КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. А.М.ГОРЬКОГО

на правах рукописи

КУЗЬМИЧ Валерий Иванович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВКЛЮЧЕНИЯ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

01.01.01 / математический анализ /

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических
наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических
наук, профессор
Н.А.ДАВЫДОВ

Киев - 1981 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.

Рассмотрим числовой ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad /1/$$
с комплексными членами u_k и частными суммами S_n, где $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ (n \geq 0)$, а также матрицу $A = (a_{nk})$, где $a_{nk} \ (n, k \geq 0)$ - комплексные числа. Образуем последовательности:
$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k \ (n \geq 0), \ \tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k \ (n \geq 0). \qquad /2/$$
Пусть τ_n и t_n существуют для $n \geq 0$.

Если $t_n \to S \ (\tau_n \to S)$ при $n \to \infty$, то говорят, что ряд /1/ / последовательность $\{S_n\}$ / суммируется к числу S методом A или матрицей A преобразования ряда в последовательность / последовательности в последовательность /. Если при этом
$$\sum_{n=0} |t_n - t_{n-1}| < \infty \ (t_{-1} = 0) \ \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\tau_n - \tau_{n-1}| < \infty \ (\tau_{-1} = 0)\right),$$
то говорят, что ряд /1/ / последовательность $\{S_n\}$ / абсолютно суммируется к числу S методом A или матрицей A преобразования ряда в последовательность / последовательности в последовательность /.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = S \ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = S\right)$, то говорят, что ряд /1/ / последовательность $\{S_n\}$ / суммируется к числу S методом A или матрицей A преобразования ряда в ряд / последовательности в ряд /. Если при этом
$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_n| < \infty \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\tau_n| < \infty\right),$$

то говорят, что ряд /I/ / последовательность $\{S_n\}$ / абсолютно суммируется к числу S методом A или матрицей A преобразования ряда в ряд / последовательности в ряд /.

Если метод A суммирует / абсолютно суммирует / все ряды или последовательности, которые суммирует / абсолютно суммирует / метод B, то говорят, что метод / матрица / A включает / абсолютно включает / метод / матрицу / B и записывают: $B \subset A \ (|B| \subset |A|)$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$ $/|A| \subset |B|$ и $|B| \subset |A|/$, то методы / матрицы / A и B называются равносильными / абсолютно равносильными / и это записывают: $A \sim B$ $(|A| \sim |B|)$.

Метод A называется консервативным / абсолютно консервативным /, если он сохраняет сходимость / абсолютную сходимость / ряда или последовательности. Если при этом он сохраняет и сумму сходящегося / абсолютно сходящегося / ряда или сходящейся / абсолютно сходящейся / последовательности, то он называется регулярным / абсолютно регулярным /.

Если два метода не могут суммировать / абсолютно суммировать / один и тот же ряд или одну и ту же последовательность к различным суммам, то они называются совместными / абсолютно совместными /.

Матрица $A = (a_{nk})$ называется нижней треугольной, если $a_{nk} = 0 \ (0 \le n < k)$.

Нижняя треугольная матрица $A = (a_{nk})$ называется нормальной, если $a_{nn} \ne 0 \ (n \ge 0)$.

Матрица $E = (e_{nk})$ называется единичной, если $e_{nk} = 0$ $(n \ne k)$ и $e_{nn} = 1 \ (n \ge 0)$.

Если $A \sim E$ $(|A| \sim |E|)$, то метод A называется равносильным сходимости / абсолютной сходимости /.

Матрица $C_\alpha = (C_{nk})$, где $\alpha > -1$,

$$C_{nk} = \frac{k}{n}\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}\binom{n+\alpha}{n}^{-1} (0 \le k \le n), \quad C_{nk} = 0 \, (0 \le n < k),$$

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)},$$

$k/n = 1$ при $k = n = 0$,

называется матрицей Чезаро порядка α преобразования ряда в ряд.

Включение матричных методов суммирования является одним из основных разделов теории суммирования рядов. В этом разделе изучаются включения различных методов суммирования как на множестве всех числовых рядов, так и на некоторых его подмножествах.

Поскольку в теории суммирования рядов рассматриваются различные виды суммируемости / обычная, абсолютная, сильная и др. /, то и включения методов носят различный характер. Наиболее полно изучены включения методов при обычной суммируемости. Существуют общие теоремы о включении матричных методов при различных видах суммируемости [I, 2], [3, стр. 63, 64].

При изучении некоторого метода суммирования его обычно сравнивают с наиболее важными методами такими как: методы Чезаро, метод Абеля-Пуассона, Бореля, методы Рисса, Вороного-Нерлунда и др. Отсюда следует важность теорем о включении этих методов и общих матричных методов. Для методов Чезаро такие теоремы, в случае обычной суммируемости, устанавливались в работах [I, 2, 4 - 6]. В частности, в работах [I, 2] установлены различные условия, достаточные для включения метода Чезаро натурального порядка в произвольный нижний треугольный консервативный метод суммирования, а также условия равносильности этих методов. Там же получены аналогичные теоремы для общих консервативных и регулярных методов на множестве ограниченных последовательностей. В работе [6] установлены достаточные условия равносильности методов Чезаро и общего консервативного метода на множестве ограниченных последовательностей.

Общие теоремы включения, упомянутые выше, позволяют установить подобные теоремы и в случае абсолютной суммируемости. Решению этих вопросов посвящены § I.I и § I.2.

В § I.I изучается абсолютное включение метода Чезаро натурального порядка в произвольный нижний треугольный абсолютно консервативный метод. Здесь доказана

Теорема I. Для того чтобы нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд абсолютно включала матрицу Чезаро натурального порядка ρ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_k k^{\rho+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \Delta^{\rho} \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

где $$\Delta^{\rho} \frac{a_{nk}}{k} = \sum_{i=0}^{\rho} (-1)^i \binom{\rho}{i} \frac{a_{n,k+i}}{k+i}.$$

Эта теорема является аналогом для абсолютной суммируемости известной теоремы Сасса [4]. При $\rho=1$ утверждение теоремы I легко следует из одной теоремы Кангро [3, стр. II8, теорема I7.4]. Из теоремы I, в качестве следствий, получен ряд условий, достаточных для абсолютного включения метода Чезаро натурального порядка в произвольный нижний треугольный абсолютно консервативный или абсолютно регулярный метод. В частности, доказано

Следствие 2. Если нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \geq 0 \; (k_0 \leq k \leq n-m) \quad \text{или} \quad \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \leq 0 \; (k_0 \leq k \leq n-m),$$

$$\sup_k k^p \sum_{i=0}^{m-1} |a_{k,k-i}| < \infty,$$

$$\sup_k k^i |\Delta^i a_k| < \infty \qquad (i=1,2,\dots,p),$$

где $a_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk}$, p - натуральное число, m - целое неотрицательное число, то $|C_p| \subset |A|$ / при $m=0$ второе условие отсутствует /.

При помощи одной теоремы Фрайди [7] о равносильности абсолютной сходимости нормального метода получены условия, достаточные для абсолютной равносильности метода Чезаро натурального порядка и общего нормального абсолютно консервативного метода.

Теорема 2. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{p+1} \left(\frac{|a_{kk}|}{k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) > 0,$$

где p - натуральное число, то $|C_p| \sim |A|$.

Из этой теоремы получено несколько следствий с более удобными для проверки условиями, например:

Следствие 5. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \geq 0 \qquad (k_0 \leq k \leq n-1),$$

$$k^i \Delta^i a_k \to 0 \qquad (k \to \infty,\ 1 \leq i \leq p),$$

$$\sup_k k^p |a_{kk}| < \infty,$$

$$\varliminf \left(\binom{k+p}{k} \left(|a_{kk}| + a_{kk} \right) - a_k \right) > 0,$$

где $a_k = \sum_{n=k}^{\infty} (k \geq 0)$, p - натуральное число, то $|C_p| \sim |A|$.

Следствие 8. Если нормальная абсолютно регулярная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{kk} > 0 \ (k \geq k_0), \quad \frac{a_{nk}}{k} \leq \frac{a_{n,k+1}}{k+1} \quad (k_0 \leq k \leq n-1),$$

$$\sup_k k a_{kk} < \infty,$$

то $|C_1| \sim |A|$ и матрицы C_1 и A абсолютно совместны.

В § I.2 рассматриваются бесконечнострочные матрицы. Здесь доказаны теорема и ряд следствий об абсолютном включении метода Чезаро натурального порядка в произвольный абсолютно консервативный метод на множестве рядов с ограниченными членами.

Теорема 3. Если абсолютно консервативная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_{k} k^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$\sup_{k} \sum_{k=k_0}^{\infty} k^{p+1} \left| \Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$k^{p-2} a_{nk} \to 0 \quad (k \to \infty,\ n \geqslant 0),$$

где p – натуральное число, то $|C_p| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами; если матрица A абсолютно регулярна, то матрицы C_p и A абсолютно совместны на множестве рядов с ограниченными членами.

Для метода средних арифметических / метода C_1 / получено

Следствие 10. Если абсолютно регулярная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{nk} \geqslant 0 \ (k \geqslant k_0,\ n \geqslant 0), \quad \frac{a_{nk}}{k} \geqslant \frac{a_{n,k+1}}{k+1} \ (k \geqslant k_0,\ n \geqslant 0),$$

$$\sup_{n} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{nk} < \infty,$$

то $|C_1| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами и матрицы C_1 и A абсолютно совместны на множестве рядов с ограниченными членами.

Теорема об абсолютной равносильности метода Чезаро натурального порядка и произвольного абсолютно консервативного метода получена с помощью теоремы Нагайник [8, теорема 4], точнее с помощью одного ее частного случая о равносильности абсо-

...нтной сходимости произвольного абсолютно консервативного метода на множестве рядов с ограниченными членами.

Теорема 4. Если абсолютно консервативная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_{k} k^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$\sup_{n} \sum_{k=k_0}^{\infty} k^{p+1} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty,$$

$$k^{p-2} a_{nk} \to 0 \quad (k \to \infty,\ n \geq 0),$$

$$\varliminf_{k \to \infty} k^{p+1} \left(\left| \Delta^p \frac{a_{kk}}{k} \right| - \sum_{n \neq k}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) > 0,$$

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(\binom{n+p}{n-1} \left| \Delta^p \frac{a_{nn}}{n} \right| - \sum_{n \neq k = k_0}^{\infty} \binom{k+p}{k-1} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) > 0,$$

где p – натуральное число, то $|C_p| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Получен также ряд условий для равносильности / абсолютной / матриц C_p и A, более удобных для проверки. Например, для метода средних арифметических справедливо

Следствие 13. Если абсолютно регулярная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{nk} \geq 0 \ (k \geq k_0,\ n \geq 0), \quad \frac{a_{nk}}{k} \geq \frac{a_{n,k+1}}{k+1} \ (k \geq k_0,\ n \geq 0),$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \left((k+1) a_{kk} - k a_{k,k+1} \right) > \frac{1}{2},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \le \frac{1}{2},$$

то $|C_1| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

При доказательстве основных результатов § I.I и § I.2 используются леммы, являющиеся аналогами для абсолютной суммируемости лемм, доказаных в работе [2].

Параграф I.3 посвящен равносильности методов суммирования на множествах рядов, задаваемых с помощью некоторых условий.

Обобщением понятий включения и совместности методов суммирования является понятие равносходимости методов на некотором множестве рядов.

Два метода суммирования, определяемые матрицами $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ преобразования последовательности в последовательность, называют равносходящимися на множестве рядов X, если для ряда из множества X с частными суммами S_n $(n \ge 0)$ сходятся ряды:

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k \ (n \ge 0), \quad \tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k \ (n \ge 0),$$

и $t_n - \tau_n \to 0 \ (n \to \infty)$. Если $t_n - \tau_n \to S \ne \infty \ (n \to \infty)$, то методы A и B называются равносходящимися в широком смысле на множестве X / см. [9, стр. 92]/.

Равносходимость некоторых методов суммирования, таких как полунепрерывные и дискретные методы Рисса, методы Чезаро, Вороного-Нерлунда, общих матричных методов суммирования изучали многие авторы: Рисс, Агнью, Кук, Циммеринг [IO, стр. 22]. В то же время, равносходимость в широком смысле мало изучена.

В § I.3 рассматривается равносходимость в широком смысле двух методов Чезаро натурального порядка. Здесь доказана

Теорема 5. Соотношение

$$C_n^p(S_i) - C_n^q(S_i) \to S \quad (n \to \infty)$$

выполнено, если и только если

$$C_n^{p+1}(ia_i) \to \frac{S}{T(p,q)} \quad (n \to \infty),$$

где

$$S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k \ (i \geq 0), \ T(p,q) = \sum_{k=0}^{q-p-1} \frac{1}{k+p+1},$$

p и q - целые числа, такие, что $0 \leq p < q$, S - конечное число.

Через $C_n^p(S_i)$ здесь обозначаются элементы последовательности, полученной при преобразовании матрицей Чезаро порядка p последовательности $\{S_i\}$.

Рассмотрена также равносходимость в широком смысле двух методов Гельдера натурального порядка. Матрица H_p метода Гельдера порядка p определяется следующим образом:

$$H_0 = E, \ H_1 = C_1, \ H_p = H_1 H_{p-1} \quad (p \geq 1).$$

Если через $H_n^p(S_i)$ обозначить средние Гельдера порядка p для последовательности $\{S_i\}$ / последовательность, полученная при преобразовании матрицей Гельдера порядка p последовательности $\{S_i\}$ /, то справедлива

Теорема 6. Соотношение

$$H_n^p(S_i) - H_n^q(S_i) \to S \quad (n \to \infty)$$

выполнено, если и только если

$$H_n^{p+1}(ia_i) \to \frac{S}{q-p} \quad (n \to \infty)$$

где $S_i=\sum\limits_{\kappa=0}^{i} a_\kappa \; (i\geqslant 0)$, p и q - целые числа такие, что $0\leq p< q$, S - конечное число.

Средние для последовательности $\{S_i\}$ вида:

$$l_n(S_i)=\frac{1}{\varphi_n}\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\kappa+1}S_\kappa \quad (n\geqslant 0),$$

где $\varphi_n=\sum\limits_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\kappa+1} \; (n\geqslant 0)$, определяют логарифмический метод суммирования в виде преобразования последовательности в последовательность. Для логарифмического метода доказана

Теорема 7. Соотношение

$$S_n-l_n(S_i)\to S \quad (n\to\infty)$$

выполнено, если и только если

$$\ln^{-1}(n+2)\sum_{\kappa=0}^{n}a_\kappa \ln(\kappa+1)\to S \; (n\to\infty),$$

где $S_i=\sum\limits_{\kappa=0}^{i}a_\kappa \; (i\geqslant 0)$.

Условие T, определяющее множество рядов, на котором метод B включает метод A, называют тауберовым условием для метода A, а теоремы, устанавливающие наиболее широкие тауберовы условия, называются теоремами тауберова типа.

Пусть X - множество рядов $x\left(\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty}u_\kappa\right)$, заданное некоторым тауберовым условием, например:

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\tau_n u_n|<\infty,$$

где $\{\tau_n\}$ - некоторая числовая последовательность. Обозначим через $A_n x$ и $B_n x$ средние методов A и B для ряда x.

Тауберовой константой, относящейся к указанному выше тауберовому условию, называется наименьшее число C, удовлетворяющее условию:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |A_m x - B_m x| \leq C\ell$$

для всех $x \in X$, при наличии некоторой связи $m = m(t)$, $n = n(t)$ между m и n с $m, n \to \infty$ при $t \to \infty$ [10, стр. 32].

Следовательно, числа: $T(p,q)$, $q-p$, 1 являются тауберовыми константами для, соответственно, методов Чезаро, Гельдера, логарифмического метода, относящимися, соответственно, к тауберовым условиям:

$$C_n^{p+1}(ia_i) \to S\,(n\to\infty),\quad H_n^{p+1}(ia_i) \to S\,(n\to\infty),$$

$$\ln^{-1}(n+2)\sum_{k=0}^{n} a_k \ln(k+1) \to S\,(n\to\infty).$$

В § 1.3 доказана лемма о равносходимости метода Чезаро натурального порядка и метода Абеля-Пуассона.

Последовательность $\{S_n\}$ суммируется методом Абеля-Пуассона к числу S, если ряд $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ сходится при $|x|<1$ и $\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = S$.

Лемма 12. Если $C_n^{p+1}(ia_i) \to 0\ (n\to\infty)$, то

$$C_n^{p}(S_i) - (1-x_n)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x_n^k \to 0\,(n\to\infty)$$

где $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ $(n \geq 0)$, $S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$ $(i \geq 0)$,

p - целое неотрицательное число.

Сходная задача решалась в [11].

Для последовательности $\{b_k\}$ через R_n обозначим наименьшую замкнутую выпуклую область комплексной плоскости такую, что $b_k \in R_n$ при $k \geq n$. Тогда множество $K = \bigcap_n R_n$ называется ядром последовательности $\{b_k\}$ [12, стр. 161].

Ядром функции $f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ называется объединение ядер последовательностей $\{f(x_n)\}$ для всех последовательностей $\{x_n\}$ таких, что $|x_n| < 1$, $x_n \to 1$ $(n \to \infty)$.

Множество всех частичных пределов последовательности $\{b_k\}$ называется производным множеством последовательности $\{b_k\}$.

Объединение всех производных множеств последовательностей $\{f(x_n)\}$ называется производным множеством функции $f(x)$.

Известно [12, стр. 168], что если $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то ядра последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ совпадают. Поэтому из теорем 5-7 и леммы 12 следуют утверждения о ядрах средних Чезаро, Гельдера, Абеля-Пуассона и логарифмических средних. В частности, получено

Следствие 15. Если $C_n^{p+1}(i a_i) \to 0$ $(n \to \infty)$, то ядра средних $C_n^{\alpha}(S_i)$, где $S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$ $(i \geq 0)$, для $\alpha \geq p$, совпадают с ядром функции $f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$.

Кроме того, производные множества средних $C_n^q(S_i)$ при целых $q \geq p \geq 0$ совпадают и содержатся в производном множестве функции $f(x)$.

Другие условия совпадения ядер средних Чезаро, Гельдера, Абеля-Пуассона рассматривались в работах [II, I3-I6]. Параграфы I.I – I.3 составляют содержание главы I.

Некоторые результаты параграфа I.I используются в главе 2. Эта глава посвящена изучению абсолютной суммируемости рядов методами Рогозинского и Рогозинского-Бернштейна.

Метод Рогозинского в виде преобразования ряда в последовательность определяется матрицей $\bar{R} = (\bar{r}_{nk})$, где

$$\bar{r}_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n} \ (0 \leq k \leq n), \quad \bar{r}_{nk} = 0 \ (0 \leq n < k), \quad \bar{r}_{00} = 0.$$

Хорошо известно [I7, стр. 488], что метод Рогозинского равносилен методу средних арифметических. В § 2.I доказано, что эти методы и абсолютно равносильны /теорема 8/.

Метод Рогозинского-Бернштейна в виде преобразования ряда в последовательность определяется матрицей $\bar{Б} = (\bar{b}_{nk})$, где

$$\bar{b}_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} \ (0 \leq k \leq n), \quad \bar{b}_{nk} = 0 \quad (0 \leq n < k).$$

Пусть задана последовательность чисел p_n $(n \geq 0)$ и

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \ (n \geq 0), \qquad P_0 \neq 0.$$

Тогда метод в виде преобразования последовательности в последовательность, определяемый матрицей $W = (w_{nk})$, где

$$w_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n} \ (0 \leq k \leq n), \quad w_{nk} = 0 \ (0 \leq n < k),$$

называется методом Вороного-Нерлунда (WN, p_n). Если $p_n = 1 \ (0 \leq n < q), \ p_n = 0 \quad (n \geq q)$, то соот-

...ствующий метод Вороного-Нерлунда называется методом Силь-...мана-Сасса и его матрица обозначается: Z_q .

Карамата [I8] установил, что метод Рогозинского-Берн...тейна равносилен методам $C_1 Z_2$ и $Z_2 C_1$, то есть ме...тодам, определяющимся произведением матрицы C_1 на матрицу Z_2 и произведением матрицы Z_2 на матрицу C_1 . В ...теоремах 9и I0 доказано, что метод Рогозинского-Бернштейна абсолютно равносилен некоторому методу Вороного-Нерлунда и методу $C_1 Z_2$. Кроме того, в теореме I2 установлено, что методы $C_1 Z_2$ и $Z_2 C_1$ не равносильны абсолютно, следова...тельно метод Рогозинского-Бернштейна и метод $Z_2 C_1$ не рав...носильны абсолютно. В теореме II изучается абсолютное вклю...чение методов Чезаро и метода Рогозинского-Бернштейна.

Теорема II. Включения $|C_\alpha| \subset |Б| \subset |C_\beta|$ справед...ливы, если и только если $-1 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 2$.

Аналогичный результат имеет место и для обычной суммиру...емости. Отдельные элементы этого включения для обычной сум...мируемости были установлены различными авторами [I9-2I] .

В § 2.2 в качестве приложения теоремы 9 рассматривается абсолютное суммирование рядов Фурье интегрируемых функций методом Рогозинского-Бернштейна. Известно [22, стр. 638] , что принцип локализации Римана для абсолютно сходящихся ря...дов Фурье не выполняется. В этом случае говорят, что абсо...лютная сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ не является локальным свойством функции $f(x)$. Однако Бозанкэт [23] доказал, что уже абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(x)$ методом Чезаро порядка $\alpha > 1$ является локальным свойством функции $f(x)$, то есть для абсолютно суммируе...мых методом Чезаро порядка $\alpha > 1$ рядов Фурье интегрируе...мых функций выполняется принцип локализации Римана.

Бозанкэт и Кестельман [24] установили, что абсолютная суммируемость методом средних арифметических ряда Фурье функции $f(x)$ не является локальным свойством функции $f(x)$. Ряд авторов исследовали другие методы абсолютного суммирования на локальное свойство. Изучалась также абсолютная суммируемость более общих рядов. Обзор результатов по этому вопросу сделан в работах [25-28]. В этих работах установлены общие достаточные условия того, чтобы абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(x)$ некоторым матричным методом являлась или не являлась локальным свойством функции $f(x)$. Эти теоремы доказаны и для более общих рядов, в частности, для продифференцированных рядов Фурье.

В § 2.2 доказано, что решить вопрос о том, является ли абсолютная суммируемость методом Рогозинского-Бернштейна ряда Фурье интегрируемой функции $f(x)$ локальным свойством функции $f(x)$, с помощью этих теорем нельзя. Однако, пользуясь идеями работ [24, 25], можно доказать теорему, дающую ответ на поставленный выше вопрос. Доказана

Теорема 13. Пусть нормальная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в последовательность удовлетворяет условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{D}_n^{(p)} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \eta_{n-i} \right| < \infty,$$

где

$$\mathcal{D}_n^{(p)} = \sup_k \left| a_{k+n,k+n} \sum_{i=0}^{p} \eta_{k+n-i,k} \right|, \quad A^{-1} = (\eta_{nk}),$$

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk} \ (n \geq 0), \quad p$$ - некоторое целое неотрицательное число.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\lambda_n a_{nn}| = \infty, \quad \lambda_n \sim \lambda_{n+1} \ (n \to \infty),$$

то абсолютная суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{d^2}{dt^2} A_n(t)$ матрицей A не является локальным свойством вещественной, 2π - периодической функции $f(x)$, обладающей абсолютно непрерывной на промежутке $[-\pi; \pi]$ производной $f^{(2-1)}(x)$, и для которой ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$$

является рядом Фурье.

