ISSN 0041-6053

Український математичний журнал

1993 Том 45

Науковий журнал

8

„Український математичний журнал" публікує статті з основних напрямків теоретичної та прикладної математики, переважно з функціонального аналізу та теорії функцій, диференціальних рівнянь та математичної фізики, геометрії та топології, теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, алгебри.

Розрахований на наукових працівників — математиків та механіків, а також на викладачів вузів та студентів старших курсів механіко-математичних факультетів.

Статті публікуються однією з трьох мов: українською, російською або англійською.

„Украинский математический журнал" публикует статьи по основным направлениям теоретической и прикладной математики, преимущественно по функциональному анализу и теории функций, дифференциальным уравнениям и математической физике, геометрии и топологии, теории вероятностей и теории случайных процессов, алгебре.

Рассчитан на научных работников — математиков и механиков, а также на преподавателей вузов и студентов старших курсов механико-математических факультетов.

Статьи публикуются на одном из трех языков: украинском, русском или английском.

"Ukrainian Mathematical Journal" focuses on research papers in the principal fields of theoretical and applied mathematics, mainly in functional analysis and theory of functions, differential equations, mathematical physics, geometry and topology, probability theory, theory of stochastic processes, and algebra.

For researchers and students in the field of mathematics and mechanics.

The papers intended to be published in "Ukrainian Mathematical Journal" are submitted in Ukrainian, Russian or English.

Адреса редакції:

252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
Інститут математики АН України
Тел. (044) 224 4564

Науковий редактор *В. Т. Гаврилюк*
Редактор *І. І. Артеменко*
Відповідальний за підготовку оригінал-макета *П. В. Малишев*
Художній редактор *Т. М. Немеровська*

Комп'ютерний набір. Підп. до друку з оригінал-макета 07.06. 93. Формат 70×108/16. Папір друк. №2. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 11, 9. Тираж 810 прим. Зам. 3-351 Ціна 300 крб. (індивідуальна), 600 крб. (колективна).

Київська книжкова друкарня наукової книги. 252004 Київ 4, вул. Терещенківська, 4.

УДК 517.512

В. И. Кузьмич, канд. физ.-мат. наук (Херсон. пед. ин-т)

СХОДИМОСТЬ ВОЗЛЕ ТОЧКИ И ТЕОРЕМЫ ТИПА АРЦЕЛА – АСКОЛИ

Theorems that give necessary and sufficient conditions for the convergence of a sequence of continuous (differentiable) functions to a continuous (differentiable) function are proved. The notions of convergence near a point and equipotential convergence near a point are introduced. These notions are defined locally; on a segment, they are equivalent to quasiuniform and uniform convergence of a sequence of functions, respectively.

Доведені теореми, які визначають необхідні і достатні умови збіжності послідовності неперервних (диференційовних) функцій до неперервної (диференційовної) функції. Вводяться поняття збіжності біля точки та рівностепеневої збіжності біля точки, які мають локальний характер і рівносильні на відрізку відповідно квазірівномірній і рівномірній збіжностям функціональної послідовності.

В настоящей работе вводится понятие сходимости возле точки последовательности функций. С его помощью получены теоремы типа Арцела – Асколи, определяющие необходимые и достаточные условия сходимости последовательности непрерывных (дифференцируемых) функций к непрерывной (дифференцируемой) функции. Впервые эту проблему в отношении непрерывности разрешил Ч. Арцела, определив квазиравномерную сходимость. В отличие от квазиравномерной сходимости понятие сходимости возле точки носит локальный характер, т.е. учитывает поведение элементов последовательности лишь в окрестности конкретной точки сходимости.

В дальнейшем интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ будем обозначать через $O_\delta(x_0)$ (δ — окрестность точки x_0), а совокупность интервалов $(x_0 - \delta;\ x_0)$ и $(x_0;\ x_0 + \delta)$ — через $O^*_\delta(x_0)$ (выколотая δ-окрестность точки x_0).

***Определение* 1.** *Пусть функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены в некоторой выколотой окрестности точки x_0.*

Последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ будем называть сходящимися возле точки x_0, если для любого положительного числа ε существует число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого номера $n > N(\varepsilon)$ существует число $\delta(\varepsilon; n) > 0$ такое, что для любого значения $x \in O^*_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - g_n(x)| < \varepsilon$.

