МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ОСНОВИ РОБОТИ З СИСТЕМОЮ СИМВОЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ
MATHCAD 2001
ПРАКТИКУМ

Для студентів денної та заочної форми навчання
для спеціальностей

7.130301 “Водні біоресурси та аквакультура“
7.070800 “Екологія та охорона навколишнього середовища“
7.130201 “Зооінженерія“
7.092602 “Гідромеліорація“ та
7.092102 “Промислове та цивільне будівництво“

Херсон – 2005

Методичні вказівки призначені для самостійного освоєння роботи із сучасним математичним пакетом Mathcad 2001, що входить у програму курсу інформаційні технології. Пропонований посібник дозволить не тільки освоїти основні операції пакета Mathcad, але і познайомить з основними методами математичного аналізу. Його можна розглядати як вступний курс перед вивченням методів оптимізації і статистичної обробки даних.

Методичні вказівки до проведення практичних занять з дисципліни
______________ Інформаційні технології ______________

Рецензент ______________________________

Затверджено на засіданні кафедри
____________ Інформаційних технологій ______________

Зав. кафедрою __________________ _______ Морозов В.В.

Схвалено методичною радою факультету ____ БГМФ ____ протокол № ____
_____ від ______________________________

Укладачі:

к.с.-г.н., доцент кафедр інформаційних технологій та вищої математики Степаненко Н.В.

к.т.н., доцент кафедри оперативно-розшукової діяльності та спеціальної техніки Херсонського юридичного інституту Національного університету внутрішніх справ Шерман М.І.

к.ф.-м.н., доцент кафедр інформаційних технологій та вищої математики Плоткін С.Я.

ЗМІСТ

Вступ

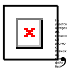
Mathcad є математичним редактором, що дозволяє проводити різноманітні наукові й інженерні розрахунки, починаючи від елементарної арифметики і закінчуючи складними реалізаціями чисельних методів. Користувачі Mathcad – це студенти, учені, інженери, різноманітні фахівці. Завдяки простоті застосування, наочності математичних дій, великій бібліотеці вбудованих функцій і чисельних методів, можливості символьних обчислень, а також чудовому апаратові представлення результатів (графіки самих різних типів, могутніх засобів підготовки друкованих документів і Web-сторінок), Mathcad став найбільш популярним математичним додатком.

Mathcad 2001, на відміну від більшості інших сучасних математичних додатків, побудований відповідно до принципу WYSIWYG ("What You See Is What You Get" – "що Ви бачите, те й одержите"). Тому він дуже простий у використанні, зокрема, через відсутність необхідності спочатку писати програму, що реалізує ті або інші математичні розрахунки, а потім запускати її на виконання. Замість цього досить просто вводити математичні вирази за допомогою вбудованого редактора формул, причому у виді, максимально наближеному до загальноприйнятого, і відразу одержувати результат. Крім того, можна виготовити на принтері друковану копію документа або створити сторінку в Інтернету саме в тім виді, що цей документ має на екрані комп'ютера при роботі з Mathcad.

Творці Mathcad зробили все можливе, щоб користувач, що не володіє спеціальними знаннями в програмуванні (а таких більшість серед вчених і інженерів), міг повною мірою прилучитися до досягнень сучасної обчислювальної науки і комп'ютерних технологій. Для ефективної роботи з редактором Mathcad досить базових навичок користувача. З іншого боку, професійні програмісти (до яких відносить себе й автор цих рядків) можуть витягти з Mathcad набагато більше, створюючи різні програмні рішення, істотно розширювальні можливості, безпосередньо закладені в Mathcad.

Заняття 1. Використання Mathcad як суперкалькулятора

<u>Приклад 1.</u>

Для набору виразу використовуємо звичну математичну нотацію: 1/ $\sqrt{2}$ =. Знак квадратного коріння ми знайдемо, розкривши арифметичну панель , в кінці виразу поставимо знак рівності "=" $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

<u>Приклад 2.</u>

Можна привласнити значення змінним:

$$a := 1 \qquad b := 2.35 \qquad p := \pi$$

Введення закінчується клавішею Enter або клацанням миші поза визначенням. Тут ми позначили змінні літерами: *a, b, p*; але можна використовувати довільний набір символів для позначення змінних. Імена змінних чутливі до регістра. Спочатку вводиться ім'я змінної, потім символ ":" (або знак =), потім число або вираз (зокрема, ми використовували приречену константу π з арифметичної панелі, Ctrl p). Синій куточок показує поточний операнд виразу, він може бути розширений клавішею "Пропуск". Зверніть увагу, що як роздільник цілої і дробової частини числа використовується крапка. Тепер цими змінними можна користуватися при арифметичних обчисленнях. **:=** це оператор привласнення, **=** це команда "Обчислити". $x := 1 \quad arctg(x) := atan(x)$

$$\frac{a+b}{2} = 1.675 \qquad c := \frac{a-b}{2} \qquad d := sin\left(\frac{p}{2}\right) \qquad c = -0.675 \qquad d = 1$$

Зараз видно різницю у використанні оператора привласнення ":" і знаку "=".

<u>Приклад 3</u>**.**

Обчисліть для кожного значення x=1,5,7 наступні функції:

$$y := \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}} \qquad y := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad y := \frac{arctg(x)^2}{2}$$

Необхідно користуватися арифметичною панеллю і кнопкою "Вставити функцію" і копіювати формули, використовуючи кнопки панелі інструментів.

Правило видимості: *значення змінної доступно правіше і нижче за її визначення.*

Глобальні змінні доступні скрізь на робочому листі і вводяться знаком ~, наприклад, введемо N~100, одержимо: $N \equiv 100$

Якщо Ви хочете змінити кількість знаків результату обчислень після десяткової крапки, це можна зробити в меню Format\Number...\Displayed Precision (3) або просто двічі клацнути мишкою по виразу, після чого, замінити 3 на 6. Встановимо, наприклад, для значення виразу 6 значущих цифр: $\frac{a}{b} = 0.425532$

Для введення текстового коментарю необхідно ввести знак подвійної лапки ", потім вводити текст. Досягши кінця рядка відбувається автоматичне перенесення на наступну. Текстова область, як і будь-яка інша, може бути переміщена на робочому листі або скопійована в буфер. Маркери текстової області дозволяють міняти її розміри.

Матричні операції

Змінній може бути привласнене значення матриці (вектор-стовпець - це матриця з одним стовпцем). Для цього використовуємо панель векторів і матриць.

Наприклад, змінна A - є матриця розміром 3*3, а змінна B - вектор-стовпець розміром 3*1. $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

З матрицями можна виконувати всі допустимі операції: обчислити зворотну матрицю, перемножити матриці, скласти і відняти. Можна також транспонувати матрицю, зробити вибірку елементів.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.949 & -0.256 & -0.051 \\ 0.026 & 0.128 & 0.026 \\ 0.179 & -0.103 & 0.179 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B^T = (1\ \ 2\ \ 3)$$

Зворотну матрицю одержимо просто, вказавши -1 ступінь, а операцію транспонування вибираємо з панелі векторів і матриць. Можна вирішити систему рівнянь матричним способом, в нашому випадку:

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 0.282 \\ 0.359 \\ 0.513 \end{pmatrix}$$

<u>Приклад 4.</u>

Вирішити матричним способом декілька систем лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ -x + 3 \cdot y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 2 \cdot y + z &= 0 \\ 2 \cdot x + y - 3 \cdot z &= 1 \\ -x + y + 5 \cdot z &= 1 \end{aligned}$$

Знак рівності тут вводиться за допомогою (Ctrl =) або панелі логічних операцій.

Скористайтеся вбудованою системою допомоги, а також повчальною системою.

Доступ до елементу матриці проводится по індексу, що відлічується від 0. Вектор-стовпець має один індекс, який вводиться за допомогою символу лівої квадратної дужки - [. Наприклад, рішення розглянутої вище задачі можна вивести так:

$X_0 = 0.282 \qquad X_1 = 0.359 \qquad X_2 = 0.513$ Вводиться X[0= X[1= X[2=.

Двовимірний масив має вже два індекси, також відлічувані від 0, перший з них нумерує рядки, другий - стовпці. Так, для матриці , це виглядатиме:

$A_{0,0} = 1 \qquad A_{0,2} = 0 \qquad A_{2,2} = 5 \qquad A_{2,0} = -1$ Вводимо A[0,0= A[0,2= A[2,2= A[2,0=.

Індекси розділяються комами.

Можна вибрати один стовпець двовимірного масиву, вводячи верхній індекс командою Ctrl+6 або кнопкою панелі векторів і матриць, наприклад, виберемо перший рядок матриці : $A^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

Якщо її транспонувати,

$A^{\langle 0\rangle T} = (1 \;\; 0 \;\; -1)$, тоді $\left(A^{\langle 0\rangle T}\right)_{0,0} = 1$ $\left(A^{\langle 0\rangle T}\right)_{0,1} = 0$ $\left(A^{\langle 0\rangle T}\right)_{0,2} = -1$

Можна обчислити визначника матриці (Ctrl |): $|A| = 39$

Обчислити скалярний (Shift 8) і векторний (Ctrl 8) добуток :

$$\left(A^{-1^T}\right)^{\langle 0\rangle} \cdot B = 0.282 \qquad B \cdot B = 14$$

Скалярний добуток:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Векторний добуток:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Можна обчислити суму елементів вектора, наприклад: $\sum B = 6$

Є ще цікава можливість: за допомогою операції векторизації проводити поелементні обчислення над матрицями (вводиться комбінацією клавіш Ctrl - або кнопкою панелі Vector and Matrix). При її використанні операції проводять над кожним елементом вектора незалежно, так наприклад:

$$\overrightarrow{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Або інший приклад: $a := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $c := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Корені квадратного рівняння для трьох наборів початкових даних:

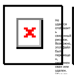
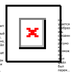
$$\overrightarrow{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} = \begin{pmatrix} 0.618 \\ -1 \\ 0.387 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} = \begin{pmatrix} -1.618 \\ 0.5 \\ -1.721 \end{pmatrix}$$

Заняття 2. Табуляція функцій і побудова графіків

Побудувати таблицю значень функції можна двома способами:

1. Задати інтервал зміни аргументу у форматі *x:= початкове значення [, початкове значення + шаг]..кінцеве значення* в дужках вказаний необов'язковий параметр, якщо його немає, крок, за умовчанням, рівний 1. Після чого можна визначити функцію від цього аргументу, наприклад:

$$x := 0, 0.1 .. \frac{\pi}{2} \qquad f(x) := x \cdot sin(2 \cdot x)^2$$

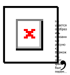
Двокрапка ".." вводиться символом крапка з комою ";" або кнопкою арифметичної панелі  

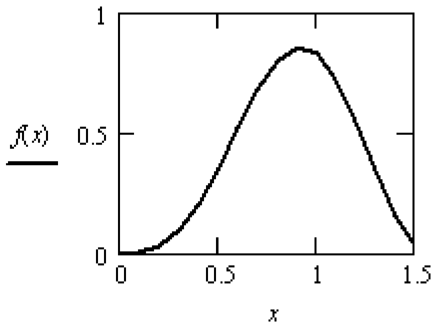
Для того, щоб вивести таблицю значень функції, введіть *f(x)* і знак "=",

$f(x) =$

0
$3.947 \cdot 10^{-3}$
0.03
0.096
0.206
0.354
0.521
0.68
0.799
0.854
0.827
0.719
0.548
0.345
0.157
0.03

ви набудете перші 50 значень функції.

Тепер можна побудувати графік. Скористаємося графічною панеллю , розкривши яку виберемо x-y графік.

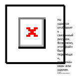


У позиції маркера осі x вкажемо змінну x, у позиції маркера осі y вкажемо функцію f(x). Більше можна нічого не вводити, просто клацнути мишкою поза графіком. Графік буде побудований. Можна також явно вказати межі зміни змінної і функції.

Подвійним клацанням мишкою по графіку викликає меню настройки, де можна змінити багато його характеристик. Одночасно можна побудувати до16 кривих із загальним аргументом, указуючи функції через кому. Можна і аргументи указувати через кому.

2. Визначити зміну цілого індексу і побудувати таблицю значень функції у вигляді вектор-стовпця. Зокрема, для попередньої задачі:

$i := 0..15$ $\quad x_i := \frac{i}{10}$ $\quad y_i := x_i \cdot sin(2 \cdot x_i)^2$

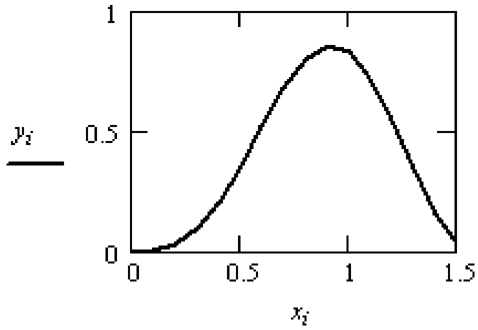


$y =$

	0
0	0
1	$3.947 \cdot 10^{-3}$
2	0.03
3	0.096
4	0.206
5	0.354
6	0.521
7	0.68
8	0.799
9	0.854
10	0.827
11	0.719
12	0.548
13	0.345
14	0.157
15	0.03

Змінна з індексом вводиться так: x[i виходить x_i

Це важливо знати! У Mathcad прийнято, що індекс масиву відлічується від 1. Початковий індекс визначається системній змінній ORIGIN=1.



Доступ до елементів масиву відбувається за індексом, наприклад:

$$y_0 = 0 \qquad y_1 = 3.947 \times 10^{-3} \qquad y_2 = 0.03$$

Вибір способу побудови функції, взагалі кажучи, не такий важливий, проте при обчисленні значення функції як елементу масиву спрощується процедура звернення до його окремих значень.

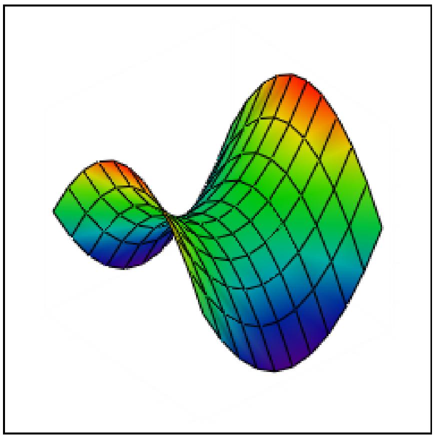
Для двовимірного масиву звернення будується так: M[i,j а виходить $M_{i,\,j}$

Двовимірний масив відповідає значенню функції двох змінних, наприклад:

$$f(x,y) := x^2 - y^2 \qquad i := 0..10 \qquad j := 0..10 \qquad x_i := -5 + i \qquad y_j := -5 + j$$

Визначимо двовимірну матрицю: $M_{i,\,j} := f(x_i, y_j)$

і побудуємо поверхню.



M

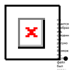
M =

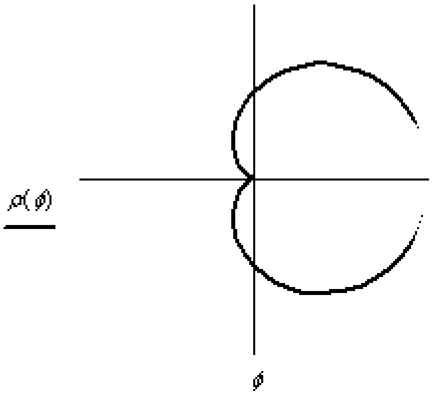
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9
1	-9	0	7	12	15	16	15	12	7	0
2	-16	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7
3	-21	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12
4	-24	-15	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15
5	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16
6	-24	-15	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15
7	-21	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12
8	-16	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7
9	-9	0	7	12	15	16	15	12	7	0
10	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9

Як єдиний аргумент графіка вказуємо ім'я матриці M.

Побудуємо полярний графік, вибравши як крива, наприклад кардіоїду.

$$\phi := 0, 0.1 .. 2 \cdot \pi \qquad \rho(\phi) := 1 + \cos(\phi)$$

Для введення ϕ, ρ , використовуємо панель грецьких символів .



<u>Побудуйте самостійно графіки функцій:</u>

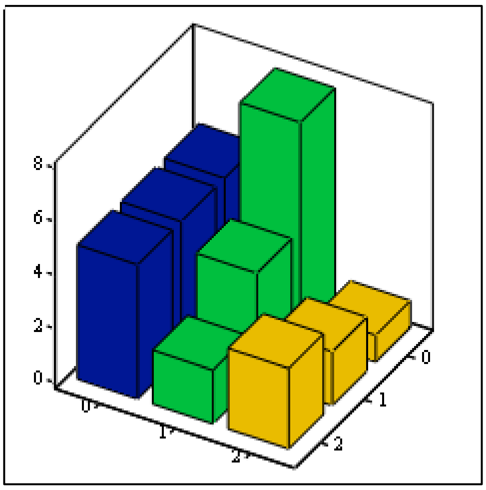
1. $\rho(\phi) := a \cdot cos(\phi) \cdot sin(\phi)$

2. $\rho(\phi) := a \cdot \phi$

3. $\rho(\phi) := a \cdot e^{\phi}$

Для побудови стовпчикової діаграми необхідно задати матрицю значень

$$D := \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



D

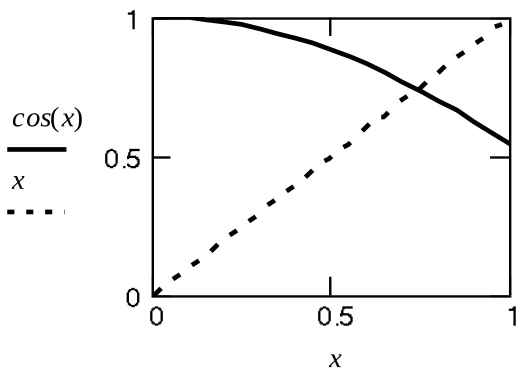
Як видно з графіка, кожна колонка матриці створює ряд значень.

Побудуйте стовпчикові діаграми для довільного набору чисел, наприклад: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$

Заняття 3. Чисельні методи рішення рівнянь

1. Простий спосіб знайти корені рівняння з одним невідомим забезпечить функція root. Наприклад, необхідно знайти корені трансцендентного рівняння $x = cos(x)$. Задамо початкове значення , рішення дається функцією $root(x - cos(x), x) = 0.74$ Точність обчислень задається системною змінною TOL, що дорівнює за умовчанням 10^{-3} і визначається в меню Math\Options. Проілюструємо одержане рішення.

$TOL := 10^{-8}$ $x_0 := root(x - cos(x), x)$ $x_0 = 0.739$ $x := 0, 0.05 .. 1$



Тут ми явно змінили значення системної змінної TOL, де x_0- змінна з текстовим індексом, який вводиться за допомогою точки: x 0.

Текстовий індекс - це просто декоративна прикраса, він є складовою частиною імені змінної.

Відзначимо ще, що при висновку результату відображається тільки 3 значущі цифри після десяткової точки. Цю установку можна змінити в меню Format\Number в змінній Displayed Precision.

2. Пошук коренів за допомогою блоку Given ....Find(...)

$x := 1 \qquad y := 1$

Given $\quad x^3 + \sin(y) = 25$

$y^2 - \cos(x) = 27$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := Find(x,y) \quad x = 2.96 \quad y = 5.101$

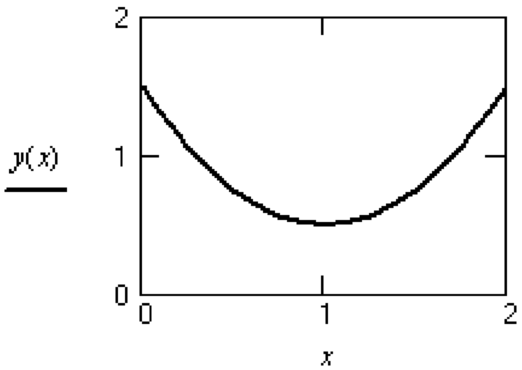
Тут можуть розв'язуватися вже системи рівнянь з декількома невідомими, проте, як і у попередньому випадку, необхідне завдання початкової точки від якої проходитиме пошук рішення. Рішення шукається методом ітерацій і за наявності декількох коренів, очевидно, буде знайдене лише наближене рішення, якщо воно існує.

Таким же чином можна вирішувати і системи лінійних рівнянь, проте доводиться задавати початкову ітерацію, тому системи лінійних рівнянь кращі вирішувати матричним методом.

3. Пошук рішення за допомогою блоку Given ....Minerr(...)

