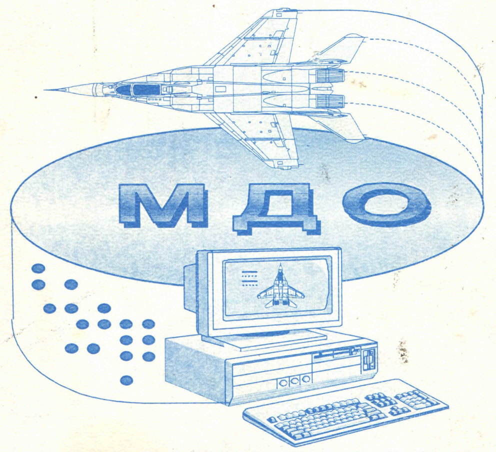
ТРУДЫ

XII

МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА

«Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»



МДОЗМФ-2005

Харьков-Херсон
2005

Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина

ТРУДЫ

XII

МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА

«Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

МДОЗМФ-2005

Харьков-Херсон
2005

УДК 518.12:518.5+519.6+681.3.06+007.5

Праці XII Міжнародного симпозіуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2005). Харків-Херсон. 2005.

Наукова збірка включає праці з математичного моделювання, обчислювальної математики та питань автоматизованих систем проектування, які увійшли у програму симпозіуму МДОЗМФ-2005 (м. Херсон, с. Лазурне, 13-18 червня 2005р). Міжнародні симпозіуми МДОЗМФ відбуваються кожні два роки, починаючи з 1983 р.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Адреса редакційної колегії: 61077, м. Харків, пл. Свободи, 4,
ХНУ ім. В.Н. Каразіна, каф. Математичної фізики та обчислювальної математики, к.6-28
Тел. +38 (057) 707-52-02, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (Протокол №7 від 27.05.05)

ISBN 966-623-211-1

DSMMPh-2005

V. N. Karazin Kharkov National University (Ukraine)

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences (Russia)

N. Y. Zhukovski Air Force Engineering Academy (Russia)

Kherson State University (Ukraine)

Oryol State University (Russia)

N. Y. Zhukovski State Scientific Research Center TsAGI (Russia)

Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Ukraine)

Program committee:

Prof. Y.I. Belyayev (Kherson)
Prof. Yu.V. Gandel (Kharkov)
Prof. S.A. Dovgiy (Kiev)
Prof G.N. Zholtkevich (Kharkov)
Prof. I.K. Lifanov (Moscow)
Prof. A.I. Nosich (Kharkov)
Prof. V.F. Piven (Oryol)
Prof. J.G. Sanikidze (Tbilissi)
Prof. N.Ya. Tikhonenko (Odessa)
Prof. E.E. Tyrtyshnikov (Moscow)

Co-chairmen of the organizational committee:

Professor Belyayev Yuri Ivanovich, rector of Kherson State University, Kherson; **Professor Gandel Yuri Vladimirovich**, V.N.Karazin Kharkov National University, Kharkov; **Professor Lifanov Ivan Kuzmich**, N.Y. Zhukovski Air Force Engineering Academy; Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow; **Professor Piven Vladimir Fedotovich**, Oryol State University, Oryol; **Professor Spivakovsky Alexander Vladimirovich**, Kherson State University, Kherson;

Scientific secretary: – **Assoc. Prof Mishchenko V.O.**, V.N.Karazin KhNU, Kharkov

Organizational committee:

Assoc.Prof. **A. A. Aksyuhin (Russia)**, Prof. **A. C. Ginevsky (Russia)**, Prof. **A. I. Zhelannikov (Russia)**, Assoc.Prof. **V.I. Kuzmich (Ukraine)**, Prof. **V. I. Morozov (Russia)**, Prof. **A. I. Nosich (Украина)**, Prof. **S.L. Prosvirnin (Ukraine)**, Assoc.Prof. **V. N. Seychuk (Moldova)**, Prof. **E.A. Strelnikova (Ukraine)**, Assoc.Prof. **D. I. Cherniy (Ukraine)**, Prof. **N. Ya. Tikhonenko (Ukraine)**

Kherson, Lazurnoe, 13-18 June 2005

http://dsmmph.univer.kharkov.ua

МДОЗМФ-2005

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (Украина)

Институт вычислительной математики РАН (Россия)

Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н. Е. Жуковского (Россия)

Херсонский государственный университет (Украина)

Орловский государственный университет (Россия)

Государственный научно-исследовательский центр ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского (Россия)

Институт гидромеханики НАН Украины (Украина)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

проф. Ю.И. Беляев (Херсон), **проф. Ю.В. Гандель** (Харьков), **чл. кор. НАНУ С. И. Довгий** (Киев), **проф. Г. Н. Жолткевич** (Харьков), **проф. И. К.Лифанов** (Москва), **проф. А. И. Носич** (Харьков), **проф. В. Ф. Пивень** (Орел), **проф. Дж. Г. Саникидзе** (Тбилиси), **проф. Н. Я. Тихоненко** (Одесса), **проф. Е. Е. Тыртышников** (Москва)

