ISSN 2076-586X

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

NOSCE SAPIENTIAM

Серія
ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

Випуск № 36 (249)

Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького
Черкаси – 2012

ISSN 2076-586X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

Науковий журнал

Виходить 40 разів на рік

Заснований у березні 1997 року

№ 36 (249). 2012

Черкаси - 2012

Засновник, редакція, видавець і виготовлювач –
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16161-4633ПР від 11.12.2009

Матеріали "Вісника" присвячені проблемам едукаційної роботи у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах. У публікаціях досліджуються різні аспекти розвитку та становлення вищої школи та інших закладів освіти, особливості організації різних форм навчання, розробки нових педагогічних технологій, педагогічні умови ефективності пізнавальної діяльності студентів та школярів, неперервність професійної освіти та ін.

Наукові статті збірника рекомендовані викладачам вищої та загальноосвітньої школи, студентам, магістрантам та аспірантам.

Постановою президії ВАК України від 10.02.2010 р. № 1-05/1 (Бюлетень ВАК України, 2010. – №3) журнал включено до переліку наукових фахових видань зі спеціальності «Педагогічні науки».

Випуск № 36 (249) наукового журналу Вісник Черкаського університету, серія педагогічні науки рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол № 3 від 31.01.2012 року.)

Журнал реферується Українським реферативним журналом «Джерело» (засновники: Інститут проблем реєстрації інформації НАН України та Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського) та Реферативним журналом Всеросійського інституту наукової і технічної інформації РАН (ВІНІТІ РАН).

Адреса редакційної колегії:
18000, Черкаси, бульвар Шевченка, 81,
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького,
кафедра геометрії та МНМ. Тел.(0472) 36-03-21

Одержано редакцією 14.08.2012 р.
Прийнято до публікації 26.08.2012 р

Аннотация. Кондратьева О. М., Нестеренко А. Н. Использование контрольных тестов в обучении высшей математике. *В статье рассмотрены возможности использования тестирования в процессе контроля учебных достижений студентов технических специальностей по высшей математике, даны рекомендации по составлению и целесообразности использования тестовых заданий разных форм.*

Ключевые слова: *методика обучения высшей математике, тесты, студенты технических специальностей.*

Summary. Kondratieva O., Nesterenko A. The usage of tests in teaching higher mathematics. *Employing the tests to control the level of knowledge of higher mathematics of the students of technical specialties is highlighted in the article. The recommendation of compiling and application of different kinds of tests are given.*

Keywords: *methodology of the study of Higher Mathematics, tests, technical students.*

УДК 378.147 **В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич**

АНАЛОГИ ФОРМУЛИ ЮНГІУСА ОБ'ЄМУ ТЕТРАЕДРА

У роботі отримані декілька формул об'єму тетраедра, які є аналогами відомої формули Юнгіуса, а також описано роботу програмного засобу «Калькулятор», за допомогою якого можна обчислювати об'єм тетраедра за довжинами усіх його ребер.

Ключові слова: *піраміда, об'єм, тетраедр, Юнгіус, калькулятор.*

Постановка проблеми. Загальновідомою є умова побудови трикутника за трьома відрізками: якщо довжина кожного з трьох відрізків менша від суми довжин двох інших (нерівність трикутника), то з цих відрізків можна побудувати трикутник, і навпаки, довжина кожної сторони трикутника менша від суми довжин двох інших сторін трикутника.

Іншим аналогом такої умови може слугувати умова існування відмінної від нуля площі трикутника, обчисленої за довжинами трьох його сторін. Цю площу можна обчислити за відомою формулою Герона:

$s = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$, де a, b, c – довжини сторін трикутника.

З цієї формули видно, що для існування відмінної від нуля площі трикутника необхідно і достатньо, щоб кожна з його сторін була менша за суму двох інших.