Практично те ж, що і у попередньому випадку, проте тут рішення буде знайдене у будь-якому випадку, навіть при його відсутності. Річ у тому, що тут шукається не рішення системи, а мінімальна нев'язка рівнянь. Розглянемо функцію, що явно не має дійсного коріння і знайдемо точку, в якій ця функція найбільш наближена до осі Ox.

При побудові графіка необхідно вказати початкове значення *y = 0*.



Для цього простого випадку очевидно, що як найменша нев'язка функції буде при x=1.

$x := 0 \qquad Given \qquad y(x) = 0 \quad Minerr(x) = 1$

Перший рядок дає нам рішення x=1, а системна змінна ERR показує нев'язку рівняння. $ERR = 0.5$

Аналогічно розв'язуються і складніші рівняння або їх системи.

<u>Завдання для самостійної роботи:</u>

Побудувати графічне рішення рівнянь і, якщо рішення є, знайти їх.

1. $2 \cdot x + 3 \cdot y^2 = 1$, $-x^2 + 2 \cdot \sqrt{y} = 2$
2. $y - x^2 - x = 0$, $3 \cdot x - x^2 - y = 0$
3. $x^2 - \sin(y) = 0$, $\sin(x) - y^2 = 1$
4. $\pi \cdot x + y = 1$, $2 \cdot x - \pi \cdot y = 1$

Проте, для рішення систем лінійних рівнянь можна використовувати і вбудовану функцію solve(...). Нехай задана система лінійних рівнянь:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 1$$
$$-x + 5y = 0$$

Матриці коефіцієнтів:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система може бути представлена як *A*X=B*, її рішення:

$$lsolve(A, B) = \begin{pmatrix} 0.385 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

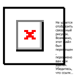
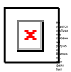
Шукаємо рішення матричним способом:

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 0.385 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

І, нарешті, за допомогою блоку Given ... Find(...)

$$x := 0 \qquad y := 0 \qquad Given \qquad 2 \cdot x + 3 \cdot y = 1 \quad -x + 5y = 0 \qquad X := Find(x, y) \qquad X = \begin{pmatrix} 0.385 \\ 0.077 \end{pmatrix}$$

<u>4. Рішення рівнянь в символьному виді</u>

Деякі рівняння Mathcad може вирішити в символьному вигляді. Для цього існують три можливості: перша - це використання меню Symbolics, друга - використання оператора *solve,x*→□ і третя - використання блоку Given .... Find(...) →. , 

Наприклад, запишемо квадратний тричлен, виділимо змінну *x* і виберемо в меню пункт Symbolics\Variable\Solve. Одержимо рішення в символьному вигляді.

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{(2\cdot a)}\cdot\left(-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}\right) \\ \frac{1}{(2\cdot a)}\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}\right) \end{bmatrix}$$

Для того, щоб рішення було записане праворуч від виразу, необхідно встановити прапорець в меню Symbolics\Evaluation Style\Horizontally

При використанні оператора → необхідно мати на увазі, що змінні не повинні бути визначені раніше, так спроба розкриття квадратного рівняння

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \ solve, x \ \rightarrow$$

приведе до помилки, проте, квадратний тричлен

$$a\cdot z^2 + b\cdot z + c \ solve, z \ \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b+\left(b^2-4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[-b-\left(b^2-4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

розкривається цілком задовільно.

Спробуємо вирішити систему лінійних рівнянь.

$$u + 2\cdot\pi\cdot v = a$$

$$4\cdot u + v = b \qquad Find(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2\cdot\pi\cdot b - a}{-1+8\cdot\pi} \\ \frac{4\cdot a - b}{-1+8\cdot\pi} \end{pmatrix}$$

В даному випадку, нам довелося вводити невикористані дотепер змінні *u* та *v*, оскільки змінні *x* та *y* вже визначені. Обійти ці труднощі можна досить просто, якщо вирішити рівняння на новому робочому листі.

Покажемо ще рішення для полінома третього порядку.

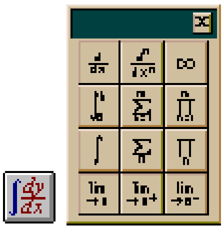
$$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 1 \quad d := 1$$

$$a\cdot z^3 + b\cdot z^2 + c\cdot z + d \ solve, z \ \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

Ми визначили наперед значення констант, інакше рішення вийде в загальному вигляді і на листі не розміститься. Спробуйте його вивести і подивитеся, що вийде.

Заняття 4. Обчислення сум і добутку. Символьні обчислення

Для обчислення сум і добутку скористаємося панеллю обчислень:



Наприклад:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = 1.635 \qquad \sum_{n=0}^{20} \frac{(-1)^n}{(2 \cdot n)!} = 0.54 \qquad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{(2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot k + 1)} = 0.5$$

Тут ми використовували значок суми з вказівкою границь підсумовування. З прикладів видно, що система обробляє ситуації $(-1)^0 = 1 \quad 0! = 1$.

Але, на жаль, не може рахувати суми з нескінченними границями. Значок суми тільки з вказівкою індексу використовується для роботи з матрицями і функціями залежними від індексу, тобто в тих випадках, коли границі зміни індексу вказуються у вигляді змінної інтервального типу.

Наприклад:

$$i := 0..2 \qquad \sum_i X_i = 1.154$$

$$X := \begin{pmatrix} 0.282 \\ 0.359 \\ 0.513 \end{pmatrix} \qquad n := 1..100 \qquad y(n) := n^2 + 2 \cdot n + 1 \qquad \sum_n \frac{1}{y(n)} = 0.635$$

Ми використовували матрицю із Заняття 1. Вам необхідно створити свою матрицю.

Аналогічно обчислюються добутки. За означенням: $\prod_{i=1}^{n} \left(a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\right)$

Наприклад:

$$\prod_{k=2}^{10000}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=0.5 \qquad \prod_{n=1}^{10000}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot n-1}\right]=1.414 \qquad x:=0.5 \qquad \prod_{k=0}^{1000}\left(1+x^{2^k}\right)=2$$

Обчислимо, наприклад, для матриць *M* і *D*, які ми використовували для побудови об'ємних графіків в другому занятті,

$$D:=\begin{pmatrix}5&8&1\\5&4&2\\5&2&3\end{pmatrix} \qquad M:=\begin{pmatrix}0&9&16&21&24&25&24&21&16&9&0\\-9&0&7&12&15&16&15&12&7&0&-9\\-16&-7&0&5&8&9&8&5&0&-7&-16\\-21&-12&-5&0&3&4&3&0&-5&-12&-21\\-24&-15&-8&-3&0&1&0&-3&-8&-15&-24\\-25&-16&-9&-4&-1&0&-1&-4&-9&-16&-25\\-24&-15&-8&-3&0&1&0&-3&-8&-15&-24\\-21&-12&-5&0&3&4&3&0&-5&-12&-21\\-16&-7&0&5&8&9&8&5&0&-7&-16\\-9&0&7&12&15&16&15&12&7&0&-9\\0&9&16&21&24&25&24&21&16&9&0\end{pmatrix}$$

суму і добуток діагональних елементів:

$$i:=0..10 \qquad \sum_i M_{i,i}=0 \qquad \prod_i M_{i,i}=0$$

$$i:=0..2 \qquad \sum_i D_{i,i}=12 \qquad \prod_i D_{i,i}=60$$

Тут матриці з прикладів Заняття 2.

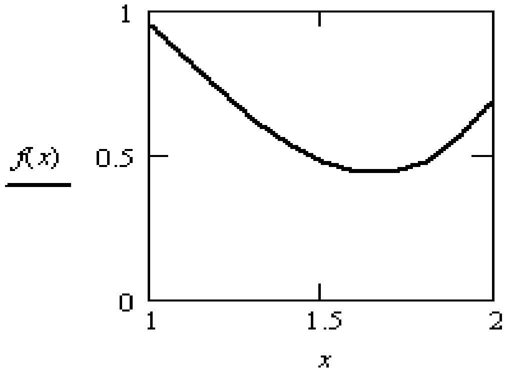
Ви можете скопіювати ці матриці і помістити їх за правою границею листа, або ввести свої дані.

Обчислення інтегралів

Якщо

$$f(x):=x^3-3.1\cdot x^2+2.05x+1 \qquad x:=1,1.1..2 \qquad TOL:=10^{-8}$$

Означений інтеграл - є площа криволінійної трапеції.



Тут ми вивели результат з 6 значущими цифрами:

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 0.591667$$

Інтеграл достатньо добре обчислюється, якщо підінтегральна функція не має особливостей. Точність обчислень задається системною змінною TOL, яка може бути перевизначена в меню Math\Options... Встановимо, наприклад

10^{-8} .

<u>Символьні обчислення</u>

Суми і добутки можна обчислювати в символьному вигляді, наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{6}\cdot\pi^2$$

або по кінцевій границі

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} \to \frac{1589508694133037873112297928517553859702383498543709859889432834803818131090369 9}{97218614443438103058965797667262314416197558399574624178272035470551798616524800}$$

Тут з'являється дігамма функція *Psi(...)* визначення якої можна знайти в help.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot z^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!} \to cos(z)$$

$$\sum_{n=0}^{7} \frac{(-1)^n\cdot z^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!} \to 1 - \frac{1}{2}\cdot z^2 + \frac{1}{24}\cdot z^4 - \frac{1}{720}\cdot z^6 + \frac{1}{40320}\cdot z^8 - \frac{1}{3628800}\cdot z^{10} + \frac{1}{479001600}\cdot z^{12} - \frac{1}{87178291200}\cdot z^{14}$$

Одержуємо просто ряд з 8 доданків, це значить, що система не змогла спростити вираз.

Аналогічно спробуємо обчислити добуток:

$$\prod_{k=2}^{10000}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \rightarrow \frac{10001}{20000}$$

$$\prod_{k=0}^{8}\left(1+x^{2^k}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 512 \\ 1.5597493058031738938\cdot 10^{22} \\ 1.7368726668024333071\cdot 10^{41} \\ 7.2757057453804081709\cdot 10^{58} \\ 1.6424580116751076274\cdot 10^{75} \\ 2.8824025423478219886\cdot 10^{90} \\ 5.3861676785518345501\cdot 10^{104} \\ 1.3955638322973788449\cdot 10^{118} \\ 6.2579577381572191012\cdot 10^{130} \\ 5.8560014880710079424\cdot 10^{142} \\ 13407807929942597099574024998205846127479365820592393377723561443721764030073546976801874298166903427690031858186486050853753882811946569946433649006084095 \end{pmatrix}$$

<u>Обчислення границь</u>

Спробуємо спочатку обчислити чудові границі.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} \rightarrow 1$ 2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \rightarrow exp(1)$

Цілком задовільний результат.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+sin(x))}{sin(4\cdot x)} \rightarrow \frac{1}{4} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{ln(x)} \rightarrow 2 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2^{cos(x)^2}-1}{ln(sin(x))} \rightarrow -2\cdot ln(2)$$

Можна обчислити також границі зліва та справа.

<u>Обчислення похідних</u>

Для обчислення похідної достатньо поставити функцію під знак

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$$

$$f(x) := x\cdot sin\left(x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \begin{pmatrix} sin(1) + 2\cdot cos(1) \\ sin(1.21000000000000000) + 2.42000000000000000\cdot cos(1.21000000000000000) \\ sin(1.44000000000000000) + 2.88000000000000000\cdot cos(1.44000000000000000) \\ sin(1.69000000000000000) + 3.38000000000000000\cdot cos(1.69000000000000000) \\ sin(1.96000000000000000) + 3.92000000000000000\cdot cos(1.96000000000000000) \\ sin(2.25000000000000000) + 4.50000000000000000\cdot cos(2.25000000000000000) \\ sin(2.56000000000000000) + 5.12000000000000000\cdot cos(2.56000000000000000) \\ sin(2.89000000000000000) + 5.78000000000000000\cdot cos(2.89000000000000000) \\ sin(3.24000000000000000) + 6.48000000000000000\cdot cos(3.24000000000000000) \\ sin(3.61000000000000000) + 7.22000000000000000\cdot cos(3.61000000000000000) \\ sin(4) + 8\cdot cos(4) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 6\cdot cos(1) - 4\cdot sin(1) \\ 6.60000000000000\cdot cos(1.21000000000000000) - 5.32400000000000000\cdot sin(1.21000000000000000) \\ 7.20000000000000\cdot cos(1.44000000000000000) - 6.91200000000000000\cdot sin(1.44000000000000000) \\ 7.80000000000000\cdot cos(1.69000000000000000) - 8.78800000000000000\cdot sin(1.69000000000000000) \\ 8.40000000000000\cdot cos(1.96000000000000000) - 10.9760000000000000\cdot sin(1.96000000000000000) \\ 9.00000000000000\cdot cos(2.25000000000000000) - 13.5000000000000000\cdot sin(2.25000000000000000) \\ 9.60000000000000\cdot cos(2.56000000000000000) - 16.3840000000000000\cdot sin(2.56000000000000000) \\ 10.2000000000000\cdot cos(2.89000000000000000) - 19.6520000000000000\cdot sin(2.89000000000000000) \\ 10.8000000000000\cdot cos(3.24000000000000000) - 23.3280000000000000\cdot sin(3.24000000000000000) \\ 11.4000000000000\cdot cos(3.61000000000000000) - 27.4360000000000000\cdot sin(3.61000000000000000) \\ 12\cdot cos(4) - 32\cdot sin(4) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}x^x \rightarrow \begin{pmatrix} ln(1) + 1 \\ 1.1105342410545757283\cdot ln(1.1000000000000) + 1.1105342410545757283 \\ 1.2445647472039777218\cdot ln(1.2000000000000) + 1.2445647472039777218 \\ 1.4064566732378861103\cdot ln(1.3000000000000) + 1.4064566732378861103 \\ 1.6016928982022121918\cdot ln(1.4000000000000) + 1.6016928982022121918 \\ 1.8371173070873835736\cdot ln(1.5000000000000) + 1.8371173070873835736 \\ 2.1212505710975915523\cdot ln(1.6000000000000) + 2.1212505710975915523 \\ 2.4646948994848698773\cdot ln(1.7000000000000) + 2.4646948994848698773 \\ 2.8806500970683280239\cdot ln(1.8000000000000) + 2.8806500970683280239 \\ 3.3855703439184810031\cdot ln(1.9000000000000) + 3.3855703439184810031 \\ 4\cdot ln(2) + 4 \end{pmatrix}$$

Якщо перед цим визначити значення змінної, то набудемо чисельне значення.

$$x := 0.5 \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} \rightarrow .7698003589195010193 5$$

$$\frac{d}{dx}x^x \rightarrow .7071067811865475244\cdot ln(.5) + .7071067811865475244$$

Перевіримо:

$$x^{x}\cdot(ln(x)+1)=0.2169777$$

Заняття 5. Диференціювання і обчислення інтегралів. Комплексні числа

Для прикладу, обчислимо інтеграл від функції, що є результатом попереднього диференціювання.

Ми одержали правильний результат. Тільки слід мати на увазі, що Mathcad не виводить константу інтеграції.

$$\int \left(sin\left(x^2\right)+2\cdot x^2\cdot cos\left(x^2\right)\right)dx \rightarrow sin\left(x^2\right)\cdot x$$

Обчислимо тепер інтеграл від складнішої функції:

$$\int \frac{x^3+2\cdot x^2+x+1}{\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}dx \rightarrow \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot atan\left[\frac{1}{3}\cdot(2\cdot x+1)\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+1\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2\cdot sin(x)^2}}dx \rightarrow \int \frac{1}{\left(a^2+b^2\cdot sin(x)^2\right)^{\frac{1}{2}}}dx$$

Як видно, такий інтеграл Mathcad не міг обчислити в аналітичному вигляді, тому повернув початковий вираз.

Операції символьної математики можна виконати і через меню Symbolics. Встановимо тільки заздалегідь в меню **Symbolics\Evaluation Style** опцію **Horizontally,** для того, щоб забезпечити висновок в тому ж рядку.

Диференціювання здійснюється через меню Symbolics\Variable\Differentiate. Заздалегідь необхідно виділити змінну диференціювання у виразі, наприклад:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

Так само здійснюється інтегрування через меню Symbolics\Variable\Integrate.

$$\sin(x)^2 \qquad \frac{-1}{2}\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) + \frac{1}{2}\cdot x$$

Тут же можна знайти корені рівняння: Symbolics\Variable\Solve.

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{(2\cdot a)}\cdot\left(-b + \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}\right) \\ \frac{1}{(2\cdot a)}\cdot\left(-b - \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}\right) \end{bmatrix}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^2 - \frac{1}{2} \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) \\ \pi - \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}$$

Можна обчислити визначник матриці Symbolics\Matrix\Determinant, заздалегідь виділивши її вміст.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a\cdot d - b\cdot c$$

Транспоновану

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \text{Transpose}$$

і обернену матрицю:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{-d}{(-a\cdot d + b\cdot c)} & \frac{b}{(-a\cdot d + b\cdot c)} \\ \frac{c}{(-a\cdot d + b\cdot c)} & \frac{-a}{(-a\cdot d + b\cdot c)} \end{bmatrix} \qquad \text{Invert}$$

Комплексні числа

Комплексні числа вводяться в звичному записі алгебри, як уявна одиниця використовується символ *i* або *j*.

Примітка: ***не можна просто ввести* i*, потрібно написати 1i.***

$a := 2 + 3i \quad b := -1 + 4j \qquad c := a + b \qquad c = 1 + 7i$

$c := a - b \qquad c = 3 - i \qquad a\cdot b = -14 + 5i \qquad \frac{a}{b} = 0.588 - 0.647i$

Комплексне спряжене, виводиться символом подвійної лапки після набору імені змінної ".

$\overline{a} = 2 - 3i \qquad \overline{b} = -1 - 4i$

$e^{i} = 0.54 + 0.841i \qquad \sqrt{-1} = i$

$sin(i) = 1.175i \qquad \sqrt[3]{-1} = -1$

$cos(i) = 1.543 \qquad \sqrt[6]{-1} = 0.866 + 0.5i$

або так:

$$\sqrt[6]{-1} \rightarrow (-1)^{\frac{1}{6}}$$

У разі багатозначності корені система поверне корені з якнайменшою уявною частиною.

Функції для роботи з комплексними числами:

$Re(z)$ - ä³éñíà ÷àñòèíà ÷èñëà, $\qquad Re(a) = 2 \qquad arg(a) = 0.983$

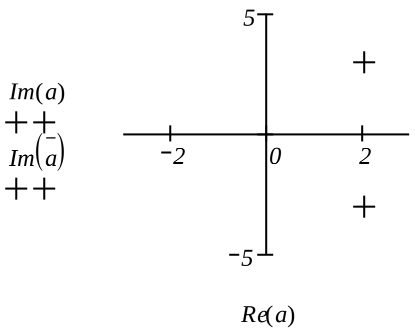
$Im(z)$ - óÿâíà ÷àñòèíà ÷èñëà. $\qquad Im(a) = 3 \qquad |a| = 3.606$

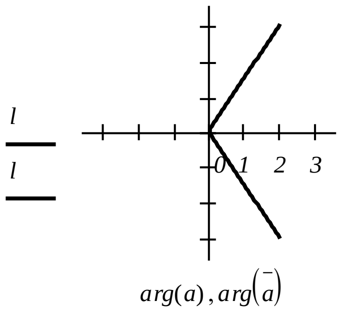
$arg(z)$ - àðãóìåíò (êóò â êîìïëåêñí³é ïëîùèí³ ì³æ ä³éñíîþ â³ññþ ³ z)

$|z|$ - ìîäóëü $\quad z := \sqrt{x^2 + y^2}$ *

Розглянемо графічне представлення комплексного числа на декартовому і полярному графіках.

$l := 0, 0.1 .. |a|$





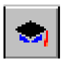
У нашому випадку:

$Re(a) = 2 \qquad Im(a) = 3 \qquad |a| = 3.606 \qquad arg(a) = 0.983$

$Re(\overline{a}) = 2 \qquad Im(\overline{a}) = -3 \qquad \overline{|a|} = 3.606 \qquad arg(\overline{a}) = -0.983$

Дуже часто рівняння повертають як корені комплексні числа. Найпростіший випадок - це корені полінома. Для прикладу, позначимо через М матрицю коефіцієнтів полінома 4-го порядку. Корені полінома знайдемо за допомогою вбудованої функції $polyroots(M)$. Як видно, всі корені комплексні. Змінюючи значення коефіцієнтів полінома, можна спостерігати, як змінюються корені.

$$M := 3\cdot m^4 - m^3 + 2\cdot m^2 + 1 \text{ } coeffs, m \;\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad polyroots(M) = \begin{pmatrix} -0.286 - 0.614i \\ -0.286 + 0.614i \\ 0.453 + 0.722i \\ 0.453 - 0.722i \end{pmatrix}$$

Тут, для виділення коефіцієнтів полінома, ми скористалися операцією *coeffs* з меню символьної панелі .

