НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Збірник наукових праць
Випуск 15

Київ • 1997

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ
ТА
ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
ДО
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

збірник наукових праць

Інститут математики НАН України

Чернівецький державний університет
ім. Ю. Федьковича

кафедра диференціальних рівнянь

Зареєстровано Державним комітетом України у справах видавництва, поліграфії та книгорозповсюдження

Свідоцтво
серія КВ N 56
видається з 1992 року

Випуск 15
1997

$$\times \sigma_2 sh\, r dr - \gamma_3^2 \int\limits_{R_2}^{R_3} f(r) V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta_n) \sigma_3 r^{2\alpha-1} dr + \frac{R_3^{2\alpha+1}}{\alpha_{22}^3} V_{\mu,\alpha;3}(R_3,\beta_n) g_3 .$$

У справедливості тотожності (17) переконуємося в результаті інте грування частинами під знаком інтегралів та використання властивостей функцій $f(r), V_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)$ $(j = 1,2,3)$ і структури $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Наявність тотожності (17) дає змогу застосувати запроваджені скін ченні гібридні інтегральні перетворення до розв'язування відповідни сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур.

1. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразова ния Лежандра.– Львов, 1989.– 60с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т прик проблем механ. и матем.; 89.0).

2. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва.– Київ, 1996.– 64с.– (Препринт / НАН Україн Ін-т математики; 96:16).

3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Наука, 1971.– 1108с.

4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.– М.: Физматги 1959.– 468с.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: Физматгиз, 1963.– 431с.

6. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальн рівняння.– Київ: Вища шк . , 1981.– 502 с.

7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс.– М Наука, 1965.– 328с.

УДК 517.512

В.И. Кузьмич

ПЛОТНАЯ СХОДИМОСТЬ ВОЗЛЕ ТОЧКИ И ТЕОРЕМЫ ТИПА АРЦЕЛА-АСКОЛИ

(г. Херсон)

Ранее автором была опубликована работа, в которой получены необходимые и дост точные условия сходимости последовательности непрерывных (дифференцируемых) фу кций к непрерывной (дифференцируемой) функции. Данная работа продолжает эти и следования и в ней получены условия необходимые и достаточные для сходимости пос

довательности интегрируемых по Риману функций к интегрируемой по Риману функции. Таким условием есть "плотная сходимость возле точки". В работе отмечено взаимоотношения этого вида сходимости и "квазиравномерной сходимости на отрезке вообще", введеной ран Ч. Арцела.

Библиогр.: 4 назв.

В работе [1] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность непрерывных (дифференцируемых) функций сходилась к непрерывной (дифференцируемой) функции. Этим условием является сходимость (дифференциальная сходимость) возле точки. В данной работе аналогичный результат получен для последовательности интегрируемых по Риману функций. Впервые эта задача была решена Ч. Арцела [2], который ввел в рассмотрение "равностепенную (равноступенчатую) сходимость на отрезке вообще", названную впоследствии "квазиравномерной сходимостью вообще". Это понятие, как и понятие квазиравномерной сходимости, вводится для отрезка.

Целью данной работы является получение необходимых и достаточных условий, которые носят локальный характер, то есть учитывают поведение элементов функциональной последовательности лишь в окрестности каждой отдельной точки сходимости.

В первой части работы вводится понятие плотной в точке функции и доказано, что условие плотности функции в каждой точке отрезка является необходимым и достаточным для интегрируемости по Риману этой функции.

Во второй части работы вводится понятие плотной сходимости возле точки, которое носит локальный характер и является необходимым и достаточным условием сходимости последовательности интегрируемых по Риману функций к интегрируемой по Риману функции.

1. В работе будем частично использовать схему построения верхней меры Жордана [3, с. 98].

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена на отрезке $[a; a+\delta]$, где a – фиксированная точка, δ – некоторое положительное число. Отрезок $[a; a+\delta]$ разобъем на отрезки точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = a+\delta$ и обозначим это разбиение через T. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ выберем из разбиения T все отрезки $[x_k; x_{k+1}]$, на каждом из которых выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{1}$$

для любых точек x', x'' отрезка $[x_k; x_{k+1}]$. Через $l(T;\varepsilon;f)$ обозначим сумму длин выбранных отрезков, а через $L(T;\varepsilon;f)$ – сумму длин оставшихся отрезков разбиения T.

