ISSN 2076-586X
INDEX COPERNICUS
INTERNATIONAL
ICV 2015: 53.99

NOSCE SAPIENTIAM

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія

ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

№ 11. 2017

Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького
Черкаси – 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Черкаський національний університет
імені Богдана Хмельницького

ISSN 2076-586X

INDEX COPERNICUS
INTERNATIONAL
ICV 2015: 53,99

ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

Виходить 18 разів на рік

Заснований у березні 1997 року

№ 11. 2017

Черкаси – 2017

Засновник, редакція, видавець і виготовлювач –
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
Свідоцтво про державну перереєстрацію КВ №21391-11191Р

Матеріали «Вісника» присвячені проблемам едукаційної роботи у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах. У публікаціях досліджуються різні аспекти розвитку та становлення вищої школи та інших закладів освіти, особливості організації різних форм навчання, розробки нових педагогічних технологій, педагогічні умови ефективності пізнавальної діяльності студентів та школярів, неперервність професійної освіти та ін.

Наукові статті збірника рекомендовані викладачам вищої та загальноосвітньої школи, студентам, магістрантам та аспірантам.

Журнал входить до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук» на підставі Наказу МОН України від 12 травня 2015 р. № 528).

Випуск № 11 наукового журналу Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки» рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол № 2 від 17.10.2017 року).

Журнал індексується в міжнародній наукометричній базі ***Index Copernicus*** *(ICV 2015: 53,99) та реферується Українським реферативним журналом «Джерело» (засновники: Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського), індексується Google Scholar.*

За зміст публікації відповідальність несуть автори.

Адреса редакційної колегії:
18000, Черкаси, бульвар Шевченка, 79,
Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького,
кафедра математики та методики навчання математики. Тел. (0472) 36-03-21
web-сайт:
e-mail: serdyuk_z@ukr.net

Originality. The article suggests tasks that have a professional orientation. They are connected with the transport industry. Tasks contain real statistics. Such and many other professionally oriented statistics are provided by the European Statistical Agency Eurostat. Such data can serve as a basis for constructing many other tasks.

Conclusion. Tasks that contain real statistical data develop students' cognitive interest, as well as their general, professional and statistical culture.

Keywords: *statistical culture, statistical thinking, teaching students.*

Одержано редакцією 19.09.2017 р.
Прийнято до публікації 10.10.2017 р.

УДК 372.851

КУЗЬМИЧ В. І.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету
e-mail: kuzmich121251@ukr.net

ПОБУДОВА ПЛОСКИХ ОБРАЗІВ У ДОВІЛЬНОМУ МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

У роботі раніше введене поняття кута, а також його числової характеристики, для упорядкованої трійки точок довільного метричного простору використовується для введення поняття плоского розміщення точок цього простору. Наведені приклади такого розміщення, а також умови необхідні і достатні для того, щоб довільні чотири точки простору були плоско розміщені. Розглядається поняття суміжності кутів та встановлені умови, необхідні та достатні для цього.

Ключові слова*: метричний простір, кут, пряма лінія, прямолінійний образ, площина, плоский образ.*

Постановка проблеми. При вивченні метричних просторів у курсі математичного аналізу розглядаються класичні простори з встановленою метрикою. Це такі простори як n-вимірний Евклідів простір R_n, простір неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій $C_{[a;b]}$ та інші. При цьому вивченні, як правило, мова про геометричні властивості цих просторів не заходить. Це пояснюється тим, що питання геометризації метричних просторів досить складне і потребує достатньо хорошої математичної підготовки та вивчення спеціальних монографій з даної проблематики. Однак, є можливість вивчати певні геометричні образи у довільних метричних просторах, що є аналогами відповідних ліній, фігур та тіл геометрії Евкліда. Для цього необхідно до поняття «прямолінійного образу», детально вивченого В. Ф. Каганом [1, розділ XIX], додати поняття кута та його числової характеристики, що базуються на понятті віддалі між елементами метричного простору.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [2] введено поняття кута у довільному метричному просторі, як упорядкованої трійки елементів цього простору. У якості числової характеристики кута вибрано значення його косинуса у геометрії Евкліда. Таким чином введені поняття були застосовані до вивчення властивості прямолінійності розміщення елементів метричного простору. У роботі [3] було анонсовано застосування понять кута та його числової характеристики до отримання умов плоского розміщення елементів довільного метричного простору.