Из теоремы I3 следует, что абсолютная суммируемость ряда Фурье интегрируемой функции $f(x)$ методом Рогозинского-Бернштейна не является локальным свойством функции $f(x)$.

Параграфы 2.I и 2.2 составляют содержание второй главы. Нумерация теорем, лемм, следствий, определений - сквозная. Нумерация формул глав I и 2 также сквозная и продолжает нумерацию формул введения. Литература приведена в порядке упоминания.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29-31].

ГЛАВА I. ОБ АБСОЛЮТНОМ ВКЛЮЧЕНИИ И АБСОЛЮТНОЙ РАВНОСИЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ.

Приведем некоторые определения и обозначения.

Через (x_n) будем обозначать матрицу (x_{nk}), где $x_{nk}=0$ $(k \neq 0)$, $x_{n0}=x_n$ $(n \geq 0)$, x_n $(n \geq 0)$ - элементы некоторой числовой последовательности.

Произведением двух матриц $A=(a_{nk})$ и $B=(b_{nk})$ называют матрицу $D=(d_{nk})$, где $d_{nk}=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ni} b_{ik}$ и все d_{nk} $(n, k \geq 0)$ существуют. Произведение двух матриц обозначают: $D=AB$. Теперь равенства / 2 / можно записать в матричной форме: $(t_n)=A(u_n)$, $(\tau_n)=A(S_n)$.

Матрица X, удовлетворяющая условию: $XA=AX=E$, называется двусторонней обратной матрицей для матрицы A. Ее будем обозначать A^{-1}.

На протяжении всей работы условимся считать элемент последовательности или член ряда с отрицательным индексом равными нулю.

§ I.I. Абсолютное включение и абсолютная равносильность метода Чезаро натурального порядка и произвольного нижнего треугольного абсолютно консервативного метода суммирования.

Доказательство следующей леммы не отличается существенно от доказательства леммы I работы [I] и теоремы I2.I работы [3], но в названных работах она доказана для матриц преобразования последовательности в последовательность, поэтому ниже приводится доказательство для матриц преобразования ряда в ряд.

Лемма I. Пусть A - нижняя треугольная, а B - нормальная матрицы преобразования ряда в ряд.

Для того чтобы матрица A абсолютно включала матрицу B, необходимо и достаточно, чтобы матрица AB^{-1} была абсолютно консервативной матрицей преобразования ряда в ряд.

Для абсолютной совместности матриц A и B необходимо и достаточно, чтобы матрица AB^{-1} была абсолютно регулярной матрицей преобразования ряда в ряд.

Доказательство. Так как матрица B нормальна, то существует единственная нижняя треугольная двусторонняя обратная для B матрица B^{-1} [12, стр. 31, 34].

Пусть $u_n\ (n \geq 0)$ - элементы некоторой последовательности чисел. Положив: $(t_n) = A(u_n)$, $(p_n) = B(u_n)$ и приняв во внимание, что умножение нижних треугольных матриц ассоциативно [12, стр. 20], можно записать равенство:

$$(t_n) = A(u_n) = AB^{-1}B(u_n) = AB^{-1}(p_n). \qquad /3/$$

Пусть матрица AB^{-1} абсолютно консервативна, а матрица B абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Тогда получим, что $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| < \infty$ и, следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} |t_n| < \infty$, то есть матрица A абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, поэтому $|B| \subset |A|$.

Если же матрица AB^{-1} абсолютно регулярна, то из равенства /3/ следует, что матрицы A и B абсолютно совместны.

Пусть $|B| \subset |A|$. Возьмем произвольный абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ и положим: $(a_n)=B^{-1}(q_n)$, $(s_n)=A(a_n)$. Так как $B(a_n)=BB^{-1}(q_n)=(q_n)$, то можно записать равенство:

$$(s_n)=A(a_n)=AB^{-1}B(a_n)=AB^{-1}(q_n). \qquad /4/$$

Но матрица B абсолютно суммирует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, поэтому и матрица A его абсолютно суммирует, то есть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|s_n|<\infty$, и из равенства /4/ следует, что матрица AB^{-1} абсолютно консервативна.

Если же $|B|\subset|A|$ и матрицы A и B абсолютно совместны, то получим, что при $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n = Q$ будет: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n = Q$, то есть матрица AB^{-1} абсолютно регулярна. Лемма I доказана.

Теорема I. Для того чтобы нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд абсолютно включала матрицу Чезаро натурального порядка C_p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty, \qquad /5/$$

где $\Delta^p \dfrac{a_{nk}}{k}=\sum\limits_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\dfrac{a_{n,k+i}}{k+i}$.

Доказательство. Поскольку матрица C_p нормальна, то для включения $|C_p|\subset|A|$, по лемме I, необходимо и достаточно, чтобы матрица $X=AC_p^{-1}=(x_{nk})$ была абсолютно консервативной матрицей преобразования ряда в ряд.

Известно [3, стр. 86], что $C_p^{-1} = (\bar{c}_{nk})$, где

$$\bar{c}_{nk} = \frac{k}{n}\binom{k+p}{k}\binom{n-k-p-1}{n-k} \qquad (0 \le k \le n),$$

$$\bar{c}_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k), \quad \frac{k}{n} = 1 \text{ при } k = n = 0.$$

Поэтому имеем:

$$x_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k+i}\,\bar{c}_{k+i,k} = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k+i}\,\frac{k}{k+i}\binom{k+p}{k}\binom{i-p-1}{i} =$$

$$= k\binom{k+p}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{i-p-1}{i}\frac{a_{n,k+i}}{k+i} = (p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-p)(1-p)\cdots(i-1-p)}{i!}\times$$

$$\times\frac{a_{n,k+i}}{k+i} = (p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\frac{a_{n,k+i}}{k+i} = (p+1)\binom{k+p}{k-1}\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}$$

$$(0 < k \le n), \quad x_{n0} = a_{n0} \quad (n \ge 0), \quad x_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k).$$

По теореме Кноппа-Лоренца [3, стр. 34], для того чтобы матрица $X = (x_{nk})$ была абсолютно консервативной матрицей преобразования ряда в ряд, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |x_{nk}| < \infty. \qquad /6/$$

Поскольку матрица A абсолютно консервативна, то $\sum_{n=k}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (k \ge 0)$. Далее имеем:

$$\sum_{n=k}^{N}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right| = \sum_{n=k}^{N}\left|\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\frac{a_{n,k+i}}{k+i}\right| \le$$

$$\le \sum_{n=k}^{N}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}|a_{n,k+1}| = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\sum_{n=k}^{N}|a_{n,k+i}|.$$

Следовательно, ряды $\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}\right|$ $(k>0)$ сходятся и условие /6/ равносильно условию:

$$\sup_{k}(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty. \qquad /7/$$

Но

$$\binom{k+\rho}{k-1}=\frac{k(k+1)\cdots(k+\rho)}{(\rho+1)!}\sim\frac{k^{\rho+1}}{(\rho+1)!} \quad (k\to\infty),$$

поэтому условие /7/ равносильно условию /5/. Теорема I доказана.

При $\rho=1$ утверждение теоремы I легко следует из одной теоремы Кангро [3, стр. II8 теорема I7.4].

Чтобы матрица X была абсолютно регулярной, необходимо и достаточно выполнения условия /6/ и условия:
$\sum_{n=0}^{\infty}x_{nk}=1$ $(k\geqslant 0)$ [3, стр. 35]. Пусть матрица A абсолютно регулярна и удовлетворяет условиям теоремы I. Тогда матрица X, по доказанному выше, абсолютно консервативна и поэтому удовлетворяет условию /6/. Из абсолютной регулярности матрицы A следует, что матрица X абсолютно регулярна. Действительно:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_{n0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n0}=1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_{nk}=\sum_{n=k}^{\infty}x_{nk}=\sum_{n=k}^{\infty}(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}=$$

$$=(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{\rho}(-1)^{i}\binom{\rho}{i}\frac{a_{n,k+i}}{k+i}=$$

$$=(p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\frac{1}{k+i}\sum_{n=k}^{\infty}a_{n,k+i}=$$

$$=(p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\frac{1}{k+i}=(p+1)\binom{k+p}{k-1}\frac{1}{p+1}\binom{k+p}{k-1}^{-1}=1\ (k>0).$$

При перемене порядка суммирования использовано то, что ряды $\sum_{n=k}^{\infty}a_{nk}\ (k\geq 0)$ сходятся абсолютно, а также использовано равенство [3, стр. I40]:

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\frac{1}{k+i}=\frac{1}{p+1}\binom{k+p}{k-1}^{-1}. \qquad /8/$$

Таким образом матрица X удовлетворяет условиям абсолютной регулярности и из леммы I следует, что матрицы C_p и A абсолютно совместны. Следовательно, доказано

Следствие I. Для включения $|C_p|\subset|A|$ и абсолютной совместности матриц C_p и A, где $A=(a_{nk})$ - нижняя треугольная абсолютно регулярная матрица преобразования ряда в ряд, p - натуральное число, необходимо и достаточно выполнение условия /5/.

Следствие 2. Если нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\geq 0\ (k_0\leq k\leq n-m)\ \text{или}\ \Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\leq 0\ (k_0\leq k\leq n-m),$$

$$\sup_k k^p\sum_{i=0}^{m-1}|a_{k,k-i}|<\infty$$

$$\sup_{k} k^i \left|\Delta^i a_k\right| < \infty \quad (i=1,2,\dots,p), \qquad /9/$$

где $a_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_{nk}$. p – натуральное число, m – целое неотрицательное число, то $|C_p| \subset |A|$ / при $m=0$ второе условие отсутствует/.

Доказательство. Используя равенство /8/ и равенство [3, стр. 180]:

$$\Delta^p(x_n y_n) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \Delta^i x_n \, \Delta^{p-i} y_{n+i}, \qquad /10/$$

получим:

$$(p+1)\binom{k+p}{k-1}\Delta^p \frac{a_k}{k} = (p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\Delta^i a_k \, \Delta^{p-i}\frac{1}{k+i} =$$

$$=(p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\Delta^i a_k \frac{1}{p-i+1}\binom{k+p}{k+i-1}^{-1} =$$

$$=\sum_{i=0}^{p}\Delta^i a_k \frac{(p-i+1)!\,(k+i-1)!\,p!\,(k+p)!\,(p+1)}{(k+p)!\,(p-i+1)\,(p-i)!\,i!\,(p+1)!\,(k-1)!} = \sum_{i=0}^{p}\binom{k-1+i}{k-1}\Delta^i a_k .$$

Покажем, что матрица A удовлетворяет условию /5/ теоремы I. Действительно, для $k \geqslant k_0$ имеем:

$$(p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right| = (p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{n=k}^{k+m-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right| +$$

$$+(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left|\sum_{n=k+m}^{\infty}\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right| \leq (p+1)\binom{k+p}{k-1}\sum_{n=k}^{k+m-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\frac{|a_{n,k+i}|}{k+i} +$$

$$+(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left|\sum_{n=k}^{\infty}\Delta^p\frac{a_{nk}}{k} - \sum_{n=k}^{k+m-1}\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right| \leq$$

$$\leq 2(p+1)\binom{k+p}{k-1} T \sum_{n=k}^{k+m-1} \sum_{i=0}^{p} |a_{n,k+i}| + \left|(p+1)\binom{k+p}{k-1} \Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k}\right| \leq$$

$$\leq 2(p+1)\binom{k+p}{k-1} T \sum_{n=k}^{k+m-1} \sum_{i=0}^{m-1} |a_{n,k+i}| + \sum_{i=0}^{p} \binom{k+i-1}{k-1} |\Delta^{i} a_{k}|,$$

где T - константа, зависящая лишь от p . Поскольку

$$\binom{k-1+i}{k-1} = \frac{k(k+1)\cdots(k-1+i)}{i!} \sim \frac{k^{i}}{i!} \quad (k \to \infty,\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\sup_{k} |a_{k}| = \sup_{k} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} \right| \leq \sup_{k} \sum_{n=k}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

то из полученых неравенств и условий следствия 2 будем иметь:

$$\sup_{k} (p+1)\binom{k+p}{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left|\Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k}\right| < \infty .$$

Таким образом, матрица A удовлетворяет условиям теоремы I и поэтому $|C_p| \subset |A|$. Следствие 2 доказано.

Если матрица $A = (a_{nk})$ абсолютно регулярна в условиях следствия 2, то

$$a_{k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} = 1 \ (k \geq 0) \text{ и } \Delta^{i} a_{k} = 0 \quad (k \geq 0,\ i > 0)$$

и условие /9/ выполнено. Поэтому из следствий I и 2 получаем

Следствие 3. Если нижняя треугольная абсолютно регулярная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k} \geq 0 \ (k_0 \leq k \leq n-m) \text{ или } \Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k} \leq 0 \ (k_0 \leq k \leq n-m),$$

$$\sup_{k} k^{p} \sum_{i=0}^{m-1} |a_{k,k-i}| < \infty,$$

где p - натуральное число, m - целое неотрицательное число, то $|C_p| \subset |A|$ и матрицы C_p и A абсолютно совместны / при $m=0$ второе условие отсутствует /.

Лемма 2. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и $\Delta^{\alpha} x_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ при $\alpha > 0$, то $\Delta^{\beta} x_n \geq 0$ при $0 < \beta < \alpha$; если $\alpha \geq 1$, то $\binom{n+\beta}{n} \Delta^{\beta} x_n \to 0$ $(n \to \infty,\ 0 < \beta \leq \alpha - 1)$.

Это утверждение доказано в [32].

Следствие 4. Если нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{nk} \geq 0 \quad (k_0 \leq k \leq n),$$

$$\Delta^{p+1} a_{nk} \geq 0 \quad (k_0 \leq k \leq n), \qquad /11/$$

то $|C_p| \subset |A|$, где p - натуральное число.

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 2 имеем:

$$(p+1)\binom{k+p}{k-1} \Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k} = \sum_{i=0}^{p} \binom{k-1+i}{k-1} \Delta^{i} a_{nk}. \qquad /12/$$

Поскольку матрица A абсолютно консервативна, то все ее элементы меньше некоторого положительного числа. Поэтому, приняв во внимание условие /11/, по лемме 2 получим, что $\Delta^{i} a_{nk} \geq 0$ $(k_0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq p)$. Теперь из равенства /12/ следует, что $\Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k} \geq 0$ $(k_0 \leq k \leq n)$. Далее имеем:

$$\Delta^{p+1} a_k = \Delta^{p+1} \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=k}^{\infty} \Delta^{p+1} a_{nk} \geq 0 \quad (k \geq k_0).$$

При доказательстве следствия 2 было показано, что последовательность $\{a_k\}$ ограничена. Следовательно, применяя к этой последовательности лемму 2, получим: $k^i |\Delta^i a_k| \to 0$ ($k \to \infty$, $1 \le i \le p$). Матрица A удовлетворяет всем условиям следствия 2, в которых положено: $m=0$. Поэтому $|C_p| \subset |A|$.

Если в условиях следствия 4 матрицу A взять абсолютно регулярной, то матрицы A и C_p, по следствию I, будут абсолютно совместны.

Лемма 3. Пусть A - нижняя треугольная, а B - нормальная матрицы преобразования ряда в ряд.

Для того чтобы матрицы A и B были абсолютно равносильны, необходимо и достаточно, чтобы матрица AB^{-1} была равносильной абсолютной сходимости матрицей преобразования ряда в ряд.

Доказательство. Пусть матрица AB^{-1} равносильна абсолютной сходимости. Тогда по лемме I получим: $|B| \subset |A|$. Предположим, что $|A| \not\subset |B|$. Тогда существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, абсолютно суммируемый матрицей A и не суммируемый абсолютно матрицей B. Как и при доказательстве леммы I запишем равенство:

$$(t_n) = A(u_n) = AB^{-1}B(u_n) = AB^{-1}(p_n),$$

где $(p_n) = B(u_n)$. Из сказаного выше следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_n| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |p_n| = \infty,$$

то есть матрица AB^{-1} абсолютно суммирует ряд, который не сходится абсолютно. А это противоречит предположению, что матрица AB^{-1} равносильна абсолютной сходимости. Следовательно, $|A| \subset |B|$ и $|A| \sim |B|$.

Пусть $|A| \sim |B|$. Тогда $|B| \subset |A|$ и по лемме I матрица AB^{-1} абсолютно консервативна, то есть $|E| \subset |AB^{-1}|$.

Пусть матрица AB^{-1} абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$

то есть $(t_n)=AB^{-1}(p_n)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}|t_n|<\infty$. Отсюда следует,

что матрица A абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$, где $(q_n)=B^{-1}(p_n)$. Из включения $|A|\subset|B|$ следует, что и матрица B абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ и поскольку верно равенство: $B(q_n)=BB^{-1}(p_n)=(p_n)$, то $\sum_{n=0}^{\infty}|p_n|<\infty$. Следовательно, $|AB^{-1}|\subset|E|$ и $|AB^{-1}|\sim|E|$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4 [7]. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условию:

$$\varliminf_{k\to\infty}\left(|a_{kk}|-\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_{nk}|\right)>0,$$

то она равносильна абсолютной сходимости.

Лемма 4 получена также в работе [8].

Теорема 2. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty, \qquad /13/$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{\rho+1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0, \qquad /I4/$$

где ρ - натуральное число, то $|C_\rho|\sim|A|$.

Доказательство. При доказательстве теоремы I было получено, что $AC_\rho^{-1}=(x_{nk})$, где

$$x_{nk}=(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}\ (1\le k\le n),\ x_{n0}=a_{n0}(n\ge 0),$$

$$x_{nk}=0\ (0\le n< k).$$

Так как матрица A нормальна, то имеем:

$$x_{nk}=(\rho+1)\binom{n+\rho}{n-1}\Delta^{\rho}\frac{a_{nn}}{n}=(\rho+1)\binom{n+\rho}{n-1}\sum_{i=0}^{\rho}(-1)^i\binom{\rho}{i}\frac{a_{n,n+i}}{n+i}=$$

$$=(\rho+1)\binom{n+\rho}{n-1}\frac{a_{nn}}{n}>0\ (n>0),\ x_{00}=a_{00}>0,$$

то есть матрица AC_ρ^{-1} нормальна. Условие /I3/, как было доказано при доказательстве теоремы I, обеспечивает абсолютную консервативность матрицы AC_ρ^{-1} . И так как условие:

$$\lim_{k\to\infty}(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\left(\left|\Delta^{\rho}\frac{a_{kk}}{k}\right|-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0$$

равносильно условию /I4/, то по лемме 4 матрица AC_ρ^{-1} равносильна абсолютной сходимости. Теперь, из леммы 3 получаем: $|C_\rho|\sim|A|$ и теорема 2 доказана.

Если в теореме 2 матрицу A взять абсолютно регулярной, то по следствию I матрицы C_ρ и A будут абсолютно совместны.

Следствие 5. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^{\rho}\frac{a_{nk}}{k}\ge 0 \qquad (k_0\le k\le n-1), \qquad /I5/$$

$$k^i \Delta^i a_k \to 0 \quad (k \to \infty,\ 1 \le i \le p), \qquad /16/$$

$$\sup_k k^p |a_{kk}| < \infty, \qquad /17/$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\binom{k+p}{k} (|a_{kk}| + a_{kk}) - a_k \right) > 0, \qquad /18/$$

где $a_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_{nk}\ (k \ge 0)$, p - натуральное число, то $|C_p| \sim |A|$.

Доказательство. Легко видеть, что при выполнении условий /5/, /16/, /17/ матрица A удовлетворяет условиям следствия 2, в которых положено: $m = 1$. Следовательно, как показано при доказательстве следствия 2, матрица A удовлетворяет условию /13/ теоремы 2. Покажем, что при условиях следствия 5 выполняется и условие /14/ теоремы 2. Действительно:

$$(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|\right) =$$

$$= (p+1)\binom{k+p}{k-1}\left(\frac{|a_{kk}| + a_{kk}}{k} - \sum_{n=k}^{\infty} \Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right) =$$

$$= \binom{k+p}{k}(|a_{kk}| + a_{kk}) - (p+1)\binom{k+p}{k-1}\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} =$$

$$= \binom{k+p}{k}(|a_{kk}| + a_{kk}) - \sum_{i=0}^{p} \binom{k-1+i}{k-1} \Delta^i a_k .$$

Теперь, из условий /I5/ и /I6/ получим

$$\lim_{k\to\infty} k^{p+1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)=$$

$$=p!\lim_{k\to\infty}(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)=$$

$$=p!\lim_{k\to\infty}\left(\binom{k+p}{k}\left(|a_{kk}|+a_{kk}\right)-\sum_{i=0}^{p}\binom{k-1+i}{k-1}\Delta^{i}a_{k}\right)=$$

$$=p!\lim_{k\to\infty}\left(\binom{k+p}{k}\left(|a_{kk}|+a_{kk}\right)-a_{k}\right)>0.$$

Выполнены все условия теоремы 2, поэтому $|C_p|\sim|A|$.

Следствие 6. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^{p}\frac{a_{nk}}{k}\leq 0\quad(k_0\leq k\leq n-1),$$

$$k^{i}\Delta^{i}a_{k}\to 0\quad(k\to\infty,\ 1\leq i\leq p),$$

$$\sup_{k} k^{p}|a_{kk}|<\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\binom{k+p}{k}\left(|a_{kk}|-a_{kk}\right)+a_{k}\right)>0,$$

где $a_k=\sum_{n=k}^{\infty}a_{nk}\ (k\geq 0)$, p – натуральное число,

то $|C_p|\sim|A|$.

Доказательство. Так же как и при доказательстве следстния 5 получим, что матрица A удовлетворяет условию /I3/ теоремы 2. Далее имеем:

$$\varliminf_{k\to\infty} k^{p+1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)=$$

$$=p!\varliminf_{k\to\infty}(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)=$$

$$=p!\varliminf_{k\to\infty}\left(\binom{k+p}{k}\left(|a_{kk}|-a_{kk}\right)+\sum_{i=0}^{p}\binom{k-1+i}{k-1}\Delta^i a_k\right)=$$

$$=p!\varliminf_{k\to\infty}\left(\binom{k+p}{k}\left(|a_{kk}|-a_{kk}\right)+a_k\right)>0.$$

Выполнены все условия теоремы 2, поэтому $|C_p|\sim|A|$.

Если в условиях следствий 5 и 6 матрицу A взять абсолютно регулярной, то $a_k=1\ (k\geq 0)$ и условие /I6/ выполняется. Если кроме того $a_{kk}\geq 0\ (k\geq k_0)$, то условие /I8/ будет равносильно условию: $\varliminf_{k\to\infty} a_{kk}\binom{k+1}{k}>\frac{1}{2}$.

Поэтому справедливы такие утверждения:

Следствие 7. Если нормальная абсолютно регулярная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{nk}\geq a_{n,k+1}\geq 0 \qquad (k_0\leq k\leq n-1),$$

$$\sup_k k a_{kk}<\infty, \qquad \varliminf_{k\to\infty} k a_{kk}>\frac{1}{2},$$

то $|C_1|\sim|A|$ и матрицы C_1 и A абсолютно совместны.

Следствие 8. Если нормальная абсолютно регулярная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{kk}>0 \ (k\geq k_0), \quad \frac{a_{nk}}{k}\leq\frac{a_{n,k+1}}{k+1} \ (k_0\leq k\leq n-1),$$

$$\sup_k k a_{kk}<\infty,$$

то $|C_1|\sim|A|$ и матрицы C_1 и A абсолютно совместны.