Заняття 6. Чисельне рішення диференціальних рівнянь

1. Диференціальні рівняння 1-го порядку. Рішення задачі Коші.

Нехай задане диференціальне рівняння $\frac{d}{dx}y = \frac{y}{x} + x^2$

При початковій умові $y(1) = 0$

Чисельне рішення здійснюється за допомогою вбудованої функції *rkfixed(y,x1,x2,n,D),* яка використовує метод Рунге-Кутта 4-го порядку.

y - вектор початкових умов, в даному випадку вектор з одного елементу.

x1,x2 - границі інтервалу для пошуку рішення. *n* - кількість точок на інтервалі.

D(x,y) - вектор-функція перших похідних, в даному випадку вектор з одного елементу.

Вирішимо наше рівняння:

Початкова умова $y_0 := 0$.

$$D(x, y) := \frac{y_0}{x} + x^2$$

Права частина рівняння .

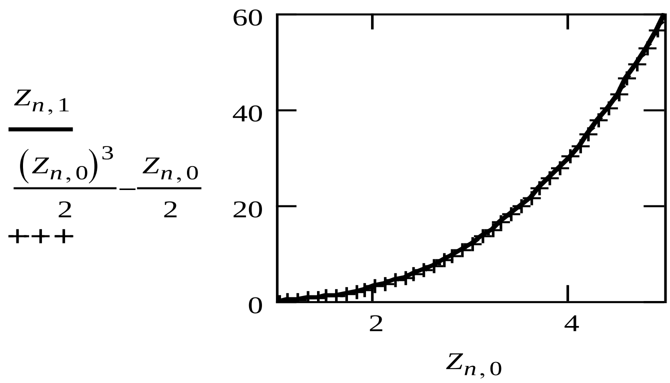
Рішення рівняння на інтервалі (1,5). Матриця Z має 2 стовпці і 40 рядків. Перший стовпець містить x змінну, другий - y.

$Z =$

	0	1
0	1	0
1	1.1	0.115
2	1.2	0.264
3	1.3	0.448
4	1.4	0.672
5	1.5	0.937
6	1.6	1.248
7	1.7	1.606
8	1.8	2.016
9	1.9	2.479
10	2	3
11	2.1	3.58
12	2.2	4.224
13	2.3	4.933
14	2.4	5.712
15	2.5	6.562

Хрестиками показане точне рішення рівняння $y = \frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}$

$Z := rkfixed(y, 1, 5, 40, D) \qquad n := 0..40$



<u>2.Системи лінійних рівнянь першого порядку.</u>

Розв'язуються за допомогою цієї ж функції.

Вирішимо для прикладу систему 2-х диференціальних рівнянь 1-го порядку.

$$\frac{d}{dt}x = y - x^2 - x \qquad \frac{d}{dt}y = 3 \cdot x - x^2 - y \qquad x(0) = 0 \qquad y(0) = 1$$

Початкові умови, тепер уже у вигляді вектора. $y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Праві частини рівнянь, також вектор, де як аргументи використовуються компоненти вектора y. $D(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 - (y_0)^2 - y_0 \\ 3 \cdot y_0 - (y_0)^2 - y_1 \end{bmatrix}$

t *x(t)* *y(t)*

$Z =$

	0	1	2
0	0	0	1
1	0.1	0.091	0.918
2	0.2	0.165	0.866
3	0.3	0.226	0.836
4	0.4	0.278	0.823
5	0.5	0.321	0.822
6	0.6	0.358	0.83
7	0.7	0.39	0.844
8	0.8	0.418	0.864
9	0.9	0.444	0.887
10	1	0.468	0.913
11	1.1	0.49	0.941
12	1.2	0.51	0.971
13	1.3	0.53	1.001
14	1.4	0.548	1.032
15	1.5	0.566	1.063

Зверніть увагу, що тут ми, для відображення *x* і *y*, скористалися небагато іншою формою, враховуючи, що $\left(Z^{\langle k \rangle}\right)_n = Z_{n,k}$

3. Диференціальне рівняння 2-го порядку.

Розв'язується аналогічно, шляхом зведення рівняння 2-го порядку до системи 2-х рівнянь 1-го порядку, наприклад, вирішимо рівняння:

$$\frac{d^2}{dx^2}y - 2\cdot\frac{d}{dx}y + 2\cdot y = e^x + x\cdot cos(x)$$

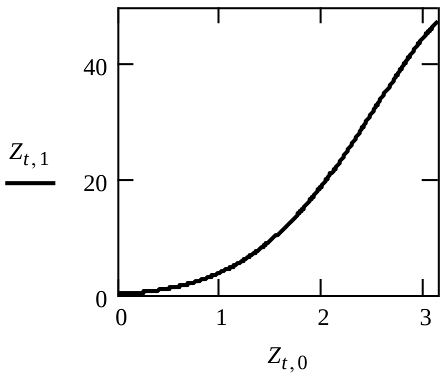
$$y_0 = 0 \qquad \frac{d}{dx}y_0 = 1$$

Еквівалентна форма – система двох рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_0}{\partial x} = y_1, & y_0(0) = 0 \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x} = 2y_1 - 2y_0 + e^x + x\cos x, & y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 2\cdot y_1 - 2\cdot y_0 + e^x + x\cdot cos(x) \end{pmatrix}$$

$$Z := rkfixed(y, 0, \pi, 314, D) \qquad t := 0..314$$



$Z =$

	x	*y(x)*	*y'(x)*
	0	1	2
0	0	0	1
1	0.01	0.01	1.03
2	0.02	0.021	1.061
3	0.03	0.031	1.093
4	0.04	0.042	1.125
5	0.05	0.054	1.158
6	0.06	0.066	1.191
7	0.07	0.078	1.225
8	0.08	0.09	1.26
9	0.09	0.103	1.295
10	0.1	0.116	1.331
11	0.11	0.13	1.368
12	0.12	0.143	1.405
13	0.13	0.158	1.444
14	0.14	0.172	1.482
15	0.15	0.187	1.522

4. Рівняння або системи вищого порядку.

Розглянемо, для прикладу, систему двох рівнянь другого порядку.

$$\frac{d^2}{dt^2}u = 2\cdot v$$

З початковими умовами: $u(0) = 1.5 \quad \frac{d}{dt}u(0) = 1.5$

$$\frac{d^2}{dt^2}(v = 4\cdot v - 2\cdot u)$$

$v(0) = 1 \quad \frac{d}{dt}v(0) = 1$

Зводимо до системи 4-х рівнянь 1-го порядку і вирішуємо стандартним способом.

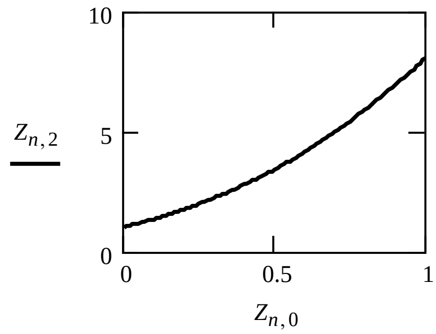
$$y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Çàïèñ ïî÷àòêîâèõ óìîâ ÿê âåêòîð-ñòîâïöÿ: $u(0), \frac{d}{dt}u(0), v(0), \frac{d}{dt}v(0)$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 2 \cdot y_2 \\ y_3 \\ 4 \cdot y_2 - 2 \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

Âåêòîð - ñòîâïåöü ïðàâèõ ÷àñòèí ñèñòåìè ð³âíÿíü

$Z := rkfixed(y, 0, 1, 100, D)$ $\quad n := 0..100$



Заняття 7. Чисельне рішення диференціальних рівнянь (продовження)

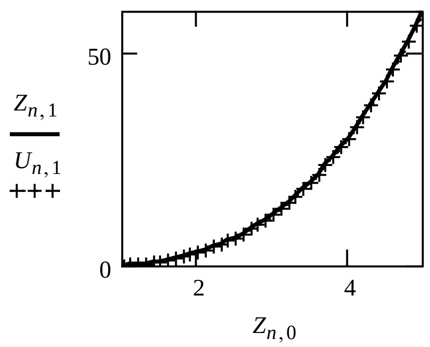
1. Функції, що повільно змінюються.

Якщо відомо, що шукане рішення достатньо гладке, можна використовувати функцію *Rkadapt(y, x1, x2, npoints, D)*, яка шукає рішення із змінним кроком, тобто там, де рішення міняється повільніше, крок збільшується, а у області швидкої зміни функції крок зменшується, це прискорює пошук рішення. Повертається ж рішення з рівним кроком. Функція має ті ж параметри, що і *rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)*. Вирішимо наприклад попередню задачу двома способами.

$y_0 := 0 \quad n := 0..40$

$D(x, y) := \frac{y_0}{x} + x^2 \quad Z := rkfixed(y, 1, 5, 40, D)$

$U := Rkadapt(y, 1, 5, 40, D)$



$Z =$

	0	1
0	1	0
1	1.1	0.115
2	1.2	0.264
3	1.3	0.448
4	1.4	0.672
5	1.5	0.937
6	1.6	1.248
7	1.7	1.606
8	1.8	2.016
9	1.9	2.479
10	2	3
11	2.1	3.58
12	2.2	4.224
13	2.3	4.933
14	2.4	5.712
15	2.5	6.562

$U =$

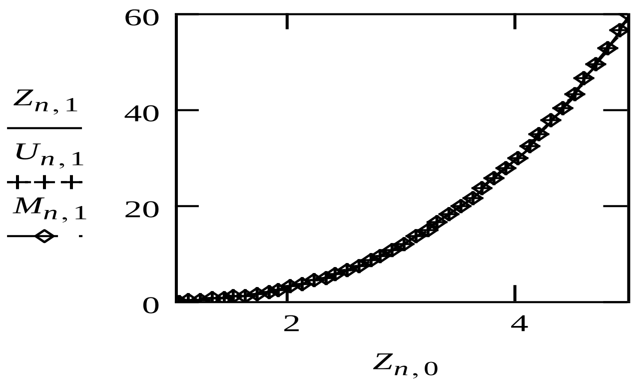
	0	1
0	1	0
1	1.1	0.115
2	1.2	0.264
3	1.3	0.448
4	1.4	0.672
5	1.5	0.937
6	1.6	1.248
7	1.7	1.606
8	1.8	2.016
9	1.9	2.479
10	2	3
11	2.1	3.58
12	2.2	4.224
13	2.3	4.933
14	2.4	5.712
15	2.5	6.562

Як видно, в простому випадку ми одержимо повний збіг рішень.

2. Гладкі системи.

Коли відомо, що рішення є гладкою функцією, точніше рішення дає функція *Bulstoer(y, x1, x2, npoints, D),* яка використовує метод Bulirsch-Stoer, але має ті ж аргументи, що і *rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)*. Вирішимо, для прикладу, попередню задачу.

$$M := Bulstoer(y, 1, 5, 40, D)$$



Неважко переконатися, що ми одержали практично те ж саме рішення. Виможете порівняти і матрицю значень *M*.

3. Жорсткі системи.

Якщо матриця правих частин системи диференціальних рівнянь майже вироджена, такі системи є жорсткими. В цьому випадку, рішення повертається функцією *rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)* буде нестійким і для вирішення таких систем необхідно застосовувати функцію *Stiffb(y, x1, x2, npoints, D, J),* що використовує метод Bulirsch-Stoer, або *Stiffr(У, x1, x2, npoints, D, J),* використовуючи Rosenbrock метод. Тут аргументи функції ті ж самі, що і раніше, але додається матриця J розміром n*(n+1), перший стовпець якої містить частинні похідні *dD/dx*, решта стовпців і рядків є матрицею Якобі *dD/dyk* .

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial D_0}{\partial x} & \frac{\partial D_0}{\partial y_0} & \Lambda & \frac{\partial D_0}{\partial y_n} \\ \frac{\partial D_1}{\partial x} & \frac{\partial D_1}{\partial y_0} & \Lambda & \frac{\partial D_1}{\partial y_n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \Lambda & \mathrm{M} \\ \frac{\partial D_n}{\partial x} & \frac{\partial D_n}{\partial y_0} & \Lambda & \frac{\partial D_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Розглянемо, для прикладу, рішення для жорсткої системи:

$$\frac{d}{dx}y_0 = x\cdot y_1$$

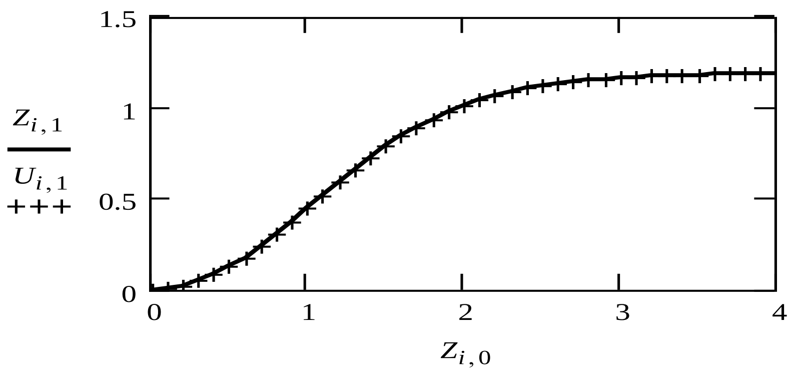
Ç ïî÷àòêîâèè óìîâàìè:

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}y_1 = -2\cdot y_1\cdot y_0$$

$$D(x,y) := \begin{pmatrix} x\cdot y_1 \\ -2\cdot y_1\cdot y_0 \end{pmatrix} \qquad J(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 & 0 & x \\ 0 & -2\cdot y_1 & -2\cdot y_0 \end{pmatrix}$$

$$Z := Stiffb(y, 0, 4, 40, D, J) \qquad i := 0..40 \qquad U := Stiffr(y, 0, 4, 40, D, J)$$



Як видно, обидві функції дають однакове рішення. Вибір того, або іншого методу визначається особливостями задачі.

4. Знаходження наближеного рішення тільки в кінцевій точці.

Часто виникає задача знаходження рішення диференціального рівняння (або системи) тільки в кінцевій точці. Можна, звичайно, скористатися розглянутим набором функцій, проте Mathcad вимушений виконувати величезний об'єм непотрібної роботи. Для уникнення цього використовується набір функцій:

bulstoer(y, x1, x2, acc, D, kmax, save);

rkadapt(y, x1, x2, acc, D, kmax, save);

stiffb(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save);

stiffr(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save),

який повертає значення функції в кінцевій точці інтервалу *y(x2)*, але працює так само, як було розглянуто раніше і має 3 додаткові параметри:

acc - параметр контролюючий точність рішення, значення *acc=0.001* забезпечує хорошу точність.

kmax - максимальне число проміжних точок в яких шукається рішення.

save - мінімально допустимий інтервал між точками в яких шукається рішення.

Приклад для останнього вирішення:

$$z := stiffb(y, 0, 4, 0.001, D, J, 20, 0.1)$$

Порівняємо тепер значення в кінцевій точці *x=4*.

$$Z_{40,0} = 4 \quad Z_{40,1} = 1.185 \quad Z_{40,2} = 1.639 \times 10^{-3}$$

$$U_{40,0} = 4 \quad U_{40,1} = 1.185 \quad U_{40,2} = 1.639 \times 10^{-3}$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.402 & 0.08 & 0.979 \\ 2.546 & 1.124 & 0.049 \\ 3.882 & 1.183 & 2.209 \times 10^{-3} \\ 4 & 1.184 & 1.669 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Як видно з розглянутого прикладу, ми маємо розбіжність лише в четвертій значущій цифрі, а рішення одержали всього лише за 4 кроки.

Завдання для самостійної роботи.

Повирішуйте, використовуючи розглянутий набір функцій, диференціальні рівняння і їх системи із стандартного задачника по диференціальним рівнянням. Порівняйте рішення з аналітичним, якщо вдасться його знайти.

Заняття 8. Краєві задачі

Дуже часто зустрічаються задачі, в яких значення шуканої функції відомі в граничних точках інтервалу, наприклад, натягнута струна, закріплена на кінцях. Це - краєві задачі. У Mathcad реалізовані дві функції, що дозволяють чисельно вирішувати подібні задачі.

1. Двоточкова краєва задача.

Нехай необхідно вирішити диференціальне рівняння *n-го* порядку. Припустимо, що відомі не всі початкові умови в початковій точці інтервалу, але відомі значення рішення або деяких похідних в іншій точці інтервалу. Проте загальна кількість умов в заданих точках *x1, x2* рівне *n.* В цьому випадку, для пошуку недостаючих початкових умов в точці *x1,* необхідно використовувати функцію *sbval(v, x1, x2, D, load,score).*

v - вектор початкових наближень для шуканих початкових значень в точці *x1*.

x1, x2 - граничні точки інтервалу.

D(x,y) - вектор-стовпець з *n-елементів* з правими частинами системи дифрівнянь.

*lo*ad(x1,v) - вектор-стовпець з *n-елементів* складається з початкових значень в точці *x1,* деякі із значень будуть константами, інші невідомі і будуть знайдені в процесі рішення.

score(x2,y) - вектор-стовпець розмірності вектора *v*, що містить різницю між початковою умовою в точці *x2* і значенням шуканого рішення в цій точці.

Розглянемо, як приклад, рішення дифрівняння: $y^{V} + y = 0$ при граничних умовах. *y(0)=0 y'(0)=7, y(1)=1 y'(1)=10 y"(1)=5*

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ñòàðòîâ³ *y"(0)*
çíà÷åííÿ äëÿ *y'"(0)*
ïîøóêó: *y""(0)*

$$load(x1, v) := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

<- â³äîìå çíà÷åííÿ *y(0)=0*
<- â³äîìå çíà÷åííÿ *y'(0)=7*
<- íåâ³äîì³ ïî÷àòêîâ³
<- óìîâ³ áóäóòü çíàéäåí³
<- ôóíêö³ºþ *sbval.*

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ -y_0 \end{pmatrix}$$

Âåêòîð ïðàâèõ ÷àñòèí
ñèñòåìè ð³âíÿíü.

$$score(x2, y) := \begin{pmatrix} y_0 - 1 \\ y_1 - 10 \\ y_2 - 5 \end{pmatrix}$$

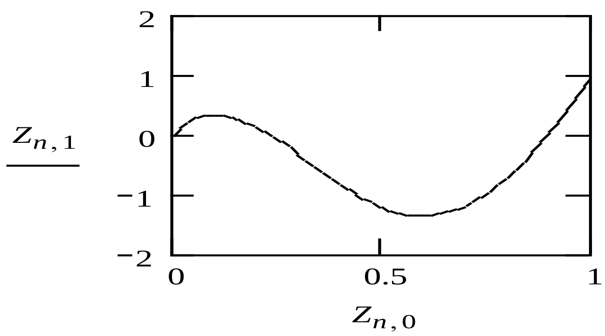
Ð³çíèöÿ ì³æ îá÷èñëåíèì çíà÷åííÿì
òà çàäàíèì çíà÷åííÿì â òî÷ö³ *x2.*

$$S := sbval(v,0,1,D,load,score) \qquad S = \begin{pmatrix} -85.014 \\ 348.107 \\ -516.257 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

Â³äñóòí³ *y''(0)*
ïî÷àòêîâ³ *y'''(0)*
óìîâè: *y''''(0)*

Тепер вирішуємо задачу традиційним методом:

$$Z := rkfixed(y,0,1,50,D) \qquad n := 0..50$$



Знайдемо помилку в обчисленні значення функції і її похідних в заданій краєвій точці *x2*.

$$score\left[1, \begin{pmatrix} Z_{50,1} \\ Z_{50,2} \\ Z_{50,3} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1.112\times 10^{-9} \\ 1.319\times 10^{-8} \\ 1.03\times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

2. Краєва задача з умовами усередині інтервалу.

Складніший випадок, коли, крім краєвих умов, відомі значення *n-1* похідних в середині інтервалу. В цьому випадку для відшукання недостаючих початкових умов необхідно використовувати функцію *bvalfit(v1, v2, x1, x2, xf, D, load1, load2, score)*, де

v1, v2 - вектора початкові наближення, що містять, для граничних умов, які не задані в точках *x1, x2*.

x1, x2 - граничні точки інтервалу.

xf - проміжна точка інтервалу, де задана частина умов.

D(x,y) - вектор-стовпець з *n-елементів* з правими частинами системи дифрівнянь.