Определение 1. *Если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для отрезка $[a, a+\delta(\varepsilon)]$ ($[a-\delta(\varepsilon); a]$) выполняется равенство*

$$\sup_T \{l(T;\varepsilon;f)\} = \delta(\varepsilon), \tag{2}$$

где верхняя грань берется по всевозможным T-разбиениям отрезка $[a; a+\delta(\varepsilon)]$ ($[a-\delta(\varepsilon); a]$) на любое конечное число отрезков, то функцию $f(x)$ будем называть плотной в точке $x = a$ справа (слева).

Если функция плотна в точке слева и справа, то будем ее называть плотной в этой точке, а саму точку – точкой плотности функции. Например, любая точка разрыва первого рода, точка непрерывности функции являются ее точками плотности.

Будем говорить, что функция плотна на отрезке $[a; b]$, если она плотна в каждой точке интервала (a, b), плотна в точке $x = a$ справа и в точке $x = b$ – слева.

Заметим, что условие (2) равносильно условию

$$\inf_T \{L(T;\varepsilon;f)\} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$$\lambda(T) = \max_{0 \le k \le n-1} \{\Delta x_k\}, \ M_k = \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \{f(x)\},$$

$$m_k = \inf_{\in [x_k; x_{k+1}]} \{f(x)\}.$$

Лемма 1. *Если для отрезка $[a; a+\delta(\varepsilon)]$ выполняется условие (3), то для любого числа $\alpha > 0$ существует такое число $\beta(\alpha) > 0$, что из неравенства $\lambda(T) < \beta(\alpha)$ следует неравенство*

$$L(T;\varepsilon;f) < \alpha, \text{ или кратко: } \lim_{\lambda(t) \to 0} L(T;\varepsilon;f) = 0.$$

Доказательство. Равенство (3) означает, что для любого числа $\alpha > 0$ существует такое разбиение T_α отрезка $[a; a+\delta(\varepsilon)]$, для которого выполняется неравенство

$$L(T_\alpha;\varepsilon;f) < \alpha.$$

Через $\gamma(T_\alpha)$ обозначим длину наименьшего из тех отрезков разбиения T_α, для каждого из которых неравенство (1) выполняется не для всех точек x'

и x'' этого отрезка (то есть, это длина наименьшего из отрезков, сумма длин которых равна $L(T_\alpha;\varepsilon;f)$).

Возьмем произвольное T-разбиение отрезка $[a; a+\delta(\varepsilon)]$, удовлетворяющее условию $\lambda(T) < \gamma(T_\alpha)$. Так как те отрезки разбиения T, для каждого из которых неравенство (1) выполняется не для всех точек отрезка, должны иметь общие точки с соответствующими отрезками разбиения T_α, то должно выполняться неравенство

$$L(T;\varepsilon;f) \le 3L(T_\alpha;\varepsilon;f) < 3\alpha.$$

Ввиду произвольности выбора числа α, последнее неравенство означает, что

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} L(T;\varepsilon;f) = 0.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке $[a; b]$, была интегрируемой по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была плотной на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Покажем необходимость условия теоремы. Предположим, что функция $f(x)$ не является плотной в некоторой точке отрезка $[a; b]$. Без ущерба для общности рассуждений можно считать, что это, например, точка $x = a$. В этом случае существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ на отрезке $[a; a+\delta]$ выполняется неравенство

$$\sup_T \{l(T;\varepsilon_0;f)\} < \delta,$$

или, что в связи со сделанным выше замечанием одно и то же,

$$\inf_T \{L(T;\varepsilon_0;f)\} = r_0 > 0.$$

Положим $\delta = b - a$ и рассмотрим последовательность $\{T_i\}$ таких разбиений отрезка $[a; b]$ точками $a = x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{in} = b$, что $\lim\limits_{i \to +\infty} \lambda(T_i) = 0$. Отрезки разбиения T_i разделим на два класса, обозначив при этом через R_i множество номеров тех отрезков $[x_{ik}; x_{i,k+1}]$, на каждом из которых выполняется неравенство $|f(x^*) - f(x^{**})| < \varepsilon_0$ для любых точек x^* и x^{**} отрезка, а через $\mathcal{P}_i$ – множество номеров тех отрезков, на каждом из которых неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \ge \varepsilon_0 \tag{4}$$

выполняется хотя бы для двух точек x' и x'' отрезка.