§ 1.2. Абсолютное включение и абсолютная равносильность метода Чезаро натурального порядка и произвольного абсолютно консервативного метода суммирования на множестве рядов с ограниченными членами.

Лемма 5. Пусть $A=(a_{nk})$ - произвольная матрица преобразования ряда в ряд, а $B=(b_{nk})$ - матрица преобразования ряда в ряд, удовлетворяющая условию:

$$\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}|<\infty, \qquad /19/$$

и существует матрица $X=(x_{nk})$ преобразования ряда в ряд такая, что $XB=A$ и выполняется условие:

$$\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}|x_{nk}|<\infty. \qquad /20/$$

Если матрица X абсолютно консервативна, то $|B|\subset|A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Если матрица X абсолютно регулярна, то матрицы A и B абсолютно совместны на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Пусть матрица B абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$, где $\sup_n|u_n|<\infty$.

Обозначим: $(\rho_n)=B(u_n)$. Поскольку матрицы B, X и

(u_n) удовлетворяют соответственно условиям /19/, /20/ и $\sup\limits_n |u_n| < \infty$, то их умножение ассоциативно [12, стр. 42]. Поэтому, используя равенство $XB = A$ получим:

$$(q_n) = X(p_n) = XB(u_n) = A(u_n), \text{ где } \sum_{n=0}^{\infty} |p_n| < \infty .$$

Если матрица X абсолютно консервативна, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty$ и $|B| \subset |A|$. Если же матрица X абсолютно регулярна, то матрицы A и B будут абсолютно совместны. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Если матрица $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию:

$$k^{p-2} a_{nk} \to 0 \quad (k \to \infty,\ n \geq 0), \qquad /21/$$

где p - натуральное число, то существует единственная матрица $X = (x_{nk})$ такая, что $XC_p = A$. Элементы матрицы X определяются следующим образом:

$$x_{nk} = (p+1)\binom{k+p}{k-1}\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \quad (n \geq 0,\ k > 0), \qquad /22/$$
$$x_{n0} = a_{n0} \quad (n \geq 0).$$

Доказательство. Покажем, что матрица $X = (x_{nk})$, где $x_{nk}\ (n, k \geq 0)$ определяются по формулам /22/, является решением матричного уравнения $XC_p = A$.

Пусть $XC_p = (b_{nk})$. Тогда имеем:

$$b_{n0} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ni} c_{i0} = x_{n0} = a_{n0} \quad (n \geq 0).$$

Выбрав m достаточно большим в сравнении с k запишем m-ю частную сумму ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_{ni} c_{ik}$

$$\sum_{i=0}^{m} x_{ni} c_{ik} = \sum_{i=k}^{m} x_{ni} c_{ik} =$$

$$= \sum_{i=k}^{m} (p+1)\binom{i+p}{i-1}\Delta^{p}\frac{a_{ni}}{i}\,\frac{k}{i}\binom{i-k+p-1}{i-k}\binom{i+p}{i}^{-1} =$$

$$= \sum_{i=k}^{m} k\binom{i-k+p-1}{i-k}\Delta^{p}\frac{a_{ni}}{i} = \sum_{i=k}^{m} k\binom{i-k+p-1}{i-k}\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}\binom{p}{j}\frac{a_{n,i+j}}{i+j} =$$

$$= \sum_{i=k}^{k+p} k\frac{a_{ni}}{i}(-1)^{i-k}\sum_{j=0}^{i-k}(-1)^{j}\binom{p}{i-k-j}\binom{j+p-1}{j} + \sum_{i=k+p+1}^{m} k\frac{a_{ni}}{i}(-1)^{p}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}\binom{p}{j}\binom{j+i-k-1}{p-1} + \sum_{i=m+1}^{m+p} k\frac{a_{ni}}{i}(-1)^{p}\sum_{j=0}^{m+p-i}(-1)^{j}\binom{p}{j}\binom{j+i-k-1}{p-1}.$$

Воспользуемся известными тождествами [33, стр. 83, з/] :

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{j}\binom{j+r-1}{j}\binom{r}{q-j} = 0 \quad (2\le q\le r), \qquad /23/$$

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\binom{j+q-1}{r-1}\binom{r}{j} = 0 \quad (q\ge 2,\ q>r). \qquad /24/$$

Легко проверить, что равенство /23/ верно и при $r\ge q\ge 1$.
В равенствах /23/ и /24/ положим: $r=p$, $q=i-k$ $(k+1\le i\le m)$.
Поскольку $p\ge i-k\ge 1$ при $k+1\le i\le k+p$, то из равенства /23/ получим:

$$\sum_{j=0}^{i-k}(-1)^{j}\binom{p}{i-k-j}\binom{j+p-1}{j} = 0 \quad (k+1\le i\le k+p). \qquad /25/$$

Так как $i-k>p$, $i-k\ge 2$ при $i\ge k+p+1$, то из равенства /24/ получим:

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^{j}\binom{p}{j}\binom{j+i-k-1}{p-1} = 0 \quad (i\ge k+p+1). \qquad /26/$$

Приняв во внимание условие /21/, будем иметь:

$$\left|\sum_{i=m+1}^{m+p} k\,\frac{a_{ni}}{i}(-1)^p\sum_{j=0}^{m+p-i}(-1)^j\binom{p}{j}\binom{j+i-k-1}{p-1}\right| \le$$

$$\le k\sum_{i=m+1}^{m+p}\frac{|a_{ni}|}{i}\sum_{j=0}^{m+p-i}\binom{p}{j}\binom{j+i-k-1}{p-1} =$$

$$= k\sum_{i=m+1}^{m+p}\frac{|a_{ni}|}{i}\sum_{j=0}^{m+p-i}\frac{p!\,(j+i-k-1)!}{j!\,(p-j)!\,(p-1)!\,(j+i-k-p)!} \le$$

$$\le pk\sum_{i=m+1}^{m+p}\frac{|a_{ni}|}{i}\sum_{j=0}^{m+p-i}(j+i-k-p+1)(j+i-k-p+2)\cdots(j+i-k-1) \le$$

$$\le pk\sum_{i=m+1}^{m+p}\frac{|a_{ni}|}{i}\sum_{j=0}^{m+p-i}(j+i-k-1)^{p-1} \le p^2 k\sum_{i=m+1}^{m+p}\frac{|a_{ni}|}{i}(i+p)^{p-1}\xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Используя полученые выше соотношения, будем иметь:

$$\sum_{i=k}^{m} x_{ni}\,c_{ik} = a_{nk} + \sum_{i=m+1}^{m+p} k\,\frac{a_{ni}}{i}(-1)^p\sum_{j=0}^{m+p-i}(-1)^j\binom{p}{j}\binom{j+i-k-1}{p-1} \to$$

$$\to a_{nk} \quad (m\to\infty),$$

то есть $b_{nk} = a_{nk}\ (n \ge 0,\ k \ge 1)$. Следовательно, матрица X, элементы которой определяются по формулам /22/, является решением матричного уравнения $XC_p = A$.

Покажем, что это решение единственное. Пусть матрица $X = (x_{nk})$ является решением уравнения $XC_p = A$ и $XC_p = (b_{nk})$. Тогда получим:

$$b_{n0} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ni}\,c_{i0} = x_{n0} \quad (n \ge 0),$$

$$b_{nk} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ni}\,c_{ik} = \sum_{i=k}^{\infty} x_{ni}\,c_{ik} =$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} x_{ni} \frac{k}{i} \binom{i-k+p-1}{i-1} \binom{i+p}{i}^{-1} \quad (n \geq 0, k \geq 1).$$

Покажем, что $X = (XC_p)\,C_p^{-1}$. Действительно, используя равенства /25/ и /26/ получим:

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_{ni} \bar{C}_{ik} = \sum_{i=k}^{k+p} b_{ni} \frac{k}{i} \binom{k+p}{k} \binom{i-k-p-1}{i-k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} b_{n,k+i} \frac{k}{k+i} \binom{k+p}{k} \binom{i-p-1}{i} = k \binom{k+p}{k} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{b_{n,k+i}}{k+i} =$$

$$= k \binom{k+p}{k} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{1}{k+i} \sum_{j=k+i}^{\infty} x_{nj} \frac{k+i}{j} \binom{j-k-i+p-1}{j-k-i} \binom{j+p}{j}^{-1} =$$

$$= k \binom{k+p}{k} \sum_{i=k}^{k+p} \frac{x_{ni}}{i} \binom{i+p}{i}^{-1} (-1)^{i-k} \sum_{j=0}^{i-k} (-1)^j \binom{p}{i-k-j} \binom{j+p-1}{j} +$$

$$+ k \binom{k+p}{k} \sum_{i=k+p+1}^{\infty} \frac{x_{ni}}{i} \binom{i+p}{i}^{-1} (-1)^p \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \binom{j+i-k-1}{p-1} =$$

$$= x_{nk} \quad (n \geq 0, k \geq 1).$$

Кроме того, имеем: $\sum_{i=0}^{\infty} b_{ni} \bar{C}_{i0} = b_{n0} = x_{n0} \; (n \geq 0)$.

Как было показано выше, $AC_p^{-1} = (d_{nk})$, где

$$d_{nk} = k \binom{k+p}{k} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{a_{n,k+i}}{k+i} = (p+1) \binom{k+p}{k-1} \Delta^p \frac{a_{nk}}{k}$$

$(n \geq 0, k \geq 1)$, $d_{n0} = a_{n0} \; (n \geq 0)$.

Используя равенство $XC_p = A$, получим: $X = (XC_p)\,C_p^{-1} = AC_p^{-1}$, то есть элементы $x_{nk} \; (n, k \geq 0)$ определяются по формулам /22/. Лемма 6 доказана.

Теорема 3. Если абсолютно консервативная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty, \qquad /27/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} k^{p+1} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| < \infty, \qquad /28/$$

$$k^{p-2} a_{n-k} \to 0 \quad (k \to \infty,\ n \geq 0), \qquad /29/$$

где p - натуральное число, то $|C_p| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами; если матрица A абсолютно регулярна, то матрицы C_p и A абсолютно совместны на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Из условия /29/ по лемме 6 следует, что матрица $X = (x_{nk})$, элементы которой определяются по формулам /22/, является единственным решением матричного уравнения $XC_p = A$. Так как матрица A абсолютно консервативна, то $\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty$. Поэтому условие:

$$\sup_n \left(|a_{n0}| + \sum_{k=1}^{\infty} (p+1) \binom{k+p}{k-1} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) < \infty$$

равносильно условию /28/, то есть матрица X удовлетворяет условию /20/ леммы 5. Кроме того, по упомянутой при доказательстве теоремы I теореме Кноппа-Лоренца, условие /27/ обеспечивает абсолютную консервативность матрицы X. Далее имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-k+p-1}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} <$$

$$< \binom{n+p}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} = 1,$$

то ес матрица C_ρ удовлетворяет условию /19/ леммы 5. Все условия леммы 5 выполнены, поэтому $|C_\rho| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Пусть матрица $A=(a_{nk})$ абсолютно регулярна. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = 1 \ (k \geq 0) \quad \text{и} \quad \sup_n \sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty .$$

Следовательно, по доказаному выше, матрица $X=(x_{nk})$ абсолютно консервативна. Покажем, что она абсолютно регулярна. Для этого теперь достаточно показать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{nk} = 1 \ (k \geq 0)$. Имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\Delta^\rho \frac{a_{nk}}{k} = (\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\Delta^\rho \frac{1}{k} = 1 \ (k \geq 1).$$

Теперь по лемме 5 получаем, что матрицы C_ρ и A абсолютно совместны. Теорема 3 доказана.

Следствие 9. Если абсолютно консервативная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^\rho \frac{a_{nk}}{k} \geq 0 \ (k \geq k_0, n \geq 0) \ \text{или} \ \Delta^\rho \frac{a_{nk}}{k} \leq 0 \qquad /30/$$

$(k \geq k_0, \ n \geq 0)$,

$$\sup_k \ k^i |\Delta^i \alpha_k| < \infty \quad (1 \leq i \leq \rho), \qquad /31/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty , \qquad /32/$$

$k^\rho a_{nk} \to 0 \quad (k \to \infty, \ n \geq 0)$,

где $\alpha_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nk} \ (k \geq 0)$, ρ - натуральное число, то $|C_\rho| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Используя условие /30/, как и при доказательстве следствия 2, получим для $k \geq k_0$:

$$(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\Delta^\rho \frac{a_{nk}}{k}\right| = (\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^\rho \frac{a_{nk}}{k}\right| =$$

$$=\left|(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\Delta^\rho \frac{a_k}{k}\right| = \left|\sum_{i=0}^{\rho}\binom{k-1+i}{k-1}\Delta^i a_k\right| \leq \sum_{i=0}^{\rho}\binom{k-1+i}{k-1}\left|\Delta^i a_k\right|.$$

Так как матрица A абсолютно консервативна, то $\sup_k |a_k| < \infty$. Приняв во внимание условие /31/ получаем, что матрица A удовлетворяет условию /27/ теоремы 3. Теперь, для доказательства следствия 9 достаточно показать, что из условий /30/ и /32/ следует выполнение условия /28/ теоремы 3. Воспользуемся равенством [33, стр. 82, 2.4.8. б/] :

$$\frac{m!}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{x+m+n-i}{m} = m(x+n+1) \quad \text{если } m=n+1.$$

Положив в нем $n=\rho$, $x=k-\rho-1$, получим:

$$\sum_{i=0}^{\rho}(-1)^i\binom{\rho}{i}\binom{k+\rho-i}{\rho+1} = k.$$

Теперь, используя условия /30/ и /32/, имеем:

$$\sum_{k=k_0}^{m}(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\left|\Delta^\rho \frac{a_{nk}}{k}\right| = \left|\sum_{k=k_0}^{m}(\rho+1)\binom{k+\rho}{k-1}\sum_{i=0}^{\rho}(-1)^i\binom{\rho}{i}\frac{a_{n,k+i}}{k+i}\right| \leq$$

$$\leq(\rho+1)\sum_{k=k_0}^{k_0+\rho-1}\frac{|a_{nk}|}{k}\sum_{i=0}^{k-k_0}\binom{\rho}{i}\binom{k-i+\rho}{k-i-1} + (\rho+1)\sum_{k=k_0+\rho}^{m}\frac{|a_{nk}|}{k}\,\cdot$$

$$\cdot\left|\sum_{i=0}^{\rho}(-1)^i\binom{\rho}{i}\binom{k+\rho-i}{\rho+1}\right| + (\rho+1)\sum_{k=m+1}^{m+\rho}\frac{|a_{nk}|}{k}\sum_{i=k-m}^{\rho}\binom{\rho}{i}\binom{k-i+\rho}{k-i-1} \leq$$

$$\leq M + (\rho+1)\sum_{k=k_0+\rho}^{m}|a_{nk}| + (\rho+1)\sum_{k=m+1}^{m+\rho}\frac{|a_{nk}|}{k}\sum_{i=k-m}^{\rho}\binom{\rho}{i}\binom{k-i+\rho}{k-i-1} \to$$

$$\longrightarrow M+(p+1)\sum_{k=k_0+p}^{\infty}|a_{nk}| \quad (m\to\infty),$$

где M - константа, зависящая лишь от k_0 и p. Следовательно, ряды $\sum_{k=k_0}^{\infty}(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|$ $(n\geq 0)$ сходятся и их суммы ограничены числом, не зависящим от n, то есть

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty}(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty,$$

и это равносильно условию /28/ теоремы 3. Следствие 9 доказано.

Следствие IO. Если абсолютно регулярная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{nk}\geq 0\ (k\geq k_0,\ n\geq 0),\quad \frac{a_{nk}}{k}\geq\frac{a_{n,k+1}}{k+1} \qquad /33/$$

$(k\geq k_0,\ n\geq 0)$,

$$\sup_n\sum_{k=k_0}^{\infty}a_{nk}<\infty, \qquad /34/$$

то $|C_1|\subset|A|$ на множестве рядов с ограниченными членами, и матрицы C_1 и A абсолютно совместны.

Доказательство. Покажем, что при условиях следствия IO выполняются все условия следствия 9. Действительно, так как матрица A абсолютно регулярна, то $a_k=1$ $(k\geq 0)$ и условия /30/ - /32/ следствия 9 выполняются, если в них положить: $p=1$.

Обозначим: $r_{nm}=\sum_{i=m+1}^{\infty}a_{ni}$ $(n\geq 0)$. Используя условие /33/, получим для фиксированого n:

$$r_{nm}\geq a_{n,m+1}+a_{n,m+2}+\ldots+a_{nk}\geq\frac{(m+1)+(m+2)+\ldots+k}{k}a_{nk}=$$

$$= \frac{k(k+1)-m(m+1)}{2k} a_{nk}$$

Отсюда следует неравенство:

$$k a_{nk} \leq \frac{k^2}{k(k+1)-m(m+1)} 2 r_{nm} .$$

Из условия /34/ следует, что $r_{nm} \to 0 (m \to \infty, n \geq 0)$.
Для произвольного $\varepsilon > 0$ номера k и m выберем так, чтобы выполнялись неравенства:

$$2 r_{nm} < \varepsilon, \quad \frac{k^2}{k(k+1)-m(m+1)} < \frac{\varepsilon}{2 r_{nm}},$$

тогда $k a_{nk} < \varepsilon$, а значит $k a_{nk} \to 0 (k \to \infty, n \geq 0)$.

Выполнены все условия следствия 9, поэтому $|C_1| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами. Абсолютная совместности матриц C_1 и A следует из теоремы 3.

Лемма 7. Пусть $A = (a_{nk})$ - произвольная матрица преобразования ряда в ряд, а $B = (b_{nk})$ - матрица преобразования ряда в ряд, удовлетворяющая условию:

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty, \qquad /35/$$

и существует матрица $X = (x_{nk})$ преобразования ряда в ряд такая, что $XB = A$ и выполняется условие

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |x_{nk}| < \infty. \qquad /36/$$

Если матрица X равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами, то $|A| \sim |B|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Матрицы A и B, удовлетворяющие условиям леммы 7, удовлетворяют условиям леммы 5. Так как матрица X равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами, то она абсолютно консервативна, и по лемме 5 получим: $|B| \subset |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Предположим, что $|A| \not\subset |B|$ на множестве рядов с ограниченными членами. Тогда существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, где

$$\sup_n |u_n| < \infty, \qquad /37/$$

абсолютно суммируемый матрицей A и не суммируемый абсолютно матрицей B. Обозначим: $(q_n) = A(u_n)$, $(p_n) = B(u_n)$. Из условий /35/ и /37/ следует:

$$\sup_n |p_n| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} u_k \right| \leq \sup_n |u_n| \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| < \infty.$$

Воспользовавшись равенством $XB = A$ и приняв во внимание, что умножение матриц $X, B, (u_n)$ ассоциативно, получим:

$$(q_n) = A(u_n) = XB(u_n) = X(p_n),$$

где

$$\sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |p_n| = \infty, \quad \sup_n |p_n| < \infty.$$

Следовательно, матрица X абсолютно суммирует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ с ограниченными членами, не сходящийся абсолютно. Но это противоречит тому, что матрица X равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами. Поэтому $|A| \subset |B|$ на множестве рядов с ограниченными членами и лемма 7 доказана.

Лемма 8 [8]. Если абсолютно консервативная матрица $X = (x_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |x_{nk}| < \infty \qquad /38/$$

$$\varliminf_{k\to\infty}\left(|x_{kk}|-\sum_{n\neq k}^{\infty}|x_{nk}|\right)>0, \qquad /39/$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(|x_{nn}|-\sum_{k\neq n}^{\infty}|x_{nk}|\right)>0, \qquad /40/$$

то матрица X равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами.

Теорема 4. Если абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty, \qquad /41/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} k^{p+1}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty, \qquad /42/$$

$$k^{p-2}a_{nk}\to 0 \quad (k\to\infty,\ n\geq 0), \qquad /43/$$

$$\varliminf_{k\to\infty} k^{p+1}\left(\left|\Delta^p \frac{a_{kk}}{k}\right|-\sum_{n\neq k}^{\infty}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0, \qquad /44/$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\binom{n+p}{n-1}\left|\Delta^p \frac{a_{nn}}{n}\right|-\sum_{n\neq k-k_0}^{\infty}\binom{k+p}{k-1}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0, \qquad /45/$$

где p - натуральное число, то $|C_p|\sim|A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Покажем, что матрицы A и C_p удовлетворяют условиям леммы 7. Действительно, при доказательстве теоремы 3 было показано, что матрица $C_p=(c_{nk})$ удовлетворяет условию $\sup_n \sum_{k=0}^{n}|c_{nk}|<\infty$, то есть выполняется условие /35/ леммы 7. Из условия /43/ по лемме 6 следует, что существует единственная матрица $X=(x_{nk})$ преобразования ряда в ряд такая, что $XC_p=A$ и элементы ее определяются по формулам /22/. Поэтому условие /42/ равносильно условию /36/ леммы 7.