*loa*d1(x1,v1) - вектор-стовпець з *n-елементів* складається з початкових значень в точці *x1,* деякі із значень будуть константами, інші невідомі і будуть знайдені в процесі рішення.

load2(x2,v2) - вектор-стовпець з *n-елементів* складається з початкових значень в точці *x1,* деякі із значень будуть константами, інші невідомі і будуть знайдені в процесі рішення.

score(xf,y) - вектор-стовпець з *n-елементів* містить різницю між рішеннями, що починаються з точок *x1* і *x2*.

Розглянемо використання даної функції на прикладі рішення попередньої задачі, в якій, наприклад, замість умови *y'(0)=7,* задано *y''(0)=1.*

Зажадаємо, щоб рішення зшивалося в т. 0.5. Отже: $y^{V} + y = 0$ *y(0)=0 y''(0)=1, y(1)=1 y'(1)=10, y''(1)=5.*

$v1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ñòàðòîâ³ çíà÷åííÿ äëÿ ïîøóêà: *y'(0)* *y'''(0)* *y''''(0)*

$v2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ñòàðòîâûå çíà÷åíèÿ äëÿ ïîèñêà: *y'''(1)* *y''''(1)*

$$load1(x1, v1) := \begin{pmatrix} 0 \\ v1_0 \\ 1 \\ v1_1 \\ v1_2 \end{pmatrix} \qquad load2(x2, v2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \\ v2_0 \\ v2_1 \end{pmatrix} \qquad D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ -y_0 \end{pmatrix}$$

$score(xf, y) := y$ Óìîâè çøèâàííÿ ð³øåííÿ â òî÷ö³ *xf.*

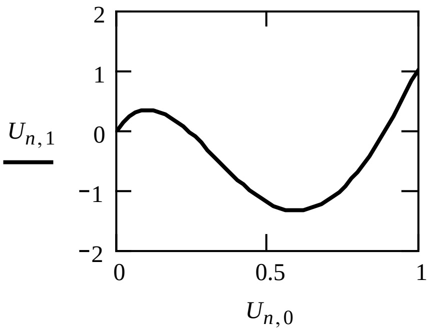
$$S := bvalfit(v1, v2, 0, 1, 0.5, D, load1, load2, score) \qquad S = \begin{pmatrix} -7.338 & -81.907 \\ 90.164 & -171.558 \\ -172.741 & 0 \end{pmatrix}$$

Вирішуємо тепер традиційним способом:

Звичайно таким чином шукають рішення диференціальних рівнянь, що мають розрив похідних усередині інтервалу рішення.

$$U := rkfixed(y, 0, 1, 50, D)$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ S_{0,0} \\ 1 \\ S_{1,0} \\ S_{2,0} \end{pmatrix}$$



Заняття 9. Вбудовані функції

Mathcad має багатий набір вбудованих функцій. Більшість з них просто повертає значення, проте, є дві функції, які служать для управління обчисленнями.

1. Функція *if (умова, оператор 1, оператор 2).*

Якщо умова істинна, виконується оператор 1, інакше оператор 2.

умова: $x=y$

$x>y$ >

$x<y$ <

$x \geq y$ Ctrl 0

$x \leq y$ Ctrl 9

$x \neq y$ Ctrl 3

Результат логічної операції рівний 0, якщо умову не виконано, і 1, якщо умова істинна. Цією властивістю можна користуватися для створення складніших логічних конструкцій, наприклад, логічне множення:

$(x > -1)\cdot(x < 1)$ дорівнює 1, якщо $(-1 < x < 1)$ і 0 інакше.

$(x < -1) + (x > 1)$ діє подібно логічному складанню.

Використовуємо, наприклад, функцію *if* для коректного визначення коренів квадратного рівняння:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad D(a,b,c) := b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x1(a,b,c) := if\left(D(a,b,c) < 0, \text{"дійсних коренів немає"}, \frac{-b + \sqrt{D(a,b,c)}}{2 \cdot a}\right)$$

$$x2(a,b,c) := if\left(D(a,b,c) < 0, \text{"дійсних коренів немає"}, \frac{-b - \sqrt{D(a,b,c)}}{2 \cdot a}\right)$$

$$x1(1,2,-1) = 0.414 \qquad x2(1,2,-1) = -2.414$$

Проте:

$x1(1,2,2) = $ "дійсних коренів немає"

$x2(1,2,2) = $ "дійсних коренів немає"

2. Функція *until(x,z)* повертає z поки *x не* стає від'ємним.

Функція дозволяє зупиняти обчислення при виконанні певної умови і може бути корисна при організації ітераційної процедури. Розглянемо, наприклад, процедуру знаходження коріння трансцендентного рівняння методом Ньютона.

Для рівняння *f(x)=0* ітераційна процедура реалізується формулою:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Розглянемо рішення рівняння *x=cos(x)-x,* вважаючи, що рішення знайдене, якщо різниця лівої і правої частин рівняння не перевершує системної змінної TOL=0.001.

$$TOL := 10^{-8} \quad N := 100 \quad i := 0..N \quad x_0 := 1$$

$$f(x) := cos(x) - x \quad F(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$x_{i+1} := until\left(\left|f(x_i)\right| - TOL, x_i - \frac{f(x_i)}{F(x_i)}\right)$$

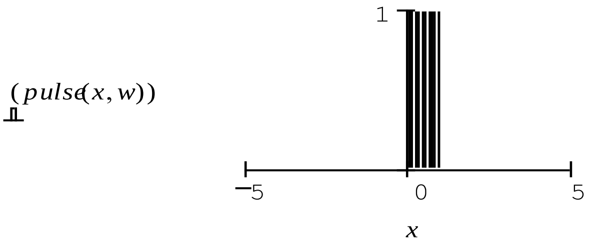
Як видно, для досягнення заданої точності потрібно не 100 кроків, а всього лише 3.

Обидві ці функції дозволяють досягти більшої гнучкості обчислень, не вдаючись до програмування.

3. Імпульсні функції.

1). Функція Хевісайда *F(x)=if(x<0,0,1)* використовується для електротехнічних розрахунків. Служить для створення ступінчастого імпульсу шириною *w*, наприклад:

$$pulse(x,w) := \Phi(x) - \Phi(x-w) \qquad w := 1 \qquad x := -4, -3.9 \,..\, 4$$



Ф вибираємо на палітрі грецьких символів.

2). Дельта символ Кронекера *d(m,n):=if(m=n,1,0)*.

$\delta(1,1) = 1 \qquad \delta(1,0) = 0$

За допомогою цієї функції нескладно створити одиничну матрицю, наприклад:

$n := 4 \quad i := 0..n \quad j := 0..n$

$a_{i,j} := \delta(i,j)$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

або на зворотній діагоналі:

$b_{i,j} := \delta(n-i,j)$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3). Абсолютний антисиметричний тензор *e(i,j,k)* визначений для значень *i,j,k* 0,1,2 і рівний 0, якщо будь-які два значення співпадають, 1 для парної перестановки індексів і -1 для непарної.

$\varepsilon(0,1,2) = 1 \qquad \varepsilon(1,2,0) = 1 \qquad \varepsilon(2,0,1) = 1 \qquad \varepsilon(1,1,0) = 0$

$\varepsilon(1,0,2) = -1 \qquad \varepsilon(0,2,1) = -1 \qquad \varepsilon(2,1,0) = -1 \qquad \varepsilon(1,0,0) = 0$

За допомогою цієї функції нескладно, наприклад, одержати координати векторного добутку користуючись добре відомою формулою:

$$i := 0..2 \quad j := 0..2 \quad k := 0..2$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad z_i := \sum_j \sum_k \varepsilon(i, j, k) \cdot x_j \cdot y_k \qquad z = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Перевіримо:

$$x \times y = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Інші функції.

Mathcad містить велику бібліотеку вбудованих функцій з переліком яких можна познайомитися у вбудованій системі допомоги.

1). Трансцендентні функції - тригонометричні, показові, гіперболічні, функції Бесселя.

2). Усікання і функції округлення - функції які витягують яку-небудь частину числа, включаючи дійсну, уявну, дробову або цілу частини.

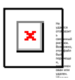
3). Дискретні перетворення - перетворення Фур'є.

4). Функції сортування - функції впорядкування елементів векторів і матриць.

5). Векторні і матричні функції - функції перетворення матриць і операцій над ними.

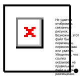
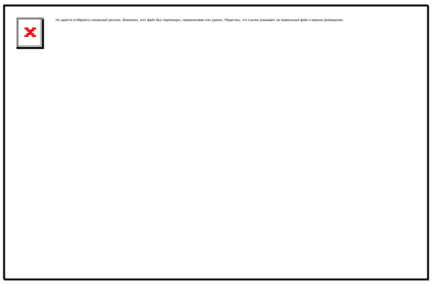
6). Статистичні функції - функції розподілу різних статистик, обчислення різних статистичних характеристик.

7). Функції обміну даними - набір функцій, що дозволяє зберігати матриці даних у файлі і читати дані з файлу.

Для вставки функції в рівняння використовується кнопка панелі управління. 

Заняття 10. Програмування

Для підвищення гнучкості Mathcad в системі передбачена можливість написання невеликих програм для вирішення тих проблем, які не можуть бути реалізовані стандартними засобами. Звичайно вдаватися до програмування доводиться в тих випадках, коли стандартні засоби або не можуть вирішити задачу, або неефективні.

Для написання програм використовується програмна палітра, яка викликається кнопкою панелі управління . Як видно, всього є 10 операторів, з яких і будується програма.  Для прикладу приведемо просту програму, що повертає 1, якщо число парне і 0, якщо непарне.

Починаємо створення програми з кнопки Add Line. Вертикальна лінія виконує роль операторних дужок.

$$even(n) := \left| \begin{array}{l} 1 \ \ if \ \left(mod(n,2) = 0\right) \\ 0 \ \ otherwise \end{array} \right.$$

Після того, як функція визначена, вона може використовуватися нарівні з вбудованими функціями. $even(55) = 0 \qquad even(78) = 1$

Складніший приклад визначення максимальної координати вектора і її позиції.

$$maximum(v) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ max \leftarrow v_0 \\ for \ \ i \in 1..length(v) - 1 \\ \quad if \ \ v_i > max \\ \qquad \left| \begin{array}{l} max \leftarrow v_i \\ k \leftarrow i \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} k \\ max \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Ïðèâëàñíåííÿ ïî÷àòêîâèõ çíà÷åíü çì³ííèì.

Öèêë ïî åëåìåíòàõ âåêòîðà (íå ñë³ä çàáóâàòè, ùî åëåìåíòè âåêòîðà â³äë³÷óþòüñÿ â³ä 0).

Ïðèâëàñíåííÿ á³ëüøîãî çíà÷åííÿ ³ çáåðåæåííÿ éîãî êîîðäèíàòè. Îïåðàòîðíó äóæêó ñòâîðþºìî êíîïêîþ **Add Line.**
Çíà÷åííÿ, ùî ïîâåðòàþòüñÿ.

Визначимо тепер вектор:

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad maximum(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Дійсно, максимальне значення 8, має номер 2.

Розглянемо в якості ще одного прикладу, як програмним способом побудувати скалярний твір.

Обчислимо квадрат модуля вектора v.

$$sc(x,y) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ n \leftarrow length(x) - 1 \\ for\ \ i \in 0..n \\ \quad s \leftarrow s + x_i \cdot y_i \\ return\ \ s \end{array} \right. \qquad sc(v,v) = 90 \qquad (|v|)^2 = 90$$

Оператор *return* тут не дуже те і потрібен.

Програмні рядки створюються кнопкою Add Line, оператори вводяться відповідною кнопкою. Зверніть увагу, що програмах ми не користуємося оператором привласнення :=, а замість нього пишемо оператора локального привласнення '$\leftarrow$'. *Всі змінні, визначені в програмі, втрачають своє значення при виході з неї.*

Розглянемо, як наступний приклад, проблему обчислення невласного інтеграла. Нескладно переконатися, що спроба підставити нескінченну межу інтеграції не увінчається успіхом. Наприклад: $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

Цей інтеграл система обчислити не змогли, але в символьному вигляді він обчислюється.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}$$

Складемо програму обчислення таких інтегралів.

$$Integral(f,a) := \left| \begin{array}{l} b \leftarrow if(a = 0, 1, a) \\ I \leftarrow 0 \\ W \leftarrow 1 \\ while\ \ |I - W| > TOL \\ \quad \left| \begin{array}{l} W \leftarrow I \\ b \leftarrow b \cdot 2 \\ I \leftarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \end{array} \right. \\ I \end{array} \right.$$

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad Integral(f,0) = 0.886$$

Порівняємо з точним рішенням:

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = 0.886$$

Алгоритм працює, але вибраний найвдаліший, оскільки доводиться багато разів перераховувати інтегральні суми на одному і тому ж діапазоні.

Дуже цікава особливість програмування в Mathcad полягає у тому, що в програмі ми можемо використовувати оператори типу обчислення інтеграла, суми, похідної і т.п.

Вдаліший алгоритм вийде, якщо ми продовжуватимемо інтеграцію від тієї точки, на якій закінчили попередню інтеграцію.

$$Integral(f,a) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow 10 \\ b \leftarrow a + N \\ S \leftarrow 0 \\ R \leftarrow 1 \\ while\ \ |R| > TOL \\ \quad \left| \begin{array}{l} R \leftarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \\ S \leftarrow S + R \\ N \leftarrow N \cdot 2 \\ a \leftarrow b \\ b \leftarrow b + N \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

$$Integral(f,0) = 0.886$$

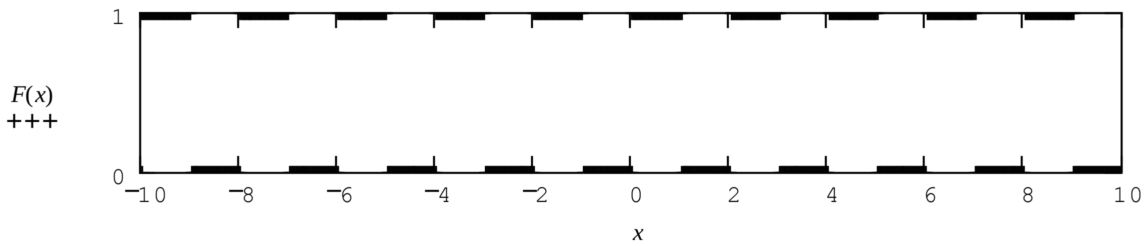
Одержали той же результат, що і не дивно, але алгоритм працює швидше. По наочності тексту, навряд чи будь яка мова програмування порівняється з Mathcad-програмою. Тут, для прискорення роботи програми, ми на кожному кроці подвоюємо інтервал інтеграції.

Можна використовувати програмні можливості Mathcad просто для завдання функцій складнішого вигляду. Наприклад, визначимо функцію, яка дорівнює 1, якщо аргумент розміщений між парним і непарним числом, і 0, якщо інакше.

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \quad if \ (mod(ceil(x), 2) = 0) \\ 1 \quad otherwise \end{array} \right.$$

Функція $ceil(x)$ повертає найближче ціле більше *x*. Наприклад:

$ceil(2.0001) = 3$



Приведемо ще програму перекладу десяткового числа в двійкове уявлення. Тут функція $floor(x)$ - найближче ціле менше *x*. Функція $mod(x, 2)$ - залишок від розподілу за модулем.

$$Binary(N) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow floor\left(\dfrac{ln(N)}{ln(2)}\right) \\ for \ \ i \in 0..p \\ \quad b_i \leftarrow mod\left(floor\left(\dfrac{N}{2^i}\right), 2\right) \\ b^T \end{array} \right.$$

Наприклад:

$Binary(255) = (1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1)$

$Binary(373) = (1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1)$

<u>Примітка: </u>- b^T транспонована матриця, а не ступінь Т.

Заняття 11. Файли даних

1.Файл даних Mathcad повинен бути просто файлом в ASCII форматі, де числа відділяються один від одного або пропусками, або табуляцією, або символом "повернення каретки". Звичайно, у файл записується матриця даних, що має вигляд як таблиця чисел з такою ж кількістю рядків і стовпців, що і початкова матриця.

Функції використовувані для читання і запису даних:

READ(file) - Читати дані, *i := 1 .. N Vi:= READ(“file.dat”)*

WRITE(file) - Писати дані у файл, *i := 1 .. N WRITE(“file”):=Vi*

APPEND(file) - Дописати дані у файл*, i:=1..NAPPEND(“file.dat”):=Vi*

READPRN(file) - Читати матрицю з файлу, A:=READPRN (filename)

WRITEPRN(file) - Писати матрицю у файл, *WRITEPRN(filename):=A*

APPENDPRN(file) - Дописати матрицю у файл, *APPEND(“file.dat”):= A*

2.Представляється, проте, кориснішим мати нагоду обмінюватися даними у форматі електронних таблиць, наприклад, **Excel,** де дані можна підготувати найзручнішим для користувача чином. Така можливість є в меню **Insert\Component**, де ми вибираємо **File Read or Write**, потім **Read from a data source** для читання, або **Write to a data source** для запису файлу, потім кнопка **Далее>, File Format: Excel** і вибір файлу по кнопці **Browse**.

3. Вставка таблиці введення і таблиці висновку.

Для зручності введення даних можна вставити в робочий лист Mathcad таблицю введення, меню **Insert\Component\Input Table**. Матрична змінна описується зліва вгорі. Подвійне клацання миші відкриває таблицю для введення даних, права кнопка миші відкриває контекстне меню, що дозволяє імпортувати дані різних форматів.

$m :=$

1	3
2	4

Аналогічно, компонентом **Output Table**, вставляється таблиця висновку, в якій зручніше проглядати дані і в контекстному меню з'являється можливість експортувати дані в різних форматах. Матрична змінна описується зліва внизу.

o	

m

4.Можна також вставити лист Microsoft Excel командою **Insert\Component\Excel,** вказати змінні для введення і висновку, наприклад *до, m* і дістати доступ до всіх ресурсів ЕТ.

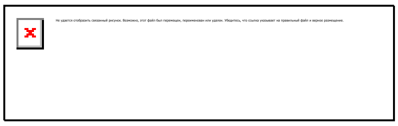
k :=

1	3	
2	4	

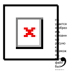
m

Змінювати початкові дані в цій таблиці ми не можемо, проте можемо провести обробку даних засобами Excel.

5. І нарешті, в меню **Insert\Object** можна вставити будь-який об'єкт Windows доступний в даний момент. Наприклад, редактор формул Microsoft Equation, Clip Gallery, WordArt і т.п.



Заняття 12. Розмірності

У Mathcad реалізована можливість використовування змінних з розмірностями , навіть зарезервовані деякі константи з їх розмірностями, наприклад прискорення вільного падіння $g = 9.807\ m\,s^{-2}$. Причому можливий вибір системи одиниць в меню **Math\Options** з переліку: SI, MKS, CGS, US або відмова від вибору розмірностей. При роботі з розмірними величинами ми можемо вводити розмірності вручну після знаку множення, або ж вибрати із списку по команді **Insert\Unit** (Ctrl U) або кнопкою.

Базовими одиницями системи SI є: m - метр (1L), kg - кілограм (1M), s - секунда (1T), До - Кельвін (одиниця температури 1K), A - ампер (одиниця сили струму 1A), cd - Кандела (одиниця сили світла 1C), і mole - міль (кількість речовини 1S).

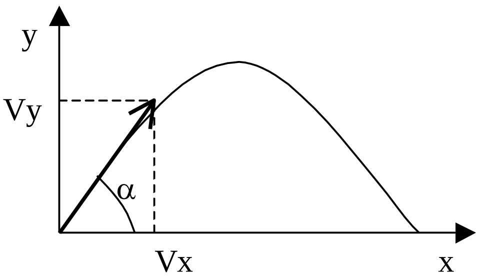
Якщо клацнути мишкою по будь-якому виразу Mathcad, справа з'являється маркер для введення розмірностей. Таким чином можна вводити розмірності, або перетворювати значення з одних одиниць в інші, наприклад:

$l := 1\,ft \qquad l = 0.305\,m$

$l := 1mi \qquad l = 1.609 \times 10^{3}\,\mathrm{m} \qquad l = 5.28 \times 10^{3}\,ft$

Тут ми перетворили фути в метри, а милі в метри і фути.

Потрібно мати на увазі, що при обчисленнях змінних з розмірностями відбувається контроль розмірності операндів і, при розбіжності розмірності, видається повідомлення про помилку.



Ðîçãëÿíåìî, ÿê ïðèêëàä, çàäà÷ó ïðî ò³ëî, êèíóòå ï³ä êóòîì à äî ãîðèçîíòó ç ïî÷àòêîâîþ øâèäê³ñòþ V0=(Vx,Vy).