СОПРЕДСЕДАТЕЛИ ОРГКОМИТЕТА:

профессор Ю.И.Беляев, ректор ХГУ (Херсон), **профессор Ю.В.Гандель**, ХНУ им.В.Н.Каразина (Харьков), **профессор И.К.Лифанов**, ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, ИВМ РАН (Москва), **профессор В.Ф.Пивень**, ОГУ (Орёл), **профессор А.В.Спиваковский**, ХГУ (Херсон)

Учёный секретарь – **доц. В.О.Мищенко**, ХНУ им. В.Н.Каразина (Харьков)

ЧЛЕНЫ ОРГКОМИТЕТА:

доц. А. А. Аксюхин (Россия), **проф. А.С. Гиневский** (Россия), **проф. А. И. Желанников** (Россия), **доц. В. И. Кузьмич** (Украина), **проф. В. И. Морозов** (Россия), **проф. А. И. Носич** (Украина), **проф. С. Л. Просвирнин** (Украина), **доц. В. Н. Сейчук** (Молдова), **проф. Е. А. Стрельникова** (Украина), **проф. Н. Я. Тихоненко** (Украина), **проф. А. Н. Хомченко** (Украина), **доц. Д. И. Черний** (Украина)

г. Херсон, пос. Лазурное, 13-18 июня 2005

http://dsmmph.univer.kharkov.ua

Труды XII Международного симпозиума
«Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»
(МДОЗМФ-2005)
УДК 517.98 Харьков-Херсон, 2005, с.189-192

Дополнение к теореме Банаха об операторе сжатия

В. И. Кузьмич
Херсонский государственный университет, Украина

In work conditions, sufficient are received that the operator, not being the operator of compression, had a motionless point. In particular, the so-called operator of a stretching for whom there is a return operator of compression is considered.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Известная теорема Банаха о неподвижной точке оператора сжатия [1, с. 605-606] дает достаточное условие для существования и единственности неподвижной точки оператора, отображающего полное метрическое пространство на себя, а также дает метод поиска такой точки – метод последовательных приближений. Это условие имеет вид:

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) \le \alpha_i \rho\big(x';x''\big), \tag{1}$$

где $0 \le \alpha < 1$, а x' и x'' - произвольные точки пространства.

2. Истоки исследования авторов

Операторы сжатия широко используются в теоремах о существовании решений дифференциальных и интегральных уравнений [1, с. 620-629], [2, с. 465-470]. Существуют и другие теоремы о неподвижной точке оператора. Например, известный принцип Шаудера [1, с. 616], или более общая теорема Какутани [1, с. 630]. Эти теоремы не используют условие (1), однако они справедливы лишь на компактных множествах. Если же пространство некомпактно, условие (1) не выполняется, а оператор, как это часто встречается в приложениях, не имеет обратного и даже не является непрерывным, то поиск неподвижной точки сопряжен со значительными трудностями.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Данная работа посвящена получению достаточных условий существования неподвижной точки именно для таких операторов. Полученный результат, на наш взгляд, может дополнить упомянутую выше теорему Банаха.

4. Основная часть

Для получения основного результата докажем вначале два вспомогательных утверждения, которые, впрочем, могут представлять и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть оператор u отображает полное метрическое пространство X на себя. Если для произвольных точек x' и x'' пространства X выполняется неравенство

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) \ge \alpha\rho\big(x';x''\big), \tag{2}$$

где $\alpha > 1$, то оператор u имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить методом последовательных приближений.

Оператор, удовлетворяющий условию (2), логично назвать оператором растяжения.

Лемма 1 несколько расширяет возможности применения теоремы Банаха. Приведем простой пример этого. Рассмотрим матричный оператор $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, который отображает пространство R^2 на себя. Расстояние между точками $x'(x_1';x_2')$ и $x''(x_1'';x_2'')$ этого пространства определим с помощью равенства $\rho(x';x'') = \max\limits_{1\le i\le 2}\{|x_i' - x_i''|\}$.

Условие, достаточное для того, чтобы этот оператор был оператором сжатия, можно записать в виде равенства $\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| \le \alpha < 1$ (i = 1, 2) [3, с. 66]. Однако оператор $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ этому условию не удовлетворяет, поскольку для него имеем: $\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| = 2 > 1$ (i = 1, 2).

С другой стороны, он удовлетворяет условию (2) Леммы 1, и поэтому для него существует обратный оператор $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, который является оператором сжатия, так как справедливо неравенство $\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| = 0{,}5 < 1$ (i = 1, 2).

По этой же лемме оператор А имеет единственную неподвижную точку, поиск которой можно проводить методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки пространства R^2, например, с точки (1;1). Для этого последовательность точек $x_n \in R^2$ будем строить по формуле $x_{n+1} = A^{-1}(x_n)$ (i = 0, 1, …), где $x_0 = (1;1)$. n – кратное применение этой формулы приведет к равенству

$$x_n = (A^{-1})^n(x_0) = (A^n)^{-1}(x_0)\,.$$

Далее имеем:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} (0{,}5)^n & 0 \\ 0 & (0{,}5)^n \end{pmatrix}.$$

Равенство (3) примет вид:

$$x_n = \begin{pmatrix} (0{,}5)^n & 0 \\ 0 & (0{,}5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0{,}5)^n \\ (0{,}5)^n \end{pmatrix}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим неподвижную точку $x = (0;0)$.