Для тетраедра (трикутної піраміди) умови його побудови за довжинами усіх його ребер авторам невідомі. В якості однієї з таких умов, на нашу думку, могла б слугувати умова існування відмінного від нуля об'єму тетраедра, ребрами якого є шість заданих відрізків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розглянемо задачу про знаходження об'єму тетраедра, якщо відомі довжини усіх його ребер. Ця задача у загальному випадку була розв'язана німецьким математиком Іоахімом Юнгіусом (Joachim Jungius,1587-1657), і тому встановлена ним відповідна формула об'єму тетраедра носить його ім'я. Авторам невідоме доведення Юнгіуса. Формула Юнгіуса досить просто отримується при використанні змішаного векторного добутку [1, с. 100]. Однак зрозуміло, що Юнгіус при виведенні формули не міг користуватись цим поняттям. Найімовірніше, використовуючи класичну формулу об'єму тетраедра (одна третя добутку площі основи на висоту тетраедра), він слідував міркуванням італійських математиків XV століття, які обчислювали об'єм тетраедра при конкретних числових значеннях довжин ребер [2, с. 6].

Мета статті. У першій частині цієї роботи ми, користуючись лише теоремою Піфагора та теоремою косинусів, отримаємо формули об'єму тетраедра, аналогічні формулі Юнгіуса. У другій частині роботи буде описано роботу програмного засобу «Калькулятор», за допомогою якого можна встановлювати можливість побудови тетраедра за його ребрами та обчислювати його об'єм.

Виклад основного матеріалу. Спочатку нагадаємо деякі допоміжні відомості про трикутник. У трикутнику ABC зі сторонами $BC = a, AC = b, AB = c$ проведемо до сторони AB висоту CT (рис. 1). Площу цього трикутника позначимо s. Нехай крім того $AT = d$ і $\angle BAC = \alpha$.

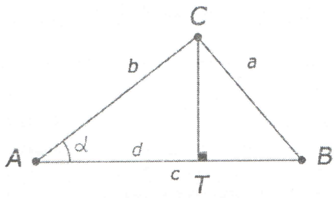

Рис. 1. Довільний трикутник *ABC*.

Із формули площі трикутника $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot CT}{2}$ знаходимо:

$$CT = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2s}{c}. \tag{1}$$

Використовуючи формулу (1) і теорему Піфагора, отримуємо:

$AT^2 = AC^2 - CT^2 = b^2 - \dfrac{4s^2}{c^2} = \dfrac{1}{c^2}(b^2c^2 - 4s^2) = d^2$. Звідки знаходимо:

$$d = \frac{1}{c}\sqrt{b^2c^2 - 4s^2}. \tag{2}$$

Площу трикутника можна знайти також за формулою:

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot AB \sin\alpha}{2}$, або $s = \dfrac{bc \sin\alpha}{2}$, де α – кут між сторонами AC і AB.

Піднісши останню рівність до квадрата і перетворивши її, будемо мати:

$$s^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\alpha = \frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2\alpha).$$

До трикутника ABC застосуємо формулу косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos^2\alpha$.

З цієї рівності знаходимо:

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, або $\cos^2\alpha = \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$. Це значення підставимо у формулу площі трикутника. Тоді дістанемо: $s^2 = \dfrac{1}{4}b^2c^2(1 - \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2})$.

З цієї рівності знаходимо:

$$s^2 = \frac{1}{16}(4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2). \qquad (3)$$

Формулу (3) можна розглядати як модифікацію формули Герона.

З формули (3) маємо: $(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2 - 16s^2$, а добувши квадратний корінь з обох частин цієї рівності, знаходимо:

$$\left|b^2 + c^2 - a^2\right| = 2\sqrt{b^2c^2 - 4s^2}, \qquad (4)$$

або

$$b^2c^2 - 4s^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

Рівність (4) без знаку модуля запишеться у вигляді:

$$b^2 + c^2 - a^2 = \pm 2\sqrt{b^2c^2 - 4s^2},$$

де знак у правій частині рівності буде залежати від величини кута α. За теоремою косинусів маємо: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$. Права частина цієї рівності додатна якщо кут α гострий і від'ємна якщо він тупий. Отже,

$$b^2 + c^2 - a^2 = \begin{cases} 2\sqrt{b^2c^2 - 4s^2}, \text{якщо} 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}; \\ -2\sqrt{b^2c^2 - 4s^2}, \text{якщо} \frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi. \end{cases} \qquad (6)$$