Íåõàé ïî÷àòêîâà øâèäê³ñòü $V_0 := 500\,\frac{m}{s}$

Êóò ïàä³ííÿ $\alpha := 50deg$

Ð³âíÿííÿ ðóõó:

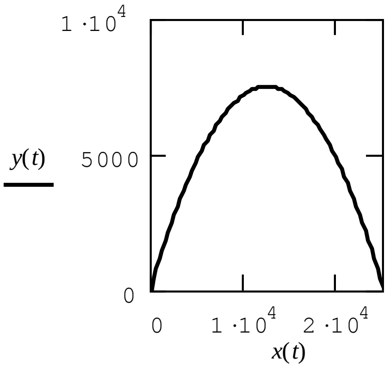
$x(t) := V_0 \cdot cos(\alpha) \cdot t \qquad y(t) := V_0 \cdot sin(\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$

<u>Примітка</u>: *для позначення змінних використовуйте текстовий індекс*.

Для побудови графіка необхідно знайти час руху. Ми можемо скористатися симетрією графіка. Очевидно, що час руху буде удвічі більше часу досягнення максимальної точки траєкторії. А цю точку ми знайдемо з рівності:

$\frac{d}{dx}y(x) = 0$ Âèð³øóºìî öå ð³âíÿííÿ, âðàõîâóþ÷è, ùî ïîõ³äí à ôóíêö³¿ çàäàíà ïàðàìåòðè÷íî.

$$Given \quad \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)} = 0 \qquad t_0 := 2\cdot Find(t) \rightarrow 1000\cdot m\cdot\frac{sin(50\cdot deg)}{g\cdot s} \qquad t_0 = 78.115\ \mathrm{s} \qquad t := 0..t_0 s$$



Ìîæíà çíàéòè ìàêñèìàëüíó â³äñòàíü ïî îñ³ Îõ ³ ìàêñèìàëüíó âèñîòó ï³äéîìó.

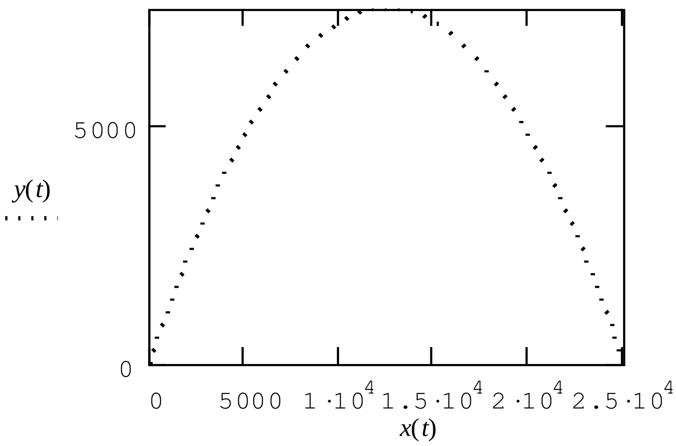
$$x_{max} := x(t_0) \rightarrow 500000\cdot\frac{m^2}{s^2}\cdot cos(50\cdot deg)\cdot\frac{sin(50\cdot deg)}{g}$$

$$y_{max} := y\left(\frac{t_0}{2}\right) \rightarrow 125000\cdot\frac{m^2}{s^2}\cdot\frac{sin(50\cdot deg)^2}{g}$$

$$x_{max} = 2.511\times 10^4\ \mathrm{m} \qquad y_{max} = 7.48\times 10^3\ \mathrm{m}$$

На закінчення, підготуємо невелику анімацію для розглянутої задачі. Для цього підготуємо графік руху, де інтервал зміни змінної t "час" ми задамо з використанням системної змінної **FRAME**. Необхідно явно задати межі зміни змінних. Для x і y координати, вкажемо діапазони (0, x_{max}); (0,y_{max}). Не забудьте тільки вказати одиниці виміру m. Тепер, скористаємося меню **View\Animate...** вкажемо діапазон зміни системної змінної **FRAME** від 0 до 78, виділимо фрагмент для демонстрації і натиснемо на кнопку **Animate**. Проглянувши демонстрацію, її можна зберегти на диску командою **Save As**, або ж змінивши параметри подивитися її знову. Збережену демонстрацію можна викликати з Mathcad у будь-який час командою **View\Playback**...

$t := 0..FRAMEs$

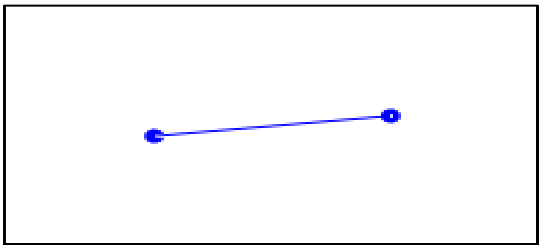


Неважко переконатися, що для анімації необхідно явно указувати верхню межу по осях x і y, для цієї мети ми використовуємо обчислені значення x_{max} і y_{max}. Але не забудемо вказати розмірність.

Реалізований ще один приклад анімації. FRAME міняється від 0 до 100.

Тип графіка вибираємо **3D Scatter Plot** і з'єднаємо одержані точки лінією в меню 3D **Plot Format Color&Lines\Connectivity * Row Order.**

$$g_i := i \cdot cos(i) \qquad h_i := i \cdot sin(i) \qquad k_i := 10 \cdot i$$



(g, h, k)

Збережемо одержану анімацію під ім'ям Торнадо.

<u>Примітка</u>: Mathcad створює анімацію у форматі **AVI-файлу.** Це значить, що і сам Mathcad може відображати анімаційні кліпи формату **AVI** створені іншими додатками, і інші додатки можуть відображати анімації Mathcad.

Повернемося наприклад із Заняття 2 "Побудова гіперболічного параболоїда" і подивимося, як виглядатиме ця фігура в обертанні щодо z - осі.

$$rotate(\theta) := \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$ Ìàòðèöÿ îáåðòàííÿ.

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

$$k := 1..FRAME \qquad i := 0..10 \quad j := 0..10$$

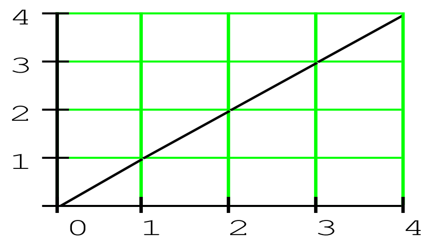
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} := rotate\left(\frac{k}{180} \cdot \pi\right) \cdot \begin{pmatrix} -5 + i \\ -5 + j \end{pmatrix} \qquad M_{i,j} := f\left(x_i, y_j\right)$$

Тепер будуємо графік поверхні і створюємо анімацію, змінюючи змінну FRAME в діапазоні від 1 до 180.Побачимо в динаміці поворот гіперболічного параболоїда на 180 градусів.

Заняття 13. Интерполяция функції двох змінних

За допомогою розглянутого набору функцій можна побудувати інтерполяцію і функції двох змінних. Хай задана функція *z=f(x,y)* у вигляді таблиці значень, у вузлах сітки з рівним кроком на прямокутнику [0, 4; 0, 4]. Хоча крок таблиці може бути довільним.

$$i := 0..4$$



Створимо матрицю розміром *n*2,* рядки якої визначають по діагоналі *x,y* координати прямокутної сітки.

$$Mxy := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Функція задана таблицею значень:

$$Mz := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Обчислимо вектор

$$vs := cspline(Mxy, Mz)$$

Можна обчислити значення функції в будь-якій точці, наприклад, (1.5;2.4).

$$interp\left[vs, Mxy, Mz, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.4 \end{pmatrix}\right] = 4.194$$

Побудуємо потім, у вигляді поверхні, функцію *Mz* і інтерполяцію цієї функції.

Визначимо функцію:

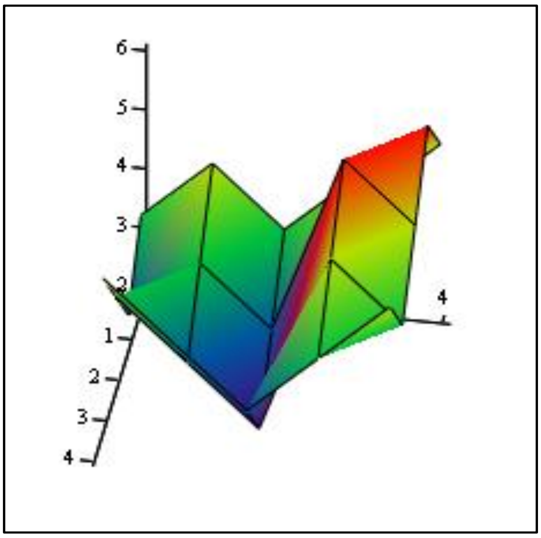
$$f(x, y) := interp\left[vs, Mxy, Mz, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

Задамо дрібніший крок, наприклад 0.1, по обох осях:

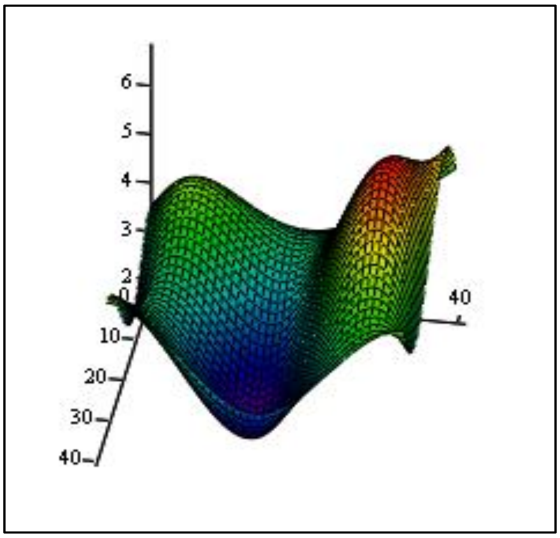
$$i := 0..40 \qquad j := 0..40 \qquad x_i := \frac{i}{10} \qquad y_j := \frac{j}{10}$$

Обчислимо таблицю значень функції:

$$Z_{i,j} := f(x_i, y_j)$$



Mz



Z

З розглянутого прикладу видно роль функцій інтерполяції для обробки даних, що представлені в табличній формі.

Як і у разі інтерполяції функції однієї змінної, для обчислення вектора других похідних тут також використовується набір 3-х функцій: *cspline(Mxy,Mz), pspline(Mxy,Mz), lspline(Mxy,Mz)*. Всі вони повертають вектор других похідних, відповідно, з наближенням на краях поліномом 3-й ступені, 2-й ступені і площиною.

Лінія регресії.

На відміну від інтерполяції, регресія не вимагає, щоб крива неодмінно проходила через всі точки. Навпаки, задача ставиться так: побудувати криву, найбільш близько, в значенні мінімального середньоквадратичного відхилення, що описує даний набір точок.

1. Лінійна регресія (лінія тренда).

Äëÿ òî÷îê äàíèõ, ç ïîïåðåäíüîãî çàíÿòòÿ, íåîáõ³äíî ïîáóäóâàòè ïðÿìó $y=kx+b$, ñóìà êâàäðàò³â â³äõèëåíü âñ³õ òî÷îê â³ä ÿêî¿ áóäå ì³í³ìàëüíîþ.

Ïàðàìåòðè ö³º¿ ïðÿìî¿ ïîâåðòàþòü äâ³ âáóäîâàí³ ôóíêö³¿ Mathcad:
k=slope(vx,vy) - êóòîâèé êîåô³ö³ºíò,
b=intercept(vx,vy) - â³ëüíèé ÷ëåí .

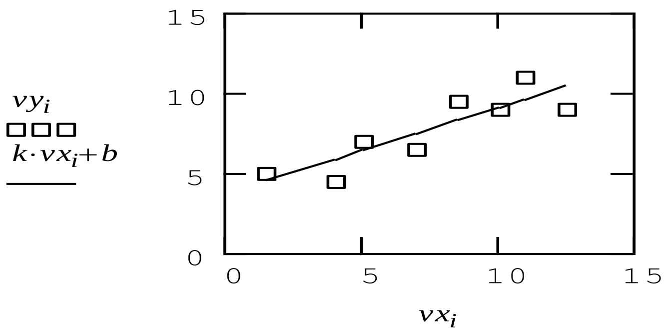
$$k := slope(vx, vy)$$

$$b := intercept\,(vx, vy)$$

$$vx := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8.5 \\ 10 \\ 11 \\ 12.5 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \\ 7 \\ 6.5 \\ 9.5 \\ 9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Неважко переконатися, що сума квадратів відхилень обчисленого значення функції від істинного, буде мінімальна.

$$i := 0 .. rows(vx) - 1 \qquad \sum_i \left(vy_i - k \cdot vx_i - b\right)^2 = 8.824$$



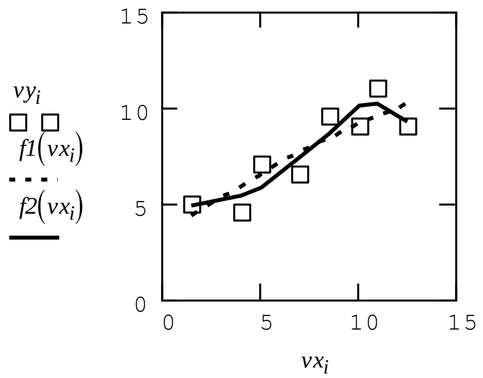
Залежність складнішого вигляду будується просто перетворенням рівняння. Наприклад, гіперболічне рівняння типу $y = \frac{1}{kx+b}$ перетвориться до лінійного вигляду для рівняння $\frac{1}{y} = kx + b$, а експоненціальна залежність $y = ae^{\lambda x}$ приводиться до лінійного вигляду логарифмуванням:

$$ln(y) = ln(a) + \lambda x\ .$$

Поліномінальная регресія.

Для побудови полінома *n-го* порядку, що описує даний набір точок, використовується функція інтерполяції *interp(vs,vx,vy,x),* де *vs* - вектор других похідних обчислюється за допомогою функцій *regress(vx,vy,n)* або *loess(vx,vy,span)*. Відмінність останніх функцій полягає у тому, що перша з них будує поліном *n-го* порядку, а друга, будує декілька таких поліномів, їх кількість визначається величиною останнього параметра *span*. (Нормальним значенням вважається 0.75). Наприклад, для нашого набору точок:

$vs1 := regress(vx, vy, 2) \quad f1(x) := interp(vs1, vx, vy, x) \quad vs2 := loess(vx, vy, 0.75) \quad f2(x) := interp(vs2, vx, vy, x)$



Цей же набір функцій використовується для побудови за допомогою поліномів поверхні, що описує функцію двох змінних. В цьому випадку, інтерпретація аргументів функцій зазнає зміни, так, вектор *vx* перетворюється на матрицю *Mxy* розміром *m*2*, кожен рядок якої містить *x* і *y* координати точки. Аргумент *x* функції *interp* стає двовимірним вектором з *(x, y)* координатами точки. Вектор *vz* - *m-мірний* вектор містить значення змінної *z*.

При використовуванні функції *regress(...)* слід дотримувати правило:

$m > \binom{n+k-1}{k} \cdot \frac{n+k}{n}$, де n - число незалежних змінних,

m - число значень даних, до - ступінь полінома.

Наприклад, для двох незалежних змінних, наближення поліномом 3-го порядку зажадає $m > \left[\binom{2+3-1}{3} \cdot \frac{2+3}{2} = 10 \right]$ значень.

Заняття 14. Багатовимірна поліномінальная регресія

Побудуємо поверхню, згладжуючи поліномом 3-го порядку функцію двох змінних, яка задана двома матрицями:

$$Mxy := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ìàòðèöÿ *x,y* êîîðäèíàò òî÷îê íà ïëîùèí³ *(x,y)*..

$$vz := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

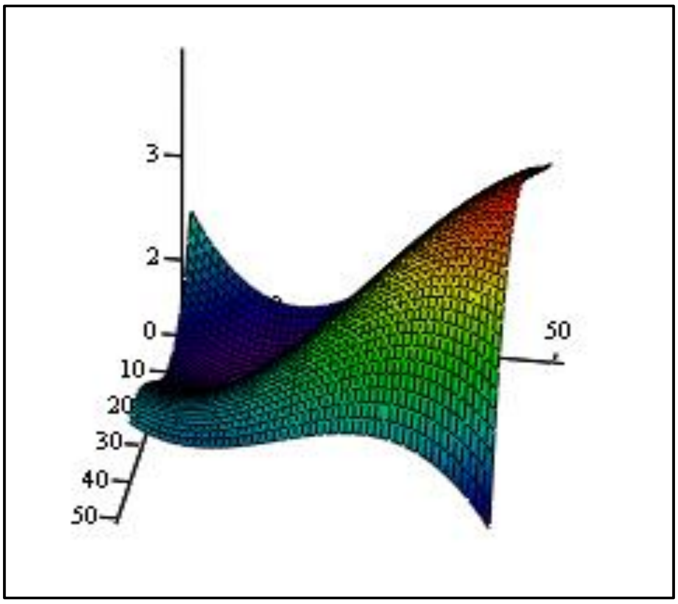
Âåêòîð-ñòîâïåöü *z* - êîîðäèíàòè ôóíêö³¿ , ùî º çíà÷åííÿì, ó â³äïîâ³äí³é òî÷ö³ .

$$vs := regress(Mxy, vz, 3)$$

Âåêòîð äðóãèõ ïîõ³äíèõ äëÿ ïîáóäîâè çãëàäæóþ÷îãî ïîë³íîìà 3-ãî ïîðÿäêó.

Будуємо поверхню:

$$i := 0..50 \quad j := 0..50 \quad x_i := \frac{i}{10} \quad y_j := \frac{j}{10} \quad z_{i,j} := interp\left[vs, Mxy, vz, \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}\right]$$



z

Узагальнена регресія.

На жаль, не завжди лінійна або поліноміальная регресія дозволяє описати залежність даних. Нерідко виникає необхідність описати залежність у вигляді лінійної комбінації довільних функцій, наприклад, у вигляді комбінації синусів і косинусів, як в розкладі Фур'є, або якогось іншого набору функцій. Для вирішення цієї задачі призначена функція узагальненої регресії *linfit(vx,vy,F),* що повертає вектор коефіцієнтів a_0, a_1, ...,.a_n шуканої залежності:

$$y = a_0 \cdot f_0(x) + a_1 \cdot f_1(x) + \,..\, + a_n \cdot f_n(x)$$

Наприклад, знайдемо залежність *y - координати* від *x* у вигляді:

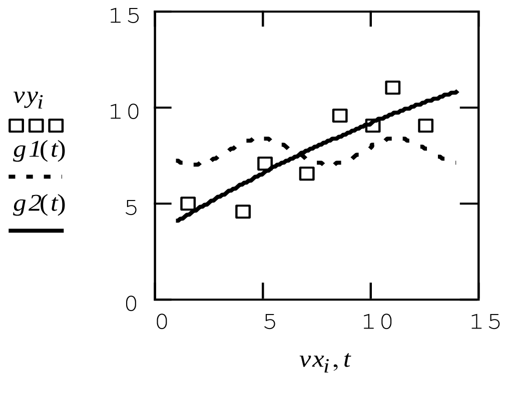
$$y = a_0 + a_1 \cdot sin(x) + a_2 \cdot cos(x)$$

$$vx := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8.5 \\ 10 \\ 11 \\ 12.5 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \\ 7 \\ 6.5 \\ 9.5 \\ 9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ sin(x) \\ cos(x) \end{pmatrix} \quad S := linfit(vx, vy, F) \quad S = \begin{pmatrix} 7.615 \\ -0.66 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

І тут же побудуємо розклад по поліномах Чебишева:

$$F2(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \cdot x^2 - 1 \end{pmatrix} \quad S2 := linfit(vx, vy, F2) \quad S2 = \begin{pmatrix} 3.258 \\ 0.707 \\ -6.156 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$g1(t) := F(t) \cdot S \qquad g2(t) := F2(t) \cdot S2 \qquad i := 0..rows(vx) - 1 \qquad t := 1, 1.1..14$$



Як видно з графіка, представлення даної залежності у вигляді комбінації синуса і косинуса було найвдалішою ідеєю, але розклад по поліномах Чебишева дало вельми пристойний результат.

