АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
Специализированный совет Д.016.50.01

На правах рукописи

КУЗЬМИЧ Валерий Иванович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВКЛЮЧЕНИЯ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

01.01.01.- математический анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1982

Работа выполнена на кафедре математического анализа Киевского государственного пединститута им. А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Н.А.Давыдов.

Официальные оппоненты -

доктор физико-математических наук, профессор — А.В.Ефимов;

кандидат физико-математических наук, доцент — В.В.Крочук

Ведущее предприятие - Днепропетровский государственный университет.

Защита состоится "   "__________ 1982 г. на заседании специализированного совета Д.016.50.01 Института математики АН УССР, г. Киев, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики АН УССР.

Автореферат разослан "   "____________ 1982 г.

Ученый секретарь
специализированного совета

Актуальность темы. Включение матричных методов суммирования является одним из основных разделов теории суммирования рядов. В этом разделе изучаются включения различных методов суммирования как на множестве всех числовых рядов, так и на некоторых его подмножествах. Реферируемая диссертация посвящена исследованию вопросов включения классических методов суммирования /Чезаро, Гельдера, логарифмического, Рогозинского и Рогозинского-Бернштейна/.

Поскольку в теории суммирования рассматриваются различные виды суммируемости /обычная, абсолютная, сильная и др./, то и включения методов носят различный характер. Наиболее полно изучены включения методов при обычной суммируемости. Многие результаты по включению конкретных методов суммирования и общих матричных методов приведены в монографиях Г.Харди* и Р.Кука**. Существуют общие теоремы о включении матричных методов при различных видах суммируемости.

При изучении вопросов включения некоторого метода суммирования его поле суммируемости обычно сравнивают с полями суммируемости наиболее важных методов: Чезаро, Абеля-Пуассона, Бореля, Рисса, Вороного-Нерлунда и др. Отсюда следует важность теорем о включении этих методов и общих матричных методов. Для методов Чезаро такие теоремы, в случае обычной суммируемости, устанавливались в работах Сасса, Агнью, Н.А.Давыдова, Г.А.Михалина и др. Доказательству аналогичных

---

* Харди Г. Расходящиеся ряды.- М.: И.Л., 1951, - 504 с.

** Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. - М.: Физматгиз, 1960. - 471 с.

теорем в случае абсолютной суммируемости посвящена первая глава диссертации. В этой же главе изучается равносходимость в широком смысле методов Чезаро, Гельдера и логарифмического метода суммирования. Понятие равносходимости методов является обобщением понятий включения и их совместности и находит применение во многих разделах теории суммирования /теоремы тауберова типа, теоремы о ядрах и др./. Первые работы по этому вопросу принадлежат М.Риссу. Из более поздних работ по равносходимости следует назвать работы Майера, Замана, Зиммеринга. Некоторые результаты по равносходимости приведены в монографии А.Зигмунда [*] и в названной выше монографии Р.Кука.

Во второй главе диссертации /с использованием результатов ее первой главы/ изучаются включения методов Рогозинского и Рогозинского-Бернштейна абсолютного суммирования рядов. Наиболее полно обычная суммируемость этими методами освещена в обзорной статье С.Б.Стечкина, помещенной в названной выше монографии Г.Харди. В этой же главе, в качестве приложения полученых нами результатов, исследуется абсолютная суммируемость рядов Фурье методом Рогозинского-Бернштейна.

<u>Целью настоящей диссертации</u> является, во-первых, получение условий абсолютного включения и абсолютной равносильности методов Чезаро натурального порядка и произвольного матричного абсолютно консервативного метода суммирования, во-вторых, изучение равносходимости в широком смысле некоторых классических методов суммирования и абсолютной суммируемости рядов методами Рогозинского и Рогозинского-Бернштейна.

<u>Методика исследования.</u> При получении условий абсолютного включения методов Чезаро и произвольного матричного абсо-

---
[*] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.I.- М., 1965.

лютно консервативного метода суммирования, а также при изучении равносходимости методов суммирования использован метод обратного преобразования.

Абсолютное суммирование методами Рогозинского и Рогозинского-Бернштейна изучается при помощи результатов первой главы диссертации, метода обратного преобразования и метода множителей суммируемости.