Мета статті. Робота має на меті ввести у розгляд аналоги основних геометричних об'єктів та співвідношень між ними, при вивченні властивостей метричних просторів у курсі математичного аналізу. На наш погляд, введення понять прямолінійного та плоского розміщення множин точок дасть можливість певним чином структурувати конкретні метричні простори, побудувати для кожного з них відповідну геометричну структуру. Слід зазначити, що підхід до геометризації метричного простору у даній роботі, не використовує поняття його повноти, а отже, може бути застосованим до скінченої множини точок простору, і не виникає потреби вводити поняття граничного переходу. Відносна простота аналітичних перетворень дає можливість застосування методу навіть у шкільному курсі математики, до основних елементарних функцій. Причому, уже на прикладі лінійних функцій можна встановити неоднозначність поняття прямолінійності, викривлення простору при зміні метрики простору, а отже, на простих прикладах ознайомитись з елементами неевклідової геометрії.

Виклад основного матеріалу. Спочатку, для зручності ознайомлення з наступним матеріалом, ми наведемо основні означення з робіт [2] і [3]. Надалі будемо розглядати довільний простір X з введеною у ньому метрикою ρ. Такий метричний простір будемо позначати (X,ρ). Усі точки простору будемо вважати різними.

Означення 1. *Нехай* a, b і c *– довільні точки метричного простору* (X,ρ). *Упорядковану трійку* (a,b,c) *цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці* b, *і позначати:* $\angle(a,b,c)$. *Пари точок* (a,b) *і* (b,c), *при цьому, будемо називати сторонами кута* (див. [2, с. 28]).

Надалі будемо вважати кути $\angle(a,b,c)$ і $\angle(c,b,a)$ однаковими (одним і тим же кутом).

Означення 2. *Нехай* a, b і c *– довільні точки метричного простору* (X,ρ). *Характеристикою кута* $\angle(a,b,c)$, *або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число* $\varphi(a,b,c)$, *що знаходиться за формулою:*

$$\varphi(a,b,c)=\frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)} \tag{1}$$

(див. [2, с. 29] і [4, с. 36]).

Метричний простір (X,ρ), у якому введено поняття кута за означенням 1, і його характеристику за означенням 2, будемо називати метричним простором з кутовою характеристикою і позначати Π. Кутова характеристика, що визначається за формулою (1), у геометрії Евкліда чисельно дорівнює косинусу кута трикутника, знайденому через довжини його сторін за формулою косинусів.

Означення 3. *Будемо казати, що точки* a, b, c *простору* Π *прямолінійно розміщені, якщо виконується рівність* $\varphi(a,b,c)=\pm1$ (див. [2, с. 29]).

Це означення природне, оскільки при значеннях $\varphi(a,b,c)=\pm1$ з рівності (1) слідує, що одна з трьох точок лежить між двома іншими. Причому, при рівності $\varphi(a,b,c)=-1$, кут $\angle(a,b,c)$ природно назвати розгорнутим.

Означення 4. *Будемо казати, що множина* A *точок простору* Π *прямолінійно розміщена, якщо будь які три точки цієї множини прямолінійно розміщені.*

Фактично, означення 4 є певним перефразуванням відповідного означення «прямолінійного образу», який вивчав В. Ф. Каган, застосовуючи до довільного метричного простору (див. [5, с. 527]).

Незважаючи на те що прямолінійне розміщення точок означається за допомогою класичної формули косинусів, це поняття допускає певну неоднозначність з точки зору геометрії Евкліда. На це вказує наступний приклад.

Приклад 1. Розглянемо простір $C_{[0;1]}$ функцій, неперервних на відрізку $[0;1]$. Якщо віддаль між елементами $f(x)$ та $g(x)$ простору встановити за правилом:

$\rho(f,g)=\max_{x\in[0;1]}|f(x)-g(x)|$, то він стає метричним [6, с. 43]. У цьому просторі візьмемо чотири елементи: $y_1=x+1$, $y_2=x$, $y_3=x-2$, $y_4=-x$.

Знайдемо віддалі між цими елементами:

$$\rho(y_1,y_2)=1,\ \rho(y_1,y_3)=3,\ \rho(y_1,y_4)=3,\ \rho(y_2,y_3)=2,\ \rho(y_2,y_4)=2,\ \rho(y_3,y_4)=2.$$

За формулою (1) знайдемо кутові характеристики:

$$\varphi(y_1,y_2,y_3)=-1,\ \varphi(y_1,y_2,y_4)=-1,\ \varphi(y_3,y_2,y_4)=0{,}5.$$