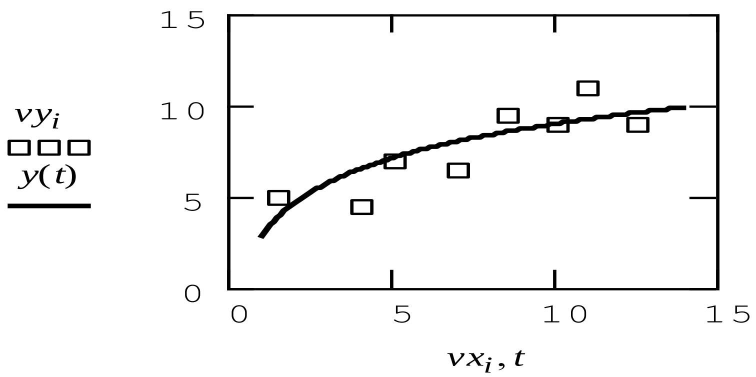
Для вирішення іншої задачі, підбору параметрів функції, що описує дану залежність, призначена інша функція *genfit(vx,vy,vg,F),* яка повертає вектор параметрів функції u_0, u_1, ...,.u_n. Тут вектори *vx,vy* виконують ті ж функції, що раніше, тобто містять значення *x* і *y* координат точки, а *vg*-вектор початкових значень параметрів u_0, u_1, ...,.u_n. n+1 мірний вектор *F(x,u),* який містить функцію *f(x)* і її частинні похідні по параметрах.

Розглянемо ту ж саму задачу, тільки будемо описувати залежність логарифмічною функцією:

$$y = u_0 \cdot ln(u_1 \cdot x)$$

$$F(x,u) := \begin{pmatrix} u_0 \cdot ln(u_1 \cdot x) \\ ln(u_1 \cdot x) \\ \dfrac{u_0}{u_1} \end{pmatrix} \qquad vg := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u := genfit(vx, vy, vg, F) \qquad u = \begin{pmatrix} 2.705 \\ 2.726 \end{pmatrix}$$

$$i := 0 .. rows(vx) - 1 \qquad t := 1, 1.1 .. 14 \qquad y(t) := u_0 \cdot ln(u_1 \cdot t)$$



<u>Функції згладжування.</u>

Згладжування припускає використовування набору значень *y* і повернення нового набору *y,* який є гладшим, ніж початковий набір. Є набір з 3-х функцій, що реалізовують різний алгоритм згладжування:

medsmooth(vy,n) - метод ковзаючої медіани,

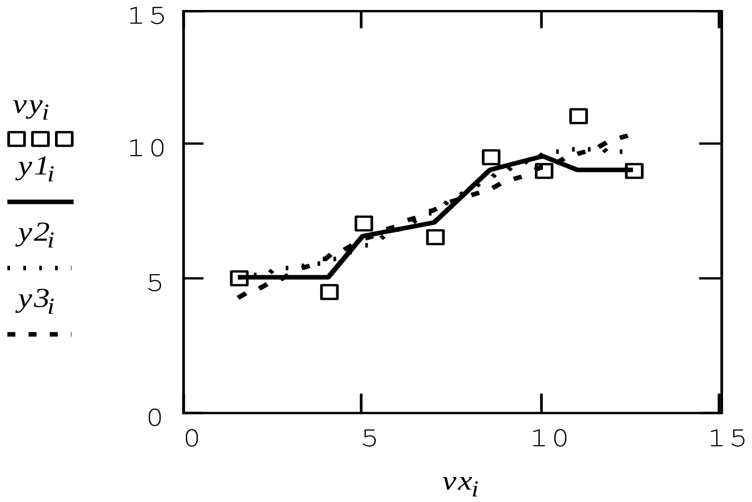
ksmooth(vx,vy,b) - метод Гауса,

supsmooth(vx,vy) - метод найменших квадратів.

Всі ці функції повертають новий набір значень функції. *n* - ширина вікна згладжування, *b* - параметр згладжування (повинен бути більше інтервалу між точками).

Наприклад:

$$y1 := medsmooth(vy, 3) \qquad y2 := ksmooth(vx, vy, 4) \qquad y3 := supsmooth(vx, vy)$$



Який з методів згладжування даних вибрати, залежить від умов конкретної задачі.

Відмінність згладжування функції, яка задана у виді таблиці від побудови лінії регресії полягає у тому, що в останньому випадку шукають параметри функціональної залежності, а набір точок може бути представлений як її наближені значення. При згладжуванні ж, один набір значень замінюється іншим, але які належать гладшим кривих.

Порядок виконання лабораторних робіт

Вправа 1. Побудувати графік функції $f(x)$ (табл. 1) і приблизно визначити один з коренів рівняння. Вирішити рівняння $f(x)= 0$ з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ за допомогою убудованої функції Mathcad *root*;

Таблиця 1

Варіанти вправи 1

№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$
1	$e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0,\ 1]$	**9**	$0,25x^3 + x - 2$ $x \in [0,\ 2]$
2	$x - \dfrac{1}{3 + \sin(3,6x)}$ $x \in [0,\ 1]$	**10**	$\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - x$ $x \in [2,\ 3]$
3	$\arccos x - \sqrt{1 - 0,3x^3}$ $x \in [0,\ 1]$	**11**	$3x - 4\ln x - 5$ $x \in [2, 4]$
4	$\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin x$ $x \in [0,\ 1]$	**12**	$e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0, 1]$
5	$3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1, 3]$	**13**	$\sqrt{1-x} - \operatorname{tg} x$ $x \in [0, 1]$
6	$\sqrt{2x^2 + 1,2 - \cos x} - 1$ $x \in [0,\ 1]$	**14**	$1 - x + \sin x - \ln(1 + x)$ $x \in [0, 2]$
7	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}$ $x \in [1, 2]$	**15**	$x^5 - x - 0,2$ $x \in [1,\ 2]$
8	$0,1x^2 - x\ln x$ $x \in [1,\ 2]$		

Вправа 2. Для полінома $g(x)$ (табл. 2) виконати наступні дії:

1) за допомогою команди **Символи ⇒ Коефіцієнти полінома** створити вектор *V*, що містить коефіцієнти полінома;
2) вирішити рівняння $g(x) = 0$ за допомогою функції *polyroots*;
3) вирішити рівняння символьно, використовуючи команду **Символи⇒Змінні ⇒ Обчислити**.

Таблиця 2

Варіанти вправи 2

№ варианта	$g(x)$	№ варианта	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

<u>Вправа 3.</u> Вирішити систему лінійних рівнянь (табл. 3):

1) використовуючи функцію *Find*;
2) матричним способом і використовуючи функцію *lsolve*.

Таблиця 3

Варіанти вправи 3

№ варіанта	Система лінійних рівнянь	№ варіанта	Система лінійних рівнянь
1	$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=8 \\ 3x_1+3x_3=6 \\ 2x_1-x_2+3x_4=4 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=-4 \\ x_1-3x_2-6x_4=-7 \\ 2x_2-x_3+2x_4=2 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=-2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=22 \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=17 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=8 \\ x_1-2x_3-3x_4=-7 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=26 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=34 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=26 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=26 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1+10x_2-7x_3-x_4=23 \\ 7x_1-x_3-5x_4=37 \\ 5x_1-2x_3+x_4=22 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=26 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} 2x_1-8x_2-3x_3-2x_4=-18 \\ x_1-2x_2+3x_3-2x_4=28 \\ x_2+x_3+x_4=10 \\ 11x_2+x_3+2x_4=21 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6x_1-x_2+10x_3-x_4=158 \\ 2x_1+x_2+10x_3+7x_4=128 \\ 3x_1-2x_2-2x_3-x_4=7 \\ x_1-12x_2+2x_3-x_4=17 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+x_4=66 \\ 2x_2-6x_3+x_4=-63 \\ 8x_1-3x_2+6x_3-5x_4=146 \\ 2x_1-7x_2+6x_3-x_4=80 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1-2x_2+6x_3+x_4=88 \\ 5x_1+2x_3-3x_4=88 \\ 7x_1-3x_2+7x_3+2x_4=181 \\ 3x_1-7x_2+5x_3+2x_4=99 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} 2x_1-3x_3-2x_4=-16 \\ 2x_1-x_2+13x_3+4x_4=213 \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=72 \\ x_1-12x_3-5x_4=-159 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1-2x_2-8x_4=-7 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=-8 \\ x_1+x_2-5x_3+x_4=-10 \\ 2x_1-x_2+2x_4=7 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 7x_1+7x_2-7x_3-2x_4=5 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+8x_4=60 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=27 \\ 2x_1-2x_3-x_4=-1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1+2x_2+6x_3+x_4=15 \\ -x_2+2x_3+x_4=18 \\ 4x_1-3x_2+x_3-5x_4=37 \\ 3x_1-5x_2+x_3-x_4=30 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 6x_1-9x_2+5x_3+x_4=124 \\ 7x_2-5x_3-x_4=-54 \\ 5x_1-5x_2+2x_3+4x_4=83 \\ 3x_1-9x_2+x_3+6x_4=45 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x_1-5x_2+7x_3+5x_4=165 \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=-15 \\ 9x_1+4x_3-x_4=194 \\ x_1-x_2-2x_3-3x_4=-19 \end{cases}$		

Вправа 4. Перетворити нелінійні рівняння системи з таблиці 4 до виду $f_1(x)=y$ і $f_2(y)=x$. Побудувати їхні графіки і визначити початкове наближення рішення. Вирішити систему нелінійних рівнянь за допомогою функції *Minerr*.

Таблиця 4

Варіанти вправи 4

№ варіанта	Система нелінійних рівнянь	№ варіанта	Система нелінійних рівнянь
1	$\begin{cases}\sin x + 2y = 2,\\ \cos(y-1) + x = 0{,}7.\end{cases}$	**9**	$\begin{cases}\sin y + x = -0{,}4,\\ 2y - \cos(x+1) = 0.\end{cases}$
2	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5) - y = 1,\\ \cos(y-2) + x = 0.\end{cases}$	**10**	$\begin{cases}\sin(x+2) - y = 1{,}5,\\ \cos(y-2) + x = 0{,}5.\end{cases}$
3	$\begin{cases}\cos x + y = 1{,}5,\\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1.\end{cases}$	**11**	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) - y = 2,\\ \sin y - 2x = 1.\end{cases}$
4	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8,\\ \sin y - 2x = 1{,}6.\end{cases}$	**12**	$\begin{cases}\cos(x-2) + y = 0,\\ \sin(y+0{,}5) - x = 1.\end{cases}$
5	$\begin{cases}\sin(x-1) = 1.3 - y,\\ x - \sin(y+1) = 0.8.\end{cases}$	**13**	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 1,\\ \sin(y+0{,}5) - x = 1.\end{cases}$
6	$\begin{cases}\cos(x+0{,}5) + y = 1,\\ \sin y - 2x = 2.\end{cases}$	**14**	$\begin{cases}\sin(x) - 2y = 1,\\ \cos(y+0{,}5) - x = 2.\end{cases}$
7	$\begin{cases}-\sin(x+1) + y = 0{,}8,\\ \sin(y-1) + x = 1{,}3.\end{cases}$	**15**	$\begin{cases}2y - \sin(x-0{,}5) = 1,\\ \cos(y) + x = 1{,}5.\end{cases}$
8	$\begin{cases}\sin(x) - 2y = 1,\\ \sin(y-1) + x = 1{,}3.\end{cases}$		

Вправа 5. Знайти первісну аналітично заданої функції $f(x)$ (табл. 4), використовуючи операцію **Символи ⇒ Змінні ⇒ Інтеграція**.

Вправа 6. Визначити символьне значення першої і другої похідних $f(x)$ (Таблиця 4), використовуючи команду **Символи⇒ Змінні ⇒ Диференціали**.

Таблиця 5

Варіанти вправ 5 і 6

№ варіанта	$f(x)$	№ варіанта	$f(x)$	№ варіанта	$f(x)$
1	$1/(\mathrm{tg}2x+1)$	**6**	$x^2 \cdot \mathrm{arctg}(x/3)$	**11**	$(2x+3)\sin x$
2	$\cos x/(2x+5)$	**7**	$e^{2x}\sin 3x$	**12**	$\cos 3x/(1-\cos 3x)^2$
3	$1/(x\sqrt{x^3+4})$	**8**	$\mathrm{ctg}2x/(\sin 2x)^2$	**13**	$1/(1+x+x^2)$
4	$\sin x/(1+\sin x)$	**9**	$(x+1)\sin x$	**14**	$(1+x)/(2+x)$
5	$x^2 \cdot \lg(x+2)$	**10**	$5x + x\lg x$	**15**	$\sqrt{1+e^{-x}}$

Додаток 1

Системні змінні

Нижче наведені системні змінні і константи Mathcad з їхніми значеннями за замовчуванням.

π = 3,14159 ...	Число π. У чисельних розрахунках Mathcad використовує значення π з обліком 15 значущих цифр. У символьних обчисленнях π зберігає своє точне значення
e = 2,71828 ...	Основа натуральних логарифмів. У чисельних розрахунках Mathcad використовує значення *e* з обліком 15 значущих цифр. У символьних обчисленнях *e* зберігає своє точне значення
∞	Нескінченність. У чисельних розрахунках це задане велике число (10^{307}). У символьних обчисленнях — нескінченність
% = 0,01	Відсоток. Використовується у виразах, подібних 10%, або множник, що маштабується у полі, що відводиться для одиниць розмірностей
TOL = 10^{-3}	Похибка, що допускається, для різних алгоритмів апроксимації (інтегрування, рішення рівнянь, і т.д.)
CTO = 10^{-3}	Похибка, що допускається, для рівностей і нерівностей, що входять у рішення оптимізаційних задач з обмеженнями
ORIGIN = 0	Визначає індекс першого елемента векторів і матриць
PRNCOLWIDTH = 8	Ширина стовпця, що використовується при записі файлів функцією WRITEPRN.
PRNPRECISION = 4	Число значущих цифр, що використовується при записі файлів функцією WRITEPRN
FRAME = 0	Використовується як лічильник кадрів при створенні анімацій
in*n*=0, out*n*=0	Змінні вводу і виводу в Mathcad-компонентах у середовищі MathConnex (інструмент, що входить до складу Mathcad і дозволяє інтегрувати Mathcad, MatLab і Excel)
CWD	Текстова змінна, що зберігає адресу поточного документу на диску (див. мал. 1.30)

Додаток 2

Показові і логарифмічні функції

exp(z**)** –експонентна функція (чи e^z)
ln(z**)** –натуральний логарифм (по підставі e)
log(z**)** –десятковий логарифм (по підставі 10)

Функції роботи з частиною числа (округлення й ін.)

Re(z**)** –виділення дійсної частини z
Im(z**)** –виділення мнимої частини z
arg(z**)** –обчислення аргументу (фази)
floor(x**)** –найбільше ціле, менше чи рівне x
ceil(x**)** –найменше ціле, більше чи рівне x
mod(x,y**)** –залишок від розподілу x/y зі знаком x
agle(x,y**)** –позитивний кут з віссю x для точки з координатами (x,y)

Додаток 3

Внутрішні функції

Тригонометричні функції

sin(z**)** –синус
csc(z**)** –косеканс
cos(z**)** –косинус
sec(z**)** –секанс
tan(z**)** –тангенс
cot(z**)** –котангенс

Гіперболічні функції

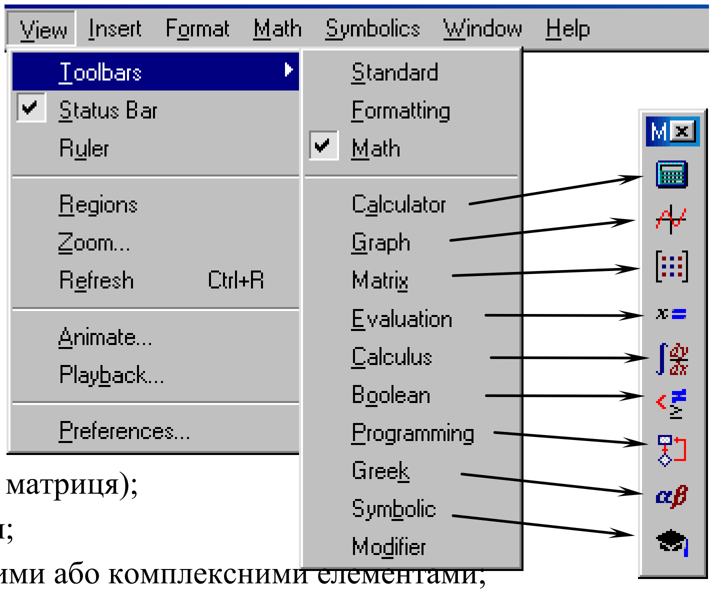
sinh(z**)** –гіперболічний синус
tanh(z**)** –гіперболічний тангенс
csch(z**)** –гіперболічний косеканс
cosh(z**)** –гіперболічний косинус
sech(z**)** –гіперболічний секанс
coth(z**)** –гіперболічний котангенс

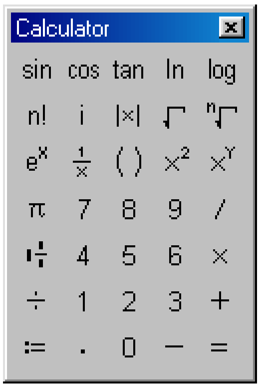
Обернені тригонометричні функції

Asin(z**)** –обернений тригонометричний синус
acos(z**)** –обернений тригонометричний косинус
atan(z**)** –обернений тригонометричний тангенс

Вбудовані оператори Mathcad

View ⇒ Toolbars, **View ⇒ Toolbars ⇒ Math.**

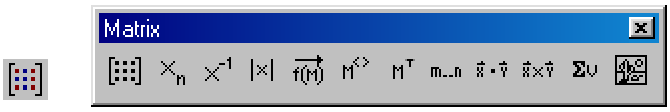


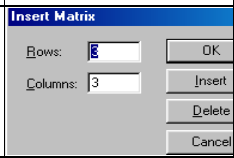


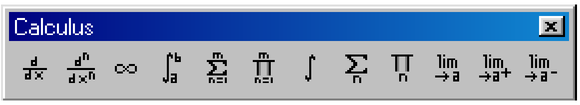
Позначення:
M – масив (вектор або матриця);
A – квадратна матриця;
u i v – вектори з дійсними або комплексними елементами;
z i w – дійсні або комплексні числа;
x i y – дійсні числа;
m, n i k – цілі числа;
i, j – індекси масивів;
f – функція, t – аргумент функції;
S – текстові (стрингові) змінні;
X i Y – змінні або вирази будь-якого типу.

Оператор		Кнопка панелі	Клавішне сполучення	Шаблон Mathcad	Примітка
Дужки	(X)	( )	'	(■)	
Додавання	$X + Y$	+	+	■ + ■	
Додавання з лінією розриву	$X \ldots$ $+ Y$	немає	X [Ctrl][↵]	X … + ■	[Ctrl][↵] – лінія розриву сторінки
Заперечення, вирахування	$-X$, $X - Y$	−	–	−■	
Множення	$X \cdot Y$	×	*	■·■	Для векторів – скалярне
Ділення	$\dfrac{X}{z}$	/	/	$\dfrac{■}{■}$	$z \neq 0$
Ділення у рядок	$X \div z$	÷	[Ctrl] /	■ ÷ ■	
Факторіал	$n!$	n!	!	■!	$n! = \begin{cases} 1\cdot 2 \cdot K \cdot n, & n \in N; \\ 0, & n = 0. \end{cases}$
Комплексне спряження	$\overline{X}$	немає	X “	$\overline{X}$	« – вставка текстової області
Модуль числа, модуль вектора, визначник квадратної матриці	|z|, |v|, |A|	|x|	|	|■|	$\|z\| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{v}}}$, $\|A\| = \det A$
Корінь квадратний	$\sqrt{z}$	√	\	√■	

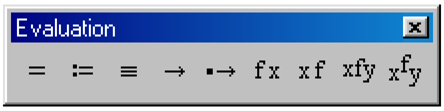
Корінь *n-го* ступеня	$\sqrt[n]{z}$		[Ctrl] \		$n \in N$
Обернена величина	$\frac{1}{z}, \ \frac{1}{A}$		1 /	$^{-1}$	При z, $\det A \neq 0.\ \frac{1}{A} = A^{-1}$
Зведення в ступінь	$z^w, \ A^n$		^		$z^w = \lvert z \rvert^w \cdot \exp(\pi \cdot i \cdot w)$
Дорівнює	=		=	■ = ■■	Висновок результату (не символьного)
Присвоювання	$z :=, M :=, \mathbf{v}_i :=,$ $M_{i,j} :=, M^{\langle j \rangle} :=,$ $f(t,K) :=$		:	■ := ■	Визначення змінної, масиву, елемента або стовпця масиву, функції.
Змішаний дріб	$k\frac{m}{n}$		[Ctrl] +		$m \geq 0, n > 0$



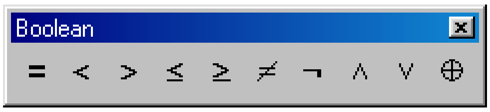
Оператор		Кнопка панелі	Клавішне сполучення	Шаблон Mathcad	Примітка
Вставка масиву			[Ctrl] M		Масив: вектор або матриця
Індекс масиву	v_n $\mathrm{M}_{i,j}$		[		
Ранжирувана змінна	$x_1 .. x_n$ $x_1, x_2 .. x_n$		;	■..■	1) крок (різниця прогресії) 1 2) крок $x_2 - x_1$
Скалярний добуток векторів	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$		*	■·■	Ідентично дії кнопки × на панелі калькулятора
Векторний добуток векторів	$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$		[Ctrl] 8	■ × ■	**u** і **v** – 3-мірні вектори
Сума елементів вектора	$\sum \mathbf{v}$		[Ctrl] 4	$\sum$■	$\sum \mathrm{v} = \sum_{\mathrm{i = ORIGIN}}^{\mathrm{last(v)}} \mathrm{v_i}$
Зворотна матриця	A^{-1}		^ - 1	■$^{-1}$	$\det A \neq 0,\ A^{-1} = \frac{1}{A}$
Модуль числа, модуль вектора, визначник квадратної матриці	|z|, |v|, |A|		|	|■|	$\lvert z \rvert = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$, $\lvert \mathbf{v} \rvert = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{v}}}$, $\lvert A \rvert = \det A$
Стовпець матриці	$M^{\langle n \rangle}$		[Ctrl] 6	■$^{\langle ■ \rangle}$	Повертає *n-ий* стовпець матриці *M*
Транспонування	M^{T}		[Ctrl] 1	■$^{\mathrm{T}}$	
Векторизация	$\overrightarrow{f(M,...)}$		[Ctrl] -		Рівнобіжні обчислення
Малюнок	M		[Ctrl] T		0 – чорний, 255 – білий.