<u>Научная новизна</u>. Все полученные результаты об абсолютном включении методов Чезаро являются новыми. Известны лишь некоторые частные случаи доказанных нами теорем.

Необходимые и достаточные условия равносходимости в широком смысле методов Чезаро, Гельдера натурального порядка, логарифмического метода на некоторых множествах рядов установлены впервые.

Абсолютная суммируемость методами Рогозинского и Рогозинского-Бернштейна изучается впервые, поэтому все результаты второй главы являются новыми.

Полученные результаты представляют <u>теоретический интерес</u> и могут быть использованы в теории рядов Фурье.

<u>Апробация работы</u>. Изложенные в работе результаты были доложены на научном семинаре по теории суммирования в Киевском пединституте им. А.М.Горького и на отчетно-научной конференции преподавателей этого института /1980 г./. Основное содержание диссертации опубликовано в 3 статьях автора.

<u>Структура и объем работы</u>. Работа изложена на 117 страницах машинописи, состоит из введения, двух глав и списка использованной литературы. Рисунков нет.

Назовем основные результаты диссертации.

Обозначим через $A=(a_{nk})$ $(n,k=0,1,2,\dots)$ числовую матрицу, а через C_p - матрицу метода Чезаро

натурального порядка p в виде преобразования ряда в ряд. В § I.I и § I.2 изучаются условия абсолютного включения и и абсолютной равносильности методов Чезаро и произвольного абсолютно консервативного матричного метода суммирования. В частности, в § I.I доказана

Теорема I. Для того чтобы нижняя треугольная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд абсолютно включала матрицу Чезаро натурального порядка p $(|C_p|\subset|A|)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty,$$

где $$\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}\frac{a_{n,k+i}}{k+i}.$$

Из теоремы I, в качестве следствий, получен ряд условий, достаточных для абсолютного включения $|C_p|\subset|A|$ и в частности один результат Г.Кангро.

В этом же параграфе получены условия, достаточные для абсолютной равносильности метода Чезаро натурального порядка p и общего нормального абсолютно консервативного метода $(|C_p|\sim|A|)$. А именно, здесь доказана

Теорема 2. Если нормальная абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty,$$

$$\varliminf_{k\to\infty} k^{p+1}\left(\frac{|a_{kk}|}{k}-\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|\right)>0,$$

где p - натуральное число, то $|C_p|\sim|A|$.

Из этой теоремы получено несколько следствий с более удобными для проверки условиями.

В § I.2 рассматриваются бесконечнострочные матрицы. Здесь доказана теорема 3 и ряд следствий об абсолютном включении $|C_p|\subset|A|$ и теорема 4 об абсолютной равносильности $|C_p|\sim|A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Теорема 3. Если абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty,$$

$$\sup_n\sum_{k=k_0}^{\infty}k^{p+1}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty,$$

$$k^{p-2}a_{nk}\to 0\quad(k\to\infty,\ n\geq 0),$$

где p - натуральное число, то $|C_p|\subset|A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Теорема 4. Если абсолютно консервативная матрица $A=(a_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям:

$$\sup_k k^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta^p\frac{a_{nk}}{k}\right|<\infty,$$

$$\sup_n \sum_{k=k_0}^{\infty} k^{p+1}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right| < \infty,$$

$$k^{p-2} a_{nk} \to 0 \qquad (k \to \infty,\ n \geq 0),$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{p+1}\left(\left|\Delta^p \frac{a_{kk}}{k}\right| - \sum_{n\neq k}^{\infty}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|\right) > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\binom{n+p}{n-1}\left|\Delta^p \frac{a_{nn}}{n}\right| - \sum_{n\neq k=k_0}^{\infty}\binom{k+p}{k-1}\left|\Delta^p \frac{a_{nk}}{k}\right|\right) > 0,$$

где p – натуральное число, то $|C_p| \sim |A|$ на множестве рядов с ограниченными членами.

Два метода суммирования, определяемые матрицами $A=(a_{nk})$ и $B=(b_{nk})$ преобразования последовательности в последовательность, называют равносходящимися на множестве рядов X, если для каждого ряда из множества X с частными суммами S_n $(n \geq 0)$ сходятся ряды $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ $(n \geq 0)$, $\tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k$ $(n \geq 0)$ и $t_n - \tau_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если $t_n - \tau_n \to S \neq \infty$ $(n \to \infty)$, то методы A и B называют равносходящимися в широком смысле на множестве X.