Таким чином, по знаку виразу $b^2 + c^2 - a^2$ можна визначити у якій четверті знаходиться значення кута α: якщо $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$, а якщо $b^2 + c^2 - a^2 \ge 0$, то $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

1. Перейдемо тепер до знаходження об'єму тетраедра. Нехай задано тетраедр $SABC$ (рис. 2), довжини ребер якого позначимо:
$AB = a_1, AS = a_2, AC = a_3, BS = a_4, BC = a_5, CS = a_6$. Введемо позначення для площ граней тетраедра: $S_{\Delta ABS} = s_{12}, S_{\Delta ABC} = s_{13}, S_{\Delta ACS} = s_{23}$. Об'єм тетраедра $SABC$ позначимо через v. Крім того, у тетраедрі проведемо: $SO \perp (ABC)$, $OP \perp AB$, $CT \perp AB$, $OK \perp CT$, і позначимо: $AP = x, OP = y, SO = z$.

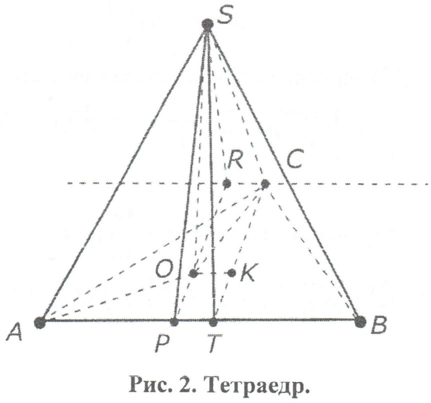

Рис. 2. Тетраедр.

Із побудови маємо: $AP^2 + OP^2 + SO^2 = AS^2$, або

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_2^2. \quad (7)$$

Проведемо $OK \perp CT$, тоді $OC^2 = OK^2 + CK^2$ і, крім того, $OC^2 + SO^2 = CS^2$. Тому

$$OK^2 + CK^2 + SO^2 = CS^2. \quad (8)$$

За побудовою: $CK = |KT \pm CT|$. Знак між доданками у правій частині цієї рівності буде залежати від кута SPO: якщо цей кут гострий, то між доданками буде знак «–», а якщо тупий або прямий, то між доданками буде знак «+».

Піднісши обидві частини рівності до квадрата, будемо мати: $CK^2 = (KT \pm CT)^2$. З трикутника ABC за формулою (1) отримуємо: $CT = \frac{2s_{13}}{a_1}$, а за побудовою $KT = OP = y$, тому

$$CK^2 = \left(y \pm \frac{2s_{13}}{a_1} \right)^2. \quad (9)$$

За побудовою: $OK = PT = |AP \pm AT|$. Знак між доданками у правій частині цієї рівності буде залежати від кутів CAB і SAB: якщо ці кути обидва гострі або обидва тупі (точка A не лежить між точками P і T), то під знаком модуля між доданками буде знак «–», якщо ж один з них гострий а другий тупий (точка A лежить між точками P і T), то між доданками буде знак «+». Іншими словами, якщо вирази $a_1^2 + a_2^2 - a_4^2$ і $a_1^2 + a_3^2 - a_5^2$ мають однаковий знак, що рівносильне нерівності:

$$(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2)(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2) > 0 \quad , \quad (10)$$

то під знаком модуля між доданками буде знак «–», якщо ж вони різні за знаком (або принаймні один з них дорівнює нулю), що рівносильне нерівності:

$$(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2)(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2) \le 0, \quad (11)$$

то між доданками буде знак «+».

Піднісши обидві частини рівності до квадрата, будемо мати:

$$OK^2 = (AP \pm AT)^2.$$

Із трикутника ABC за формулою (2) маємо: $AT = \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2}$. Отже,

$$OK^2 = \left(x \pm \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2} \right)^2. \quad (12)$$

Враховуючи рівності (9) і (12) перепишемо рівність (8) у вигляді:

$$\left(x \pm \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2} \right)^2 + \left(y \pm \frac{2s_{13}}{a_1} \right)^2 + z^2 = a_6^2. \quad (13)$$

Зробимо перетворення:

$x^2 \pm \frac{2x}{a_1}\sqrt{a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2} + \frac{1}{a_1^2}\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right) + y^2 \pm \frac{4s_{13}}{a_1} y + \frac{4s_{13}^2}{a_1^2} + z^2 = a_6^2$, або

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm \frac{2x}{a_1}\sqrt{a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2} + a_3^2 \pm \frac{4s_{13}}{a_1} y = a_6^2. \quad (14)$$

У трикутнику SAB за формулою (2) матимемо:

$$x = \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2}\,. \qquad (15)$$

Врахувавши рівність (7), підставимо знайдене значення x у рівність (14):

$$a_2^2 \pm \frac{2}{a_1^2}\sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right)} + a_3^2 \pm \frac{4s_{13}}{a_1}y = a_6^2, \text{ або}$$

$$\mp\frac{4s_{13}}{a_1}y = a_2^2 + a_3^2 - a_6^2 \pm \frac{2}{a_1^2}\sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right)}. \qquad (16)$$

Із трикутника SAC за формулою (4) маємо:

$$a_2^2 + a_3^2 - a_6^2 = \pm 2\sqrt{a_2^2 a_3^2 - 4s_{23}^2}\,, \qquad (17)$$

де знак правої частини рівності буде залежати від кута SAC. А саме: якщо кут SAC тупий (при цьому виконується нерівність: $a_2^2 + a_3^2 - a_6^2 < 0$), то перед радикалом стоятиме знак «–», а якщо – гострий або прямий (при цьому виконується нерівність: $a_2^2 + a_3^2 - a_6^2 \ge 0$), то перед радикалом стоятиме знак «+».

Отже, рівність (16) набере вигляду:

$$\mp\frac{4s_{13}}{a_1}y = \pm 2\sqrt{a_2^2 a_3^2 - 4s_{23}^2} \pm \frac{2}{a_1^2}\sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right)}. \qquad (18)$$

Піднісши обидві частини цієї рівності до квадрату будемо мати:

$$\frac{4s_{13}^2}{a_1^2}y^2 = \frac{1}{a_1^4}\left(a_1^2\sqrt{a_2^2 a_3^2 - 4s_{23}^2} \pm \sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right)}\right)^2. \qquad (19)$$

Якщо доданки у правій частині рівності (18) будуть мати різні за знаком значення, то між доданками у правій частині рівності (19) буде знак «–», якщо ж ці знаки однакові, то між доданками у правій частині рівності (19) буде знак «+». Врахувавши нерівності (10) і (11), а також зауваження до рівності (17), матимемо, що між доданками у правій частині рівності (19) буде знак «–» якщо буде виконуватись нерівність

$$\left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)\left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right) > 0\,. \qquad (20)$$

Якщо ж буде виконуватись нерівність

$$\left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)\left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right) \le 0\,, \qquad (21)$$

то між доданками у правій частині рівності (19) буде знак «+».

З рівності (19) знаходимо:

$$y^2 = \frac{1}{4a_1^2 s_{13}^2}\left(a_1^2\sqrt{a_2^2 a_3^2 - 4s_{23}^2} \pm \sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4a_1^2 s_{13}^2}\left(a_1^4\left(a_2^2 a_3^2 - 4s_{23}^2\right) + \left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right) \pm\right.$$

$$\left.\pm 2a_1^2\sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2 a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2 a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}\right).$$

Для трикутника ASB, із рівності (1) слідує: $SP^2 = \dfrac{4s_{12}^2}{a_1^2}$, тому, використовуючи попередню рівність, із прямокутного трикутника SOP отримуємо:

$$z^2 = SO^2 = SP^2 - OP^2 = \frac{4s_{12}^2}{a_1^2} - y^2 =$$

$$= \frac{4s_{12}^2}{a_1^2} - \frac{1}{4a_1^2 s_{13}^2}(a_1^4\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right) + \left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right) \pm$$

$$\pm 2a_1^2\sqrt{\left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}) =$$

$$= \frac{1}{4a_1^2 s_{13}^2}(16s_{12}^2s_{13}^2 - a_1^4a_2^2a_3^2 + 4a_1^4s_{23}^2 - a_1^4a_2^2a_3^2 + 4a_1^2a_2^2s_{13}^2 +$$

$$+ 4a_1^2a_3^2s_{12}^2 - 16s_{12}^2s_{13}^2 \pm 2a_1^2\sqrt{\left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}) =$$

$$= \frac{1}{2s_{13}^2}(2\left(a_1^2s_{23}^2 + a_2^2s_{13}^2 + a_3^2s_{12}^2\right) - a_1^2a_2^2a_3^2 \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}).$$