Покажем теперь, что матрица X равносильна абсолютной сходимости на множестве рядов с ограниченными членами, для этого проверим выполнение условий леммы 8 для матрицы X. Условие /41/, по теореме Кноппа-Лоренца, обеспечивает абсолютную консервативность матрицы X. Из условий /35/ и /36/ леммы 7 и равенства $XC_p=A$ имеем:

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \le \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |x_{nk}| \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| < \infty .$$

Как показано выше, условия /35/ и /36/ и равенство $XC_p=A$ выполнены, поэтому выполнено и условие /38/ леммы 8. Поскольку матрица $X=(x_{nk})$ абсолютно консервативна, то $x_{nk}\to 0\ (n\to\infty,\ k\ge 0)$, поэтому $\sum_{k=0}^{k_0-1} |x_{nk}| \to 0\ (n\to\infty)$. Следовательно, условие /45/ равносильно условию /40/ леммы 8. Выполнены все условия леммы 7, поэтому $|C_p|\sim|A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Следствие II. Если абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \ge 0 \quad (k\ge k_0,\ n\ge 0), \qquad /46/$$

$$k^i \Delta^i a_k \to 0 \quad (k\to\infty,\ 1\le i\le p), \qquad /47/$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty, \qquad /48/$$

$$k^{p} a_{nk} \to 0 \quad (k \to \infty,\ n \geqslant 0), \qquad /49/$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \left(2(p+1)\binom{k+p}{k-1} \Delta^{p} \frac{a_{kk}}{k} - a_{k} \right) > 0, \qquad /50/$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(2\binom{n+p}{n-1} \Delta^{p} \frac{a_{nn}}{n} - a_{n}^{*} \right) > 0, \qquad /5I/$$

где $a_{k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nk}\ (k \geqslant 0)$, $a_{n}^{*} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}\ (n \geqslant 0)$,

p - натуральное число, то $|C_{p}| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Покажем, что матрица A удовлетворяет условиям теоремы 4. Действительно, при доказательстве следствия 9 было показано, что из условий /46/ - /49/ следует выполнение условий /4I/ - /43/ теоремы 4. Далее, из абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nk}\ (k \geqslant 0)$ / матрица A - абсолютно консервативна / следует справедливость следующих преобразований / для $k \geqslant k_{0}$ /.

$$(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left(\left|\Delta^{p} \frac{a_{kk}}{k}\right| - \sum_{n \neq k}^{\infty} \left|\Delta^{p} \frac{a_{nk}}{k}\right| \right) =$$

$$= 2(p+1)\binom{k+p}{k-1} \Delta^{p} \frac{a_{kk}}{k} - (p+1)\binom{k+p}{k-1} \Delta^{p} \frac{a_{k}}{k} =$$

$$= 2(p+1)\binom{k+p}{k-1} \Delta^{p} \frac{a_{kk}}{k} - \sum_{i=0}^{p} \binom{k-1+i}{k-1} \Delta^{i} a_{k}.$$

Из условий /47/ и /50/ получаем:

$$\lim_{k\to\infty}(p+1)\binom{k+p}{k-1}\left(\left|\Delta^p\frac{a_{kk}}{k}\right|-\sum_{n\neq k}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0,$$

что равносильно условию /44/ теоремы 4. Далее имеем:

$$\binom{n+p}{n-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nn}}{n}\right|-\sum_{n\neq k=k_0}^{m}\binom{k+p}{k-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|=$$

$$=2\binom{n+p}{n-1}\Delta^p\frac{a_{nn}}{n}-\sum_{k=k_0}^{m}\binom{k+p}{k-1}\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}=$$

$$=2\binom{n+p}{n-1}\Delta^p\frac{a_{nn}}{n}-\sum_{k=k_0}^{k_0+p-1}\frac{a_{nk}}{k}\sum_{i=0}^{k-k_0}(-1)^i\binom{p}{i}\binom{k-i+p}{k-i-1}-$$

$$-\sum_{k=k_0+p}^{m}\frac{a_{nk}}{k}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\binom{k+p-i}{p+1}-\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_{nk}}{k}\sum_{i=k-m}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\times$$

$$\times\binom{k-i+p}{k-i-1}=2\binom{n+p}{n-1}\Delta^p\frac{a_{nn}}{n}-\sum_{k=k_0}^{k_0+p-1}\frac{a_{nk}}{k}\sum_{i=0}^{k-k_0}(-1)^i\binom{p}{i}\times$$

$$\times\binom{k-i+p}{k-i-1}+\sum_{k=0}^{k_0+p-1}a_{nk}-\sum_{k=0}^{m}a_{nk}-\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_{nk}}{k}\sum_{i=k-m}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\binom{k-i+p}{k-i-1}$$

Из условия /48/ следует, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\ (n\geqslant 0)$ сходятся, следовательно, четвертое слагаемое в правой части полученного равенства стремится к $a_n^*\ (n\geqslant 0)$, а из условия /49/ следует, что пятое слагаемое стремится к нулю при $m\to\infty$. Следовательно,

$$\binom{n+p}{n-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nn}}{n}\right|-\sum_{n\neq k=k_0}^{\infty}\binom{k+p}{k-1}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|=2\binom{n+p}{n-1}\Delta^p\frac{a_{nn}}{n}-$$

$$-\sum_{k=k_0}^{k_0+p-1} \frac{a_{nk}}{k} \sum_{i=0}^{k-k_0} (-1)^i \binom{p}{i} \binom{k-i+p}{k-i-1} + \sum_{k=0}^{k_0+p-1} a_{nk} - a_n^* .$$

Поскольку матрица $A = (a_{nk})$ абсолютно консервативна, то $a_{nk} \to 0 \ (n \to \infty,\ k \geq 0)$, поэтому второе и третье слагаемые в правой части последнего равенства стремятся к нулю при $n \to \infty$. Приняв во внимание условие /51/ получим:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\binom{n+p}{n-1} \left| \Delta^p \frac{a_{nn}}{n} \right| - \sum_{n \neq k = k_0}^{\infty} \binom{k+p}{k-1} \left| \Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \right| \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2\binom{n+p}{n-1} \Delta^p \frac{a_{nn}}{n} - a_n^* \right) > 0,$$

то есть выполнено условие /45/. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4. Следствие II доказано.

Совершенно аналогично доказывается

Следствие I2. Если абсолютно консервативная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\Delta^p \frac{a_{nk}}{k} \leq 0 \quad (k \geq k_0,\ n \geq 0),$$

$$k^i \Delta^i a_k \to 0 \quad (k \to \infty,\ 1 \leq i \leq p),$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$k^p a_{nk} \to 0 \quad (k \to \infty,\ n \geq 0),$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(a_k - 2(p+1) \binom{k+p}{k-1} \Delta^p \frac{a_{kk}}{k} \right) > 0,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n^* - 2\binom{n+p}{n-1}\Delta^p \frac{a_{nn}}{n}\right) > 0,$$

где $a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\ (k \geq 0),\ a_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\ (n \geq 0),$

p - натуральное число, то $|C_p| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Следствие 13. Если абсолютно регулярная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$a_{nk} \geq 0 \qquad (k \geq k_0,\ n \geq 0), \qquad /52/$$

$$\frac{a_{nk}}{k} \geq \frac{a_{n,k+1}}{k+1}, \qquad /53/$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\left((k+1)a_{kk} - k a_{k,k+1}\right) > \frac{1}{2}, \qquad /54/$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \leq \frac{1}{2}, \qquad /55/$$

то $|C_1| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Доказательство. Из условия /55/ следует, что

$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} a_{nk} < \infty$, а из выполнения этого условия и условий /52/, /53/, как было показано при доказательстве следствия 10, следует, что $k a_{nk} \to 0\ (k \to \infty, n \geq 0)$. Поэтому, принимая во внимание абсолютную регулярность матрицы A получим, что выполнены условия /46/ - /49/ следствия 11, если в них положить: $p = 1$. Условие /54/ равносильно условию /50/ при $p = 1$, а выполнение условий /54/ и /55/

влечет выполнение условия /51/ при $\rho = 1$. Поэтому справедливость следствия I3 вытекает из следствия II.

§ I.3. О равносходимости и тауберовых константах для некоторых классических методов суммирования.

Обобщением понятий включения и совместности методов суммирования является понятие равносходимости методов.

Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ называются равносходящимися, если $U_n - V_n \to 0 \ (n \to \infty)$, где

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n \ (n \geq 0), \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n \ (n \geq 0).$$

Если $U_n - V_n \to C \ (n \to \infty)$, где C - конечное число, то эти ряды называются равносходящимися в широком смысле [9, стр. 92].

Аналогично вводится понятие равносходимости методов суммирования на множествах рядов.

Пусть заданы множество рядов X и две матрицы $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ в виде преобразования последовательности в последовательность. Кроме того, сходятся ряды:

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k \ (n \geq 0), \quad \tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k \ (n \geq 0),$$

где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ принадлежит множеству X. Тогда методы, определяемые матрицами A и B, называются равносходящимися на множестве X, если $t_n - \tau_n \to 0 \ (n \to \infty)$ для каждого ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ из множества X.

Если $t_n - \tau_n \to C \ (n \to \infty)$, где C - конечное число, то методы A и B называются равносходящимися в широком смысле на множестве X .

В дальнейшем будем пользоваться методом Хаусдорфа суммирования рядов, поэтому приведем его определение.

Рассмотрим числовую последовательность с элементами $x_n \ (n \geq 0)$ и матрицу $\mathcal{D} = (d_{nk})$, где

$$d_{nk} = (-1)^k \binom{n}{k} \ (0 \leq k \leq n), \quad d_{nk} = 0 \ (0 \leq n < k).$$

Тогда матрица $H = \mathcal{D} E(x_n) \mathcal{D}$ определяет метод Хаусдорфа в виде преобразования последовательности в последовательность. Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Хаусдорфа.

Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью регулярных моментов, если $x_n = \int_0^1 t^n d\varphi(t) \ (n \geq 0)$, где $\varphi(t)$ - вещественная функция с ограниченным изменением на отрезке $0 \leq t \leq 1$ и такая, что $\varphi(1) = 1$, $\varphi(+0) = \varphi(0) = 0$ [I7, стр. 3I8].

Для того чтобы метод Хаусдорфа был регулярен, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему последовательность Хаусдорфа была последовательностью регулярных моментов [I7, стр. 323].

При изучении включения методов Хаусдорфа важную роль играет так называемое "преобразование Меллина":

$$T(z) = \int_0^1 t^z \, d\varphi(t).$$

Функция $T(z)$ непрерывна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Кроме того, если $\{x_n\}$ - последовательность регулярных моментов, то $x_k = T(k) \ (k \geq 0)$ и $T(z) = x_z$ / то есть $T(z)$ можно получить из выражения для x_k заменой k на z / [34, стр. I67, I68].

Известно, что каждую функцию ограниченной вариации можно представить как сумму ее функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции / то есть функции отличной от постоянной и производная которой почти всюду равна нулю/. Класс функций ограниченной вариации без сингулярной компоненты обозначается V^*.

Лемма 9 [35, стр. I22]. Пусть $\varphi(t) \in V^*(0,1)$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(+0)=\varphi(0)=0$.

Для того чтобы метод Хаусдорфа, определяемый функцией $\varphi(t)$, был равносилен сходимости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\operatorname{Re} z \geq 0} \left| \int_0^1 t^z d\varphi(t) \right| > 0.$$

Известно, что метод Чезаро порядка $\alpha = -1, -2, \ldots$ является методом Хаусдорфа, определяемым последовательностью $\left\{ \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \right\}$ [3, стр. I4I]. В дальнейшем средние Чезаро целого неотрицательного порядка p для последовательности $\{S_n\}$ будем обозначать через $C_n^p(S_n)$, то есть:

$$C_n^p(S_n) = \binom{n+p}{n}^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+p-1}{n-k} S_k \quad (n \geq 0),$$

а матрицу этого преобразования обозначим C_p.

Теорема 5. Соотношение

$$C_n^p(S_n) - C_n^q(S_n) \to S \quad (n \to \infty)$$

выполнено, если и только если

$$C_n^{p+1}(n a_n) \to \frac{S}{T(p,q)} \quad (n \to \infty)$$

где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \ (n \geq 0)$, $T(p,q) = \sum\limits_{k=0}^{q-p-1} \frac{1}{k+p+1}$,

p и q - целые числа такие, что $0 \leq p < q$, S - конечное число.

Доказательство. Обозначим через $E^{(1)} = (e_{nk}^{(1)})$ матрицу с элементами:

$$e_{nk}^{(1)} = 0 \ (k, n \geq 0; \ k \neq n-1, n),$$

$$e_{n+1,n}^{(1)} = -1 \ (n \geq 0), \quad e_{nn}^{(1)} = 1 \ (n \geq 0).$$

Покажем справедливость матричного равенства: $C_p - C_q =$

$$= \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}C_{p+1}E(n)E^{(1)},$$

в котором положено, что при $n=0$ выражение

$$\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)$$

равно $T(p,q)$. Для этой цели докажем следующие матричные равенства: $\mathcal{D} = E^{(1)}\mathcal{D}E^{(1)}$, $\mathcal{D}E(n) = E(n)E^{(1)}\mathcal{D}$.

Имеем: $\mathcal{D}E^{(1)} = (a_{nk})$, где $a_{nk} = d_{nk} - d_{n,k+1} =$

$$= (-1)^k\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right) = (-1)^k\binom{n+1}{k+1} \quad (0 \leq k < n),$$

$$a_{nk} = d_{nn} \ (n \geq 0), \quad a_{nk} = 0 \ (0 \leq n < k).$$

Теперь получим: $E^{(1)}\mathcal{D}E^{(1)} = (b_{nk})$, где

$$b_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,k} = (-1)^k\left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}\right) =$$

$$= (-1)^n\binom{n}{k} = d_{nk} \qquad (0 \leq k < n-1),$$

$$b_{n,n-1} = a_{n,n-1} - a_{n-1,n-1} = (-1)^{n-1}\left(\binom{n+1}{n} - \binom{n-1}{n-1}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1} n = d_{n,n-1} \qquad (n > 0),$$

$$b_{nn} = a_{nn} = d_{nn} \quad (n \geq 0), \quad b_{nk} = 0 \qquad (0 \leq n < k)$$

и первое из двух равенств доказано.

Далее имеем: $E(n)E^{(1)}\mathcal{D} = (c_{nk})$, где

$$c_{nk} = n(d_{nk} - d_{n-1,k}) = (-1)^k n\left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right) =$$

$$= (-1)^k k \binom{n}{k} \qquad (0 \leq k < n),$$

$$c_{nn} = n d_{nn} = (-1)^n n \binom{n}{n} \qquad (n \geq 0), \quad c_{nk} = 0 \quad (0 \leq n < k),$$

и так как $\mathcal{D}E(n) = (g_{nk})$, где

$$g_{nk} = k d_{nk} = (-1)^k k \binom{n}{k} \qquad (0 \leq k \leq n),$$

$$g_{nk} = 0 \qquad (0 \leq n < k),$$

то справедливо и второе равенство.

Выше было отмечено, что матрица Чезаро порядка ρ является матрицей Хаусдорфа, определяемой последовательностью $\left\{\binom{n+\rho}{n}^{-1}\right\}$. Поэтому справедливо равенство:

$$C_\rho = \mathcal{D}E\left(\binom{n+\rho}{n}^{-1}\right)\mathcal{D}.$$

Будем также пользоваться равенством: $\mathcal{D}\mathcal{D} = E$ [3, стр. 139].

Приняв во внимание, что умножение нижних треугольных матриц ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, а также используя доказаные выше матричные равенства будем иметь:

$$C_p - C_q = \mathcal{D}E\left(\binom{n+p}{n}^{-1}\right)\mathcal{D} - \mathcal{D}E\left(\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\mathcal{D} =$$

$$= \mathcal{D}E\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\mathcal{D} = \mathcal{D}E\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right) \times$$

$$\times \left(E^{(1)}\mathcal{D}E^{(1)}\right) = \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\left(E(n)E^{(1)}\mathcal{D}\right)E^{(1)} =$$

$$= \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}E(n)E^{(1)} =$$

$$= \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)(\mathcal{D}\mathcal{D})E\left(\binom{n+p+1}{n}^{-1}\right) \times$$

$$\times \mathcal{D}E(n)E^{(1)} = \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D} \times$$

$$\times \left(\mathcal{D}E\left(\binom{n+p+1}{n}^{-1}\right)\mathcal{D}\right)E(n)E^{(1)} =$$

$$= \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1} - \binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D} \times$$

$$\times C_{p+1}\, E(n)E^{(1)}.$$

Методом математической индукции докажем следующее равенство.

$$1 - \binom{z+p}{z}^{-1} = \frac{z}{z+1}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{z+k+1}{z+1}^{-1} \quad (p \geq 1,\ \operatorname{Re} z > -1). \quad /56/$$

При $p=1$ равенство /56/ выполняется. Далее имеем:

$$\frac{z}{z+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{z+k+1}{z+1}^{-1}=\frac{z}{z+1}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{z+k+1}{z+1}^{-1}+\frac{z}{z+1}\binom{z+p+1}{z+1}^{-1}=$$

$$=1-\binom{z+p}{z}^{-1}+\frac{z}{z+p+1}\binom{z+p}{z}^{-1}=1-\frac{p+1}{z+p+1}\binom{z+p}{z}^{-1}=1-\binom{z+p+1}{z}^{-1},$$

то есть равенство /56/ верно и при $p+1$.

Пользуясь равенством /56/ получим:

$$\frac{1}{z}\binom{z+p+1}{z}\left(\binom{z+p}{z}^{-1}-\binom{z+q}{z}^{-1}\right)=\frac{1}{z}\binom{z+p+1}{z}\left(1-\binom{z+q}{z}^{-1}-\right.$$

$$\left.-\left(1-\binom{z+p}{z}^{-1}\right)\right)=\frac{1}{z+1}\binom{z+p+1}{z}\left(\sum_{k=0}^{q-1}\binom{z+k+1}{z+1}^{-1}-\sum_{k=0}^{p-1}\binom{z+k+1}{z+1}^{-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{z+1}\binom{z+p+1}{z}\binom{z+k+p+1}{z+1}^{-1}=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{\Gamma(z+p+2)\Gamma(n+2)(k+p)!}{\Gamma(z+2)(p+1)!\,\Gamma(z+p+k+2)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{(k+p)!\,k!\,\Gamma(z+p+2)}{(p+1)\,k!\,p!\,\Gamma(z+k+p+2)}=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{p+1}\binom{k+p}{k}\binom{z+k+p+1}{k}^{-1}.$$

Легко проверить, что полученное равенство справедливо и при $p=0$. Поскольку правая часть этого равенства равна $T(p,q)$ при $z=0$, то естественно приписать это значение и левой части, сделав ее таким образом непрерывной функцией в точке $z=0$.

Поскольку верно равенство: $\mathcal{D}E(T(p,q))=E(T(p,q))\mathcal{D}$, то теперь можно записать:

$$C_p(S_n)-C_q(S_n)=\mathcal{D}E\left(\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{(p+1)T(p,q)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}\right)\mathcal{D}\times$$

$$\times E(T(p,q))C_{p+1}E(n)E^{(1)}(S_n).$$

Легко видеть, что $C_{p+1}E(n)E^{(1)}(S_n)=C_{p+1}(na_n)$.

Следовательно, теорема 5 будет доказана, если покажем, что матрица

$$\mathcal{D}E\left(\frac{1}{T(p,q)n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)\right)\mathcal{D}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{T(p,q)(p+1)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}\right)\mathcal{D} \qquad /57/$$

является регулярной матрицей равносильной сходимости. Для этого, поскольку матрица /57/ является матрицей Хаусдорфа, воспользуемся леммой 9.

Для $k>0$ имеем:

$$\frac{1}{(p+1)T(p,q)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{T(p,q)}\binom{k+p}{k-1}\int_0^1 t^{n+p+1}(1-t)^{k-1}dt=$$

$$=\int_0^1 t^n d\left(-\frac{(k+p)!}{T(p,q)}\sum_{i=0}^{p+1}\frac{t^{p+1-i}(1-t)^{k+i}}{(k+i)!(p+1-i)!}\right).$$

Кроме того, при $k=0$ имеем:

$$\frac{1}{(p+1)T(p,q)}=\int_0^1 t^n d\varphi(t),$$

где $$\varphi(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1,\\ \dfrac{1}{(p+1)T(p,q)}, & t=1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$x_n=\frac{1}{T(p,q)n}\binom{n+p+1}{n}\left(\binom{n+p}{n}^{-1}-\binom{n+q}{n}^{-1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{(p+1)T(p,q)}\binom{k+p}{k}\binom{n+k+p+1}{k}^{-1}=\int_0^1 t^n d\psi(t)\quad (n\geq 0),$$

где

$$\psi(t)=\varphi(t)-\sum_{k=1}^{q-p-1}\frac{(k+p)!}{T(p,q)}\sum_{i=0}^{p+1}\frac{t^{p+1-i}(1-t)^{k+i}}{(k+i)!(p+1-i)!}-\frac{1}{(p+1)T(p,q)}+1.$$

Функция $\psi(t)$ имеет ограниченное изменение на промежутке $[0,1]$, и кроме того $\psi(+0)=\psi(0)=0,\ \psi(1)=1$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью регулярных моментов, а, следовательно, матрица /57/ – регулярна.

Поскольку функция $\psi(t)$ абсолютно непрерывна в промежутке $]0,1[$, то для доказательства того, что матрица /57/ равносильна сходимости, по лемме 9 достаточно показать, что

$$\inf_{\operatorname{Re} z\geq 0}\left|\frac{1}{T(p,q)z}\binom{z+p+1}{z}\left(\binom{z+p}{z}^{-1}-\binom{z+q}{z}^{-1}\right)\right|>0. \qquad /58/$$

Функция, стоящая под знаком абсолютной величины в неравенстве /58/, не обращается в нуль в точках полуплоскости $\operatorname{Re} z\geq 0,\ z\neq 0$. Кроме того, эта функция принимает значение I в точке $z=0$, и так как она непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geq 0$, то она на каждом замкнутом ограниченном множестве этой полуплоскости удовлетворяет неравенству /58/.

Далее имеем:

$$\frac{1}{T(p,q)z}\binom{z+p+1}{z}\left(\binom{z+p}{z}^{-1}-\binom{z+q}{z}^{-1}\right)\to$$

$$\to\frac{1}{T(p,q)(p+1)}>0\qquad (z\to\infty),$$

то есть неравенство /58/ выполняется и в достаточно малой окрестности бесконечно удаленной точки. Выполнены все условия леммы 9, поэтому матрица /57/ равносильна сходимости. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь равносходимость в широком смысле методов Гельдера натурального порядка.

Известно [3, стр. I4I], что матрица H_p является матрицей Хаусдорфа и определяется равенством:

$$H_p = \mathcal{D}E\left(\frac{1}{(n+1)^p}\right)\mathcal{D}.$$

Обозначим через $H_n^p(S_n)$ - средние Гельдера порядка p для последовательности $\{S_n\}$.

Теорема 6. Соотношение

$$H_n^p(S_n) - H_n^q(S_n) \to S \quad (n\to\infty)$$

выполнено, если и только если

$$H_n^{p+1}(na_n) \to \frac{S}{q-p} \quad (n\to\infty),$$

где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \ (n \geq 0)$, p и q - целые числа такие, что $0 \leq p < q$, S - конечное число.

Доказательство. Аналогично предыдущему имеем:

$$H_p - H_q = \mathcal{D}E\left(\frac{1}{(n+1)^p}\right)\mathcal{D} - \mathcal{D}E\left(\frac{1}{(n+1)^q}\right)\mathcal{D} =$$

$$= \mathcal{D}E\left(\frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right)\mathcal{D} = \mathcal{D}E\left(\frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right) \times$$

$$\times \left(E^{(1)}\mathcal{D}E^{(1)}\right) = \mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right)\right) \times$$

$$\times\left(E(n)E^{(1)}\mathcal{D}\right)E^{(1)}=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(n+1)^{p}}-\frac{1}{(n+1)^{q}}\right)\right)\mathcal{D}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{(n+1)^{p+1}}{n}\left(\frac{1}{(n+1)^{p}}-\frac{1}{(n+1)^{q}}\right)\right)(\mathcal{D}\mathcal{D})E\left((n+1)^{-p-1}\right)\mathcal{D}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{(n+1)^{p+1}}{n}\left(\frac{1}{(n+1)^{p}}-\frac{1}{(n+1)^{q}}\right)\right)\mathcal{D}\left(\mathcal{D}E\left(\frac{1}{(n+1)^{p+1}}\right)\mathcal{D}\right)E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{(n+1)^{p+1}}{n}\left(\frac{1}{(n+1)^{p}}-\frac{1}{(n+1)^{q}}\right)\right)\mathcal{D}H_{p+1}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{(n+1)^{p+1}}{(q-p)n}\left(\frac{1}{(n+1)^{p}}-\frac{1}{(n+1)^{q}}\right)\right)\mathcal{D}E(q-p)H_{p+1}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{n+1}{(q-p)n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{q-p}}\right)\right)\mathcal{D}E(q-p)H_{p+1}E(n)E^{(1)}=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{q-p}\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{(n+1)^{k}}\right)\mathcal{D}E(q-p)H_{p+1}E(n)E^{(1)},$$

где положено: $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(n+1)^{p}}-\frac{1}{(n+1)^{q}}\right)=q-p$ при $n=0$.