З першої рівності, за означенням 3, слідує, що точки y_1,y_2,y_3 розміщені прямолінійно, а друга рівність вказує що і точки y_1,y_2,y_4 теж прямолінійно розміщені. У геометрії Евкліда це означає, що усі чотири точки прямолінійно розміщені, причому (враховуючи віддалі між точками) точки y_3 і y_4 співпадають. Дійсно, перший постулат геометрії Евкліда прямо не вказує на те, що через дві точки можна провести єдину пряму [7, с. 44], хоча єдиність такої прямої мається на увазі: «Від будь-якої точки до будь-якої точки можна провести пряму лінію» [8, с. 14]. У системі аксіом Гільберта цей факт неявно сформульовано у аксіомі: «Дві різні точки завжди визначають пряму» [9, с. 3]. Однак, третя із отриманих кутових характеристик вказує на те, що точки y_2, y_3 і y_4 не прямолінійно розміщені. Більше того, ці точки утворюють « рівносторонній трикутник « у якого довжини усіх сторін дорівнюють 2.

Приклад 1 вказує на те, що конкретна метрика простору впливає на його геометрію, і може спричинити певну кривизну цього простору.

Далі нам потрібне буде поняття «плоского розміщення» чотирьох точок метричного простору. Природно взяти за критерій такого розміщення рівність нулю об'єму тетраедра, вершинами якого є ці точки.

Якщо через a_1,a_2,a_3 позначити довжини трьох ребер тетраедра, що виходять з однієї вершини, а через $\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{23}$ відповідні плоскі кути між ними, то формула об'єму тетраедра матиме вигляд [10, с. 61]:

$$V=\frac{a_1a_2a_3}{6}\sqrt{1+2\cos\gamma_{12}\cos\gamma_{13}\cos\gamma_{23}-\cos^2\gamma_{12}-\cos^2\gamma_{13}-\cos^2\gamma_{23}}\,.$$

Отже, умова рівності нулю об'єму тетраедра матиме вигляд:

$$1+2\cos\gamma_{12}\cos\gamma_{13}\cos\gamma_{23}-\cos^2\gamma_{12}-\cos^2\gamma_{13}-\cos^2\gamma_{23}=0.$$

Використовуючи визначник третього порядку, цю рівність можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{vmatrix}1 & \cos\gamma_{12} & \cos\gamma_{13}\\ \cos\gamma_{12} & 1 & \cos\gamma_{23}\\ \cos\gamma_{13} & \cos\gamma_{23} & 1\end{vmatrix}=0.$$

Отриману рівність тепер можна використати для означення плоского розміщення точок метричного простору.

Означення 5. *Будемо казати, що точки a, b, c, d простору* Π *плоско розміщені, якщо виконується рівність:*

$$\begin{vmatrix}1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d)\\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d)\\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1\end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

(див. [3, с. 11-12]).

Для точок довільної підмножини простору П природно дати наступне означення «плоскої розміщеності».

Означення 6. *Будемо казати, що множина А точок простору* П *плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені* (див. [3, с. 12]).

Повернувшись до прикладу 1, позначимо точки простору: $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$, $y_4 = d$, і підставимо у рівність (2) відповідні значення кутових характеристик: $\varphi(a,b,c) = -1$, $\varphi(a,b,d) = -1$, $\varphi(c,b,d) = 0,5$. Будемо мати:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0,5 \\ -1 & 0,5 & 1 \end{vmatrix} = -0,5 \neq 0 .$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то за означенням 5 точки a, b, c, d не є плоско розміщеними. Цей факт додатково пояснює неоднозначність прямолінійного розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 у прикладі.

Слід очікувати, що прямолінійно розміщені точки будуть також і плоско розміщеними.

Лема 1. *Якщо точки a, b, c, d простору* П *прямолінійно розміщені, то вони плоско розміщені.*

Доведення. Без втрат для загальності будемо вважати, що точки розміщені у тому ж порядку що і записані, тобто, точка b знаходиться між точками a і c, а точка c знаходиться між точками b і d. У цьому випадку кутові характеристики будуть: $\varphi(a,b,c) = -1$, $\varphi(a,b,d) = -1$, $\varphi(c,b,d) = 1$. Підставивши ці значення у рівність (2) отримаємо рівність:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отже, за означенням 6, точки a, b, c, d плоско розміщені. Лема доведена.

Спочатку встановимо критерій плоскої розміщеності чотирьох точок простору П у випадку, коли три з них прямолінійно розміщені.

Лема 2. *Нехай точки a, b, c простору* П *прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим.*

Для того, щоб точки a, b, c, d цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$.