Это определение обладает достаточной степенью общности. Полагая, например, поочередно $g_n(x) = g(x)$, $g_n(x) = a_n$, $g_n(x) = A$ $(n = 1, 2, \dots)$, получаем определения сходимости возле точки x_0 последовательности $\{f_n(x)\}$ и соответственно функции $g(x)$, числовой последовательности $\{a_n\}$, числа A. В последнем случае будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к числу A возле точки x_0.

Кроме того, полагая в определении 1 $f_n(x) = f(x)$ и $g_n(x) = a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, получаем определение сходимости возле точки функции $f(x)$ и числовой последовательности $\{a_n\}$.

Если в определении 1 положить $f_n(x) = f(x)$ и $g_n(x) = A$ $(n = 1, 2, \dots)$, то, выводя из него утверждения о натуральном числе n, получаем классическое определение предела функции в точке $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A)$, а при $f_n(x) = a_n$ и $g_n(x) = A$ $(n = 1, 2, \dots)$, выводя утверждения о точке x_0 и ее окрестности, получаем определение предела числовой последовательности ($\lim_{n\to\infty} a_n = A$).

В дальнейшем понадобится понятие односторонней сходимости возле точки. В частности, определение сходимости возле точки слева можно получить из определения 1, заменив в нем окрестность $O^*_\delta(x_0)$ интервалом $(x_0 - \delta;\, x_0)$. Рассмотрев интервал $(x_0;\, x_0 + \delta)$, получим определение сходимости возле точки x_0 справа.

Прежде всего докажем, что сходимость возле точки обладает свойством транзитивности, которое выражено в следующем утверждении.

Лемма. *Если возле точки x_0 сходятся последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$, а также последовательности $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$, то возле этой точки сходятся последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$.*

Доказательство. Из сходимости возле точки x_0 последовательностей $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого номера $n > N_1(\varepsilon)$ существует выколотая $\delta_1(\varepsilon;\, n)$-окрестность точки x_0, в каждой точке которой выполняется неравенство $|f_n(x) - g_n(x)| < \varepsilon$.

Аналогично, из сходимости возле точки x_0 последовательностей $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$ следует, что для выбранного выше числа ε существует число $N_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого номера $n > N_2(\varepsilon)$ существует выколотая $\delta_2(\varepsilon;\, n)$-окрестность точки x_0, в каждой точке которой выполняется неравенство $|g_n(x) - h_n(x)| < \varepsilon$.

Положив теперь $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$ и $\delta(\varepsilon;\, n) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ в каждой точке выколотой $\delta(\varepsilon;\, n)$-окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$|f_n(x) - h_n(x)| \le |f_n(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - h_n(x)| < 2\varepsilon,$$

что и означает сходимость возле точки x_0 последовательностей $\{f_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$. Заметим, что эта лемма остается верной и при различных частных случаях сходимости возле точки.

Сохранение предельных свойств элементов функциональной последовательности демонстрирует следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены в некоторой выколотой окрестности точки x_0. Пусть, кроме того, выполняются условия:* 1) $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке x_0 предел равный A, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле этой точки.

Доказательство. Условие 1 означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и каждого номера n существует число $\delta(\varepsilon;\, n) > 0$ такое, что для всех значений $x \in O^*_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - a_n| < \varepsilon$, т. е. последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{a_n\}$ сходятся возле точки x_0. Как отмечалось выше, условие 2 означает сходимость возле любой точки (а значит, и возле точки x_0) последовательности $\{a_n\}$ и числа A. Эти условия в силу леммы означают сходимость возле точки x_0 последовательности $\{f_n(x)\}$ и числа A.

Докажем необходимость условия теоремы. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тогда функция $f(x)$ и число A сходятся возле точки x_0. Следовательно, по свойству транзитивности возле этой точки сходятся последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$.

Теперь докажем достаточность. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходятся возле точки x_0, тогда по свойству транзитивности сходятся возле этой точки функция $f(x)$ и число A, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Эта теорема носит локальный характер, однако ее можно распространить и на любой промежуток.