Отсюда получаем равенство:

$$H_p(S_n)-H_q(S_n)=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{q-p}\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{(n+1)^{k}}\right)\mathcal{D}E(q-p)H_{p+1}E(n)E^{(1)}(S_n)=$$

$$=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{q-p}\sum_{k=0}^{q-p-1}\frac{1}{(n+1)^{k}}\right)\mathcal{D}E(q-p)H_{p+1}(na_n).$$

Следовательно, для доказательства теоремы 6 достаточно показать, что матрица

$$\mathcal{D}E\left(\frac{n+1}{(q-p)n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{q-p}}\right)\right)\mathcal{D}=\mathcal{D}E\left(\frac{1}{q-p}\sum_{\varkappa=0}^{q-p-1}\frac{1}{(n+1)^{\varkappa}}\right)\mathcal{D} \qquad /59/$$

является регулярной матрицей равносильной сходимости. Матрица /59/ является матрицей Хаусдорфа. Далее, для $\varkappa>0$ **имеем:**

$$\frac{1}{(q-p)(n+1)^{\varkappa}}=\frac{1}{q-p}\int_0^1 t^n\, d\varphi_{\varkappa}(t),$$

где [I7, стр. 329]

$$\varphi_k(t)=\int_0^t \frac{1}{(\varkappa-1)!}\ln^{\varkappa-1}\frac{1}{\tau}\,d\tau.$$

Кроме того

$$\frac{1}{q-p}=\frac{1}{q-p}\int_0^1 t^n\, d\varphi_0(t),$$

где $\varphi_0(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<1,\\ 1, & t=1.\end{cases}$ **Следовательно,**

$$\varkappa_n=\frac{1}{q-p}\sum_{\varkappa=0}^{q-p-1}\frac{1}{(n+1)^{\varkappa}}=\frac{(n+1)^{p+1}}{(q-p)n}\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+1)^q}\right)=$$

$$=\int_0^1 t^n\, d\phi(t), \qquad (n\ge 0),$$

где $\phi(t)=\frac{1}{q-p}\left(\sum_{\varkappa=1}^{q-p-1}\int_0^t\frac{1}{(\varkappa-1)!}\ln^{\varkappa-1}\frac{1}{\tau}\,d\tau+\varphi_0(t)\right).$

Функция $\phi(t)$ **имеет ограниченное изменение на промежутке** $[0,\ 1]$. Кроме того, $\phi(+0)=\phi(0)=0$ и

$$\phi(1)=\frac{1}{q-p}\left(\sum_{\varkappa=1}^{q-p-1}\frac{1}{(\varkappa-1)!}\int_0^1\ln^{\varkappa-1}\frac{1}{\tau}\,d\tau+1\right)=1.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью регулярных моментов. Следовательно, матрица /59/ - регулярна.

Покажем, что матрица /59/ удовлетворяет всем условиям леммы 9. Так как функция $\phi(t)$ абсолютно непрерывна на промежутке $]0, 1[$, то достаточно показать справедливость неравенства:

$$\inf_{\operatorname{Re} z \geq 0} \left| \frac{1}{q-p} \frac{z+1}{z} \left(1 - \frac{1}{(z+1)^{q-p}}\right) \right| > 0. \qquad /60/$$

Функция, стоящая под знаком абсолютной величины в неравенстве /60/, не обращается в нуль в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq 0$. Кроме того, эта функция принимает значение равное единице в точке $z = 0$. Поскольку она непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, то на каждом замкнутом ограниченном множестве этой полуплоскости ее модуль достигает минимума, отличного от нуля.

Далее имеем:

$$\frac{1}{q-p} \frac{z+1}{z} \left(1 - \frac{1}{(z+1)^{q-p}}\right) \to \frac{1}{q-p} \quad (z \to \infty),$$

то есть неравенство /60/ выполняется и в достаточно малой окрестности бесконечно удаленной точки.

Выполнены все условия леммы 9, поэтому матрица /59/ равносильна сходимости. Теорема 6 доказана.

Теперь рассмотрим логарифмический метод суммирования.

Последовательность $\{S_n\}$ суммируется логарифмическим методом к числу S , если

$$\ell n(S_n) = \frac{1}{\varphi_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} S_k \to S \qquad (n \to \infty),$$

где $\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \quad (n \geq 0)$

Лемма I0 [5]. Если нормальная регулярная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования последовательности в последовательность удовлетворяет условию:

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(|a_{nn}|-\sum_{k=0}^{n-1}|a_{nk}|\right)>0, \qquad /61/$$

то она равносильна сходимости.

Теорема 7. Соотношение

$$S_n-\ell_n(S_n)\to S \qquad (n\to\infty)$$

выполнено, если и только если

$$\ln^{-1}(n+2)\sum_{k=0}^{n}a_k\ln(k+1)\to S \quad (n\to\infty),$$

где $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k \quad (n\geq 0)$.

Доказательство. Имеем:

$$S_n-\ell_n(S_n)=\sum_{k=0}^{n}a_k-\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}a_i=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}P_{k-1}a_k.$$

Теорема 7 будет доказана, если покажем, что матрица $A=(a_{nk})$ и матрица $B=(b_{nk})$, где

$$a_{nk}=\frac{P_k}{P_{n+1}} \quad (0\leq k\leq n),\quad a_{nk}=0 \quad (0\leq n<k),$$

$$b_{nk}=\frac{\ln(k+2)}{\ln(n+3)} \; (0\leq k\leq n),\; b_{nk}=0 \;\; (0\leq n<k),$$

равносильны и совместны. Для этого достаточно показать, что матрица $AB^{-1}=(c_{nk})$ регулярна и равносильна сходимости [I, стр. 32].

Имеем: $B^{-1}=(\bar{b}_{nk})$, где $\bar{b}_{nk}=0 \; (n,k\geq 0,\; k\neq n-1,\, n)$,

$$\bar{b}_{n+1,n} = -1 \ (n \geq 0), \quad \bar{b}_{nn} = \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)} \quad (n \geq 0).$$

Действительно,

$$\sum_{i=0}^{n-k} \bar{b}_{n,k+i}\, b_{k+i,k} = \bar{b}_{n,n-1}\, b_{n-1,k} + \bar{b}_{nn}\, b_{nk} = -\frac{\ln(k+2)}{\ln(n+2)} +$$

$$+ \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)} \cdot \frac{\ln(k+2)}{\ln(n+3)} = 0 \quad (0 \leq k < n),$$

$$\bar{b}_{nn}\, b_{nn} = 1 \quad (n \geq 0),$$

то есть $B^{-1}B = E$. Теперь получим:

$$c_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k+i}\, \bar{b}_{k+i,k} = \frac{p_k \ln(k+3)}{p_{n+1} \ln(k+2)} - \frac{p_{k+1}}{p_{n+1}} \quad (0 \leq k < n),$$

$$c_{nn} = \frac{p_n \ln(n+3)}{p_{n+1} \ln(n+2)} \quad (n \geq 0), \quad c_{nk} = 0 \quad (0 \leq n < k).$$

Покажем, что матрица AB^{-1} удовлетворяет условиям леммы 10. Для того чтобы она была регулярной матрицей преобразования последовательности в последовательность, необходимо и достаточно выполненения трех условий [17, стр. 63-66] :

1/ $\lim_{n\to\infty} c_{nk} = 0 \ (k \geq 0)$, 2/ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = 1$, 3/ $\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| = O(1)$.

Легко видеть, что условие 1/ выполнено. Далее имеем:

$$c_{nk} = \frac{p_k}{p_{n+1}} \left(\frac{\ln(k+3)}{\ln(k+2)} - 1 \right) - \frac{1}{(k+2)\, p_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{p_{n+1}} \left(\frac{p_k}{\ln(k+2)} \ln \frac{k+3}{k+2} - \frac{1}{k+2} \right) > \frac{1}{p_{n+1}} \left(\frac{\ln(k+2) + C + x_k}{\ln(k+2)} \times \right.$$

$$\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+3)\varphi_{n+1}}\left(\frac{C+x_k}{\ln(k+2)}-\frac{1}{k+2}\right),$$

где C - постоянная Эйлера, $x_k \to 0 \ (k \to 0)$. Поэтому, при $k>k_0$ $\ C_{nk} \geq 0$. Так как $C_{nk} \to 0 \ (n\to\infty,\ k\geq 0)$, то получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|C_{nk}|=\sum_{k=0}^{n-1}C_{nk}+O(1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\varphi_{n+1}}\left(\frac{\varphi_k}{\ln(k+2)}\ln\frac{k+3}{k+2}-\frac{1}{k+2}\right)+$$

$$+O(1)<\frac{1}{\varphi_{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\varphi_k}{(k+2)\ln(k+2)}-\frac{1}{k+2}\right)+O(1)=O(1)\ (n\to\infty).$$

Поскольку $C_{nn} \to 1 \ (n\to\infty)$, то из полученного соотношения следует, что матрица AB^{-1} удовлетворяет условиям 2/ и 3/, а также условию /6I/ леммы IO, поэтому матрица AB^{-1} - регулярная матрица преобразования последовательности в последовательность равносильная сходимости. Теорема 7 доказана.

Во введении было отмечено, что теоремы 5-7 можно рассматривать как теоремы о тауберовых константах, или как теоремы тауберова типа. Действительно, если в условиях теоремы 5 предположить, что $n a_n \to 0 \ (n\to\infty)$ и последовательность $\{S_n\}$ суммируется некоторым методом Чезаро порядка $\alpha>0$, то в силу включения: $C_\alpha \subset C_\beta$ при $-1<\alpha<\beta$ [3, стр. 87] эта последовательность будет суммироваться методом Чезаро натурального порядка q , где $\alpha \leq q$, а из теоремы 5 получим, что последовательность $\{S_n\}$ будет суммироваться любым методом Чезаро натурального порядка p , где $0\leq p<q$. Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ будет сходящейся. Окончательно получаем хорошо известный

факт, что условие $na_n \to 0 (n\to\infty)$ является тауберовым для методов Чезаро.

Из теорем 5-7 можно получать и несколько иные утверждения. Например:

пусть множество рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ задано условием:

$$C_n^{\rho+1}(na_n) \to S \quad (n\to\infty),$$

где S - конечное число, числа $a_n (n \geq 0)$ - вещественны.

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, C_n^q (S_n) = +\infty$, где $0 \leq \rho < q$, то по теореме 5 получим: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, C_n^{\rho}(S_n) = +\infty$.

Следствие I4. Справедливо равенство:

$$\binom{n+q}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+q}{n-k} \frac{1}{k} = \ln(n+1) + C - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k+1} + x_n, \qquad /62/$$

где C - постоянная Эйлера, $x_n \to 0 (n\to\infty)$, q - натуральное число.

Доказательство. Положив: $\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \; (n \geq 0)$, получим:

$$\binom{n+q}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+q}{n-k} \frac{1}{k} = \binom{n+q}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+q}{n-k} (\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}) =$$

$$= \binom{n+q}{n}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+q-1}{n-k} \varphi_{k-1} = C_n^q(\varphi_{n-1}).$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \; (a_0 = 0)$ удовлетворяет условию: $na_n \to 1 \; (n\to\infty)$, поэтому вследствии регулярности методов Чезаро порядка $\alpha \geq 0$ получим: $C_n^1(na_n) \to 1 (n\to\infty)$.

Положив в условии теоремы 5: $S_n = \varphi_{n-1} (n \geq 0), \rho = 0,$ будем иметь:

$$\varphi_{n-1} - C_n^q (\varphi_{n-1}) \to T(0,q) \quad (n \to \infty).$$

Отсюда, используя известное равенство: $\varphi_{n-1} = \ln(n+1) + C + y_n,$ где $y_n \to 0 \ (n \to \infty)$, получаем равенство /62/.

Лемма II [36, лемма 3] . Если r есть функция от n, удовлетворяющая условиям:

$$0 < r < 1, \quad -n \ln r \to 1 \ (n \to \infty),$$

то

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{r^m}{m} = \beta + o(1) = \int_1^{\infty} u^{-1} e^{-u} du + o(1) = 0{,}21938\ldots + o(1)$$

и

$$(1-r) \sum_{m=n+1}^{\infty} r^m = \frac{1}{e} + o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Для дальнейшего понадобится также

Лемма I2. Если

$$C_n^{\rho+1} (n a_n) \to 0 \quad (n \to \infty), \qquad /63/$$

то

$$C_n^{\rho} (S_n) - (1 - x_n) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x_n^k \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \ (n \geq 0), \ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ (n \geq 0)$, ρ - целое неотрицательное число.

Доказательство. Обозначим через $B = (b_{nk})$ матрицу с элементами:

$$b_{nk} = \left(\binom{n-k+\rho}{n-k} \binom{n+\rho}{n}^{-1} - x_n^k \right) \frac{1}{k} \quad (0 < k \leq n),$$

$$b_{nk}=-\frac{x_n^k}{k}\ (0\le n<k),\quad b_{n0}=0\ (n\ge 0).$$

По "лиммитирующей теореме" для методов Чезаро [17, стр. 132, теорема 46], из условия /63/ следует, что $a_n=O(n^p)$ $(n\to\infty)$. Кроме того, так как $x_n<1\ (n\ge 0)$, то $b_{nk}k^q=O(1)\quad (k\to\infty,\ q\ge 0)$.

Выбрав номер m достаточно большим в сравнении с n и пользуясь формулами /23/, /24/, получим:

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+p}{k-i}\binom{k+p+1}{k}^{-1} i a_i \binom{k+p+1}{k}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\binom{p+1}{j}b_{n,k+j}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-p-1}ka_k\left(\sum_{i=0}^{p+1}b_{n,k+i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{p+1}{j}\binom{i-j+p}{i-j}\right)+$$

$$+\sum_{i=p+2}^{m-k}b_{n,k+i}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\binom{p+1}{j}\binom{i+j-1}{i+j-p-1}+O(1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-p-1}ka_k\sum_{i=0}^{p+1}b_{n,k+i}(-1)^i\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{j+p}{j}\binom{p+1}{i-j}+O(1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-p-1}ka_k b_{nk}+O(1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+p}{n-k}\binom{n+p}{n}^{-1}a_k-$$

$$-\sum_{k=0}^{m-p-1}a_k x_n^k+O(1)\qquad (m\to\infty).$$

Так как выражение в правой части полученного равенства стремится к пределу при $m\to\infty$, то получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k-i+p}{k-i}\binom{k+p+1}{k}^{-1} i a_i\binom{k+p+1}{k}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\binom{p+1}{j}b_{n,k+j}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}a_k-\sum_{k=0}^{\infty}a_k x_n^k=$$

$$=C_n^{\rho}(S_n)-(1-x_n)\sum_{k=0}^{\infty}S_k x_n^k.$$

Теперь, для доказательства леммы I2 достаточно показать, что матрица $\mathcal{D}=(d_{nk})$ с элементами:

$$d_{nk}=\binom{k+\rho+1}{k}\sum_{i=0}^{\rho+1}(-1)^i\binom{\rho+1}{i}b_{n,k+i}\qquad(n,k\geq 0)$$

сохраняет сходимость последовательности к нулю. Для этого матрица $\mathcal{D}$ должна удовлетворять условиям [I7, стр. 69]:

I/ $d_{nk}\to 0\ (n\to\infty,\ k\geq 0)$, 2/ $\sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}|=O(1)$.

Так как $b_{nk}\to 0(n\to\infty,\ k\geq 0)$, то условие I/ выполнено.

Докажем теперь методом математической индукции два равенства:

$$\Delta^{\rho}\left(\binom{n-k+\rho-1}{n-k}\binom{n+\rho-1}{n}^{-1}-x^k\right)\frac{1}{k}=\Delta^{\rho}\frac{1-x^k}{k}\quad(\rho,k>0),\qquad /64/$$

$$\Delta^{\rho}\frac{1-x^k}{k}=\frac{(1-x)^{\rho+1}}{\rho+1}\binom{k+\rho}{k-1}^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+\rho}{i}x^i\quad(\rho,k>0),\qquad /65/$$

где

При $\rho=1$ равенство /64/ выполняется. Далее имеем:

$$\Delta^{\rho+1}\left(\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}-x^k\right)\frac{1}{k}=$$

$$=\Delta^{\rho}\left(\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}-x^k\right)\frac{1}{k}-\Delta^{\rho}\left(\binom{n-k+\rho-1}{n-k-1}\binom{n+\rho}{n}^{-1}-x^{k+1}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{k+1}=\Delta^{p}\left(\binom{n-k+p-1}{n-k}\binom{n+p-1}{n}^{-1}\frac{n-k+p}{n+p}-x^{k}\right)\frac{1}{k}-$$

$$-\Delta^{p}\left(\binom{n-k+p-2}{n-k-1}\binom{n+p-1}{n}^{-1}\frac{n-k+p-1}{n+p}-x^{k+1}\right)\frac{1}{k+1}=$$

$$=\Delta^{p}\left(\binom{n-k+p-1}{n-k}\binom{n+p-1}{n}^{-1}-x^{k}\right)\frac{1}{k}-$$

$$-\frac{1}{n+p}\binom{n+p-1}{n}^{-1}\Delta^{p}\binom{n-k+p-1}{n-k}-\Delta^{p}\left(\binom{n-k+p-2}{n-k-1}\times\right.$$

$$\left.\times\binom{n+p-1}{n}^{-1}-x^{k+1}\right)\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+p}\binom{n+p-1}{n}^{-1}\times$$

$$\times\Delta^{p}\binom{n-k+p-2}{n-k-1}=\Delta^{p}\left(\binom{n-k+p-1}{n-k}\binom{n+p-1}{n}^{-1}-x^{k}\right)\frac{1}{k}-$$

$$-\Delta^{p}\left(\binom{n-k+p-2}{n-k-1}\binom{n+p-1}{n}^{-1}-x^{k+1}\right)\frac{1}{k+1}=$$

$$=\Delta^{p}\frac{1-x^{k}}{k}-\Delta^{p}\frac{1-x^{k+1}}{k+1}=\Delta^{p+1}\frac{1-x^{k}}{k},$$

то есть равенство /64/ верно и для $p+1$, этим оно доказано.

Положив в равенстве /65/ $p=1$, получим:

$$\Delta^{1}\frac{1-x^{k}}{k}=\frac{1-x^{k}}{k}-\frac{1-x^{k+1}}{k+1}=\frac{1-x}{k(k+1)}\left((k+1)\sum_{i=0}^{k-1}x^{i}-\right.$$

$$-k\sum_{i=0}^{k} x^i\Big) = \frac{1-x}{k(k+1)}\Big(\sum_{i=0}^{k-1} x^i - kx^k\Big) = \frac{(1-x)^2}{k(k+1)}\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)x^i =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{2}\binom{k+1}{2}^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)x^i,$$

то есть при $p=1$ равенство /65/ выполняется. Далее имеем:

$$\Delta^{p+1}\frac{1-x^k}{k} = \Delta^p\frac{1-x^k}{k} - \Delta^p\frac{1-x^{k+1}}{k+1} =$$

$$= \frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\binom{k+p}{k-1}^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+p}{i}x^i - \frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\binom{k+p+1}{k}^{-1}\sum_{i=0}^{k}\binom{i+p}{i}x^i =$$

$$= \frac{(1-x)^{p+1}}{p+2}\binom{k+p+1}{k-1}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{k-1}(k+p+1)\binom{i+p}{i}x^i -$$

$$-\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{k} k\binom{i+p}{i}x^i\Big) = \frac{(1-x)^{p+1}}{p+2}\binom{k+p+1}{k-1}^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+p}{i}x^i -$$

$$-\binom{k+p}{k-1}x^k\Big) = \frac{(1-x)^{p+1}}{p+2}\binom{k+p+1}{k-1}^{-1}\Big(1+\sum_{i=1}^{k-1}\Big(\binom{i+p+1}{i}-\binom{i+p}{i-1}\Big)x^i -$$

$$-\binom{k+p}{k-1}x^k\Big) = \frac{(1-x)^{p+1}}{p+2}\binom{k+p+1}{k-1}^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+p+1}{i}x^i -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\binom{i+p}{i-1}x^i = \frac{(1-x)^{p+2}}{p+2}\binom{k+p+1}{k-1}^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{i+p+1}{i}x^i,$$

то есть равенство /65/ справедливо и для $p+1$.

Из равенств /64/ и /65/ для достаточно большого n и $0 \le k \le n-p-1$ получим:

$$d_{nk} = \binom{k+p+1}{k} \Delta^{p+1} b_{nk} = \binom{k+p+1}{k} \Delta^{p+1} \left(\binom{n-k+p}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} - \right.$$

$$\left. - x_n^k \right) \frac{1}{k} = \frac{(1-x_n)^{p+2}}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{i+p+1}{i} x_n^i > 0.$$

Кроме того, для $0 \le n < k$, используя равенства /8/ и /10/, получим:

$$d_{nk} = \binom{k+p+1}{k} \Delta^{p+1} b_{nk} = \binom{k+p+1}{k} \Delta^{p+1} \left(- \frac{x_n^k}{k} \right) =$$

$$= - \binom{k+p+1}{k} \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} \Delta^i \frac{1}{k} \Delta^{p+1-i} x_n^{k+i} =$$

$$= - \binom{k+p+1}{k} \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} \frac{1}{i+1} \binom{k+i}{k-1}^{-1} x_n^{k+i} (1-x_n)^{p+1-i} < 0.$$

Далее, для $n-p \le k \le n$ имеем:

$$d_{nk} = - \binom{k+p+1}{k} \Delta^{p+1} \frac{x_n^k}{k} + O(1) =$$

$$= - \binom{k+p+1}{k} \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} \Delta^i x_n^k \Delta^{p+1-i} \frac{1}{k+i} + O(1).$$

Но

$$\Delta^{p+1-i} \frac{1}{k+i} = \frac{1}{p+2-i} \binom{k+i+p+1-i}{k+i-1}^{-1} = O\left(\frac{1}{n^{p+2-i}} \right),$$

поскольку $n-p \le k \le n$. Кроме того,

$$\Delta^i x_n^k = x_n^k (1-x_n)^i = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \frac{1}{(n+1)^i} = O\left(\frac{1}{n^i}\right),$$

так как $n-p \le k \le n$. Следовательно, $d_{nk} = O(1)$ $(n \to \infty,\ n-p \le k \le n)$.

Поскольку $b_{nk} k^q = o(1)$ $(k \to \infty, q \ge 0)$, то получим:

$d_{nk}k^{q}=O(1)$ $(k\to\infty,\ q\geq 0)$ и поэтому все ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|d_{nk}|$ $(n\geq 0)$ сходятся. Следовательно, справедливы преобразования:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}|=\sum_{k=1}^{n-\rho-1}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\left(\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}-x_n^{k}\right)\frac{1}{k}+$$

$$+\sum_{k=n-\rho}^{n}\binom{k+\rho+1}{k}\left(\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{i}\binom{\rho+1}{i}\left(\binom{n-k-i+\rho}{n-k-i}\binom{n+\rho}{n}^{-1}-x_n^{k+i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{k+i}+\sum_{i=n-k+1}^{\rho+1}(-1)^{i}\binom{\rho+1}{i}\left(-\frac{x_n^{k+i}}{k+i}\right)\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\frac{x_n^{k}}{k}+$$

$$+O(1)=\sum_{k=1}^{n-\rho-1}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}\frac{1}{k}+$$

$$+\sum_{k=n-\rho}^{n}\binom{k+\rho+1}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{i}\binom{\rho+1}{i}\binom{n-k-i+\rho}{n-k-i}\binom{n+\rho}{n}^{-1}\frac{1}{k+i}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\frac{x_n^{k}}{k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\frac{x_n^{k}}{k}+O(1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\frac{x_n^{k}}{k}+$$

$$+2\sum_{k=n+1}^{\infty}\binom{k+\rho+1}{k}\Delta^{\rho+1}\frac{x_n^{k}}{k}+O(1)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+\rho}{n-k}\binom{n+\rho}{n}^{-1}\frac{1}{k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_n^{k}}{k}+2\sum_{k=n+\rho+2}^{\infty}\frac{x_n^{k}}{k}+2\sum_{k=n+1}^{n+\rho+1}\binom{k+\rho+1}{k}\sum_{i=0}^{n+\rho+1-k}(-1)^{i}\binom{\rho+1}{i}\times$$

$$\times \frac{x_n^{k+1}}{k+i} + O(1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+p}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} \frac{1}{k} - \ln \frac{1}{1-x_n} +$$

$$+ 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty} \frac{x_n^k}{k} + 2\sum_{k=n+1}^{n+p+1} (-1)^{k-n-1} \Delta^{k-n-1} \binom{n+p+2}{n+1} \Delta^{n+p+1-k} \frac{x_n^k}{k} +$$

$$+ O(1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+p}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} \frac{1}{k} - \ln \frac{1}{1-x_n} + 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty} \frac{x_n^k}{k} +$$

$$+ 2\sum_{k=n+1}^{n+p+1} (-1)^{k-n-1} \Delta^{k-n-1} \binom{n+p+2}{n+1} \sum_{i=0}^{n+p+1-k} \binom{n+p+1-k}{i} \Delta^i x_n^k \times$$

$$\times \Delta^{n+p+1-k-i} \frac{1}{k+i} + O(1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+p}{n-k} \binom{n+p}{n}^{-1} \frac{1}{k} -$$

$$- \ln(n+1) + 2\sum_{k=n+p+2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \frac{1}{k} + O(1) \qquad (n \to \infty).$$

Поскольку $n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \to -1 \ (n \to \infty)$, то, по лемме II, третье слагаемое в последнем равенстве есть ограниченная величина при $n \to \infty$. Поэтому, применяя к первому слагаемому следствие I4, получим: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| = O(1) \quad (n \to \infty)$, то есть выполнено условие 2/ и матрица $\mathcal{D}$ преобразует каждую сходящуюся к нулю последовательность в сходящуюся к нулю последовательность. Этим лемма I2 доказана.