За формулою об'єму піраміди маємо:

$$v^2 = \left(\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO\right)^2 = \frac{1}{9}s_{13}^2z^2.$$

Підставивши у цю рівність знайдене вище значення z^2, отримуємо:

$$v^2 = \frac{1}{18}(2\left(a_1^2s_{23}^2 + a_2^2s_{13}^2 + a_3^2s_{12}^2\right) - a_1^2a_2^2a_3^2 \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}) \qquad (22)$$

За формулою (5) множники під знаком кореня у формулі (22) можна замінити наступним чином.

$$a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_4^2}{2}\right)^2,$$

$$a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2 = \left(\frac{a_1^2 + a_3^2 - a_5^2}{2}\right)^2,$$

$$a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2 = \left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_6^2}{2}\right)^2.$$

Крім того, за формулою (3) знаходимо:

$$s_{12}^2 = \frac{1}{16}\left(4a_1^2a_2^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)^2\right),$$

$$s_{13}^2 = \frac{1}{16}\left(4a_1^2a_3^2 - \left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)^2\right),$$

$$s_{23}^2 = \frac{1}{16}\left(4a_2^2a_3^2 - \left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)^2\right).$$

Підставивши усі знайдені вище значення у формулу (22) матимемо:

$$v^2 = \frac{1}{144}(a_1^2\left(4a_2^2a_3^2 - \left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)^2\right) + a_2^2\left(4a_1^2a_3^2 - \left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)^2\right) +$$

$$+ a_3^2\left(4a_1^2a_2^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)^2\right) - 8a_1^2a_2^2a_3^2 \pm$$

$$\pm\left|\left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)\left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)\right|).$$

Врахувавши тепер зауваження до рівності (19), та використавши нерівності (20) і (21), отримуємо:

$$v^2 = \frac{1}{144}\Big(a_1^2\left(4a_2^2a_3^2 - \left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)^2\right) + a_2^2\left(4a_1^2a_3^2 - \left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)^2\right) +$$
$$+ a_3^2\left(4a_1^2a_2^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)^2\right) - 8a_1^2a_2^2a_3^2 +$$
$$+ \left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)\left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)\Big) \qquad (23)$$

Відповідно, формула (22) набирає вигляду

$$v^2 = \frac{1}{18}\Big(2\left(a_1^2 s_{23}^2 + a_2^2 s_{13}^2 + a_3^2 s_{12}^2\right) - a_1^2a_2^2a_3^2 +$$
$$+ \sqrt{\left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}\Big). \qquad (24)$$

Формулу (24) можна записати у простішому вигляді якщо ввести у розгляд плоскі кути при вершині A тетраедра $SABC$. Позначимо:

$\angle SAB = \alpha_{12}, \angle CAB = \alpha_{13}, \angle SAC = \alpha_{23}$. За формулою косинусів маємо:

$a_1^2 + a_2^2 - a_4^2 = 2a_1a_2\cos\alpha_{12}$, $a_1^2 + a_3^2 - a_5^2 = 2a_1a_3\cos\alpha_{13}$,

$a_2^2 + a_3^2 - a_6^2 = 2a_2a_3\cos\alpha_{23}$.