***Следствие* 1**. *Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены на промежутке $\langle a; b\rangle$. Пусть также для каждого номера n и каждой точки $x_0 \in \langle a; b\rangle$ существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n^*(x_0)$, а последовательность $\{f_n^*(x)\}$ сходится к функции $f^*(x)$ на промежутке $\langle a; b\rangle$.*

Для того чтобы в каждой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ выполнялось равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f^*(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле каждой точки промежутка $\langle a, b\rangle$.

Заметим, что в условиях следствия 1 для точек a и b подразумевается соответствующая односторонняя сходимость возле этих точек.

Теорему 1 и следствие 1 можно применить к изучению свойства непрерывности функции, являющейся предельной для последовательности непрерывных функций. В этом случае теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны в этой точке. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.*

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле этой точки.

Замечая, что для непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$ функции $f(x)$ равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ выполняется в любой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть последовательность непрерывных на промежутке $\langle a, b\rangle$ функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится на этом промежутке к функции $f(x)$.*

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле каждой точки этого промежутка.

Это следствие можно переформулировать и для случая функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, обозначив при этом через $R_n(x)$ n-й остаток ряда.

***Следствие* 2′.** *Пусть функциональный ряд с непрерывными на промежутке $\langle a, b\rangle$ членами сходится на этом промежутке.*

Для того чтобы сумма этого ряда была непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность остатков $R_n(x)$ ряда сходилась к нулю возле каждой точки этого промежутка.

Приведем определение квазиравномерной сходимости [1, с. 257].

Определение 2. *Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, сходящийся всюду на сегменте $[a, b]$, является сходящимся на $[a, b]$ квазиравномерно, если для каждого положительного числа ε и всякого натурального числа N имеется такое превышающее его натуральное число N', что отрезок $[N; N']$ натурального ряда для любой точки x, принадлежащей сегменту $[a; b]$, содержит индекс n_x, при котором справедливо неравенство $R_{n_x} < \varepsilon$.*

В этом определении R_{n_x} означает абсолютную величину соответствующего остатка ряда.

Квазиравномерная сходимость является необходимым и достаточным условием сходимости ряда с непрерывными на отрезке членами к непрерывной функции [1, с. 259].

Таким образом, в силу следствия 2′ на множестве сходящихся рядов с непрерывными на отрезке членами понятия квазиравномерной сходимости и сходимости возле точки равносильны.

С другой стороны, результат Арцела получен для отрезка, и это требование является весьма существенным при доказательстве, а следствие 2′ справедливо для произвольного промежутка.

Аналогичный результат можно получить и для равномерной сходимости. Для этого в определении 1 потребуем, чтобы число $\delta(\varepsilon; n)$ не зависело от номера n. Тогда получим следующее определение.

Определение 3. *Пусть функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены в некоторой выколотой окрестности точки x_0.*

Последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ будем называть равностепенно сходящимися возле точки x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $N(\varepsilon) > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого значения $x \in O^*_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - g_n(x)| < \varepsilon$.

Заметим, что для равностепенной сходимости возле точки выполняется такое же свойство транзитивности, как и для сходимости возле точки (доказательство аналогично).

Сравнивая определение равномерной сходимости и определение 3, замечаем, что из равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на промежутке следует их равностепенная сходимость возле каждой точки этого промежутка. Обратное утверждение не всегда верно. Так, последовательность функций $f_n(x) = (1 + 1/n)/x$ $(n = 1, 2, \dots)$ и функция $f(x) = 1/x$ равностепенно сходятся возле каждой точки x_0 интервала $(0; 1)$, поскольку неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1+1/n}{x-1/x}\right| = \frac{1}{nx} < \frac{2}{nx_0} < \varepsilon$$

будет выполняться для всех номеров $n > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = 2/\varepsilon x_0 > 0$, и всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, где $\delta(\varepsilon) = \min\{x_0/2; 1 - x_0\}$.