В связи с недавним выходом работы [II] отметим, что в этой работе изучались вопросы подобные рассмотренному в лемме I2.

Теоремы 5-7 и лемму I2 можно применять и к изучению ядер преобразований Чезаро, Гельдера, логарифмического, Абеля-Пуассона.

Последовательность $\{S_n\}$ суммируется к числу S методом Абеля-Пуассона, если ряд $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ сходится для $|x|<1$ и

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = S.$$

Известно [12, стр. 168], что если $a_n - b_n \to 0 \ (n\to\infty)$, то ядра последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ совпадают. Ясно, что и их производные множества будут совпадать. Известно также [12, стр. 164; 17, стр. 139], что ядра средних $C_n^{\alpha}(S_n)$ содержатся в ядре средних $C_n^{\beta}(S_n)$ при $0\le\beta\le\alpha$ и все они содержат ядро функции $f(x)$. Поэтому из леммы 12 и теорем 5-7, в условиях которых положено: $S=0$, следуют такие утверждения:

Следствие 15. Если $C_n^{p+1}(na_n)\to 0 \ (n\to\infty)$, то ядра средних $C_n^{\alpha}(S_n)$, где $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \ (n\ge 0)$, для $\alpha\ge p$

совпадают с ядром функции $f(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$.

Кроме того, производные множества средних $C_n^{q}(S_n)$ при целых $q\ge p\ge 0$ совпадают и содержатся в производном множестве функции $f(x)$.

Следствие 16. Если $H_n^{p+1}(na_n)\to 0 \ (n\to\infty)$, то ядра средних $H_n^{q}(S_n)$ при целых $q\ge p\ge 0$ совпадают и они имеют одно и то же производное множество.

Следствие I7. Если

$$\ln^{-1}(n+2)\sum_{k=0}^{n} a_k \ln(k+1) \to 0 \quad (n\to\infty),$$

то ядро средних $l_n(S_n)$ совпадает с ядром последовательности $\{S_n\}$ и они имеют одно и то же производное множество.

При $p=0$ утверждение следствия I5 известно [II, теорема I; I3, теорема I0].

ГЛАВА 2. ОБ АБСОЛЮТНОМ СУММИРОВАНИИ РЯДОВ МЕТОДАМИ РОГОЗИНСКОГО И РОГОЗИНСКОГО-БЕРНШТЕЙНА.

§ 2.1. Абсолютное включение и абсолютная равносильность методов Рогозинского, Рогозинского-Бернштейна и некоторых других методов суммирования.

Метод Рогозинского суммирования рядов в виде преобразования ряда в последовательность определяется матрицей $\bar{R} = (\bar{r}_{nk})$, где

$$\bar{r}_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n+2} \ (0 \le k \le n), \quad \bar{r}_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k)$$

[17, стр. 480] . В виде преобразования ряда в ряд его матрица $R = (r_{nk})$ будет иметь элементы [3, стр. 50] :

$$r_{nk} = \bar{r}_{nk} - \bar{r}_{n-1,k} = \cos\frac{k\pi}{2n+2} - \cos\frac{k\pi}{2n} \qquad (0 \le k \le n),$$

$$r_{nk} = 0 \ (0 \le n < k), \qquad r_{00} = 1.$$

Метод Рогозинского является абсолютно регулярным методом. Действительно,

$$\sum_{n=k}^{m} |r_{nk}| = \sum_{n=k}^{m} \left| \cos\frac{k\pi}{2n+2} - \cos\frac{k\pi}{2n} \right| = \sum_{n=k}^{m} \left(\cos\frac{k\pi}{2n+2} - \cos\frac{k\pi}{2n} \right) =$$

$$= \cos\frac{k\pi}{2m+2} \qquad (k > 0).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{\infty} |r_{nk}| = \sum_{n=k}^{\infty} r_{nk} = 1 \ (k>0), \ \sum_{n=0}^{\infty} |r_{n0}| = r_{00} = 1,$$

и абсолютная регулярность метода Рогозинского следует из теоремы Кноппа-Лоренца.

Соотношения абсолютного включения между методом Рогозинского и другими абсолютно регулярными методами во многом определяются следующей теоремой.

Теорема 8. Метод Рогозинского абсолютно равносилен методу Чезаро первого порядка.

Доказательство. Для доказательства теоремы 8 достаточно показать, что матрица $R=(r_{nk})$ удовлетворяет условиям следствия 8. Имеем:

$$r_{kk}=\cos\frac{k\pi}{2k+2}>0 \qquad (k\geq 0),$$

и, следовательно, матрица R - нормальна. Выше была доказана ее абсолютная регулярность. Кроме того, имеем:

$$kr_{kk}=k\cos\frac{k\pi}{2k+2}=k\sin\frac{\pi}{2k+2}\to\frac{\pi}{2} \qquad (k\to\infty),$$

поэтому $\sup\limits_{k} kr_{kk}<\infty$.

Положим:

$$f_k(x)=\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2x}-\frac{1}{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{2x} \qquad (k>0).$$

Отсюда получим:

$$f_k'(x)=\frac{\pi}{2x^2}\left(\sin\frac{k\pi}{2x}-\sin\frac{(k+1)\pi}{2x}\right)<0, \qquad x\geq k+1.$$

Следовательно, функция $f_k(x)$ убывает в промежутке $[k+1,+\infty[$ $(k>0)$, поэтому будем иметь:

$$\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2n+2}-\frac{1}{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n+2}\leq\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2n}-\frac{1}{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n},$$

при $k\leq n-1$. Отсюда получим:

$$\frac{1}{k}\left(\cos\frac{k\pi}{2n+2}-\cos\frac{k\pi}{2n}\right)\leq\frac{1}{k+1}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{2n+2}-\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}\right),$$

или

$$\frac{r_{nk}}{k}\leq\frac{r_{n,k+1}}{k+1} \qquad (0<k\leq n-1).$$

Выполнены все условия следствия 8, поэтому $|R| \sim |C_1|$.

Метод Рогозинского-Бернштейна в виде преобразования ряда в последовательность определяется матрицей $\bar{Б} = (\bar{b}_{nk})$, где [17, стр. 480]

$$\bar{b}_{nk} = \cos \frac{k\pi}{2n+1} \quad (0 \le k \le n), \quad \bar{b}_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k).$$

В виде преобразования ряда в ряд матрица $Б = (b_{nk})$ метода Рогозинского-Бернштейна будет иметь элементы:

$$b_{nk} = \cos \frac{k\pi}{2n+1} - \cos \frac{k\pi}{2n-1} \qquad (0 \le k \le n-1),$$

$$b_{nn} = \cos \frac{n\pi}{2n+1} \quad (n \ge 0), \quad b_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k).$$

Метод Рогозинского-Бернштейна также абсолютно регулярен. Действительно,

$$\sum_{n=k}^{m} |b_{nk}| = \cos \frac{k\pi}{2k+1} + \sum_{n=k+1}^{m} \left(\cos \frac{k\pi}{2n+1} - \cos \frac{k\pi}{2n-1} \right) =$$

$$= \cos \frac{k\pi}{2m+1} \longrightarrow 1 \quad (m \to \infty).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{\infty} |b_{nk}| = \sum_{n=k}^{\infty} b_{nk} = 1 \qquad (k \ge 0),$$

и абсолютная регулярность метода Рогозинского-Бернштейна следует из теоремы Кноппа-Лоренца.

Для изучения абсолютной суммируемости рядов методом Рогозинского-Бернштейна воспользуемся методами Вороного-Нерлунда, имеющими более простую матрицу.

Пусть задана последовательность $\{p_n\}$ комплексных чисел и $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$, $P_n \ne 0$ $(n \ge 0)$. Матрица $\bar{W} = (\bar{w}_{nk})$ с элементами:

$$\bar{\omega}_{nk} = \frac{p_{nk}}{P_n} \quad (0 \le k \le n), \quad \bar{\omega}_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k)$$

определяет метод Вороного-Нерлунда преобразования последовательности в последовательность. Матрица $W = (\omega_{nk})$, где

$$\omega_{nk} = \sum_{i=k}^{n} \bar{\omega}_{ni} - \sum_{i=k}^{n-1} \bar{\omega}_{n-1,i} = \frac{P_{n-k}}{P_n} - \frac{P_{n-k-1}}{P_{n-1}} \quad (0 \le k < n), \qquad /66/$$

$$\omega_{nn} = \frac{P_0}{P_n} \quad (n \ge 0), \quad \omega_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k),$$

определяет метод Вороного-Нерлунда преобразования ряда в ряд [3, стр. 52].

Метод Чезаро порядка $\alpha > -1$ является методом Вороного-Нерлунда с $p_n = \binom{n+\alpha-1}{n} \ (n \ge 0)$ [3, стр. 100].

Если $p_n = 1 \ (n < \beta)$ и $p_n = 0 \ (n \ge \beta)$, то соответствующий метод Вороного-Нерлунда называют методом Сильвермана-Сасса и обозначают Z_β [3, стр. 100].

Элементы обратной матрицы $W^{-1} = (\xi_{nk})$ определяются по формулам [3, стр. 103]:

$$\xi_{nk} = P_k c_{n-k} \quad (0 \le k \le n), \quad \xi_{nk} = 0 \quad (0 \le n < k), \qquad /67/$$

где коэффициенты $c_n \ (n \ge 0)$ определяются из равенства:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Элементы обратной матрицы $W^{-1} = (\eta_{nk})$ определяются по формулам [3, стр. 57, 9.13]:

$$\eta_{nk} = \sum_{i=k}^{n} \left(\xi_{ni} - \xi_{n-1,i}\right) \qquad (n, k \ge 0). \qquad /68/$$

Теорема 9. Метод Рогозинского-Бернштейна абсолютно равносилен методу Вороного-Нерлунда с $p_0 = 1, \ p_n = 2 \ (n > 0)$

Доказательство. Обозначим через $W=(\omega_{nk})$ матрицу указаного в условии теоремы 6 метода Вороного-Нерлунда в виде преобразования ряда в ряд. Тогда по формулам /66/ получим:

$$\omega_{nk}=\frac{2(n-k)+1}{2n+1}-\frac{2(n-k)-1}{2n-1}=\frac{4k}{4n^2-1}\ (0\le k<n), \qquad /69/$$

$$\omega_{nn}=\frac{2n-1}{4n^2-1}\ (n\ge 0),\quad \omega_{nk}=0\quad (0\le n<k).$$

Матрица W нормальна, поэтому, как следует из леммы 3, для доказательства теоремы 9 достаточно показать, что матрица $БW^{-1}=(a_{nk})$ является матрицей преобразования ряда в ряд равносильной абсолютной сходимости.

Пусть $Б=(b_{nk})$ и $W^{-1}=(\eta_{nk})$, тогда, пользуясь формулами /67/ и /68/, получим:

$$\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}2x^n\Big)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2x^n,$$

то есть $c_0=1,\ c_n=(-1)^n 2\quad (n>0)$. Следовательно,

$$\xi_{nk}=\varphi_k c_{n-k}=(-1)^{n-k}2(2k+1)\qquad (0\le k<n),$$

$$\xi_{nn}=2n+1\qquad (n\ge 0).$$

Кроме того,

$$\eta_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\left(\xi_{n\nu}-\xi_{n-1,\nu}\right)=\sum_{\nu=k}^{n-2}\left((-1)^{n-\nu}2(2\nu+1)-(-1)^{n-\nu-1}2(2\nu+1)\right)+$$

$$+(-2(2n-1)-(2n-1))+(2n+1)+4\sum_{\nu=k}^{n-2}(-1)^{n-\nu}(2\nu+1)-4(n-1)=$$

$$=(-1)^{n-k}4\Big(2\sum_{\nu=0}^{n-k-2}(-1)^{\nu}\nu+(2k+1)\sum_{\nu=0}^{n-k-2}(-1)^{\nu}\Big)-4(n-1)=$$

$$=(-1)^{n-k}4\left(\frac{2k+1-(2k+1+2(n-k-2))(-1)^{n-k-1}}{2}-\frac{1-(-1)^{n-k-2}}{2}\right)-$$

$$-4(n-1)=(-1)^{n-k}4k \qquad (0\leq k<n-1);$$

$$\eta_{n,n-1}=-2(2n-1)-(2n-1)+(2n+1)=-4(n-1) \qquad (n>0),$$

$$\eta_{nn}=2n+1 \quad (n\geq 0), \qquad \eta_{nk}=0 \quad (0\leq n<k).$$

Используя полученные равенства и положив: $\alpha_n=\frac{\pi}{2n+1}$ $(n\geq 0)$, получим:

$$a_{nk}=\sum_{i=k}^{n} b_{ni}\eta_{ik}=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-4k\left(\sum_{i=0}^{n-k-2}(-1)^i(\cos(k+i+1)\alpha_n-\cos(k+i+1)\alpha_{n-1})+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-k-1}\cos n\alpha_n\right) \qquad (0\leq k<n);$$

$$a_{nn}=(2n+1)\cos n\alpha_n \quad (n\geq 0), \qquad a_{nk}=0 \quad (0\leq n<k).$$

Покажем, что матрица $БW^{-1}$ удовлетворяет условиям леммы 4, этим теорема 9 будет доказана. Действительно, так как $a_{nn}>0$ $(n\geq 0)$, то матрица $БW^{-1}$ нормальна. Пользуясь формулой [37, стр. 44, I.341.6]:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin(x+ky)=\sin\left\{x+\frac{n-1}{2}(y+\pi)\right\}\sin\frac{n(y+\pi)}{2}\sec\frac{y}{2},$$

для $0\leq k\leq n-1$ получим:

$$a_{nk}=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-4k\left(\sum_{i=0}^{n-k-2}(-1)^i(\cos(k+i+1)\alpha_n-\cos(k+i+1)\alpha_{n-1})+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-k-1}\cos n\alpha_n\right)=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-4k\Big(\sum_{i=0}^{n-k-1}(-1)^i\sin\Big(\frac{\pi}{2}-(k+i+1)\alpha_n\Big)-\sum_{i=0}^{n-k-2}(-1)^i\sin\Big(\frac{\pi}{2}-(k+i+1)\alpha_{n-1}\Big)\Big)=$$

$$=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-4k\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}-(k+1)\alpha_n+$$

$$+\frac{n-k-1}{2}(\pi-\alpha_n)\Big)\sin\frac{n-k}{2}(\pi-\alpha_n)\sec\frac{\alpha_n}{2}-$$

$$-\sin\Big(\frac{\pi}{2}-(k+1)\alpha_{n-1}+\frac{n-k-2}{2}(\pi-\alpha_{n-1})\Big)\sin\frac{n-k-1}{2}(\pi-\alpha_{n-1})\times$$

$$\times\sec\frac{\alpha_{n-1}}{2}=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-4k\Big(\sin\Big((n-k)\frac{\pi}{2}-\frac{n+k+1}{2}\alpha_n\Big)\sin\Big((n-k)\frac{\pi}{2}-\frac{n-k}{2}\alpha_n\Big)\sec\frac{\alpha_n}{2}-$$

$$-\sin\Big((n-k-1)\frac{\pi}{2}-\frac{n+k}{2}\alpha_{n-1}\Big)\sin\Big((n-k-1)\frac{\pi}{2}-\frac{n-k-1}{2}\alpha_{n-1}\Big)\times$$

$$\times\sec\frac{\alpha_{n-1}}{2}\Big)=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-2k\Big(\Big(\cos\frac{2k+1}{2}\alpha_n-\cos\Big(2(n-k)\frac{\pi}{2}-\frac{2n+1}{2}\alpha_n\Big)\Big)\sec\frac{\alpha_n}{2}-$$

$$-\Big(\cos\frac{2k+1}{2}\alpha_{n-1}-\cos\Big(2(n-k-1)\frac{\pi}{2}-\frac{2n-1}{2}\alpha_{n-1}\Big)\Big)\sec\frac{\alpha_{n-1}}{2}=$$

$$=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-2k\Big(\cos\frac{2k+1}{2}\alpha_n\sec\frac{\alpha_n}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}\alpha_{n-1}\sec\frac{\alpha_{n-1}}{2}=$$

$$=(2k+1)(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1})-$$

$$-2k\left(\cos k\alpha_n-\cos k\alpha_{n-1}+\sin k\alpha_{n-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_{n-1}}{2}-\sin k\alpha_n\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_n}{2}\right)=$$

$$=\cos k\alpha_n+2k\sin k\alpha_n\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_n}{2}-\left(\cos k\alpha_{n-1}+2k\sin k\alpha_{n-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right).$$

Положим:

$$\varphi_k(x)=\cos\frac{k\pi}{2x+1}+2k\sin\frac{k\pi}{2x+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(2x+1)}\qquad(k>0).$$

Отсюда получим:

$$\varphi_k'(x)=\frac{2k\pi}{(2x+1)^2}\sin\frac{k\pi}{2x+1}+2k\left(-\frac{2k\pi}{(2x+1)^2}\cos\frac{k\pi}{2x+1}\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(2x+1)}-\frac{k\pi}{(2x+1)^2}\sin\frac{k\pi}{2x+1}\sec^2\frac{k\pi}{2(2x+1)}\right)=\frac{2k\pi}{(2x+1)^2}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{k\pi}{2x+1}-2k\left(\cos\frac{k\pi}{2x+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2x+1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sec^2\frac{k\pi}{2(2x+1)}\right)\right)=\frac{2k\pi}{(2x+1)^2}\left(\left(1-k\sec^2\frac{k\pi}{2(2x+1)}\right)\sin\frac{k\pi}{2x+1}-\right.$$

$$\left.-2k\cos\frac{k\pi}{2x+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(2x+1)}\right).$$

Но $1-k\sec^2\frac{\pi}{2(2x+1)}<0\quad(k>0)$. Кроме того,

$$\cos\frac{k\pi}{2x+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(2x+1)}>0\ (x\geq k)\ \text{и}\ \sin\frac{k\pi}{2x+1}>0\ (x\geq k).$$

Следовательно, $\varphi_k'(x)<0\ \ (x\geq k)$, то есть функция $\varphi_k(x)$ убывает в промежутке $[\,k,\ +\infty[$. Поэтому $a_{nk}<0$ $(0<k<n-1)$. Далее имеем:

$$|a_{nn}|-\sum_{i=1}^{m}|a_{n+i,n}|=(2n+1)\cos n\alpha_n-|(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1}-$$

$$-\cos n\alpha_n)-4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}|+\sum_{i=2}^{m}(\cos n\alpha_{n+i}+$$

$$+2n\sin n\alpha_{n+i}\,tg\frac{\alpha_{n+i}}{2}-\cos n\alpha_{n+i-1}-2n\sin n\alpha_{n+i-1}\times$$

$$\times tg\frac{\alpha_{n+i-1}}{2})=(2n+1)\cos n\alpha_n-|(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1}-\cos n\alpha_n)-$$

$$-4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}|+\cos n\alpha_{n+m}+2n\sin n\alpha_{n+m}\,tg\frac{\alpha_{n+m}}{2}-$$

$$-(\cos n\alpha_{n+1}+2n\sin n\alpha_{n+1}\,tg\frac{\alpha_{n+1}}{2})\to$$

$$\to(2n+1)\cos n\alpha_n-|(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1}-\cos n\alpha_n)-$$

$$-4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}|-\cos n\alpha_{n+1}-2n\sin n\alpha_{n+1}\times$$

$$\times tg\frac{\alpha_{n+1}}{2}+1\qquad(m\to\infty).$$

Следовательно,

$$|a_{nn}|-\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n+i,n}|=(2n+1)\cos n\alpha_n-|(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1}-\cos n\alpha_n)-$$

$$-4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}|-\cos n\alpha_{n+1}-2n\sin n\alpha_{n+1}\,tg\frac{\alpha_{n+1}}{2}+1.$$

Теперь получим:

$$(2n+1)\cos n\alpha_n=(2n+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)=$$

$$=(2n+1)\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}\to\frac{\pi}{2}\qquad(n\to\infty),$$

$$(2n+1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2(2n+3)}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)\right)-$$

$$-4n\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(2n+3)}\right)=(2n+1)\left(\sin\frac{3\pi}{2(2n+3)}-\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)-$$

$$-4n\sin\frac{\pi}{2(2n+3)}\to\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}-\pi=0 \qquad (n\to\infty),$$

а также

$$\cos n\alpha_{n+1}+2n\sin n\alpha_{n+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+1}}{2}=\cos\frac{n\pi}{2n+3}+$$

$$+2n\sin\frac{n\pi}{2n+3}\sin\frac{\pi}{2(2n+3)}\sec\frac{\pi}{2(2n+3)}\to\frac{\pi}{2} \quad (n\to\infty).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(|a_{nn}|-\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n+i,n}|\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=1>0. \qquad /70/$$

Так как $|a_{nn}|\to\frac{\pi}{2}$ $(n\to\infty)$, то из /70/ также следует, что $\sup\limits_{k}\sum\limits_{n=k}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$, то есть матрица $БW^{-1}$ абсолютно консервативна. Выполнены все условия леммы 4 и матрица $БW^{-1}$ равносильна абсолютной сходимости. Теорема 9 доказана.

Теорема 10. Метод Рогозинского-Бернштейна абсолютно равносилен методу, определяющемуся матрицей $C_1 Z_2$.