На каждом отрезке с номером из множества N_i возьмем произвольную точку $\xi_{ik} (k \in N_i)$, а на каждом отрезке с номером из множества $\mathcal{P}_i$ возьмем по две точки x'_{ik} и x''_{ik} $(k \in \mathcal{P}_i)$, удовлетворяющие неравенству (4), полагая при этом, например, что

$$f(x'_{ik}) > f(x''_{ik}).$$

Составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и разбиения T_i:

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_{ik})\Delta x_{ik}, \text{ где } \eta_{ik} = \xi_{ik} \ (k \in N_i)$$

и $\eta_{ik} = x'_{ik}$ $(k \in \mathcal{P}_i)$.
Следовательно,

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{k \in N_i} f(\xi_{ik})\Delta x_{ik} + \sum_{k \in \mathcal{P}_i} f(x'_{ik})\Delta x_{ik}.$$

Аналогично составим другую интегральную сумму

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\mu_{ik})\Delta x_{ik}, \text{ где } \mu_{ik} = \xi_{ik} \ (k \in N_i)$$

и $\mu_{ik} = x''_{ik}$ $(k \in \mathcal{P}_i)$.
Тогда

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{k \in N_i} f(\xi_{ik})\Delta x_{ik} + \sum_{k \in \mathcal{P}_i} f(x''_{ik})\Delta x_{ik}.$$

Рассматривая разность этих интегральных сумм, получим:

$$\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \sum_{k \in \mathcal{P}} f(x'_{ik}) - f(x''_{ik}))\Delta x_{ik} \geq$$

$$\geq \varepsilon_0 \sum_{k \in \mathcal{P}_i} \Delta x_{ik} \geq \varepsilon_0 \tau_0.$$

Следовательно, при стремлении $\lambda(T_i)$ к нулю эти интегральные суммы не могут стремиться к одному пределу, поэтому функция $f(x)$ не интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Покажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть функция $f(x)$ плотна на отрезке $[a, b]$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. По условию, для каждой точки x интервала (a, b) существует такой отрезок $[x - \delta(\varepsilon; x); x + \delta(\varepsilon; x)]$, на котором выполняется равенство

$$\sup_T\{l(T; \varepsilon; f)\} = 2\delta(\varepsilon; x),$$

и для точек $x = a$ и $x = b$ выполняются соответственно на отрезках $[a; a + \delta(\varepsilon; a)]$ и $[b - \delta(\varepsilon; b); b]$ равенства

$$\sup_T\{l(T; \varepsilon; f)\} = \delta(\varepsilon; a) \text{ и } \sup_T\{l(T; \varepsilon; f)\} = \delta(\varepsilon; b).$$

Мы получим таким образом бесконечную систему отрезков, покрывающую отрезок $[a, b]$. По теореме Бореля из этой бесконечной системы отрезков можно выделить конечную подсистему, покрывающую отрезок $[a; b]$. Поэтому для T-разбиений отрезка $[a; b]$ выполняется равенство $\sup_T\{l(T; \varepsilon; f)\} = b - a$, или, что то же самое, $\inf_T\{L(T; \varepsilon; f)\} = 0$.

Пусть теперь $|f(x)| < M$ для всех точек отрезка $[a, b]$. Рассмотрим для некоторого разбиения T_0 отрезка $[a, b]$ разность верхней и нижней сумм Дарбу

$$\overline{s} - \underline{s} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$

Взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, как и при доказательстве необходимости, разобьем эту сумму на две:

$$\overline{s} - \underline{s} = \sum_{k \in N_0} (M_k - m_k)\Delta x_k + \sum_{k \in \mathcal{P}_0} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$

По лемме 1 мы можем найти такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $\lambda(T_0) < \delta(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{k \in \mathcal{P}_0} \Delta x_k = L(T_0; \varepsilon; f) < \varepsilon.$$

Следовательно, для разбиения T_0 отрезка $[a, b]$, такого что $\lambda(T_0) < \delta(\varepsilon)$, получим неравенство

$$\overline{s} - \underline{s} < \varepsilon(b - a) + 2M\varepsilon = (b - a + 2M)\varepsilon.$$

А это, ввиду произвольности числа ε и разбиения T_0, означает, что

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} (\overline{s} - \underline{s}) = 0.$$

Последнее равенство равносильно интегрируемости по Риману функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, что и доказывает теорему.

2. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, плотных в точке $x = a$ справа (слева). В соответствии с определением 1 для каждой из

них будет существовать такое число $\delta(\varepsilon; n) > 0$, что на отрезке $[a; a + \delta(\varepsilon; n)]$ $([a - \delta(\varepsilon; n); a])$ будет выполняться равенство

$$\sup_T\{l(T; \varepsilon; f_n)\} = \delta(\varepsilon; n),$$

каково бы ни было число $\varepsilon > 0$.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда число $\delta(\varepsilon)$ не будет зависеть от номера. Такую последовательность, для краткости изложения, будем называть равностепенно плотной в точке $x = a$ справа (слева). Если же последовательность равностепенно плотна в точке справа и слева, то будем ее называть равностепенно плотной в этой точке.

Последовательность, равностепенно плотную в каждой точке интервала $(a; b)$ и обладающую соответствующей односторонней равностепенной плотностью в точках $x = a$ и $x = b$, будем называть равностепенно плотной на отрезке $[a; b]$.

Примером равностепенно плотной на отрезке последовательности может служить последовательность интегрированных на отрезке функций. Действительно, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она плотна в каждой точке этого отрезка (на концах отрезка – соответствующая односторонняя плотность). При доказательстве достаточности условия теоремы 1 было показано, что в этом случае для T- разбиений отрезка $[a; b]$ справедливо равенство

$$\sup_T\{l(T; \varepsilon; f)\} = b - a, \text{ то есть } \delta(\varepsilon) = b - a.$$

Поскольку это равенство справедливо для каждой из функций последовательности $\{f_n(x)\}$, то она равностепенно плотна на отрезке $[a; b]$.

Для дальнейшего понадобится лемма Арцела [4, с. 743].

Лемма 2. *Пусть в конечном промежутке $[a, b]$ содержатся системы $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ промежутков, каждая из которых состоит из конечного числа не налегающих друг на друга замкнутых промежутков. Если сумма длин промежутков каждой системы $D_k (k = 1, 2, \ldots)$ больше некоторого постоянного положительного числа δ, то найдется, по крайней мере, одна точка $x = c$, принадлежащая бесконечному множеству систем D_k.*

Теперь установим еще одно вспомогательное утверждение, которое, впрочем, представляет и самостоятельный интерес.

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в некоторой правосторонней окрестности $(a; a + \delta)$ точки $x = a$. Подобно пункту 1 проведем T-разбиение отрезка $[a; a + \delta]$ и через $d(T; \varepsilon; f; g)$ обозначим сумму

длин тех отрезков разбиения, на каждом из которых выполняется неравенство $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ для любых точек этого отрезка и заданного числа $\varepsilon > 0$ (точки $x = a$ и $x = a + \delta$ можно не принимать во внимание), а систему этих отрезков обозначим через D.

Кроме того, через $m(T; \varepsilon; f; g)$ обозначим сумму длин тех отрезков разбиения, на каждом из которых выполняется неравенство

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

для любых точек этого отрезка.

Лемма Арцела позволяет установить следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть последовательность функций f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится на отрезке $[a; b]$ к функции $f(x)$. Тогда для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ существует такое число $N(\varepsilon; \alpha)$, что для каждого $n > N(\varepsilon; \alpha)$ выполняется неравенство $d(T; \varepsilon; f_n; f) < \alpha$ при любом T-разбиении отрезка $[a; b]$.*

Доказательство. Если предположить, что лемма неверна, то это означает, что для некоторых чисел ε_0 и α_0 и каждого из бесконечного множества номеров n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ существуют такие разбиения T_k отрезка $[a; b]$, для которых выполняется неравенство

$$d(T_k; \varepsilon_0; f_{n_k}; f) \geq \alpha_0 \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Но в этом случае системы $D_1, D_2, \ldots, D_k, \ldots$ отрезков соответствующих разбиений $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ отрезка $[a; b]$ удовлетворяют условиям леммы 2.

Следовательно, на отрезке $[a; b]$ существует, по крайней мере, одна точка $x = c$, принадлежащая бесконечному множеству систем D_k. Другими словами, для бесконечного множества номеров n_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ будет выполняться неравенство $|f_{n_{k_i}}(c) - f(c)| \geq \varepsilon_0$, поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится в точке $x = c$, что противоречит условию леммы. Это противоречие и доказывает утверждение.