Доведення. Припустимо, що точки a, b, c, d плоско розміщені. Оскільки, за умовою, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим, то виконується рівність $\varphi(a,b,c) = -1$. Із умови (2) плоскої розміщеності точок a, b, c, d отримуємо рівність:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \varphi(c,b,d) \\ -1 & 1 & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(c,b,d) & \varphi(a,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$1 - 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0 .$$

З цієї рівності отримуємо:

$$(\varphi(a,b,d) + \varphi(c,b,d))^2 = 0 \text{, або } \varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d) .$$

Нехай тепер навпаки, виконується рівність $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$. Підставимо значення кутових характеристик відповідних кутів у ліву частину формули (2). Матимемо:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -\varphi(c,b,d) \\ -1 & 1 & \varphi(c,b,d) \\ -\varphi(c,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \varphi^2(c,b,d) + \varphi^2(c,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

За означенням 5 точки a, b, c, d плоско розміщені. Лема доведена.

Зауважимо, що лема справедлива також і у випадку, коли усі чотири точки розміщені прямолінійно, оскільки у цьому випадку теж виконується рівність, наведена у формулюванні леми. Тобто, лема 2 узагальнює результат леми 1.

Із рівності (2) можна отримати критерій плоского розміщення чотирьох точок метричного простору дещо у іншому вигляді ніж у означенні 6.

Теорема 1. *Для того щоб точки a, b, c, d простору* П *були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a,b,c) = \varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d))}. \qquad (3)$$

Доведення. Перевіримо виконання рівності (2) при виконанні умови теореми. Для цього розкриємо визначник у лівій частині рівності і підставимо у отриманий вираз рівність (3). Будемо мати:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,c) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) =$$

$$= 1 + 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)(\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d)(1-\varphi^2(c,b,d)))}) -$$

$$-(\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d)(1-\varphi^2(c,b,d)))})^2 - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) =$$

$$= 1 + \varphi^2(a,b,d)\varphi^2(c,b,d) - (1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d)) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) = 0.$$

Оскільки рівність (2) виконується, то точки a, b, c, d плоско розміщені.

Тепер припустимо, що точки a, b, c, d плоско розміщені у просторі П. Тоді (наприклад, для точки b) повинна виконуватись рівність (2). Розкривши визначник у її лівій частині, отримуємо рівність:

$$1 + 2\varphi(a,b,c)\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) - \varphi^2(a,b,c) - \varphi^2(a,b,d) - \varphi^2(c,b,d) = 0,$$

або

$$\varphi^2(a,b,c) - 2\varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d)\varphi(a,b,c) + \varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) - 1 = 0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння відносно $\varphi(a,b,c)$, отримуємо рівність (3). Теорема доведена.

Лема 2 є частинним випадком теореми 1. Дійсно, за умовами леми 2 маємо: $\varphi(a,b,c) = -1$, $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,d,d)$. Легко бачити, що ці значення перетворюють рівність (3) в тотожність.

У геометрії Евкліда рівність (3) має просте геометричне тлумачення: одна із вершин тетраедра знаходиться у площині основи, що утворена трьома іншими його вершинами. У цьому легко впевнитись помітивши, що рівність (3) є аналогом формул косинуса суми або різниці двох кутів.

Висновки. Аналоги основних геометричних об'єктів та понять можна розглядати і у довільних метричних просторах. При цьому поняття повноти простору можна не використовувати. Це дещо звужує область застосування цих аналогів, однак стає можливим застосування понять прямолінійного та плоского розміщення для скінченої кількості точок простору. Таким способом можна вводити елементи теорії метричних просторів навіть до шкільного курсу математики. Подальші дослідження слід, на нашу думку, продовжити у напрямку встановлення для точок метричного простору понять аналогічних класичним поняттям паралельності та перпендикулярності, а також вивченню співвідношень між ними.

Список використаної літератури

1. Каган В. Ф. Основания геометрии. Часть 2 / В. Ф. Каган – М.-Л.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.
2. Кузьмич В. І. Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору. – Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. № 13, 2016. – С. 26-32.
3. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі [Електронний ресурс] // Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts. – May 31-June 5, 2017, Odessa, Ukraine. – С. 11-12. – Режим доступу : https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf
4. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей / А.Д. Александров – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 388 с.
5. Каган В. Ф. Очерки по геометрии / В. Ф. Каган – М.: Издательство Московского университета, 1963. – 571 с.
6. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А. М. Колмогоров, С. В. Фомін. – Київ: Вища школа, 1974. – 455 с.
7. Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 1 / В.Ф. Каган – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 492 с.
8. Начала Евклида. Книги I-VI / [Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовский]. – М.-Л: Гостехиздат, 1948. – 447 с.
9. Давид Гильберт. Основания геометрии / Давид Гильберт – Петроград: Сеятель, 1923. – 152 с.
10. Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра. / В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2012. – № 36(249). – С. 55-64.