Доказательство. Из формул /68/ легко получить, что $Z_2 = (z_{nk})$, где $z_{nn}=\frac{1}{2}$ $(n>0)$, $z_{n,n-1}=\frac{1}{2}$ $(n>1)$,

$$z_{00}=1,\ z_{10}=0,\ z_{nk}=0\ (0\le k<n-1),\ z_{nk}=0\ (0\le n<k).$$

Если теперь $C_1 Z_2 = (d_{nk})$ и $C_1 = (c_{nk})$, то получим:

$$d_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} c_{n,k+i} z_{k+i,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n(n+1)} + \frac{k+1}{n(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{2k+1}{2n(n+1)} \quad (0<k<n), \quad d_{nn} = \frac{n}{2n(n+1)} \quad (n>0),$$

$$d_{n0} = 0 \ (n>0), \quad d_{00} = 1, \quad d_{nk} = 0 \quad (0 \le k < n).$$

В связи с теоремой 9, для доказательства теоремы 10 достаточно показать, что $|W| \sim |C_1 Z_2|$, где W - матрица метода Вороного-Нерлунда преобразования ряда в ряд, рассмотренного в теореме 9. Так как матрица W нормальна, то, доказав равносильность абсолютной сходимости матрицы $C_1 Z_2 W^{-1}$, по лемме 3 получим, что $|W| \sim |C_1 Z_2|$.

Пусть $C_1 Z_2 W^{-1} = (a_{nk})$ и $W^{-1} = (\eta_{nk})$. Тогда, используя значения η_{nk} $(n,k \ge 0)$, найденные при доказательстве теоремы 9, получим:

$$a_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} d_{n,k+i} \eta_{k+i,k} = \frac{(2k+1)^2}{2n(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-k-1} (-1)^i 4k \frac{2(k+i)+1}{2n(n+1)} +$$

$$+ (-1)^{n-k} 4k \frac{n}{2n(n+1)} = \frac{(2k+1)^2}{2n(n+1)} + \frac{4k}{2n(n+1)}\left(2\sum_{i=1}^{n-k-1}(-1)^i i +\right.$$

$$\left. + (2k+1)\sum_{i=1}^{n-k-1}(-1)^i\right) + \frac{(-1)^{n-k} 4kn}{2n(n+1)} = \frac{(2k+1)^2}{2n(n+1)} +$$

$$+ \frac{4k}{2n(n+1)}\left(\frac{(-1)^{n-k-1}(2n-2k-1)-1}{2} + (2k+1)\frac{(-1)^{n-k-1}-1}{2}\right) +$$

$$+\frac{(-1)^{n-k}4kn}{2n(n+1)}=\frac{(2k+1)^2}{2n(n+1)}+\frac{4k}{2n(n+1)}\left((-1)^{n-k-1}n-k-1\right)+$$

$$+\frac{(-1)^{n-k}4kn}{2n(n+1)}=\frac{(2k+1)^2-4k(k+1)}{2n(n+1)}\quad(n>0),$$

$$a_{n0}=0\ (n>0),\quad a_{00}=1,\quad a_{nk}=0\ (0\le n<k).$$

Покажем, что матрица $C_1Z_2W^{-1}$ удовлетворяет условиям леммы 4, этим теорема IO будет доказана. Поскольку $a_{nn}>0$ $(n\geq 0)$, то матрица $C_1Z_2W^{-1}$ нормальна. Далее имеем:

$$|a_{nn}|-\sum_{i=1}^{m}|a_{n+i,n}|=\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n+i)(n+i+1)}=$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+m+1}\right)=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+m+1)}\to\frac{n}{n+1}\ (m\to\infty).$$

Следовательно,

$$|a_{nn}|-\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n+i,n}|=\frac{n}{n+1}\quad(n>0).$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(|a_{nn}|-\sum_{i=1}^{\infty}|a_{n+i,n}|\right)=1>0.$$

Поскольку $|a_{nn}|\to 1\ (n\to\infty)$, то из последнего неравенства следует: $\sup\limits_{k}\sum\limits_{n=k}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$, и вследствии теоремы Кнопша-Лоренца матрица $C_1Z_2W^{-1}$ абсолютно консервативна. Выполнены все условия леммы 4, следовательно, матрица $C_1Z_2W^{-1}$ равносильна абсолютной сходимости. Теорема IO доказана.

Теперь, используя теоремы 9 и IO, исследуем абсолютное включение метода Рогозинского-Бернштейна и методов Чезаро.

Теорема II. Включения $|C_\alpha| \subset |Б| \subset |C_\beta|$ справедливы, если и только если $-1 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 2$.

Доказательство. Поскольку матрица C_α нормальна, то, по лемме I, включение $|C_\alpha| \subset |W|$, где W - матрица метода Вороного-Нерлунда, приведенного в условии теоремы 9, справедливо, если матрица WC_α^{-1} - абсолютно консервативная матрица преобразования ряда в ряд.

Пусть $WC_\alpha^{-1} = (d_{nk})$, $W = (\omega_{nk})$, $C_\alpha^{-1} = (\bar{c}_{nk})$.

Тогда $d_{nn} = \omega_{nn}\bar{c}_{nn}$ $(n \geq 0)$. При доказательстве теоремы 9 было получено, что

$\omega_{nn} = \dfrac{2n-1}{4n^2-1}$ $(n \geq 0)$. Кроме того, $\bar{c}_{nn} = \binom{n+\alpha}{n}$ [3, стр. 86]. Следовательно,

$$d_{nn} = \frac{2n-1}{4n^2-1}\binom{n+\alpha}{n} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha+1)} \quad (n \to \infty),$$

и матрица WC_α^{-1}, в силу теоремы Кноппа-Лоренца, не может быть абсолютно консервативной при $\alpha > 1$. Поэтому $|C_\alpha| \not\subset |W|$, при $\alpha > 1$, и вследствии теоремы 9 получим: $|C_\alpha| \not\subset |Б|$ при $\alpha > 1$.

Покажем теперь, что $|C_1| \subset |W|$. Для этого достаточно показать, что матрица W удовлетворяет условиям следствия 2, в которых положено: $\rho = 1$. Пусть $W = (\omega_{nk})$, тогда, пользуясь значениями ω_{nk} $(n, k \geq 0)$, найдеными при доказательстве теоремы 9, получим:

$$\frac{\omega_{nk}}{k} = \frac{\omega_{n,k+1}}{k+1} = \frac{4}{4n^2-1} \quad (0 \leq k < n-1),$$

$$\frac{\omega_{n,n-1}}{n-1} = \frac{4}{4n^2-1} > \frac{\omega_{nn}^*}{n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{4n^2-1} \quad (n \geq 0).$$

Следовательно, $\Delta^1 \dfrac{\omega_{nk}}{k} \geq 0 \qquad (0 \leq k < n)$.

Покажем, что матрица W абсолютно регулярна. Имеем:

$$\sum_{n=k}^{m} |\omega_{nk}| = \sum_{n=k}^{m} \omega_{nk} = \sum_{n=k+1}^{m} \frac{4k}{4n^2-1} + \frac{2k-1}{4k^2-1} = \frac{1}{2k+1} +$$

$$+ 2k \sum_{n=k+1}^{m} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 1 - \frac{2k}{2m+1} \to 1 \quad (m \to \infty).$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} |\omega_{nk}| = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \omega_{nk} = 1 \quad (k \geq 0)$, и по теореме Кноппа-Лоренца матрица W абсолютно регулярна. Выполнены все условия следствия 2, в которых положено: $\rho = 1$, поэтому $|C_1| \subset |W|$ и по теореме 9 получаем: $|C_1| \subset |\mathcal{B}|$. Так как $|C_\alpha| \subset |C_\gamma|$ при $-1 < \alpha < \gamma$ [3, стр. 89], то окончательно получаем, что включение $|C_\alpha| \subset |\mathcal{B}|$ справедливо, если и только если $-1 < \alpha \leq 1$.

Докажем включение: $|W| \subset |C_2|$. Для этого, как и выше, достаточно показать, что матрица $C_2 W^{-1}$ – абсолютно консервативная матрица преобразования ряда в ряд.

Пусть $C_2 W^{-1} = (a_{nk})$, $W^{-1} = (\eta_{nk})$, $C_2 = (c_{nk})$.

Тогда, пользуясь значениями c_{nk} $(n, k \geq 0)$ и значениями η_{nk} $(n, k \geq 0)$, полученными при доказательстве теоремы 9, будем иметь:

$$a_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} c_{n,k+i}\, \eta_{k+i,k} = \frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)(n+2)} (2k+1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(-1)^i 4k\, 2(k+i)(n-k-i+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2k}{n(n+1)(n+2)} \times$$

$$\times\left((2k+1)(n-k+1)-4(n+1)\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^{i-1}(k+i)-4\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^{i-1}(k+i)^2\right)=$$

$$=\frac{2k}{n(n+1)(n+2)}\left((2k+1)(n-k+1)-4(n+1)\left((2n+1)(-1)^{n-k-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2k+1\right)\frac{1}{4}-4\left(n(n+1)(-1)^{n-k-1}+k(k+1)\right)\frac{1}{2}\right)=\frac{2k^2}{n(n+1)(n+2)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n-k}\,2k}{n(n+2)}\quad\left(k,n\geq 0,\ \frac{k}{n}=1 \text{ при } k=n=0\right).$$

Отсюда получим:

$$\sum_{n=k}^{m}|a_{nk}|\leq\sum_{n=k}^{m}\left(\frac{2k^2}{n(n+1)(n+2)}+\frac{2k}{n(n+1)}\right)=2k^2\sum_{n=k}^{m}\left(\frac{1}{n}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2}+2k\sum_{n=k}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=k^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-$$

$$-k^2\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+2-\frac{2k}{m+1}\longrightarrow\frac{k}{k+1}+2$$

$$(m\to\infty).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{\infty}|a_{nk}|\leq\frac{k}{k+1}+2\quad(k\geq 0)\quad\text{и}\quad\sup_k\sum_{n=k}^{\infty}|a_{nk}|<\infty,$$

то есть матрица C_2W^{-1} абсолютно консервативна. Поэтому $|W|\subset|C_2|$ и вследствии теоремы 9 имеем: $|Б|\subset|C_2|$, и значит $|Б|\subset|C_\beta|$ при $\beta\geq 2$.

Приведем пример ряда, абсолютно суммируемого методом Рогозинского-Бернштейна но не суммируемого абсолютно никаким методом Чезаро порядка $\gamma<2$. Этим будет доказано соотношение: $|Б|\not\subset|C_\gamma|$ при $\gamma<2$. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(n^{\gamma-1}+(n-1)^{\gamma-1}\right) \qquad (1<\gamma<2). \qquad /71/$$

Как следует из одной теоремы Когбетлянца [38], условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{(n+1)^{\gamma}}<\infty \qquad /72/$$

является необходимым для абсолютной суммируемости методом Чезаро порядка γ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Легко видеть, что для ряда /7I/ условие /72/ не выполняется, следовательно, ряд /7I/ не суммируем абсолютно никаким методом Чезаро порядка γ.

Покажем, что ряд /7I/ абсолютно суммируем методом C_1Z_2, а следовательно, он будет абсолютно суммируем и методом Рогозинского-Бернштейна.

Пусть $C_1Z_2=(d_{nk})$ и $a_n=(-1)^{n+1}\left(n^{\gamma-1}+(n-1)^{\gamma-1}\right)\ (n\geq 0)$. Тогда, пользуясь значениями $d_{nk}\ (n,k\geq 0)$, найденными при доказательстве теоремы I0, получим:

$$|t_n|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_k d_{nk}\right|=\frac{1}{2n(n+1)}\left|\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}(2k+1)\left(k^{\gamma-1}+(k-1)^{\gamma-1}\right)+(-1)^{n+1}n\left(n^{\gamma-1}+(n-1)^{\gamma-1}\right)\right|=\frac{1}{2n(n+1)}\left|2\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k}k^{\gamma-1}+(-1)^{n}(n-1)^{\gamma}+(-1)^{n-1}n^{\gamma}\right|\leq\frac{1}{2n(n+1)}\left(2\sum_{k=1}^{n-2}\left(k^{\gamma-1}-(k-1)^{\gamma-1}\right)+n^{\gamma}+(n-1)^{\gamma}\right)\leq\frac{1}{2n(n+1)}\left(2(\gamma-1)\sum_{k=1}^{n}k^{\gamma-2}+\gamma n^{\gamma-1}\right)\leq$$

$$\leq H n^{\gamma-3},$$

где H - константа, зависящая лишь от γ. Так как $1<\gamma<2$, то из полученной оценки следует:

$\sum_{n=0}^{\infty}|t_n|<\infty$, то есть ряд /71/ абсолютно суммируем методом C_1Z_2. Теорема II доказана полностью.

В работах [I8, 2I] установлено, что методы суммирования, определяемые матрицами C_1Z_2 и Z_2C_1, равносильны. Для абсолютной суммируемости справедливо следующее утверждение.

Теорема I2. Методы суммирования, определяемые матрицами C_1Z_2 и Z_2C_1 не равносильны абсолютно. Кроме того, справедливы включения:

$$|C_\alpha|\not\subset|Z_2C_1|\subset|C_\beta|,\quad(\alpha>1,\beta>2),$$

$$|C_1Z_2|\subset|Z_2C_1|.$$

Доказательство. Пусть $C_1=(c_{nk})$. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n\text{, где } u_0=1,\ u_n=(-1)^n2n\quad(n>0). \qquad /73/$$

Тогда $C_1(u_n)=(v_n)$, где

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}c_{nk}u_k=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(-1)^kk^2=(-1)^n\quad(n>0),$$

$$v_0=c_{00}u_0=1.$$

Если $Z_2=(z_{nk})$, то далее получим: $Z_2C_1(u_n)=(q_n)$, где

$$q_n=\sum_{k=0}^{n}z_{nk}v_k=\frac{(-1)^{n-1}+(-1)^n}{2}=0\quad(n>0),\ q_0=z_{00}v_0=1.$$

Следовательно, $\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|=v_0=1$, то есть ряд /73/ абсолютно суммируем матрицей Z_2C_1. Известно [3, стр. 150], что $|C_2|\sim|C_1C_1|$. Далее имеем: $C_1C_1(u_n)=C_1(v_n)$ и поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ не суммируем абсолютно матрицей C_1 [3, стр. 99], то ряд /73/ не суммируем абсолютно матрицей C_2. Поэтому $|Z_2C_1|\not\subset|C_2|$, а из теорем 10 и 11 следует, что $|C_1Z_2|\subset|C_2|$. Следовательно, методы, определяемые матрицами C_1Z_2 и Z_2C_1 не равносильны абсолютно.

Пусть $Z_2C_1=(a_{nk})$, тогда получим:

$$a_{nk}=\sum_{i=0}^{n-k} z_{n,k+i}\,c_{k+i,k}=\frac{k}{2n(n+1)}+\frac{k}{2n(n-1)}=$$

$$=\frac{k}{n^2-1}\quad(0\le k<n),\qquad a_{nn}=\frac{1}{2(n+1)}\quad(n>0),$$

$$a_{00}=1,\quad a_{nk}=0\qquad(0\le n<k).$$

Для включения $|C_\alpha|\subset|Z_2C_1|$, по лемме 1, необходимо, чтобы матрица $Z_2C_1C_\alpha^{-1}=(d_{nk})$ была абсолютно консервативной матрицей преобразования ряда в ряд, то есть чтобы выполнялось условие: $\sup\limits_k\sum\limits_{n=k}^{\infty}|d_{nk}|<\infty$. Если $C_\alpha^{-1}=(\bar{c}_{nk})$, то, как и при доказательстве теоремы 11, получим:

$$d_{nn}=a_{nn}\bar{c}_{nn}=\frac{1}{2(n+1)}\binom{n+\alpha}{n}\sim\frac{n^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha+1)}\qquad(n\to\infty),$$

и при $\alpha>1$ указанное выше условие не выполняется. Следовательно, $|C_\alpha|\not\subset|Z_2C_1|$ при $\alpha>1$.

Известно [3, стр. 150], что $|C_\alpha|\sim|H_\alpha|$ $(\alpha>-1)$, где H_α - метод Гельдера порядка α. Справедливо также равенство: $H_\alpha=H_{\alpha-1}H_1=H_{\alpha-1}C_1$ [3, стр. 140, 141].

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно суммируем матрицей $Z_2 C_1$ и $C_1(a_n)=(h_n)$. Тогда $Z_2 C_1(a_n)=Z_2(h_n)=(g_n)$, где $\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|<\infty$, то есть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ абсолютно суммируем матрицей Z_2. Далее имеем:

$$H_\alpha(a_n)=H_{\alpha-1}C_1(a_n)=H_{\alpha-1}(h_n)=(t_n),$$

где $\sum_{n=0}^{\infty}|t_n|<\infty$ при $\alpha-1>1$, поскольку $|Z_2|\subset$ $\subset|C_\beta|\sim|H_\beta|$ при $\beta>1$ [39]. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно суммируем матрицей H_α при $\alpha>2$, то есть $|Z_2 C_1|\subset|H_2|$ при $\alpha>2$, а значит $|Z_2 C_1|\subset$ $\subset|C_\alpha|$ $(\alpha>2)$.

Поскольку $|W|\sim|C_1 Z_2|$, где W - матрица метода Вороного-Нерлунда, приведенного в условии теоремы 9, то для доказательства включения $|C_1 Z_2|\subset|Z_2 C_1|$ достаточно доказать включение $|W|\subset|Z_2 C_1|$. А для этого, по лемме I, достаточно показать, что матрица $Z_2 C_1 W^{-1}=(\ell_{nk})$ является абсолютно консервативной матрицей преобразования ряда в ряд.

Пусть $W^{-1}=(\eta_{nk})$. Используя значения η_{nk} $(n,k\geq 0)$, найденные при доказательстве теоремы 9, получим:

$$\ell_{nk}=\sum_{i=0}^{n-k} a_{n,k+i}\,\eta_{k+i,k}=\frac{k(2k+1)}{n^2-1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-k-1}(-1)^i 4k\,\frac{k+i}{n^2-1}+(-1)^{n-k}\frac{4k}{2(n+1)}=$$

$$= \frac{k(2k+1)}{n^2-1} + \frac{4k}{n^2-1}\sum_{i=1}^{n-k-1}(-1)^i(k+i) + (-1)^{n-k}\frac{4k}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{k(2k+1)}{n^2-1} + \frac{4k}{n^2-1}\Big(\big((2n-1)(-1)^{n-k-1} - 2k-1\big)\frac{1}{4} +$$

$$+(-1)^{n-k}\frac{4k}{2(n+1)} = \frac{(-1)^{n-k-1}k}{n^2-1} \qquad (0 \le k < n),$$

$$e_{nn} = \frac{2n+1}{2n+2} \ (n>0), \quad e_{00} = 1, \quad e_{nk} = 0 \ (0 \le n < k).$$

Далее имеем:

$$\sum_{n=k}^{m}|e_{nk}| = \frac{2k+1}{2k+2} + k\sum_{n=k+1}^{m}\frac{1}{(n-1)(n+1)} < \frac{2k+1}{2k+2} +$$

$$+ k\sum_{n=k+1}^{m}\frac{1}{(n-1)n} = \frac{2k+1}{2k+2} + k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) \to \frac{2k+1}{2k+2} + 1 \ (m \to \infty).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{\infty}|e_{nk}| \le \frac{2k+1}{2k+2} + 1 \ (k \ge 0) \quad \text{и} \quad \sup_{k}\sum_{n=k}^{\infty}|e_{nk}| < \infty.$$

Выполнены условия теоремы Кнопша-Лоренца, поэтому матрица $Z_2 C_1 W^{-1}$ является абсолютно консервативной матрицей преобразования ряда в ряд. Теорема I2 доказана полностью.

§ 2.2. О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье методом Рогозинского-Бернштейна.

Пусть $f(x)$ - вещественная 2π-периодическая функция, интегрируемая по Лебегу на промежутке $(-\pi, \pi)$, и

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nt-b_n\cos nt)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)$$

ее, соответственно, ряд и сопряженный ряд Фурье. Если существует абсолютно непрерывная на промежутке $[-\pi,\pi]$ производная $f^{(r-1)}(x)$, $r=1,2,\ldots$, то ряд

$$(-1)^{\frac{r+1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}n^r B_n(t),\quad \text{при } r \text{ – нечетном,}$$

или ряд

$$(-1)^{\frac{r}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}n^r A_n(t),\quad \text{при } n \text{ – четном,}$$

является рядом Фурье функции $f^{(r)}(t)$ [9, стр. 72].

Известный принцип локализации Римана [22, стр. 110] утверждает, что если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают на некотором отрезке $[a,b]$, то во всяком отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$, их ряды Фурье являются равномерно равносходящимися, то есть разность этих рядов равномерно сходится к нулю. Этот принцип формулируют еще и в такой форме: сходимость или расходимость ряда Фурье функции $f(t)$ в точке $t=x$ зависит только от поведения функции $f(t)$ в окрестности точки $t=x$ [22, стр. 110].

Известно [40, стр. 67, 94], что и суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ в точке $t=x$ любым регулярным треугольным методом зависит лишь от поведения функции $f(t)$ в окрестности этой точки. В этом случае также говорят, что суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ является локальным свойством функции $f(t)$ в точке $t=x$.

Если суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ является локальным свойством функции $f(t)$ в каждой точке, то говорят, что суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ является локальным свойством функции $f(t)$.

Известно [22, стр. 638], что абсолютная сходимость ряда Фурье функции $f(t)$ не является локальным свойством этой функции, то есть существуют две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, совпадающие в некоторой окрестности точки $t=x$ и такие, что ряд Фурье функции $f_1(t)$ в точке $t=x$ абсолютно сходится, а ряд Фурье функции $f_2(t)$ в точке $t=x$ не сходится абсолютно.

Бозанкэт установил [23], что абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ методом Чезаро порядка $\alpha > 1$ является локальным свойством функции $f(t)$. Бозанкэт и Кестельман доказали [24], что абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ методом средних арифметических не является локальным свойством функции $f(t)$. Ряд авторов исследовали другие методы абсолютного суммирования на локальное свойство. Изучалась также абсолютная суммируемость более общих рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{d^r}{dt^r} A_n(t) \qquad (r=0,1,2,\dots), \qquad /74/$$

где $\{\lambda_n\}$ - последовательность чисел, в частности продифференцированных рядов Фурье.

В работах [25-28] установлены общие достаточные условия того, чтобы абсолютная суммируемость ряда /74/ некоторым методом являлась, или не являлась локальным свойством функции $f(t)$. Возникает вопрос: является ли абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(t)$ методом Рогозинского-Бернштейна локальным свойством функции $f(t)$? Теорема II указывает на то, что решить этот вопрос с помощью методов Чезаро нельзя. Покажем, что его нельзя решить и при помощи указаных выше теорем.

Лемма 13 [25]. Пусть нормальная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sum_{n=k}^{\infty}|a_{nk}|=O(1), \ \sum_{n=k}^{\infty}|a_{nk}-a_{n,k+1}|=O(a_{kk}),$$

$$a_{k+1,k+1}=O(a_{kk}).$$

Если

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n a_{nn}|<\infty, \tag{75}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n-\lambda_{n+1}|<\infty,$$

то абсолютная суммируемость ряда $\sum\limits^{\infty}\lambda_n A_n(t)$ матрицей A является локальным свойством функции $f(t)$.

Для метода Рогозинского-Бернштейна $a_{nn}=\cos\frac{n\pi}{2n+1}$ $(n\geq 0)$. Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right|$ расходится, поэтому условие /75/ леммы 13 при $\lambda_n=1$ $(n\geq 0)$ не выполняется и эту лемму к методу Рогозинского-Бернштейна применить нельзя.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ - числовая последовательность, A и B - матрицы. Если из абсолютной суммируемости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ матрицей A всегда следует абсолютная суммируемость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n u_n$ матрицей B, то говорят, что последовательность $\{\varepsilon_n\}$ является последовательностью множителей абсолютной суммируемости типа $(|A|, |B|)$ и записывают:

$$\varepsilon_n \in (|A|, |B|).$$

Лемма I4 [26]. Если $a_{nn} \in (|A|, |E|)$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n a_{nn}| = \infty,$$

где $A = (a_{nk})$ – матрица преобразования ряда в последовательность, то абсолютная суммируемость рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n A_n(t)$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n B_n(t)$ не является локальным свойством функции $f(t)$.