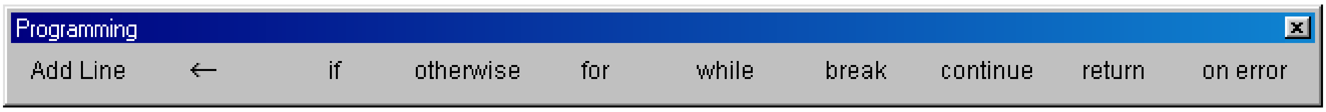
Оператор		Кнопка панелі	Клавішне сполучення	Шаблон Mathcad	Примітка
Сума	$\sum_{i=m}^{n} X$		[Ctrl] $	$\sum_{■=■}^{■} ■$	
Добуток	$\prod_{i=m}^{n} X$		[Ctrl] #	$\prod_{■=■}^{■} ■$	
Сума за ранжируваною змінною	$\sum_{i} X$		$	$\sum_{■} ■$	
Добуток за ранжируваною змінною	$\prod_{i} X$		#	$\prod_{■} ■$	
Визначений інтеграл	$\int_{a}^{b} f(t)$		&	$\int_{■}^{■} ■ \, d■$	
Невизначений інтеграл	$\int f(t)dt$		[Ctrl] i	$\int ■ \, d■$	Символьний результат
Похідна	$\frac{d}{dt} f(t)$		?	$\frac{d}{d■} ■$	
n-а похідна	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$		[Ctrl] ?	$\frac{d^{■}}{d■^{■}} ■$	$n \ge 0;\quad \frac{d^0}{dt^0} f(t) = f(t)$
Границя функції	$\lim_{t \to a} f(t)$		[Ctrl] *l*	$\lim_{■ \to ■} ■$	Символьний результат
Правобічна границя	$\lim_{t \to a^+} f(t)$		[Ctrl] [Shift] A	$\lim_{■ \to ■^+} ■$	Символьний результат
Лівобічна границя	$\lim_{t \to a^-} f(t)$		[Ctrl] [Shift] B	$\lim_{■ \to ■^-} ■$	Символьний результат
Нескінченність	∞		[Ctrl] [Shift] Z	∞	$\infty = 1 \times 10^{307} \quad \infty \to \infty$

Оператор		Кнопка панелі	Клавішне сполучення	Шаблон Mathcad	Примітка
Дорівнює	$X =$	=	=	■ = ■ ■	Висновок результату (не символьного)
Присвоювання	$X :=$	:=	:	■ := ■	Визначення змінної, масиву, функції.
Глобальне присвоювання	$X \equiv$	≡	~	■ ≡ ■	a = 3 a := 1 a = 1 a ≡ 2 a = 2 a ≡ 3
Символьне дорівнює	$X \to$	→	[Ctrl] .	■ →	Висновок символьного результату
Символьне дорівнює з ключовим словом	X kword →	■→	[Ctrl] >	■ ■ →	Keyword – Ключове слово символьного оператора
Префіксний оператор	f x	f x	немає	■ ■	Ім'я ліворуч, операнд праворуч
Постфіксний оператор	x f	x f	немає	■ ■	Ім'я праворуч, операнд ліворуч
Інфіксний оператор	x f y	xfy	немає	■ ■ ■	Ім'я в середині, операнди ліворуч і праворуч
Деревоподібний оператор	x ^{f} y	x^{f}y	немає		Ім'я в середині зверху, операнд ліворуч і праворуч

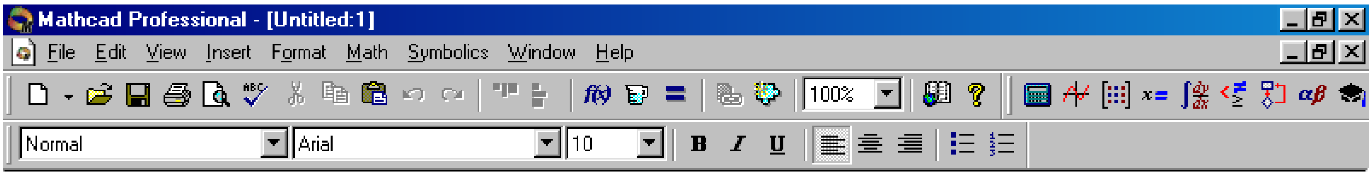


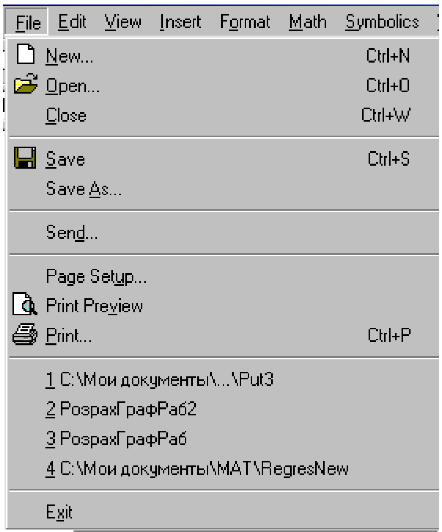
Оператор		Кнопка панелі	Клавішне сполучення	Шаблон Mathcad	Примітка				
Більше	x > y, S1 > S2	>	>	▪ > ▪					
Менше	x < y, S1 < S2	<	<	▪ < ▪					
Більше або дорівнює	x ≥ y, S1 ≥ S2	≥	[Ctrl] 0	▪ ≥ ▪					
Менше або дорівнює	x ≤ y, S1 ≤ S2	≤	[Ctrl] 9	▪ ≤ ▪					
Не дорівнює	z ≠ w, S1 ≠ S2	≠	[Ctrl] 3	▪ ≠ ▪					
Жирне дорівнює	z = w	=	[Ctrl] =	▪ = ▪					
Логічне і	x ∧ y	∧	[Ctrl] &	▪ ∧ ▪	x	1	1	0	0
					y	1	0	1	0
					x ∧ y	1	0	0	0
Логічне або	x ∨ y	∨	[Ctrl] ^	▪ ∨ ▪	x	1	1	0	0
					y	1	0	1	0
					x ∨ y	1	1	1	0
Що виключає або	x ⊕ y	⊕	[Ctrl] %	▪ ⊕ ▪	x	1	1	0	0
					y	1	0	1	0
					x ⊕ y	0	1	1	0
Логічне немає	¬ x	¬	[Ctrl] !	¬▪	x	1	0		
					¬ x	0	1		

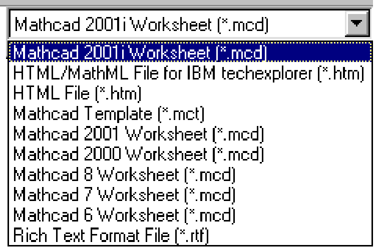


Оператор	Кнопка панелі	Клавішне сполучення	Шаблон Mathcad	Примітка
Локальне присвоювання	←	{	▪ ← ▪	Діє тільки в тілі програмного модуля
Додавання рядка	Add Line	]	| ▪ ▪	Розширення або розгалуження програмного модуля
Умовний оператор	if	}	▪ if ▪	Ліворуч – вираз, праворуч – умова
Альтернатива умові	otherwise	[Ctrl] }	▪ otherwise	Ліворуч – альтернатива умові попереднього оператора
Цикл за змінною	for	[Ctrl] "	for ▪ ∈ ▪ ▪	Ліворуч – змінна циклу; праворуч – ранжирувана змінна, вектор, список; знизу – тіло циклу
Цикл за умовою	while	[Ctrl]]	while ▪ ▪	Праворуч – логічна умова; знизу – тіло циклу
Переривання	break	[Ctrl] {	break	Переривання і вихід з циклу
Продовження	continue	[Ctrl] [	continue	Переривання ітерації і перехід до наступної
Повернення	return	[Ctrl] |	return ▪	Переривання програми і повернення значення аргументу
Альтернатива помилці	on error	[Ctrl] '	▪ on error ▪	Ліворуч – альтернатива правому аргументу на випадок помилки

Команди меню Mathcad







Меню **File (Файл):**

New…[Ctrl-N][F7](Створити) – відкрити вікно для нового документа. Кнопка і команда не адекватні: при натисканні на кнопку створюється «нормальний» Mathcad-документ, при подачі команд викликається вікно зі списком шаблонів (бланків) документів (вбудованих і користувацьких).

Open... [Ctrl-O] [F5] (Відкрити...) – відкрити існуючий документ.

Close [Ctrl-F4] (Закрити) – закрити документ.

Save [Ctrl-S] [F6] (Зберегти) – зберегти на диску поточний документ зі старим ім'ям, на старому місці і зі старим форматом.

Save As... (Зберегти як...) – зберегти на диску поточний документ під новим ім'ям і/або на новому місці (у новій папці). Крім того, дана команда дозволяє зберегти Mathcad-документ у наступних форматах:

Send... (Послати пошту...) – відправити поточний документ по електронній пошті.

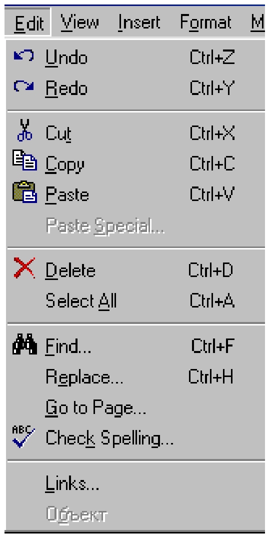
Page Setup... (Параметри сторінки...) – установити лівий і правий відступи на сторінці, а також інші параметри.

Print Preview... (Перегляд...) – попередній перегляд документа перед печаткою.

Print... [Ctrl-P] (Печатка...) – роздрукувати документ.

Далі розташовується список імен файлів, з якими користувач працював останнім часом і які можна швидко викликати.

Exit [Alt-F4] (Вихід) – вийти із середовища Mathcad.



Меню Edit (Виправлення):

Undo [Ctrl-Z] [Alt-BkSp] (Скасувати зміни) – скасувати останнє редагування (відкіт).

Redo [Ctrl-Y] (Відновити скасоване) – скасувати останнє скасування редагування (накат).

Cut [Ctrl-X] (Вирізати) – перемістити виділене в Clipboard (у Буфер обміну).

Copy [Ctrl-C] (Копіювати) – скопіювати виділене в Clipboard (у Буфер обміну).

Paste [Ctrl-V] (Вставити) – вставити данні з Clipboard (з Буферу обміну) у документ.

Paste Special... (Спеціальна вставка...) – уставити данні з Clipboard (з Буферу обміну) у різному форматі (формат Mathcad або BITMAP, наприклад) або зі зв'язком DDE (Dynamic Data Exchange – динамічний обмін даними).

Delete... [Ctrl-D] (Видалити...) – видалити виділену область у документі (аналогічно можна надійти, виділивши потрібну область у документі за допомогою миші і натиснувши клавішу Del).

Select All... [Ctrl-A] (Виділити усі...) – виділити усі в документі.

Find... [Ctrl-F] (Знайти...) – знайти заданий текстовий або математичний рядок.

Replace... [Ctrl-H] [Shift-F5] (Замінити...) – знайти і замінити математичний або текстовий рядок.

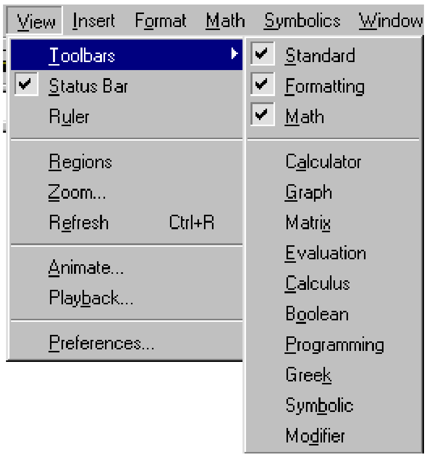
Go to Page... (Перейти до сторінки) – розташувати початок зазначеної сторінки в початок робочого вікна Mathcad.

Check Spelling... (Орфографія...) – перевірка англійської орфографії.

Links... (Зв'язку...) – редагувати OLE- і DDE-зв'язку в документі.

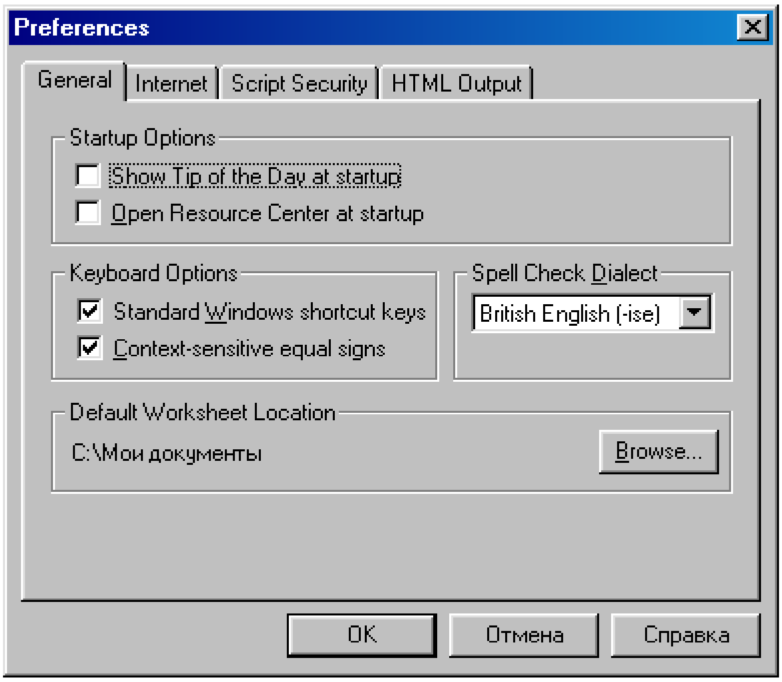
Об'єкт – операції редагування з вставленим у Mathcad-документ OLE-об'єктом.

Меню View (Вид)

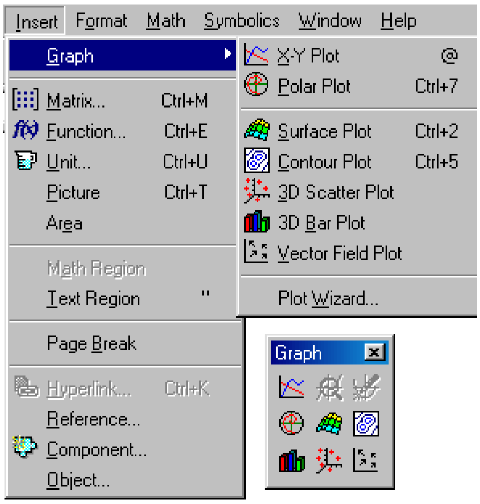


Toolbars (Панелі інструментів) – забрати/показати наступні панелі інструментів:
· Standard (стандартна);
· Formatting (форматування);
· Math (математична), а через неї наступні:
· Calculator (калькулятор);
· Graph (графіка);
· Matrix (вектори і матриці);
· Evaluation (виразу);
· Calculus (обчислення);
· Programming (програмування);
· Greek (грецькі букви);
· Symbolic (символьна математика);
· Modifier (додаткові установки символьних перетворень).

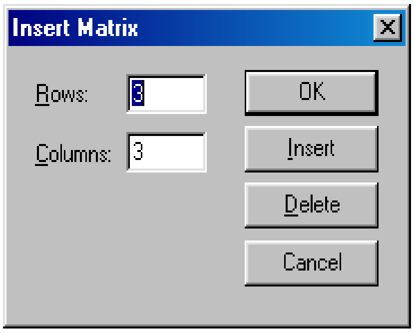
Status Bar (Панель статусу) – забрати/показати панель статусу
Ruler – лінійка розмітки.
Regions (Регіони) – виділити всі області в документі.
Zoom... (Масштаб...) – змінити масштаб зображення робочого документа.
Refresh [Ctrl-R] (Обновити) – перемалювати екран.
Animate... (Анімація) – створити анімаційний кліп.
Playback... (Відтворити...) – відтворити анімаційний кліп.
Preferences…(Попередні установки...) – установка наступних режимів роботи Mathcad:
· показ «Ради дня»;
· автоматичний запуск «Центра ресурсів»;
· установка стандартної для Windows розкладки «гарячих клавіш»;
· «кмітливий» оператор висновку чисельного значення змінної – якщо змінна не визначена, то оператор висновку перетворюється в оператор уведення (присвоювання значення змінних);
· параметри настроювання Internet.



Меню Insert (Вставка):

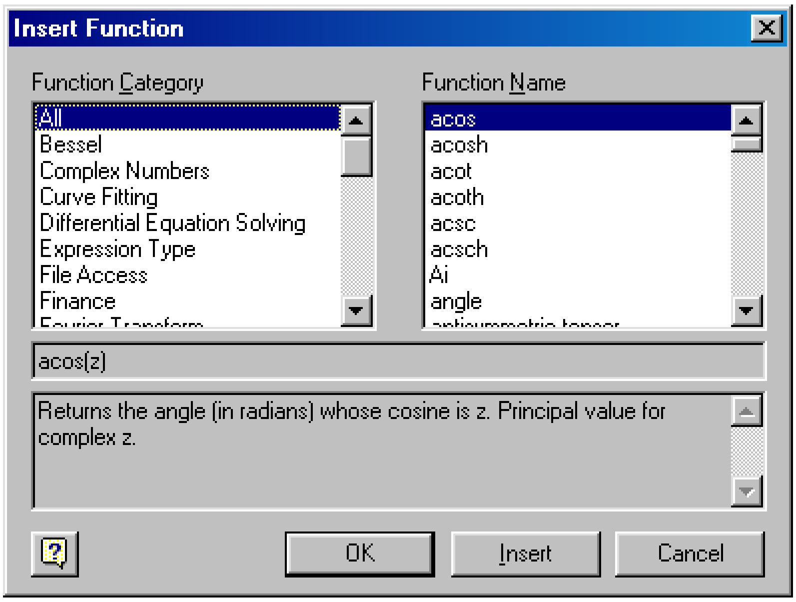


Graph... (Графіки...) – побудова графіків:
X-Y Plot @ (декартов графік) – створити двомірний декартов графік.
Polar Plot [Ctrl-7] (полярний графік) – створити двомірний графік у полярних координатах.
Surface Plot [Ctrl-2] (Графік поверхні) – створити тривимірний графік.
Contour Plot [Ctrl-5] (Карта ліній рівня) – створити контурного графіка.
3D Scatter Plot (Графік розсіювання) – створити тривимірну діаграму.
3D Bar Plot (Тривимірна гістограма) – створити зображення сукупності стовпчиків у тривимірному просторі.
Vector Field Plot (Векторне поле) – накреслити векторне поле на площині.
3D Plot Wizard…–майстер тривимірних діаграм.