Равносходимость методов Рисса, Чезаро, Вороного–Нерлунда, общих матричных методов суммирования изучали многие авторы: Рисс, Агнью, Кук, Зиммеринг. В то же время, равносходимость в широком смысле мало изучена.

В § I.3 рассматривается равносходимость в широком смысле двух методов Чезаро, двух методов Гельдера различного натурального порядка, логарифмического и единичного мето-

дов суммирования. Здесь доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. Соотношение

$$C_n^p(S_i) - C_n^q(S_i) \to S \qquad (n \to \infty)$$

выполнено, если и только если

$$C_n^{p+1}(ia_i) \to \frac{S}{T(p,q)} \qquad (n \to \infty),$$

где $S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$ $(i \geq 0)$, $T(p,q) = \sum_{k=0}^{q-p-1} \frac{1}{k+p+1}$, p и q – целые числа такие, что $0 \leq p < q$, S – конечное число.

Теорема 6. Соотношение

$$H_n^p(S_i) - H_n^q(S_i) \to S \qquad (n \to \infty)$$

выполнено, если и только если

$$H_n^{p+1}(ia_i) \to \frac{S}{q-p} \qquad (n \to \infty),$$

где $S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$ $(i \geq 0)$, p и q – целые числа такие, что $0 \leq p < q$, S – конечное число.

Теорема 7. Соотношение

$$S_n - \ell_n(S_i) \to S \qquad (n \to \infty)$$

выполнено, если и только если

$$\ln^{-1}(n+2) \sum_{k=0}^{n} a_k \ln(k+1) \to S \qquad (n \to \infty),$$

где $S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$ $(i \geq 0)$.

В теоремах 5–7 величины $C_n^p(S_i)$, $H_n^p(S_i)$, $\ell_n(S_i)$ обозначают средние соответственно Чезаро, Гельдера натурального порядка p и логарифмические средние для последовательности $\{S_i\}$.

Из теорем 5–7 получены некоторые результаты о ядрах методов Чезаро, Гельдера, Абеля–Пуассона и логарифмического метода суммирования. В частности получено

Следствие 15. Если $C_n^{p+1}(ia_i) \to 0$ $(n \to \infty)$, то

то ядра средних $C_n^{\alpha}(S_i)$, где $S_i = \sum_{k=0}^{i} a_k$ $(i \geq 0)$,

для $\alpha \geq p$, совпадают с ядром функции $f(x) = (1-x)\sum_{i=0}^{\infty} S_i x^i$.
Кроме того, производные множества средних $C_n^q(S_i)$ при целых $q \geq p \geq 0$ совпадают и содержатся в производном множестве функции $f(x)$.

Другие условия совпадения ядер средних Чезаро, Гельдера, Абеля–Пуассона рассматривались в работах М.П.Щеглова, Н.А.Давыдова, Г.А.Михалина, В.А.Лотоцкого и др.

Параграфы I.I–I.3 составляют содержание главы I.

Некоторые результаты § I.I применяются во второй главе диссертации, которая посвящена изучению абсолютной суммируемости рядов методами Рогозинского и Рогозинского–Бернштейна.

Метод Рогозинского в виде преобразования ряда в последовательность определяется матрицей $R=(r_{nk})$, где

$$r_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n} \ (0 \leq k \leq n),\quad r_{nk} = 0 \ (0 \leq n < k),\quad r_{00} = 0.$$

Известно, что метод Рогозинского равносилен методу Чезаро первого порядка. В § 2.I доказано, что эти методы и абсолютно равносильны /теорема 8/.

Метод Рогозинского–Бернштейна в виде преобразования ряда в последовательность определяется матрицей $Б=(b_{nk})$, где

$$b_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} \ (0 \leq k \leq n),\quad b_{nk} = 0 \quad (0 \leq n < k).$$

Карамата установил, что этот метод равносилен методам $C_1 Z_2$ и $Z_2 C_1$, то есть методам, определяющимся соответственно произведением матрицы метода Чезаро первого порядка на матрицу метода Сильвермана–Сасса /Z_2/ и произведением матрицы Z_2 на матрицу C_1. В теоремах I0, I2 показано, что метод Рогозинского–Бернштейна абсолютно равносилен методу $C_1 Z_2$ и не равносилен абсолютно методу $Z_2 C_1$. В теореме II изучается абсолютное включение методов Чезаро и метода Рогозинского–Бернштейна.