Эту лемму можно переформулировать и по другому.

Лемма 3'. *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[a; b]$ к функции $f(x)$. Тогда для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ существует такое число $N(\varepsilon; \alpha) > 0$, что для каждого номера $n > N(\varepsilon; \alpha)$ сумма длин тех отрезков произвольного T-разбиения отрезка $[a; b]$, на каждом из которых неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется хотя бы для одной точки отрезка, отличается от длины отрезка $[a; b]$ меньше чем на α.*

Из леммы 3' следует примечательный факт, что точечная сходимость функциональной последовательности на промежутке "мало отличается" от ее равномерной сходимости на этом промежутке, несмотря на то, что по определению сходимость функциональной последовательности в каждой отдельной точке совершенно не связана с ее сходимостью в других точках промежутка.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и функция $f(x)$ плотно сходятся возле точки $x = a$ справа (слева), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для произвольного числа $\alpha > 0$ существует такое число $N(\alpha) > 0$, что для каждого номера $n > N(\alpha)$ на отрезке $[a; a + \delta(\varepsilon)]$ ($[a - \delta(\varepsilon); a]$) выполняется неравенство $\sup\limits_{T}\{m(T; \varepsilon; f_n; f)\} > \delta - \alpha$.*

Если последовательность и функция сходятся плотно возле точки слева и справа, то будем говорить, что они плотно сходятся возле этой точки.

Плотно сходящиеся возле каждой точки интервала $(a; b)$, справа возле точки $x = a$ и слева возле точки $x = b$ последовательность и функцию будем называть плотно сходящимися возле каждой точки отрезка $[a; b]$.

Теорема 2. *Пусть равностепенно плотная в точке x_0 последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится в некоторой окрестности этой точки к функции $f(x)$.*

Для того, чтобы функция $f(x)$ была плотной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходилась возле этой точки.

Доказательство. Рассуждения достаточно провести, например, для случая сходимости справа. Равностепенно плотная в точке последовательность функций, как это следует из ее определения, является последовательность плотных в этой точке функций.

Предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходятся возле точки x_0 справа. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta_1(\varepsilon)$ – число, о котором говорится в определении 2, а $\delta_2(\varepsilon)$ – число, о котором говорится в определении равностепенно плотной в точке x_0 справа последовательности. Обозначим $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Далее, возьмем произвольное число $\alpha > 0$ и номер $n_0 > N(\alpha)$, где $N(\alpha)$ – число, о котором говорится в определении 2. Для выбранного числа α найдем такие разбиения $T^{(1)}_{n_0}$ и $T^{(2)}_{n_0}$ отрезка $[x_0; x_0 + \delta]$, для которых выполнены соответственно неравенства

$$m(T^{(1)}_{n_0}; \varepsilon; f_{n_0}; f) > \delta - \alpha \text{ и } l(T^{(2)}_{n_0}; \varepsilon; f_{n_0}) > \delta - \alpha.$$

Через T_{n_0} обозначим разбиение отрезка $[x_0; x_0 + \delta]$, которое состоит из всех точек обеих разбиений $T^{(1)}_{n_0}$ и $T^{(2)}_{n_0}$. В этом случае, сумма длин тех отрезков разбиения T_{n_0}, на каждом из которых выполняется неравенство $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех точек этого отрезка и неравенство $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| < \varepsilon$ для любых точек x и x' этого отрезка, не меньше чем $\delta - 2\alpha$. Таким образом, сумма длин тех отрезков разбиения T_{n_0}, для любых точек x и x' каждого из которых выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x')| + |f_{n_0}(x') - f(x')| < 3\alpha,$$

не меньше, чем $\delta - 2\alpha$. А это, в силу произвольности выбора чисел ε и α означает, что для функции $f(x)$ выполняются условия плотности в точке x_0 справа. Достаточность условия теоремы доказана.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ плотна в точке x_0 справа. Взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, найдем числа $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ и $\delta_3(\varepsilon)$, о которых говорится, соответственно, в определении 1, определении равностепенно плотной в точке x_0 справа последовательности, а также в лемме 3. Обозначим $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, причем можно считать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[x_0; x_0 + \delta]$ к функции $f(x)$.

