^1$, а также отрезок $[0, T]$:

$$R=\{0\leq|x|\leq a,\ 0\leq|u|\leq b,\ 0\leq t\leq T^*,\ 0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0\}$$

В дальнейшем ради простоты изложения положим $r=1$. Задача заключается в построении управления $u=u/t,\varepsilon/$, переводящего систему из точки x^0 в точку x^1 за время T при условии

$$\int_0^T u^2dt<+\infty \qquad /3/$$

Такие управления будем называть программными.

Введем в рассмотрение однородную систему

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x \qquad /4/$$

получаемую из уравнения /1/ путем отбрасывания членов, содержащих управление и нелинейной добавки. Будем изучать случай, когда корни характеристического уравнения

$$\det\|A_0(t)-\lambda E\|=0 \qquad /5/$$

простые на сегменте $[0, T]$, т.е.

$$\lambda_j^{(0)}(t)\neq\lambda_i^{(0)}(t),\ j\neq i;\ j,i=\overline{1,n}. \qquad /6/$$

Осуществляя в /4/ замену переменных

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t)y(t,\varepsilon), \qquad /7/$$

придем к системе

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\left(\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_s(t)+\varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)y(t,\varepsilon), \qquad /8/$$

где $U_s(t)$ $(s=0,1,\dots,m)$ - квадратные матрицы порядка n, $\Lambda_s(t)$ - диагональные матрицы, способ определения которых указан в /3/. $C_m(t,\varepsilon)$- квадратная матрица, элементы которой при достаточно малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ограничены на сегменте $[0, T]$.

КУЗЬМИЧ В.И. О тауберовых константах для некоторых классических методов суммирования 75

ЛЕЙФУРА В.Н. Построение программных уравнений в случае нелинейных систем с параметром при производных 86

ЛУКОВИЧ В.В., КОЛЕСНИК Т.В. О решении задачи электрохимической защиты трубопроводов с неоднородной изоляцией 91

МЕЙЛИЕВ Т.К. К вопросу об асимптотическом представлении решений системы линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр 101

МЕНЬКО Я.П., ЛЕЙФУРА В.Н. К задаче аналитического конструирования регулятора 104

МИХАЛИН Г.А. Тауберовы теоремы с остаточным членом для (H,p_n,α)-методов суммирования 113

НАГАЙНИК А.Ф. Мерсеровы теоремы для абсолютной и l^p-суммируемости методом взвешенных средних Рисса 124

ОЛЕЙНИК А.Г. Об одном одношаговом двустороннем методе 135

РАМСКАЯ Е.И., РАМСКИЙ Ю.С. Об оптимальном расположении двух дрен 143

РОМАНОВСКИЙ А.А. Об одном алгоритме приближенного отыскания обратной матрицы 153

СОТНИЧЕНКО Н.А., ФЕЩЕНКО С.Ф. К вопросу "приводимости" 157

ТКАЧЕНКО Н.В. К вопросу об управляемости некоторых линейных дискретных нестационарных систем 163

ШКИЛЬ Н.И., КОВТОНЮК М.М. Приведение одной краевой задачи к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений L - диагонального вида 168

Аннотации 178

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сборник научных трудов

Редактор Л. Ю. Кураколова

Подп. к печ. 18.11.80. БФ 25035. Формат 60×84 1/16.
Бумага тип. № 3. Печать офсетная. Физ. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 8,37.
Усл. печ. л. 10,69. Тираж 700. Зак. № 16058. Цена 1 руб. 00 коп.

КГПИ им. А. М. Горького, 252030, г. Киев-30, ул. Пирогова, 9.

Межвузовское полиграфическое предприятие
252135, Киев, бульвар Т. Шевченко