На практике нахождение обратного оператора в большинстве случаев связано со значительными трудностями, а в некоторых случаях он может вообще не существовать, поэтому представляет интерес замена исследуемого оператора другим оператором, с той же неподвижной точкой, и для которого обратный оператор либо известен, либо находится достаточно просто. Если такой оператор найден, то неподвижную точку исследуемого оператора можно найти, пользуясь следующим утверждением.

Лемма 2. Пусть операторы u та v отображают полное метрическое пространство X на себя. Кроме того, оператор u имеет неподвижную точку $x^* \in X$ и непрерывен в этой точке.

Если в каждой точке $x \in X$ выполняется равенство

$$\rho\big(u(x);v(x)\big) + \rho(v(x);x) = \rho\big(u(x);x\big), \tag{4}$$

то x^* - неподвижная точка оператора v, и он непрерывен в этой точке.

Лемму 2 можно назвать леммой о непрерывной точке промежуточного оператора, по аналогии с классической теоремой о пределе промежуточной функции.

Простым следствием лемм 1 и 2 является следующий результат.

Теорема. Пусть операторы u и v, отображающие полное метрическое пространство X на себя, удовлетворяют условию (4), а оператор u, кроме того, удовлетворяет условию (2).

Тогда оператор v имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить методом последовательных приближений, как предел последовательности точек $x_{n+1} = u^{-1}(x_n)$ (n=0, 1, 2, …), где x_0 - произвольная точка пространства X.

Приведем простой пример оператора, отображающего R^1 на себя, у которого нет обратного оператора и который не удовлетворяет ни условию (1), ни условию (2):

$$f(x) = \begin{cases} 4^{n+1}, & x \in [2^{2n};2^{2n+1}]; \\ 6x - 2^{2n+3}, & x \in [2^{2n+1};2^{2n+2}]; \\ -4^{n+1}, & x \in [-2^{2n+1};-2^{2n}]; \\ 6x + 2^{2n+3}, & x \in [-2^{2n+2};-2^{2n+1}]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если две различные точки x' и x'' взять из отрезка $[2^{2n};2^{2n+1}]$, то $\rho\big(f(x');f(x'')\big) = \rho\big(4^{n+1};4^{n+1}\big) = 0$, и не выполняется неравенство (2). Если точки x' и x'' взять из отрезка $[2^{2n+1};2^{2n+2}]$, то $\rho\big(f(x');f(x'')\big) = \rho\big(6x' - 2^{n+3};6x'' - 2^{n+3}\big) = 6|x' - x''| = 6\rho(x';x'')$, и не выполняется неравенство (1). Поскольку для всех точек из отрезка $[2^{2n};2^{2n+1}]$ оператор принимает одно и то же значение 4^{n+1}, то обратного оператора для него не существует.

С другой стороны, если точка x принадлежит отрезку $[2^{2n};2^{2n+1}]$, то выполняется равенство (4):

$$\rho\left(4x;4^{n+1}\right)+\rho\left(4^{n+1};x\right)=\left|4x-4^{n+1}\right|+\left|4^{n+1}-x\right|=4x-4^{n+1}+4^{n+1}-x=$$
$$=4x-x=\rho(4x;x).$$

Если точка x принадлежит отрезку $[2^{2n+1};2^{2n+2}]$, то получим:

$$\rho\left(4x;6x-2^{2n+3}\right)+\rho\left(6x-2^{2n+3};x\right)=\left|4x-(6x-2^{2n+3})\right|+\left|(6x-2^{2n+3})-x\right|=$$
$$=4x-(6x-2^{2n+3})+(6x-2^{2n+3})-x=4x-x=\rho(4x;x),$$

и равенство (4) также выполняется. Для отрицательных значений x выполнение равенства (4) проверяется аналогично. Поскольку для оператора $u(x)=4x$ выполняется неравенство (2), то операторы $f(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют всем условиям полученной выше теоремы. Следовательно, оператор $f(x)$ имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить как предел последовательности точек $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n$ $(n=0;1;2;...)$, где x_0 - произвольная точка R^1, например $x_0=1$. Тогда $x_n=\frac{1}{2^n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$. Поэтому $x=0$ - неподвижная точка оператора $f(x)$.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Полученные результаты работы указывают на то, что при поиске неподвижной точки оператора, отображающего полное пространство на себя и не являющегося оператором сжатия, следует искать более простой оператор растяжения, для которого существует обратный оператор сжатия и находить для него методом последовательных приближений неподвижную точку.

В дальнейшем представляет интерес изучить условия существования общей точки нескольких операторов, то есть точки, в которой значения этих операторов совпадают. Это даст возможность упрощать процесс поиска неподвижных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с
3. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 455 с.