Рассмотрим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Этот ряд абсолютно суммируем методом Вороного-Нерлунда, приведенным в условии теоремы 9. Действительно, используя значения элементов матрицы этого метода в виде преобразования ряда в ряд, полученные при доказательстве теоремы 9, получим:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{4k}{4n^2-1} + (-1)^n \frac{2n-1}{4n^2-1} = \frac{1}{4n^2-1}\Big(2(n-1)(-1)^{n-1} +$$

$$+ (-1)^{n-1} - 1 + (-1)^n (2n-1)\Big) = -\frac{1}{4n^2-1} \quad (n \geq 0).$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |t_n| < \infty$. По теореме 9 получаем, что этот ряд абсолютно суммируем и методом Рогозинского-Бернштейна. Но так как для матрицы метода Рогозинского-Бернштейна $a_{nn} = \cos\frac{n\pi}{2n+1}$ $(n \geq 0)$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right|$

расходится, то последовательность $\{a_{nn}\}$ не является последовательностью множителей абсолютной суммируемости типа $(|Б|,|E|)$ и лемму 14 к методу Рогозинского-Бернштейна применить нельзя. Однако, пользуясь идеями работ [24, 25], можно доказать теорему, дающую ответ на поставленный выше вопрос.

Определение 1 [25, 26]. Абсолютная суммируемость ряда /74/ матрицей A не является локальным свойством функции $f(t)$, если найдутся промежуток $(x+\alpha, x+\beta)$, где $x<x+\alpha<x+\beta<x+2\pi$, и функция, равная $f(t)$ в промежутке $(x+\alpha, x+\beta)$ и равная нулю в $(x, x+\alpha) \cup (x+\beta, x+2\pi)$, для которой ряд /74/ не является абсолютно суммируемым матрицей A в точке x.

Лемма 15 [41, теорема 3]. Пусть нормальная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в последовательность удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{D}_n < \infty,$$

где $\mathcal{D}_n = \sup_k |a_{k+n,k+n}\, \eta_{k+n,k}|$, $A^{-1}=(\eta_{nk})$.

Для того чтобы последовательность $\{\varepsilon_n\}$ была последовательностью множителей абсолютной суммируемости типа $(|A|,|E|)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n \eta_n| < \infty, \qquad \varepsilon_n = O(a_{nn}),$$

где $\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}$

Лемма 16 [24, теорема 1]. Пусть $\{f_n(t)\}$ - последовательность измеримых функций в промежутке (α,β), $\beta-\alpha<\infty$.

Для того чтобы при любой $g(t)\in L_{(\alpha,\beta)}$ функции

$$f_n(t)g(t)\in L_{(\alpha,\beta)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)g(t)\,dt\right|<\infty,$$

необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(t)|=O(1) \quad \text{почти всюду в } (\alpha,\beta).$$

Лемма 17 [22, стр. 764]. Если $b<\frac{2}{\pi}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=+\infty$, то множество тех точек x, где

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{k=1}^{n}\rho_k\,|\cos(kx-\alpha_k)|}{\sum_{k=1}^{n}\rho_k}\le b,$$

имеет меру нуль.

Заметим / это следует из доказательства леммы 17 /, что лемма 17 справедлива, если в ней вместо $\cos(kx-\alpha_k)$ рассматривать $\cos(\psi(k)x-\alpha_k)$, где $\psi(k)\to+\infty$ при $k\to\infty$.

Лемма 18. Пусть A и C - нижние треугольные матрицы, а $B=(b_{nk})$ - нормальная матрица.

Для того чтобы из абсолютной суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ матрицей A всегда следовала абсолютная суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\sum_{k=0}^{n}u_k b_{nk}$ матрицей C, где $\{\varepsilon_n\}$ - числовая последовательность, необходимо и достаточно, чтобы из абсолютной суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ матрицей AB^{-1}

всегда следовала абсолютная суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ матрицей C.

Доказательство. Поскольку матрица B нормальна, то существует единственная обратная матрица B^{-1}. Тогда для любой последовательности $\{u_n\}$ справедливо равенство:

$$AB^{-1}(\rho_n) = AB^{-1}B(u_n) \qquad /76/$$

где $(\rho_n) = B(u_n)$. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ абсолютно суммируем матрицей A. Тогда из равенства /76/ следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n$ абсолютно суммируем матрицей AB^{-1}, а по условию леммы 18 это влечет абсолютную суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \rho_n$ матрицей C. Но $\rho_n = \sum_{k=0}^{n} u_k b_{nk} \ (n \geq 0)$, поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{k=0}^{n} u_k b_{nk}$ абсолютно суммируем матрицей C. Достаточность доказана.

Пусть произвольный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ абсолютно суммируем матрицей AB^{-1}. Обозначим: $(q_n) = B^{-1}(u_n)$. Тогда из равенства $AB^{-1}(u_n) = A(q_n)$, следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ абсолютно суммируем матрицей A. Но это, по условию леммы 18, влечет абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{k=0}^{n} q_k b_{nk}$ матрицей C, и так как справедливо равенство: $B(q_n) = BB^{-1}(u_n) = (u_n)$, то $\sum_{k=0}^{n} q_k b_{nk} = u_n \quad (n \geq 0)$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ абсолютно суммируем матрицей C. Лемма 18 доказана.

Теорема 13. Пусть нормальная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в последовательность удовлетворяет условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{D}_n^{(p)} < \infty, \qquad /77/$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \eta_{n-i} \right| < \infty, \qquad /78/$$

где

$$\mathcal{D}_n^{(p)} = \sup_k \left| a_{k+n,k+n} \sum_{i=0}^{p} \eta_{k+n-i,k} \right|, \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk} \ (n \geq 0),$$

$A^{-1} = (\eta_{nk})$, p - некоторое целое неотрицательное число.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\lambda_n a_{nn}| = \infty, \qquad /79/$$

$$\lambda_n \sim \lambda_{n+1} \quad (n \to \infty), \qquad /80/$$

то абсолютная суммируемость ряда /74/ матрицей A не является локальным свойством функции $f(t)$.

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию /80/, то последовательность $\{\lambda_n n^2\}$ также ему удовлетворяет, поэтому теорему 13 достаточно доказать для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n A_n(t), \qquad /81/$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n(t). \qquad /82/$$

Докажем сначала теорему для ряда /81/. Предположим, что абсолютная суммируемость ряда /81/ матрицей A является локальным свойством функции $f(t)$. Тогда для любой функции $f(t)\in L_{(x+\alpha,\, x+\beta)}$ и равной нулю в $(x, x+\alpha)\cup(x+\beta, x+2\pi)$ ряд /81/ абсолютно суммируем матрицей A в точке x.

Рассмотрим матрицу $A_p = AB^{-1}$, где $A=(a_{nk})$, $B=(b_{nk})$, $b_{nk}=1$ $(n-p\le k\le n)$, $b_{nk}=0$ $(k<n-p, k>n)$. Матрица $A_p^{-1}=BA^{-1}$ является обратной к матрице A_p. Действительно, из ассоциативности умножения нижних треугольных матриц получим: $A_pA_p^{-1}=AB^{-1}BA^{-1}=E$.

Если $A_p=(\bar a_{nk})$, $A_p^{-1}=(\bar\eta_{nk})$, то $\bar a_{nn}=a_{nn}:b_{nn}=$ $=a_{nn}$ $(n\ge 0)$ и

$$\bar\eta_{nk}=\sum_{i=0}^{p}\eta_{n-i,k}, \quad \bar\eta_n=\sum_{i=0}^{p}\eta_{n-i} \quad (n, k\ge 0).$$

Поэтому из условий /77/ и /78/ по лемме 15 следует, что последовательность $\{a_{nn}\}$ является последовательностью множителей абсолютной суммируемости типа $(|A_p|, |E|)$ или $(|AB^{-1}|, |E|)$. Следовательно, по лемме 18 получаем, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ абсолютно суммируем матрицей A, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nn}\sum_{k=0}^{n} u_k b_{nk}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{nn}\sum_{i=0}^{p} u_{n-i}$ абсолютно сходится.

Так как ряд /81/ абсолютно суммируем матрицей A в точке $t=x$, то получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{nn}\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}A_{n-i}(x)\right|<\infty. \qquad /83/$$

Поскольку для любой 2π -периодической функции $f(t)\in$ $\in L_{(0,2\pi)}$ имеет место равенство:

$$A_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t+x)\cos nt\,dt \quad (n>0),$$

то, принимая во внимание конструкцию функции $f(t)$, из неравенства /83/ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(t+x)\,a_{nn}\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}\cos(n-i)t\,dt\right|<\infty. \qquad /84/$$

Теперь, положив в левой части /84/ : $g(t)=f(x+t)$ и используя лемму I6, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nn}|\left|\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}\cos(n-i)t\right|=O(1) \qquad /85/$$

почти везде в (α,β). Далее имеем:

$$\left|\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}\cos(n-i)t\right|=\left|\sum_{i=0}^{p}\left((\lambda_n-\lambda_{n-i})\cos(n-i)t\right.\right. -$$

$$-\lambda_n\cos(n-i)t\geq|\lambda_n|\left|\sum_{i=0}^{p}\cos(n-i)t\right|-\sum_{i=1}^{p}|\lambda_n-\lambda_{n-i}|\times$$

$$\times|\cos(n-i)t|=\left|\lambda_n\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin(p+1)\frac{t}{2}\cos(2n-p)\frac{t}{2}\right|-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}|\lambda_n-\lambda_{n-i}||\cos(n-i)t|.$$

Поэтому n -я частная сумма ряда, стоящего в левой части

/85/, оценится следующим образом.

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{kk}|\left|\sum_{i=0}^{p}\lambda_{k-i}\cos(k-i)t\right| \geq \left|\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin(p+1)\frac{t}{2}\right| \times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|\left|\cos(2n-p)\frac{t}{2}\right| - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}|a_{kk}||\lambda_k-\lambda_{k-i}||\cos(k-i)t|.$$

Далее имеем:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{kk}||\lambda_k-\lambda_{k-i}||\cos(k-i)t|}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|\left|1-\frac{\lambda_{k-i}}{\lambda_k}\right|}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|}$$

$(i=1,2,\ldots,p)$. Из условия /80/ следует, что последовательность $\left\{1-\frac{\lambda_{k-i}}{\lambda_k}\right\}$ $(1\leq i\leq p)$ стремится к нулю при $k\to\infty$.

Известно [17, стр. 69], что выполнение двух условий:

$$d_{nk}\to 0\ (n\to\infty,\ k\geq 0),\quad \sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}|=O(1) \qquad /86/$$

является необходимым и достаточным условием того, что матрица $\mathcal{D}=(d_{nk})$ преобразовывает всякую сходящуюся к нулю последовательность в сходящуюся к нулю последовательность.

Положив в условии /79/ $r=0$, получим, что матрица $\mathcal{D}=(d_{nk})$ с элементами:

$$d_{nk}=\frac{|\lambda_k a_{kk}|}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|}\ (1\leq k\leq n),\quad d_{nk}=0\ (0\leq n<k),\quad d_{n0}=0\ (n\geq 0)$$

удовлетворяет условиям /86/. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{kk}||\lambda_k-\lambda_{k-i}||\cos(k-i)t| = o\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|\right)\ (1\leq i\leq p). \qquad /87/$$

С другой стороны, положив в условии леммы 17:

$\rho_k = |\lambda_k a_{kk}| \ (k \geq 1), \quad \alpha_k = 0 \ (k \geq 1), \quad b = 0$

и используя замечание к ней, получим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \sin(p+1)\frac{t}{2} \right| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k a_{kk}| \left| \cos(2n-p)\frac{t}{2} \right|}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k a_{kk}|} > 0 \quad /88/$$

почти всюду. Теперь, используя оценки /87/ и /88/, окончательно получим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{kk}| \left| \sum\limits_{i=0}^{p} \lambda_{k-i} \cos(k-i)t \right|}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k a_{kk}|} > 0$$

почти всюду. Из этого неравенства и условия /79/, в котором положено: $z = 0$, следует, что частные суммы ряда, стоящего в левой части /85/, почти всюду неограничены, то есть условие /85/ не выполняется. Полученное противоречие доказывает теорему для ряда /81/.

Пусть абсолютная суммируемость ряда /82/ матрицей A является локальным свойством функции $f(t)$. Тогда аналогично предыдущему получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \lambda_{n-i} B_{n-i}(x) \right| < \infty.$$

Так как для любой 2π -периодической функции $f(t) \in L_{(0,2\pi)}$ имеет место равенство:

$$B_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+x) \sin nt \, dt \qquad (n>0),$$

то будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t+x)a_{nn}\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}\sin(n-i)t\,dt\right|<\infty.$$

Вследствии леммы I6, как и выше, должно выполняться соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nn}|\left|\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}\sin(n-i)t\right|=O(1) \qquad /89/$$

почти всюду в (α,β). Далее получим:

$$\left|\sum_{i=0}^{p}\lambda_{n-i}\sin(n-i)t\right|\geq|\lambda_n|\left|\sum_{i=0}^{p}\sin(n-i)t\right|-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}|\lambda_n-\lambda_{n-i}||\sin(n-i)t|=\left|\lambda_n \operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin(p+1)\frac{t}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(2n-p)\frac{t}{2}\right|-\sum_{i=1}^{p}|\lambda_n-\lambda_{n-i}||\sin(n-i)t|.$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{kk}|\left|\sum_{i=0}^{p}\lambda_{k-i}\sin(n-i)t\right|\geq\left|\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\sin(p+1)\frac{t}{2}\right|\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}||\sin(2n-p)\frac{t}{2}|-\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}|a_{kk}||\lambda_k-\lambda_{k-i}||\sin(k-i)t|.$$

Аналогично предыдущему получим:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{kk}||\lambda_k-\lambda_{k-i}||\sin(k-i)t|=o\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|\right) \qquad /90/$$

$$(1\leq i\leq p).$$

Теперь, положив в условии леммы I7 $\rho_k=|\lambda_k a_{kk}|$ $(k\geq1)$, $\alpha_k=\frac{\pi}{2}$ $(k\geq1)$, $b=0$ и используя замечание к ней, получим неравенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\operatorname{cosec}\frac{t}{2}\cdot\sin(p+1)\frac{t}{2}\right| \frac{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|\left|\sin(2n-p)\frac{t}{2}\right|}{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k a_{kk}|} > 0. \quad /91/$$

Из неравенства /91/ и соотношения /90/ аналогично предыдущему получаем, что частные суммы ряда, стоящего в левой части /89/, почти всюду неограничены и условие /89/ не выполняется. Это доказывает теорему для ряда /82/. Теорема 13 доказана.

Покажем теперь, что метод Вороного-Нерлунда, который указан в условии теоремы 9, удовлетворяет условиям теоремы 13. Пусть $W=(\omega_{nk})$ – матрица этого метода в виде преобразования ряда в ряд, $\overline{W}=(\overline{\omega}_{nk})$ – в виде преобразования ряда в последовательность, $W^{-1}=(\eta_{nk})$, $\overline{W}^{-1}=(\overline{\eta}_{nk})$.

Тогда получим [3, стр. 51, 56]:

$$\overline{\omega}_{nn}=\omega_{nn}, \quad \overline{\eta}_{nk}=\eta_{nk}-\eta_{n,k+1} \qquad (n,k\geq 0).$$

Используя значения ω_{nk}, η_{nk} $(n,k\geq 0)$, найденные при доказательстве теоремы 9, будем иметь:

$$\overline{\eta}_{nn}=2n+1 \quad (n\geq 0), \qquad \overline{\eta}_{n+1,n}=-3(2n+1) \quad (n\geq 0),$$

$$\overline{\eta}_{nk}=(-1)^{n-k}4(2k+1) \quad (0\leq k<n-1), \qquad \overline{\eta}_{nk}=0 \quad (0\leq n<k),$$

$$\overline{\omega}_{nn}=\frac{1}{2n+1} \quad (n\geq 0).$$

Отсюда получаем:

$$\overline{\eta}_n=\sum_{k=0}^{n}\overline{\eta}_{nk}=(-1)^n 4\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k(2k+1)-6n+3+2n+1=0$$

$$(n>0), \quad \overline{\eta}_0=1.$$

Положив в условии теоремы 13 $p=1$, будем иметь:

$$\bar{\eta}_{k+n,k}+\bar{\eta}_{k+n-1,k}=(-1)^n 4(2k+1)+(-1)^{n-1}4(2k+1)=0 \quad (n>2),$$

поэтому $\mathcal{D}_n^{(1)}=0 \ (n>2)$ и условие /77/ теоремы 13 выполнено. Поскольку $\bar{\eta}_n=0 \ (n>0)$, то условие /78/ также выполняется. Следовательно, приняв во внимание что $\bar{\omega}_{nn}=$ $=\frac{1}{2n+1} \ (n\geq 0)$, из теоремы 13 получаем, что при выполнении условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}|\lambda_n|=\infty, \quad \lambda_n \sim \lambda_{n+1} \quad (n\to\infty)$$

абсолютная суммируемость ряда /74/ матрицей W не является локальным свойством функции $f(t)$. Но так как указанный метод Вороного-Нерлунда по теореме 9 абсолютно равносилен методу Рогозинского-Бернштейна, то справедливо

Следствие 18. Если выполнены условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}|\lambda_n|=\infty, \quad \lambda_n \sim \lambda_{n+1} \quad (n\to\infty),$$

то абсолютная суммируемость ряда /74/ для функции $f(t)$ методом Рогозинского-Бернштейна не является локальным свойством функции $f(t)$.

Поскольку при $r=0$ и $\lambda_n=1 \ (n\geq 0)$, а также при $r=1$ и $\lambda_n=\frac{1}{n} \ (n>0), \lambda_0=0$ условия следствия 18 выполняются, то получаем, что абсолютная суммируемость ряда Фурье, или сопряженного ряда Фурье суммируемой функции $f(t)$ методом Рогозинского-Бернштейна не является локальным свойством функции $f(t)$.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность за руководство работой научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Н.А.Давыдову.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Давыдов Н.А. О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов. - Укр. матем. журн., 1967, т. 19, № 4, с. 29-47.

2. Давыдов Н.А. О включении и равносильности методов Теплица суммирования рядов. - Укр. матем. журн., 1968, т. 20, № 4, с. 460-471.

3. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. - Таллин: "Валгус", 1977. - 280 с.

4. Szasz O. On some summability methods with triangular matrix. - Ann. Math., 1945, v. 46, N 4, p. 567-577.

5. Agnew R. Equivalence of methods for evaluation of sequences. - Proc. Amer. Math. Soc., 1952, v. 3, p. 550-565.

6. Михалин Г.А. Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей. - Укр. матем. журн., 1974, т. 26, № 1, с. 95-98.

7. Fridy J.A. Mercerian-type theorems for absolute summability. - Port. Math., 1974, v. 33, N 3-4, p. 141-145.

8. Нагайник А.Ф. Абсолютно консервативные матричные преобразования и теоремы типа Радо-Агнью. - В сборнике "Приближенные методы математического анализа". - КГПИ, 1978, с. 95-103.

9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1. - М., 1965.

10. Кангро Г.Ф. Теория суммируемости последовательностей и рядов. - В сборнике "Математический анализ / Итоги науки и техники /". - ВИНИТИ АН СССР, 1974, т. 12, с. 5-70.

11. Михалин Г.А. Обобщение теорем Таубера для одного класса (J, p_n) -методов суммирования. - Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1980, № 4 /215/, с. 61-68.

12. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. - М.: Физматгиз, 1960. - 471 с.

13. Щеглов М.П. К обобщению теорем Таубера. - Матем. сборник, 1951, т. 28 /20/, № 2, с. 245-282.

14. Давыдов Н.А., Михалин Г.А. О ядрах ограниченных последовательностей. - Матем. заметки, 1978, т. 23, № 3, с. 537-550.

15. Михалин Г.А., Лотоцкий В.А. О ядрах средних Чезаро и Абеля-Пуассона. - В сборнике "Приближенные методы математического анализа". - КГПИ, 1978, с. 87-94.

16. Михалин Г.А. Условия совпадения ядра последовательности с ядрами ее (R, p_n, α) и (J, p_n) средних. - Укр. матем. журн., 1979, т. 31, № 5, с. 504-509.

17. Харди Г. Расходящиеся ряды. - М.: И.Л., 1951, - 504 с.

18. Karamata J. Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesaroschen Limitierungs-Verfahren. - Math. Zeit., 1949, V. 52., p. 305-306.

19. Харшиладзе Ф.И. О методе суммирования С.Н. Бернштейна. - Матем. сборник, 1942, т. 11 /53/, № 1-2, с. 121-148.

20. Огиевецкий И.И. О методе суммирования С.Н. Бернштейна. - ДАН СССР, 1951, т. 76, с. 635-638.

21. Agnew R.P. Rogosinski-Bernstein trigonometric summability methods and modified arithmetic means. - Ann. Math., 1952, V. 56, N3, p. 537-539.

22. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. - М.: Физматгиз, 1961. - 936 с.

23. Bosanquet L.S. The absolute Cesaro summability of a Fourier series. - Proc. London Math. Soc., 1936, v. 41, p. 517-528.

24. Bosanquet L.S., Kestelman H. The absolute convergence of series and integrals. - Proc. London Math. Soc., (2), 1939, v. 45, p. 88-97.

25. Барон С. О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, вып. 77, с. 106-120.

26. Барон С. О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, вып. 253, с. 212-228.

27. Барон С. О локальном свойстве абсолютной суммируемости продифференцированных рядов Фурье. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, вып. 281, с. 157-177.

28. Барон С. Замечания о локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье, продифференцированных рядов Фурье, и сопряженных рядов. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, вып. 305, с. 251-257.

29. Кузьмич В.И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов. - В сборнике "Приближенные методы математического анализа". - КГПИ, 1979, с. 50-61.

30. Кузьмич В.И. Об абсолютном суммировании рядов методом Рогозинского-Бернштейна. - Укр. матем. журн., 1981, т. 33, №3, с. 398-406.

31. Кузьмич В.И. О тауберовых константах для некоторых классических методов суммирования. - В сборнике "Приближен-

ные методы математического анализа". – КГПИ, 1979, с.

32. Накамура Йосихико. Общие монотонные последовательности. – Токё суйсан дайгаку ронсю, Rept. Tokyo Univ. Fish. , 1970, № 5, с. 29-35.

33. Егорычев Е.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 286 с.

34. Rogosinski W.W. On Harsdorff's method's of summability. – Proc. Cambridge Phil. Soc., 1942, V. 38, N2, p. 166-192.

35. Pitt H.R. Tauberian Theorems, Oxford Univ. Press, 1958, XII+174p.

36. Hartmann P. Tauber's Theorem and absolute constants. – Amer. J. Math., 1947, V. 69, N3, p. 599-606.

37. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

38. Kogbetliantz M.E. Sur les series absolument sommables par la methode des moyennes arithmetiques. – Bulletin des sciences mathematiques. – Paris, 1925, tome XLIX, 234-256.

39. Kakkar U. A note on absolute summability (Y) of an infinite series. – Indian J. Math., 1968, V. 10, p. 73-82.

40. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. – М., 1959. – 156 с.

41. Кангро Г. Об обобщении одной теоремы Мура. – ДАН СССР, 1958, т. 121, с. 967-969.