Підставивши ці значення у формулу (23) отримаємо:

$$v^2 = \frac{1}{144}\Big(a_1^2\left(4a_2^2a_3^2 - \left(2a_2a_3\cos\alpha_{23}\right)^2\right) + a_2^2\left(4a_1^2a_3^2 - \left(2a_1a_3\cos\alpha_{13}\right)^2\right) +$$
$$+ a_3^2\left(4a_1^2a_2^2 - \left(2a_1a_2\cos\alpha_{12}\right)^2\right) - 8a_1^2a_2^2a_3^2 +$$
$$+ \left(2a_1a_2\cos\alpha_{12}\right)\left(2a_1a_3\cos\alpha_{13}\right)\left(2a_2a_3\cos\alpha_{23}\right)\Big) =$$
$$= \frac{1}{144}\Big(4a_1^2a_2^2a_3^2\left(1 - \cos^2\alpha_{23} + 1 - \cos^2\alpha_{13} + 1 - \cos^2\alpha_{12}\right) - 8a_1^2a_2^2a_3^2 +$$
$$+ 8a_1^2a_2^2a_3^2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{13}\cos\alpha_{23}\Big).$$

Або

$$v^2 = \frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{36}\left(1 + 2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{13}\cos\alpha_{23} - \cos^2\alpha_{12} - \cos^2\alpha_{13} - \cos^2\alpha_{23}\right). \qquad (25)$$

З формул (23), (24) і (25), відповідно, знаходимо:

$$v = \frac{1}{12}\sqrt{\begin{aligned}&a_1^2\left(4a_2^2a_3^2 - \left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)^2\right) + a_2^2\left(4a_1^2a_3^2 - \left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)^2\right) +\\ &+ a_3^2\left(4a_1^2a_2^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)^2\right) - 8a_1^2a_2^2a_3^2 +\\ &+ \left(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2\right)\left(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2 - a_6^2\right)\end{aligned}}, \qquad (26)$$

$$v = \sqrt{\begin{aligned}&\frac{1}{18}\Big(2\left(a_1^2 s_{23}^2 + a_2^2 s_{13}^2 + a_3^2 s_{12}^2\right) - a_1^2a_2^2a_3^2 +\\ &+ \sqrt{\left(a_1^2a_2^2 - 4s_{12}^2\right)\left(a_1^2a_3^2 - 4s_{13}^2\right)\left(a_2^2a_3^2 - 4s_{23}^2\right)}\Big)\end{aligned}}, \qquad (27)$$

$$v = \frac{a_1a_2a_3}{6}\sqrt{1 + 2\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{13}\cos\alpha_{23} - \cos^2\alpha_{12} - \cos^2\alpha_{13} - \cos^2\alpha_{23}}. \qquad (28)$$

Формула (26) виражає об'єм тетраедра через довжини усіх його ребер, формула (27) виражає об'єм тетраедра через довжини трьох його ребер, що виходять з однієї вершини, і площі трьох граней, що містять цю вершину, формула (28) виражає об'єм тетраедра через довжини трьох його ребер, що виходять з однієї вершини, і плоскі кути при цій вершині. Формули (26-28) є аналогами формули Юнгіуса.

Формула Юнгіуса об'єму тетраедра за довжинами усіх його ребер (у позначеннях цієї роботи) має вигляд:

$$v^2 = \frac{1}{144}(a_1^2 a_6^2 \left(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_1^2 - a_6^2\right) +$$
$$+ a_2^2 a_5^2 \left(a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_6^2 - a_2^2 - a_5^2\right) + a_3^2 a_4^2 \left(a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_3^2 - a_4^2\right) -$$
$$- a_2^2 a_3^2 a_6^2 - a_1^2 a_3^2 a_5^2 - a_1^2 a_2^2 a_4^2 - a_4^2 a_5^2 a_6^2). \tag{29}$$

Цю формулу можна отримати, виконавши дії у правій частині рівності (23) і звівши після цього подібні члени.

2. Тепер перейдемо до вивчення питання про умови побудови тетраедра за усіма його ребрами. Звичайні обчислення з конкретними числовими даними показують, що для одних і тих же шести відрізків, при певних їх комбінаціях, об'єм тетраедра побудованого із цих відрізків існує, а при інших комбінаціях може не існувати. Причому, для окремих трійок цих відрізків може не виконуватись нерівність трикутника (тобто побудувати з них трикутник неможливо), однак тетраедр може мати у цьому випадку об'єм. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 1$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$, за формулою (26), або за формулою Юнгіуса (29), матимемо: $v = \frac{\sqrt{26}}{12}$. У той же час, $a_2 = 3 > a_1 + a_3 = 2$.