Возьмем произвольное число $\alpha > 0$ и такое разбиение $T^{(1)}$ отрезка $[x_0; x_0 + \delta]$, для которого выполнено неравенство $l(T^{(1)}; \varepsilon; f) > \delta - \alpha$. Возьмем, также, произвольный номер $n > N(\alpha)$, где $N(\alpha)$ – число, о котором говорится в лемме 3. Для этого номера выберем такое разбиение $T^{(2)}_n$ отрезка $[x_0; x_0 + \delta]$, для которого справедливо неравенство $l(T^{(2)}_n; \varepsilon; f_n) > \delta - \alpha$. Через T_n обозначим разбиение отрезка $[x_0; x_0 + \delta]$, состоящее из всех точек обеих разбиений $T^{(1)}_n$ и $T^{(2)}_n$.

По лемме 3 сумма длин тех отрезков разбиения T_n, на каждом из которых существует, по крайней мере, одна точка x', для которой справедливо неравенство $|f_n(x') - f(x')| < \varepsilon$, будет больше, чем $\delta - \alpha$.

Окончательно имеем, что сумма длин тех отрезков разбиения T_n, для каждого из которых выполняются неравенства

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \text{ и } |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$$

для любых точек x и x' этого отрезка, а также неравенство

$$|f_n(x') - f(x')| < \varepsilon,$$

по крайней мере, для одной точки x' этого отрезка будет больше, чем $\delta - 2\alpha$. На каждом из таких отрезков будет справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f(x) - f(x')| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| < 3\alpha.$$

Из произвольности выбора ε, α и номера $n > N(\alpha)$ следует выполнение условий определения 2 для последовательности $\{f_n(x)\}$ и функции $f(x)$, то есть они плотно сходятся возле точки x_0 справа. Теорема доказана.

Полученный результат легко распространяется на отрезок.

Следствие. Пусть равностепенно плотная на отрезке $[a; b]$ последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится на этом отрезке к функции $f(x)$.

Для того, чтобы функция $f(x)$ была плотной на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходились возле каждой точки этого отрезка.

Выше отмечалось, что последовательность интегрируемых по Риману на отрезке функций является равностепенно плотной на этом отрезке. Учитывая также результат теоремы 1, получим еще одно утверждение.

Теорема 3. *Пусть последовательность интегрируемых по Риману на отрезке $[a; b]$ функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится на этом отрезке к ограниченной функции $f(x)$.*

Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой по Риману на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходились возле каждой точки этого отрезка.

Теперь сравним результат Ч. Арцела и результат теоремы 3. Понятие квазиравномерной сходимости на отрезке вообще Арцела сформулировал для функционального ряда.

Определение 3. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, сходящийся на отрезке $[a; b]$, называется сходящимся квазиравномерно на отрезке вообще, если для произвольных как угодно малых чисел $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$, отрезков $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ из отрезка $[a; b]$, сумма длин которых не превышает ε, и любого номера m_1 имеется такой номер $m_2 > m_1$, что отрезок $[m_1; m_2]$ натурального ряда для любой точки x из отрезка $[a; b]$, кроме, быть может, точек, принадлежащих отрезкам $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$, содержит номер m, зависящий от x, для которого выполняется неравенство $|R_m(x)| < \sigma$, где $R_m(x)$ – остаток ряда.*

Это определение несложно переформулировать на случай функциональной последовательности. Арцела установил, что квазиравномерная сходимость на отрезке вообще является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд интегрируемых по Риману функций сходился к интегрируемой по Риману функции. Таким образом, квазиравномерная

сходимость на отрезке вообще и плотная сходимость равносильны на множестве последовательностей интегрируемых по Риману функций, сходящихся на отрезке к ограниченной функции.

Сравнивая определения 2 и 3, легко установить, что из плотной сходимости возле каждой точки отрезка функциональной последовательности и функции следует квазиравномерная сходимость на отрезке вообще последовательности к функции на этом отрезке. Это является преимуществом плотной сходимости в части необходимости условия сходимости последовательности интегрируемых функций к интегрируемой функции. Кроме того, плотная сходимость обладает определенной степенью локальности, то есть учитывает поведение элементов последовательности и предельной функции вблизи конкретной рассматриваемой точки, и поэтому может использоваться не только для интегрируемых функций. Наконец, это понятие тесно связано с понятием равностепенной сходимости возле точки [1], что позволяет рассматривать теоремы типа Арцела-Асколи для случаев сохранения свойств существования предела функции в точке, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, с единой точки зрения сходимости возле точки.