References

1. Kahan V. F. (1956). *Foundations of geometry. Part 2.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
2. Kuz'mich V. I. (2016). The concept of angle in the study of the properties of a metric space. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky (Bulletin of Cherkassy University. Series: pedagogical sciences), 13, 26-32* (in Ukr.)
3. Kuz'mich V. I. (2017). Angular characteristic in metric space. *Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts. – May 31-June 5, 2017, Odessa, Ukraine, 11-12.* Retrieved from: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf (in Ukr.)
4. Aleksandrov A.D. (1948). *Intrinsic geometry of convex surfaces.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
5. Kahan V. F. (1963). *Essays on geometry.* M.: Moscow University (in Russ.)
6. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. (1974). *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Kiev: Vishha shkola (in Ukr.)
7. Kahan V.F. (1949). *Foundations of geometry. Part 1.* M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
8. *Euclid's Elements. Books I-VI.* (1948). In D.D. Mordukhai-Boltovskii (Ed.). M.-L.: Hostehizdat (in Russ.)
9. David Hilbert (1923). *Foundations of geometry.* Petrohrad: Seiatel (in Russ.)
10. Kuz'mich V. I., Kuz'mich Yu. V. (2012). Analogs of formula Jungius volume tetrahedron. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky (Bulletin of Cherkassy University. Series: pedagogical sciences), 36(249),* 55-64 (in Ukr.)

KUZ'MICH V.,

Doctor of Philosophy (Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor of Algebra, Geometry and Calculus Department, SIHE «Kherson State University»

CONSTRUCTION OF FLAT IMAGES IN AN ARBITRARY METRIC SPACE.

Abstract. Introduction. *In an arbitrary metric space, the basic geometric objects - a straight line, an angle, a plane, are considered subject to the completeness of this space. Usually, these objects in metric space are considered as continuous mappings of the corresponding classical Euclidean geometry objects. If we use only some of the properties of these objects, then we can consider the*

corresponding images in space, without the requirement of its completeness. In determining the images of objects, one should use only the concept of the metric of space, without involving the passage to the limit.

Purpose. *The aim of the paper is to define a flat image for a set of points of an arbitrary metric space, without using the completeness property of this space. The aim, too, is to study the relationship between the straight-line arrangement and the flat arrangement of points in space.*

Results. *In work the following concepts are used.*

Let a, b, c *– arbitrary points of metric space* (X, ρ). *An ordered triple of these points* (a,b,c) *will be called an angle with a vertex at the* b *point, and denote* $\angle(a,b,c)$. *The angular characteristic of the angle* $\angle(a,b,c)$ *will be called the real number, which is represented by the formula:* $\varphi(a,b,c) = \dfrac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)}$.

The metric space, in which the notion of the angle and its characteristics are introduced, will be denoted Π. *We will say that the points* a, b, c *are straight-line arrangement in the space* Π, *if equality* $\varphi(a,b,c) = \pm 1$ *is performed. If equality* $\varphi(a,b,c) = -1$ *is performed, then the angle is deployed. A plurality of points of space will be called in a straight-line arrangement or straight-line image if any three points of this set are straight-line arrangement.*

We will say that the four points a, b, c, d *space* Π *are flat arrangement, if equality*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ is performed.}$$

We will say that the set of points of space is flat arrangement, if any four points of this set are flat arrangement.

The following main results are obtained.

Lemma 1. If the points a, b, c *are straight-line arrangement in the space* Π, *they are flat arrangement.*

Lemma 2. Let the points a, b, c *are straight-line arrangement in the space* Π, *and, the angle* $\angle(a,b,c)$ *is deployed.*

In order for the points a, b, c, d *of this space to be flat arrangement, it is necessary and sufficient that equality* $\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d)$ *be fulfilled.*

Theorem 1. In order for the points a, b, c, d *the space* Π *to be flat arrangement, it is necessary and sufficient that equality*

$$\varphi(a,b,c) = \varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d))} \text{ be fulfilled.}$$

Originality. *In this paper the concept of a flat arrangement of points of an arbitrary metric space is introduced for the first time. Necessary and sufficient conditions for such placement for four different points of space are obtained.*

Conclusion. *The flat arrangement of points possesses the basic properties of the classical plane. The concept of a flat allocation of points of a metric space can be used to construct geometric images of classical geometric figures. The work should be continued in the direction of obtaining conditions of perpendicularity and parallelism of the sets of points of an arbitrary metric space.*

Keywords: *metric space, angle, straight line, straight-line image, plane, flat image.*

Одержано редакцією 21.09.2017 р.
Прийнято до публікації 10.10.2017 р.

ЗМІСТ

CONTENTS