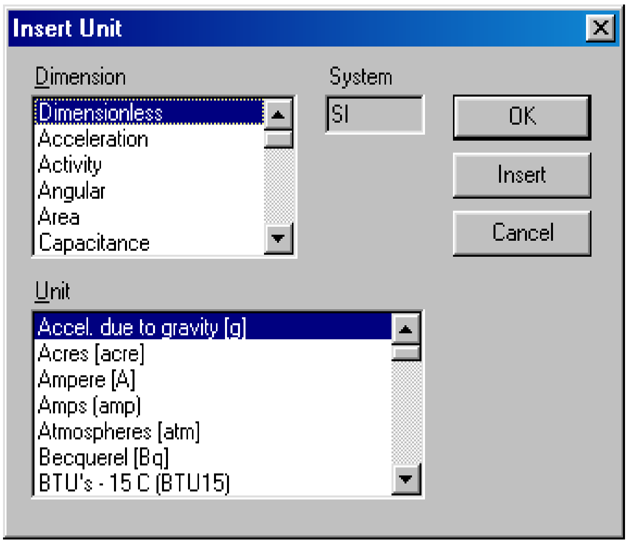
Matrix... [Ctrl-M] (Матриці.) – створити матрицю (вектор) або змінити розміри матриці (вектора). Обмеження по цій команді – у масиві може бути не більш 100 елементів. Але Mathcad дозволяє працювати з матрицями, що містять до 8 мільйонів елементів.

Function... [Ctrl-E] (Вставити функцію...) –



показати список прокрутки (діалогове вікно) наявних функцій.

Units... [Ctrl-U] (Одиниці...) – вставити одиниці вимірів.



Picture [Ctrl-T] (Малюнок) – створити область для малюнка.

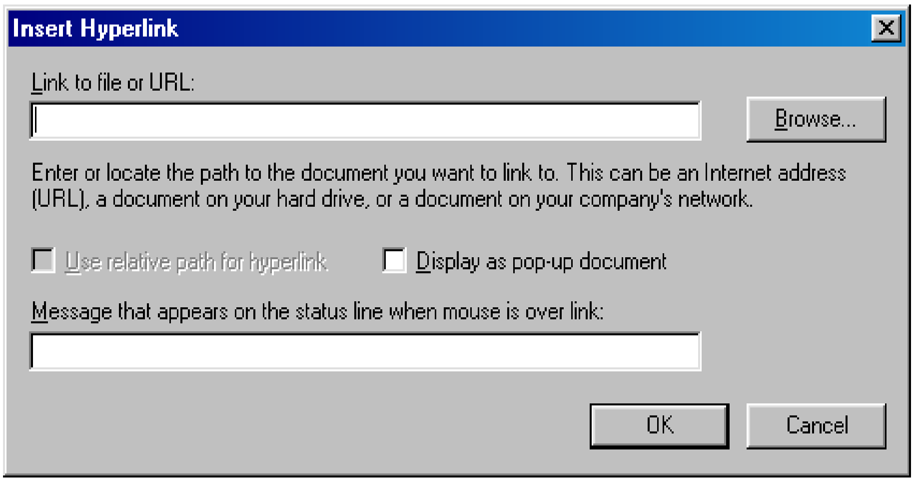
Area (Область) – вставити в Mathcad-документ границі початку і кінця області, до якого можуть бути застосовані команди захисту, що зберігаються в меню Format.

Math Region (Математична область) – вставка в текстовий коментар математичної області.

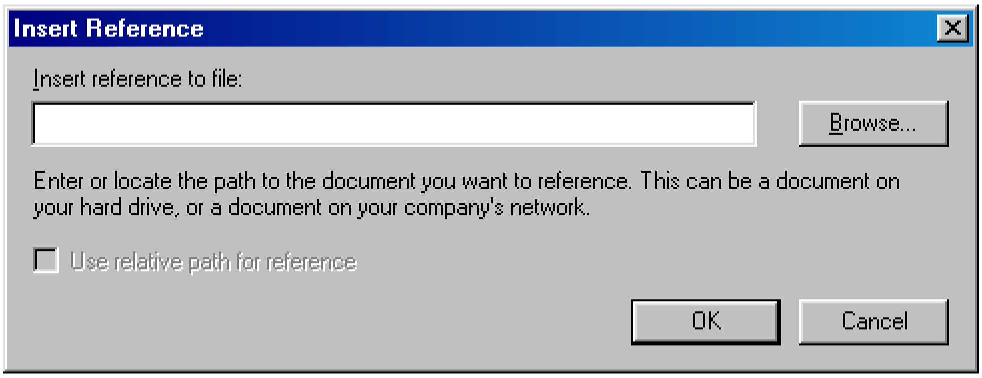
Text Region ["] (Текстова область) – вставка текстових коментарів.

Page Break (Розмітка сторінок) – виділення границі сторінок у документі.

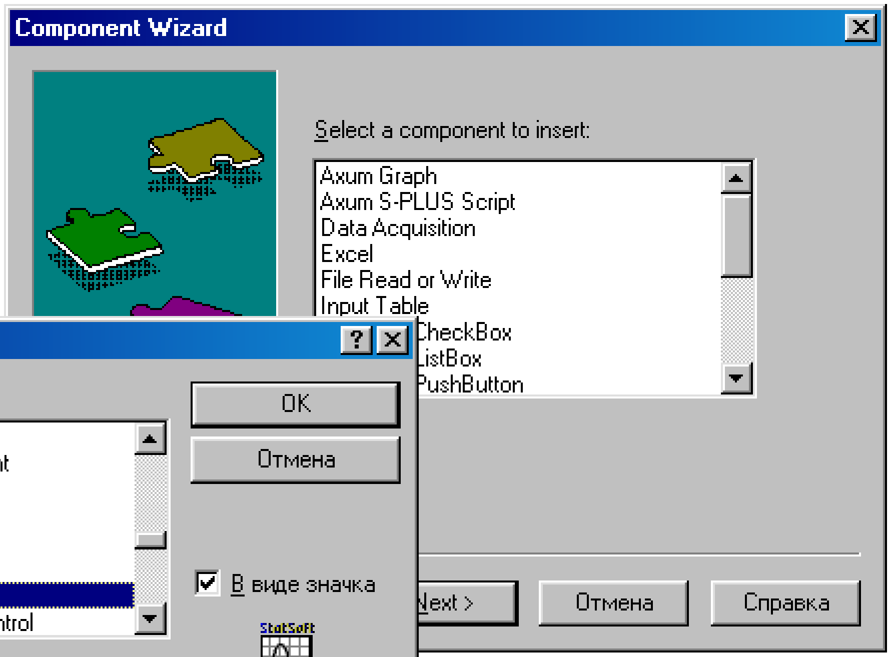
Hiperlink…[Ctrl-K](Гіперзв'язок)

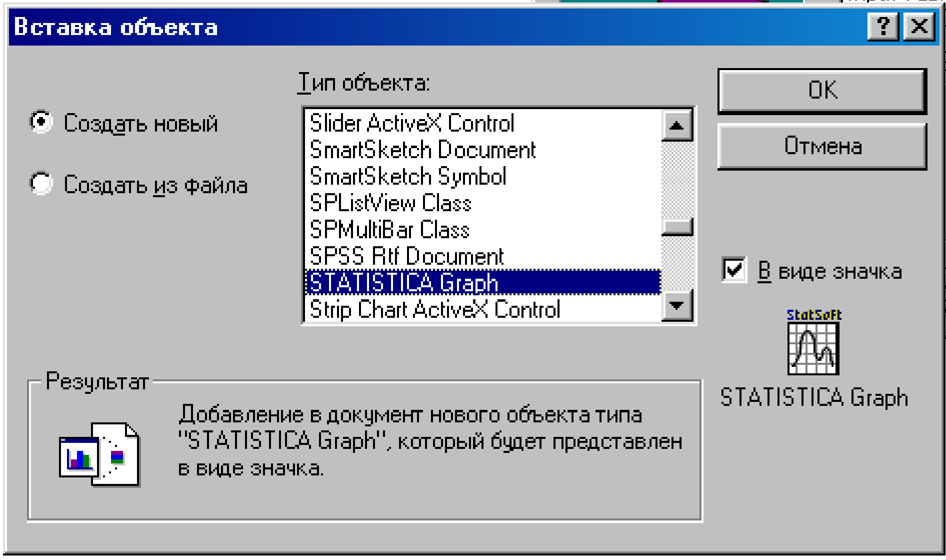


Reference... (Посилання...) – визначити Mathcad-документ, змінні і функції якого доступні в поточному документі (див. мал. 6.29-6.30).



Component... (Компонент...) – уставити компонент даних або додатку в документ із позиції курсору.
Object... (Об'єкт...) – вставити або зв'язати OLE-об'єкт із Mathcad-документом.





Меню Format (Форматування):

(викликати команди форматування об'єктів Mathcad можна також через натискання правої кнопки миші або подвійним щигликом лівою кнопкою миші)
Equation... (Формат стилю...) – змінити колір, розмір і стиль написання виділених математичних символів, цифр і букв.
Result…(Формат числа...) – змінити формат чисел.
Text... (Формат тексту...) – змінити кольори, розмір і стиль написання текстових коментаріїв.
Paragraph... (Формат параграфа...) – змінити відступ від границі, а також центрування текстових коментарів щодо лівої або правої границі або щодо центра.
Tabs…–
Style..... (Формат стилю тексту...) – змінити стиль написання тексту в документі.
Properties... (Зміни Властивостей...) – змінити властивості виділеного виразу. Тут ви можете виділити даний вираз кольором, змінити колір і стиль рамки, що виділяє цей вираз, а також включити опції, що дозволяють ігнорувати даний вираз при обчисленнях або при символьній оптимізації.
Graph... (Формат графіка...) – змінити формат графіків:
X-Y Plot... (Формат декартова графіка) – змінити декартов графік.
Polar Plot... (Формат полярного графіка) – змінити полярний графік.
3D Plot... (Формат тривимірного графіка) – змінити тривимірний графік.
Trace... (Трасування...) – читання координат прямо з виділеного графіка.
Zoom... (Збільшення...) – збільшений перегляд шматка виділеного графіка.
Color... (Колір...) – зміна кольорів:
Background... (Задній план...) – зміна кольору фону.
Highlight... (Підсвічування...) – зміна кольору підсвічування виразу (при виборі Format/Properties/Highlight Region).
Annotation... (Анотація...) – установка кольору підсвічування, що з'являється при редагуванні електронної книги.
Use Default Palette (Палітра за замовчуванням...) – використання кольорів за замовчуванням.

Optimize Palette (Оптимізувати палітру...) – використання оптимальне можливих кольорів для даної системи.

Separate Regions (Розділити області...) – відокремити в документі всі фрагменти один від одного.

Align Regions (Вирівнювання регіону...) – вирівнювання виділеного регіону:

Across (Горизонтально...) – по горизонталі, що проходить між самим верхнім і самим нижнім регіоном документа.

Down (Вертикально...) – по вертикалі, що проходить між самим правим і самим лівим регіоном документа.

Area (Редагування області) – редагування області документа:

Lock... (Замкнути область...) – захистити від редагування обрану область. Захист може бути з паролем і без пароля.

Unlock... (Відімкнути область...) – дозвіл редагування заблокованої області.

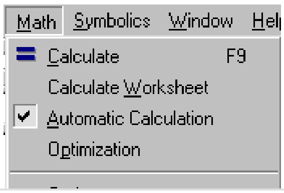
Collapse (Захлопнути) – захлопнути поточну область.

Expand (Розкрити) – розкрити закриту область.

Header/Footers…–заголовки сторінок.

Repaginate Now – установка «м'яких» переносів сторінок (розрив сторінки не перетинає формули).

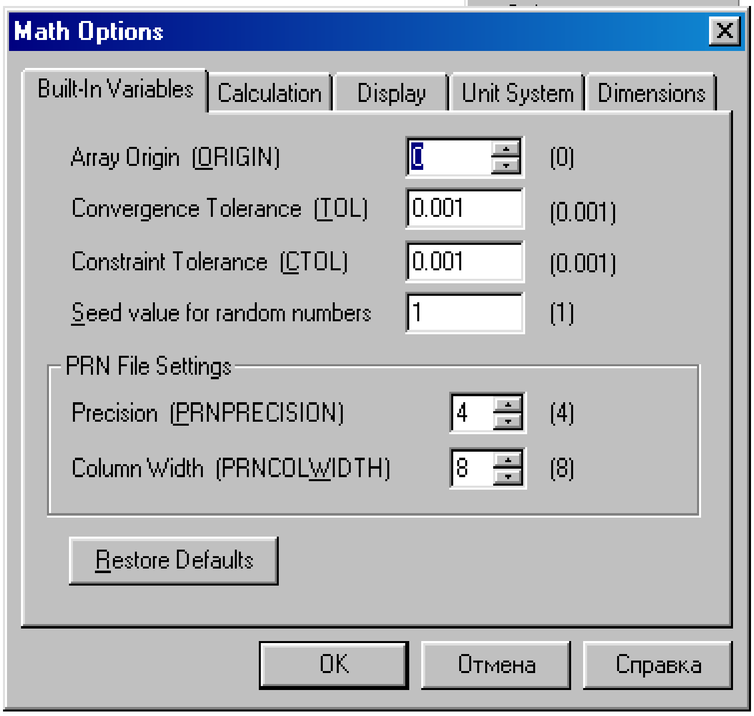
Меню Math (Математика):



Calculate [F9] (Перерахувати) – провести розрахунки за формулами, яких торкнулося останнє редагування.

Calculate Worksheet (Перерахувати все) – провести розрахунки за всіма формулами Mathcad-документа.

Automatic Calculation (Вважати автоматично) – включення/вимикання автоматичного режиму обчислень.



Optimization (Оптимізація) – перемикач режиму оптимізації чисельних розрахунків.

Options…(Опції) – меню опцій:

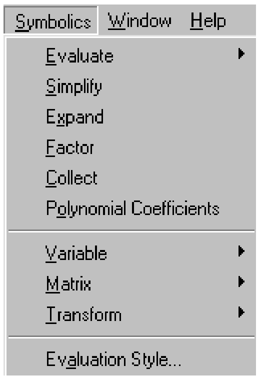
Build-in variables tab (Вбудовані величини) – зміни значень убудованих величин.

Unit system... (Система одиниць...) – зміни системи одиниць виміру (за замовчуванням задана Міжнародна система СИ).

Dimentions (Одиниці виміру...) – зміна назв одиниць виміру. Приміром, ви можете перейменувати кг (kg) у кілограм (kilogram), якщо перше вас чим-небудь не влаштовує

Меню Symbolic (Символіка):

Evaluate (Обчислити) – перетворення виразів:



Symbolically [Shift-F9] (Обчислити в символах) – символьне обчислення виразу.

Floating Point... (Із крапкою, що плаває,...) – обчислення чисельного значення символьного виразу: результат – число з крапкою, що плаває. Максимальне число знаків – 4000.

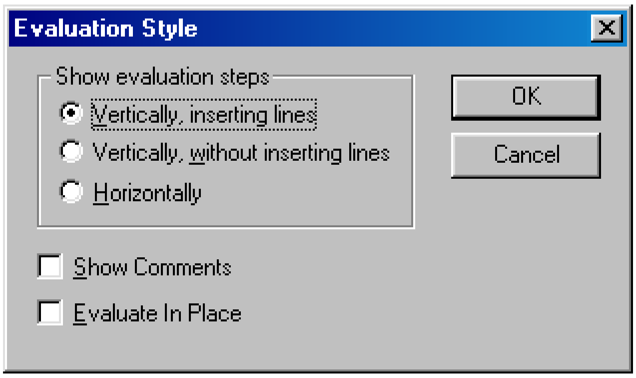
Complex (У комплексному виді) – комплексне перетворення виразу.

Simplify (Спростити) – спростити виділене виразу, виконуючи арифметичні дії, скорочуючи подібні доданки, приводячи до загального знаменника і використовуючи основні тригонометричні тотожності.

Expand (Розкласти по ступенях) – розкриття виразу

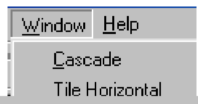
Factor (Розкласти на множники) – пошук множника

Collect (Розкласти по підвиразу) – зібрати доданки, подібні до виділеного виразу, що може бути окремою змінною або функцією зі своїм аргументом. Результатом буде вираз, поліноміальне щодо обраного виразу.
Polynomial Coefficients (Поліноміальні коефіцієнти) – знайти коефіцієнти виразу, якщо воно записано як поліном щодо виділеної змінної або функції.
Variable... (Змінні...) – перетворення, що стосуються змінних:
Solve (Вирішити щодо змінної) – знайти значення виділеної змінної, при яких вираз, що її утримує, стає рівним нулеві. Якщо виділити змінну в рівнянні або нерівності, ця команда вирішує рівняння або нерівність щодо цієї змінної.
Substitute (Замінити змінну) – підставити вміст Буферу обміну замість змінної у виразах у всіх місцях, де вона зустрічається.
Differentiate (Диференціювати по змінній) – диференціювати увесь вираз, що містить виділену змінну стосовно цієї змінної. Інші змінні розглядаються як константи.
Integrate (Інтегрувати по змінній) – інтегрувати увесь вираз, що містить виділену змінну, по цій змінній.
Expand to Series... (Розкласти в ряд...) – знайти кілька членів розкладання виразу в ряд Тейлора по виділеній змінній. Діалогове вікно дозволяє вибрати кількість членів розкладання.
Convert to Partial Fraction (Розкласти на елементарні дроби) – розкласти на елементарні дроби вираз, що розглядається як раціональний дріб щодо виділеної змінної.
Matrix (Матричні операції) – робота з матрицями:
Transpose (Транспонувати) – транспонування матриці.
Invert (Звернути) – інвертування матриці.
Determinant (Визначник) – обчислення детермінанта (визначника) матриці.
Transform (Перетворення):
Fourier (Перетворення Фур'є) – обчислити перетворення Фур'є щодо виділеної змінної.
Inverse Fourier (Зворотне перетворення Фур'є) – обчислити зворотне перетворення Фур'є щодо виділеної змінної. Результат – функція від змінної t.
Laplace (Перетворення Лапласа) – обчислити перетворення Лапласа щодо виділеної змінної. Результат – функція від змінної s.
Inverse Laplace (Зворотне перетворення Лапласа) – обчислити зворотне перетворення Лапласа щодо виділеної змінної. Результат – функція від змінної t.
Z (z-перетворення) – обчислити z-перетворення виразу стосовно виділеної перемінного. Результат – функція від змінної z.



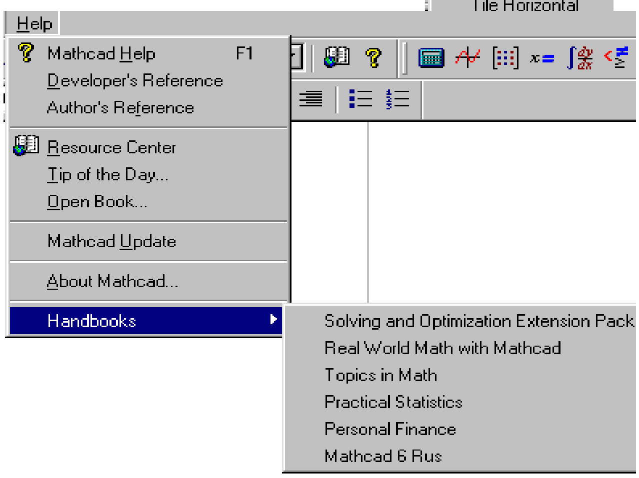
Inverse Z (Зворотне z-перетворення) – обчислити зворотне z-перетворення щодо виділеної змінної. Результат – функція від змінної n.
Evaluation Style…(Стиль результату...) – вибір способу відображення результату символьних перетворень: наявність коментарів і вертикальне або горизонтальне розміщення стосовно перетвореного виразу.

Меню Window (Вікно):



Cascade (Каскад) – розташувати вікна документів один під одним так, щоб були видні заголовки.
Tile Horizontal (По горизонталі) – розташувати вікна документів горизонтально так, щоб вони не перекривалися.
Tile Vertical (По вертикалі) – розташувати вікна документів вертикально так, щоб вони не перекривалися.

Меню Help (Довідка):



Mathcad help [F1] (Технічна підтримка...) – містить інформацію, що допомагає налагодити належну роботу Mathcad.

Resource Center (центр ресурсів) – колекція мультимедійних електронних книг, що містять інформацію на різні наукові і технічні теми.
Tip of the Day…(Рада дня) – рада дня; усі вони зберігаються у файлі mtips.txt.
Open Book... (Відкрити книгу...) – відкрити електронну книгу.
About Mathcad... (Про програму...) – показати номер версії і ліцензії Mathcad:
Handbooks