Плотную сходимость можно применить к нахождению условий интегрируемости функциональной последовательности. Это иллюстрирует следующее утверждение, справедливое для равномерно ограниченной на отрезке $[a; b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, то есть последовательности, для которой существует такое число $C > 0$, что неравенство $|f_n(x)| < C$ выполняется для всех значений x из отрезка $[a; b]$ и всех номеров n.

Теорема 4. *Пусть равномерно ограниченная на отрезке $[a; b]$ последовательность интегрируемых по Риману функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и ограниченная функция $f(x)$ плотно сходятся возле каждой точки этого отрезка. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx. \tag{5}$$

Доказательство. При доказательстве достаточности условия теоремы 3 факт сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ не использовался, поэтому из условий теоремы 4 по теореме 3 получаем, что функция $f(x)$ будет интегрируемой на отрезке $[a; b]$, а, следовательно, и ограниченной на нем. Пусть, например, $|f(x)| < K$ для всех значений x

из отрезка $[a;b]$. Рассмотрим разность

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| = |\int_a^b (f(x) - f_n(x))dx| \leq$$

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx. \tag{6}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходятся возле каждой точки отрезка $[a;b]$, то для каждой точки x отрезка существует $\delta(\varepsilon;x)$-окрестность (для точек $x = a$ и $x = b$ – соответствующие односторонние окрестности), о которой говорится в определении 2. Эта бесконечная система окрестностей покрывает отрезок $[a;b]$. По теореме Бореля из нее можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот отрезок. Следовательно, для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ существует такое число $N(\alpha) > 0$, что для любого номера $n > N(\alpha)$ существует такое разбиение T_n отрезка $[a;b]$, для которого выполняется неравенство

$$m(T_n;\varepsilon;f_n;f) > b - a - \alpha. \tag{7}$$

Обозначим через M_n множество номеров тех отрезков $[x_{nk};x_{n,k+1}]$ разбиения T_n, на каждом из которых выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (сумма длин этих отрезков равна $m(T_n;\varepsilon;f_n;f)$).

Через L_n обозначим множество номеров остальных отрезков разбиения T_n. Тогда, учитывая неравенство (7), интеграл в правой части неравенства (6) можно представить в виде

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx = \sum_{k\in M_n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f_n(x)|dx +$$

$$+\sum_{k\in L_n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon \sum_{k\in M_n} \Delta x_k + (K+C)\alpha < \varepsilon(b-a) + (K+C)\alpha$$

Положив $\alpha = \varepsilon$, получим окончательное неравенство

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| < \varepsilon(b - a + K + C).$$

Ввиду произвольности числа ε и номера n последнее неравенство означает, что справедливо равенство (5). Теорема доказана.

1. Кузьмич В.И. Сходимость возле точки и теоремы типа Арцела-Асколи // Укр.мат.журн.– 1993.– 45, №8.-С. 1090 – 1095.
2. Arzela C. Sulla integrabilita di una serie di funzioni // Rend.Acc. dei Lincei.– 1855.–1, №4.– Р. 321 – 326.
3. Давидов М.О. Додаткові розділи математичного аналізу.– Київ: Вища шк., 1971.– 439 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.–М.: Наука, 1970.– Т.2.– 800 с.

УДК 517.9

В.П. Кушнір

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМИ

(м. Рівне)

Наводяться умови стабілізації всіх розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із загаюваннями.

Приводятся условия стабилизации всех решений линейных параболических дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Бібліогр.: 9 назв.

Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь із загаюваннями вивчена достатньо добре [1 – 9]. Аналогічне питання для рівнянь з частинними похідними вивчено в меншій мірі. Це зумовлено трудношами технічного характеру, висвітленими в роботі [6].

Метою даної статті є вивчення стабілізації розв'язків диференціальних рівнянь параболічного типу з сталими коефіцієнтами із загаюваннями.

Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sum_{k=1}^{m} a_k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t-\tau_k),\ x\in[0,l],\ t\geq 0;\\ &u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t\in[-T,+\infty);\\ &u(x,t) = \varphi(x,t),\ x\in[0,l],\ t\in[-T,0]. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\tau_k \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $T = \max\limits_{1\leq k\leq m} \tau_k$, a_k – сталі коефіцієнти, $k = \overline{0,m}$.