З іншого боку, виконання нерівності трикутника для будь-якої трійки з шести даних відрізків не завжди забезпечує існування об'єму тетраедра побудованого з цих відрізків. Наприклад, при $a_1 + a_3 + a_5 = 1$, $a_2 + a_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ і $a_6 = \frac{1}{2}$ вираз у правій частині рівностей (23) і (29), буде від'ємним: $v^2 = -\frac{13}{144^2}$. У той же час, нерівність трикутника виконується для будь-яких трьох відрізків із шести заданих, оскільки вона виконується для найбільшого за довжиною відрізка a_3 і двох найменших за довжиною відрізків a_2 і a_6. Справді, знаходимо: $a_2 + a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \approx 1{,}07$. З іншого боку, $a_3 = 1$. Отже, $a_2 + a_6 > a_3$.

Крім того, при одному і тому ж наборі відрізків з них можна побудувати тетраедри різного об'єму. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 2$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$ матимемо: $v = \frac{\sqrt{23}}{3}$. Якщо ж навпаки: $a_1 = a_3 = a_5 = 3$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 2$, то $v = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Із наведених прикладів можна зробити висновок, що при заданих довжинах ребер тетраедра його об'єм буде залежати від орієнтації тетраедра.

Для перевірки можливості побудови тетраедра за шістьма заданими відрізками, як за усіма його ребрами, можна використати формули (23) і (29). Для цього потрібно занумерувати відрізки відповідно до зроблених у цій роботі позначень і обчислити праву частину рівності (23) або рівності (29). Якщо праві частини цих рівностей не додатні, то тетраедру такий спосіб занумерованих відрізків побудувати неможливо, якщо ж вони додатні, то тетраедр побудувати можливо. Трудність застосування цього прийому полягає у великій кількості варіантів нумерації відрізків, це кількість перестановок шести елементів – 720. Тому для випадку конкретних числових значень довжин відрізків у пригоді може стати калькулятор, запрограмований на циклічне обчислення правої частини формули (23). Такий калькулятор розроблений авторами і

розміщений на сайті Херсонського державного університету. З роботою цього калькулятора, можна ознайомитись за адресою:
http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645 .

Під час знаходження об'єму тетраедра за допомогою калькулятора виникає похибка обчислень, тому при отриманні результату близького до нуля, потрібно підвищити їх точність.

Для обчислення об'єму тетраедра достатньо ввести на лівій частині робочого поля калькулятора у відповідні поля значення довжин ребер тетраедра: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, потім обрати потрібний набір значень квадрату об'єму (усі значення, додатні, нульові або від'ємні) і активізувати кнопку «розрахунок» (рис. 3). У правій частині робочого поля по закінченні обчислень з'явиться повідомлення «Розрахунок завершено» і будуть наведені усі отримані результати обчислень, із вказівкою про неможливість існування тетраедра у випадку нульового або від'ємного значення квадрата об'єму, а також із вказівкою кількості усіх результатів. При цьому квадрат об'єму тетраедра позначено через $v2$, а сам об'єм через v. У калькуляторі передбачено повідомлення системи про некоректність вводу даних: «Введіть значення an» – у випадку незаповненого поля «an», та «Значення an некоректне (s). Для дробових чисел використовуйте крапку» – у випадку заповнення поля «an» не цифровим значенням «s», або при використанні у запису дробового числа коми.

На рисунку 3 представлено робоче поле калькулятора, за допомогою якого розраховується об'єм тетраедра при усіх можливих перестановках його ребер. Як видно з рисунка, при такому виборі ребер можливі додатні, від'ємні, а також нульові значення квадрату об'єму тетраедра.