С другой стороны, эта последовательность не сходится равномерно на интервале $(0, 1)$, так как для последовательности значений $x_n = 1/n$ разность

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = \left|\frac{1+1/n}{x_n-1/x_n}\right| = |(1+1/n)\,n-n| = 1$$

не может быть меньше, например, числа $\varepsilon = 1/2$.

Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[a; b]$ к функции $f(x)$ и они сходятся равностепенно возле каждой точки этого отрезка, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.*

Доказательство. Предположим, что при условиях теоремы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ неравномерно. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого значения $x \in [a; b]$ существует число $N(\varepsilon; x) > 0$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon; x)$ выполняется неравенство $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$, причем множество чисел $N(\varepsilon; x)$ для фиксированного ε неограниченно сверху. Выберем из этого множества монотонно возрастающую последовательность чисел $N_k(\varepsilon; x_k)$. Из последовательности точек $\{x_k\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$. Пусть, например, $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = x_0$. Тогда точка x_0 принадлежит отрезку $[a; b]$. Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ не сходятся равностепенно возле точки x_0.

Действительно, в любой окрестности точки x_0 будут элементы подпоследовательности $\{x_{k_i}\}$, а значит, для выбранного числа ε не будет существовать числа $N(\varepsilon) > 0$ единого для всех значений x из окрестности точки x_0 такого, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$. Отсюда последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ не сходятся равностепенно возле точки x_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, понятия равномерной сходимости на отрезке и равностепенной сходимости возле каждой точки этого отрезка равносильны на множестве сходящихся функциональных последовательностей.

Для изучения дифференциальных свойств функциональных последовательностей рассмотрим один частный случай сходимости возле точки.

Определение 4. *Пусть функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены в некоторой окрестности точки x_0.*

Последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ будем называть дифференциально сходящимися возле точки x_0, если возле этой точки сходятся последовательности функций

$$\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \quad \text{и} \quad \frac{g_n(x)-g_n(x_0)}{x-x_0} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если в определении 4 положить $f_n(x) = f(x)$, где $g_n(x) = Ax$ $(n = 1, 2, \dots)$, где A — постоянное число, то получим определение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 (f'(x_0) = A)$.

Рассмотрим в условии теоремы 1 вместо функций $f_n(x)$ функции $(f_n(x) - f_n(x_0))/(x-x_0)$ $(n = 1, 2, \dots)$, а вместо функции $f(x)$ функцию $(f(x) -$

$-f(x_0)) / (x - x_0)$. Таким образом, эта теорема примет следующий вид.

Теорема 4. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *определены в некоторой окрестности точки* x_0. *Пусть также функции* $f_n(x)$ *дифференцируемы в этой точке и* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0) = A$.

Для того чтобы функция $f(x)$ *имела в точке* x_0 *производную равную* A, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *и функция* $f(x)$ *дифференциально сходились возле этой точки.*

Для промежутка получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *определены на промежутке* $\langle a; b\rangle$ *и функции* $f_n(x)$ *дифференцируемы на этом промежутке, причем последовательность* $\{f_n'(x)\}$ *сходится на промежутке* $\langle a; b\rangle$ *к функции* $f^*(x)$.

Для того чтобы функция $f^*(x)$ *была производной функции* $f(x)$ *на промежутке* $\langle a; b\rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *и функция* $f(x)$ *дифференциально сходились возле каждой точки этого промежутка.*

Заметим, что в отличие от известной теоремы о дифференцируемости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ в следствии 3 не требуется равномерная сходимость последовательности $\{f_n'(x)\}$.

Хотя в следствии 3 не требуется сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$, для переформулировки его на случай функционального ряда это условие следует добавить.

Следствие 3′. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *с дифференцируемыми на промежутке* $\langle a; b\rangle$ *членами сходится на этом промежутке к функции* $f(x)$, *а ряд из производных* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ — *к функции* $f^*(x)$.

Для того чтобы функция $f^*(x)$ *была производной функции* $f(x)$ *на промежутке* $\langle a; b\rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{R_n(x)\}$ *остатков ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *дифференциально сходилась к нулю возле каждой точки промежутка* $\langle a; b\rangle$.

1. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного. – М.: Учпедгиз, 1948. – 318 с.

Получено 16.12.91