Теорема II. Включения $|C_\alpha| \subset |Б| \subset |C_\beta|$ справедливы, если и только если $-1 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 2$.

Аналогичный результат имеет место и для обычной суммируемости. Отдельные элементы этого включения для обычной суммируемости устанавливались Ф.И.Харшиладзе, И.И.Огиевецким, Агнью.

В § 2.2 в качестве приложения результатов § 2.I рассматривается абсолютное суммирование рядов Фурье интегрируемых по Лебегу функций методом Рогозинского–Бернштейна.

Известно, что принцип локализации Римана для абсолютной сходимости рядов не выполняется. В этом случае говорят, что абсолютная сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ не является локальным свойством функции $f(x)$. Однако Бованкэт доказал, что уже абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(x)$ методом Чезаро порядка $\alpha > 1$ является локальным свойством функции $f(x)$, то есть для абсолютной суммируемости методом Чезаро порядка $\alpha > 1$ рядов Фурье интегрируемых по Лебегу функций выполняется принцип локализации Римана. Бованкэт и Кестельман установили, что абсолютная суммируемость методом Чезаро первого порядка ряда Фурье функции $f(x)$ не является локальным свойством функции $f(x)$. Ряд авторов исследовали другие методы абсолютного суммирования на локальное свойство. Изучалась также абсолютная суммируемость более общих рядов. Известны общие достаточные условия того, чтобы абсолютная суммируемость ряда Фурье функции $f(x)$ некоторым матричным методом являлась или не являлась локальным свойством функции $f(x)$. Эти теоремы доказаны и для более общих рядов, в частности, для продифференцированных рядов Фурье.

В § 2.2 показано, что решить вопрос о том, является ли абсолютная суммируемость методом Рогозинского-Бернштейна ряда Фурье интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$ локальным свойством функции $f(x)$, с помощью этих теорем нельзя. Здесь же доказана

Теорема I3. Пусть нормальная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в последовательность удовлетворяет условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{D}_n^{(p)} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \eta_{n-i} \right| < \infty,$$

где

$$\mathcal{D}_n^{(p)} = \sup_k \left| a_{k+n,k+n} \sum_{i=0}^{p} \eta_{k+n-i,k} \right|, \quad A^{-1} = (\eta_{nk}),$$

$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}$, $(n \geq 0)$, p - некоторое целое неотрицательное число.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left| \lambda_n a_{nn} \right| = \infty, \quad \lambda_n \sim \lambda_{n+1} \quad (n \to \infty),$$

то абсолютная суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{d^2}{dt^2} A_n(t)$ матрицей A не является локальным свойством вещественной, 2π-периодической функции $f(x)$, обладающей абсолютно непрерывной на промежутке $[-\pi; \pi]$ производной и для которой ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$$

является рядом Фурье.

Из теоремы I3 на основании результатов § 2.I следует, что абсолютная суммируемость ряда Фурье интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$ методом Рогозинского-Бернштейна не является локальным свойством функции $f(x)$.

Параграфы 2.I и 2.2 составляют содержание второй главы диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность за руководство работой научному руководителю доктору физико-

математических наук, профессору Н.А.Давыдову.

Литература

1. Кузьмич В.И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов. - В сборнике "Приближенные методы математического анализа". - КГПИ, I979, с. 50-6I.
2. Кузьмич В.И. Об абсолютном суммировании рядов методом Рогозинского-Бернштейна. - Укр. матем. журн., I98I, т. 33, № 3, с. 398-406.
3. Кузьмич В.И. О тауберовых константах для некоторых классических методов суммирования. - В сборнике "Приближенные методы математического анализа". - КГПИ, I98I, с. 75-86.

Подп.в печ. 8.03.82.БФ I7636. Формат 60x84/I6. Бумага тип. Офс.печать. Усл.печ.л. 0,93. Уч.-изд.л. 0.6. Тираж I00 экз. Заказ 215 . Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН УССР
25260I, Киев, ГСП, ул. Репина,3.