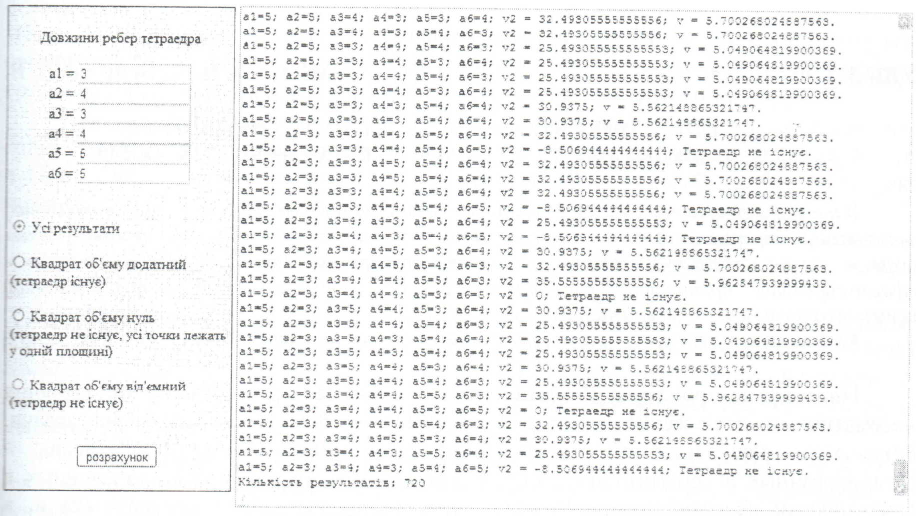

Рис. 3. Робоче поле калькулятора.

Висновки. Із вищенаведеного слідує важливість встановлення орієнтації тетраедра при формулюванні різноманітних стереометричних задач, оскільки неточність у цьому питанні може привести до хибного результату при обчисленнях, або ж до многозначності результату.

У подальшому роботу можна продовжити у напрямі розробки програмного засобу для обчислення об'ємів многогранників, які можна розбити на скінченну кількість тетраедрів. Крім того, слід розробити серію стереометричних задач на обчислення окремих елементів тетраедра з використанням формули Юнгіуса та отриманих у цій роботі її аналогів, оскільки у відповідних збірниках такі задачі фактично відсутні.

Список використаної літератури

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства / Яков Петрович Понарин. – Москва: Московский центр непрерывного математического образования, 2006. – 256 с.
2. Сабитов И. Х. Объёмы многогранников / Иджад Хакович Сабитов. – Москва: Московский центр непрерывного математического образования, 2002. – 32 с.

Одержано редакцією 18.08.2012 р.
Прийнято до публікації 26.08.2012 р

Аннотация. Кузьмич В. И., Кузьмич Ю. В. Аналоги формулы Юнгиуса объёма тетраэдра. *В работе получены несколько формул объёма тетраэдра, которые являются аналогами известной формулы Юнгиуса, а также описано работу программного средства «Калькулятор», с помощью которого можно вычислять объём тетраэдра по длинам его ребер.*

Ключевые слова: *пирамида, объём, тетраэдр, Юнгиус, калькулятор.*

Summary. Kuzmich V., Kuzmich Y. An analog Jungius formula volume of the tetrahedron. *The paper presents several formulas volume of the tetrahedron, which are analogous to the well known formula Jungius, and describes the work of a software tool «Calculator», with which you can calculate the volume of a tetrahedron by the lengths of its edges.*

Keywords: *pyramid, volume, tetrahedron, Jungius, calculator.*

УДК 371.3 : 51

Милушев В. Б., Бойкина Д. В.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В настоящей статье рассматриваются некоторые теоретико-прикладные положения, связанные с конструированием и итоговым использованием дидактически целесообразных систем математических задач. В соответствии с синергетическим подходом сформулированы принципные требования при их конструировании, актуализации и использовании в методической работе.

***Ключевые слова**: структура, система, математическая задача, подход, принцип.*

Постановка проблемы. Известно, что основным средством реализации обучения математике и достижения его целей являются учебные математические задачи. Разумеется, речь идет о задачах, выбранных учителем не произвольно, а организованных в соответствии с определенными идеями и систематизированных в дидактически целесообразные. Поэтому одна из главных задач университета и, в частности, факультета математики и информатики – это профессиональная подготовка будущих учителей математики в заданнм направлении. При этом и математическая, и методическая компетентности должны формироваться и в аспекте составления дидактических систем математических задач.

Для исследования этой деятельности нужно выяснить некоторые теоретико-прикладные положения, связанные с конструированием и эффективным использованием дидактически целесообразных систем математических задач. Эти