

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ

Сборник научных трудов

КИЕВ - 1998

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

---

ХЕРСОНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

ХЕРСОНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ**

Херсон, 3 сентября - 6 сентября 1998 г.

Сборник научных трудов

Киев

1998

Математические модели и современные информационные технологии. Сб. науч. тр./НАН Украины. Ин-т математики; Редкол.: Самойленко А. М. (отв. ред.), Березовский А. А. (отв. ред.) и др. -Киев, 1998.- 280с.

Тематический сборник посвящен разработке математического обеспечения, созданию алгоритмов и компьютерных программ для решения актуальных научно-исследовательских и инженерно-технических задач.

Работы сборника отражают новые результаты использования дискретных и непрерывных моделей случайных блужданий, цифрового моделирования рельефа местности, моделей и алгоритмов теории графов. Много внимания уделяется экономическим моделям и методам прогнозирования, новейшим применениям информационных технологий, в том числе, образовательных.

Многочисленные примеры эффективного применения математических моделей и прогрессивных технологий в естествознании, технике, экономике, образовании представляют интерес для научных работников, инженеров, преподавателей и студентов.

Редакционная коллегия:

А.М.Самойленко (отв. ред.), А.А.Березовский (отв. ред.), Ю.Н.Бардачев, А.Н.Хомченко, Ю.В.Гандель, А.Ю.Андрейцев (отв. секретарь), Г.С.Абрамов, В.В.Крючковский, В.И.Кузьмич.

Рецензент д. ф.-м. н., профессор М.П.Ленюк

Утверждено к печати ученым советом Института математики НАН Украины.

ня в автоматизованій системі оцінки рентних платежів. . . . .	72
24. <i>Котляр Б.Д., Аль-Давуд К.</i> О случайных кругах на множестве. . . . .	76
25. <i>Кочан В.В., Тымчишин В.А.</i> Система автоматизированного проектирования измерительно-управляющих и информационных сетей. . . . .	78
26. <i>Кравцов В.И.</i> Приведение вариационных принципов механики к виду, удобному для алгоритмического исследования на ПЭВМ. . . . .	82
✓ 27. <i>Кузьмич В.І.</i> Границя функціональної послідовності біля точки. . . . .	85
28. <i>Кузьмич Л.В.</i> Журнал “Вестник опытной физики и элементарной математики” і деякі проблеми методики навчання математики в південному регіоні України. . . . .	87
29. <i>Кузьмич Л.В.</i> Підготовка учителя математики в університетах на півдні України в кінці ХІХ - на початку ХХ століття. . . . .	90
30. <i>Курилович Я.Е., Кайдашев Р.П.</i> Интегральный метод в экономическом планировании. . . . .	93
31. <i>Лежнюк П.Д., Бевз С.В.</i> Подібність оптимальних процесів як двоїста задача критеріального програмування. . . . .	97
32. <i>Львов М.С., Спиваковский А.В.</i> Методы проектирования систем компьютерной поддержки математического образования. . . . .	101
33. <i>Любота В.Н., Яценко С.А., Крючковский В.В.</i> Челночный алгоритм решения задач математического программирования. . . . .	111
34. <i>Магергут В.З.</i> Имитационное моделирование переходных процессов в системах адаптивного позиционного регулирования. . . . .	115
35. <i>Малик В.Ф., Мельник И.И., Крекнин В.А.</i> О строении группы $SL_N$ над кольцом главных идеалов. . . . .	119
36. <i>Мартынов А.Н., Соколова Н.А.</i> Управление развитием предприятий. . . . .	123
37. <i>Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.</i> Выбор модели внешнего воздействия при математическом моделировании. . . . .	126
38. <i>Миколайчук Н.С., Попова В.В., Попов В.Е.</i> Определение оптимальной рыночной позиции на основе математического моделирования. . . . .	130
39. <i>Мирошниченко Д.Л.</i> К вопросу о выборе математического метода при построении цифровой модели рельефа местности. . . . .	132
40. <i>Мищенко В.О., Скрыпник А.Ю., Труфен В.И.</i> Математическое моделирование надежности информации в базе данных по приложениям методов параметрических представлений сингулярных интегралов. . . . .	135
41. <i>Мокін Б.І., Буяльська Т.Б.</i> Нова інформаційна технологія оцінки якості гуманітарних знань на основі моделей в нечітких множинах. . . . .	139
42. <i>Муравка А.С.</i> Уточнение свойств имитационной модели распределения национального дохода и ее программного обеспечения. . . . .	143
43. <i>Олейник Ю.Т., Балко Е.В.</i> Модели развития негосударственной системы высшего образования. . . . .	147
44. <i>Передерий В.И., Цивильский Ф.М.</i> Выбор периода тестирования психофункционального состояния непрофессионального пользователя в условиях действующего производства с динамическим характером. . . . .	151
45. <i>Передерий В.И., Цивильский Ф.М.</i> Способ согласования эргатической системы при разработке и функционировании информационных систем управления предприятием с динамическим характером производства. . . . .	155
46. <i>Петрусенко И.В.</i> Методы объединения и пересечения частичных областей в теории дифракции. . . . .	159
47. <i>Петух А.М., Войтко В.В.</i> Оцінка ефективності використання семіотичних систем в засобах відображення інформації. . . . .	162

## ГРАНИЦЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ БІЛЯ ТОЧКИ

В роботі [1] введено поняття збіжності біля точки, яка виявилась відповідальною за збереження граничних властивостей (існування границі, неперервності, диференційовності) елементів функціональної послідовності граничною функцією. Зокрема були отримані необхідні і достатні умови диференційовності функціональної послідовності (ряду) [2, с.140]. В даній роботі буде розглянуто один частинний випадок збіжності біля точки. Він цікавий тим, що без додаткових вимог до елементів послідовності гранична функція містить щільну множину точок неперервності, а в окремих випадках – неперервна на проміжку.

**Означення 1.** Нехай функції  $f_n(x)$  ( $n \in N$ ) визначені в деякому проколеному околі точки  $x_0$ . Будемо казати, що послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігається до числа  $A$  біля точки  $x_0$ , якщо для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке число  $N(\varepsilon) > 0$ , що для кожного номера  $n > N(\varepsilon)$  існує проколений  $\delta_n(\varepsilon)$  - окіл точки  $x_0$ , в кожній точці якого виконується нерівність

$$|f_n(x) - A| < \varepsilon$$

Якщо послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігається до числа  $A$  біля точки  $x_0$ , то цю послідовність будемо називати збіжною біля точки  $x_0$ , а число  $A$  – границею послідовності  $\{f_n(x)\}$  біля точки  $x_0$ .

Означення 1 є узагальненням означення границі функції в точці; його можна отримати поклавши в означенні 1  $f_n(x) = f(x)$  ( $n \in N$ ).

Досить просто вирішується питання про єдиність границі біля точки.

**Теорема 1.** Якщо функціональна послідовність має границю біля точки, то ця границя єдина.

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню єдиності границі функції в точці.

Для збіжності біля точки виконується своєрідний критерій Коші.

**Теорема 2.** Для того, щоб послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігалась біля точки  $x_0$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  існувало таке число  $N(\varepsilon) > 0$ , що для кожної пари номерів  $n$  і  $m$  ( $n \neq m$ ) більших ніж  $N(\varepsilon)$  існував би такий проколений  $\delta_{nm}(\varepsilon)$  - окіл точки  $x_0$ , що для будь-яких точок  $x'$  і  $x''$  цього околу виконувалась би нерівність

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

Зазначимо, що в умові теореми 2 обмеження  $n \neq m$  не є обов'язковим в частині необхідності, а в частині достатності воно дещо послаблює вимоги до послідовності  $\{f_n(x)\}$ , хоча теж не є обов'язковим.

Якщо послідовність  $\{f_n(x)\}$  має границю біля кожної точки множини  $X$ , то тим самим цій послідовності на множині  $X$  ставиться у відповідність єдина функція  $f(x)$ , яку будемо називати граничною для послідовності  $\{f_n(x)\}$  в розумінні збіжності біля точки на множині  $X$ . Ця функція може значно відрізнятись від граничної функції цієї послідовності в розумінні класичної точкової збіжності.

Збіжність біля точки є в деякому розумінні більш сильнішою умовою ніж точкова збіжність. Про це може свідчити наступна теорема.

**Теорема 3.** *Якщо послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігається біля кожної точки проміжку до функції  $f(x)$ , то вона збігається до цієї функції в кожній точці проміжку, крім, можливо, скінченної або зчисленної множини точок цього проміжку.*

З іншого боку, навіть рівномірна збіжність функціональної послідовності на проміжку не може забезпечити існування хоча б однієї точки, біля якої ця послідовність мала б границю. Прикладом цього може служити послідовність функцій Діріхле: вона рівномірно збігається до функції Діріхле, але ні для однієї з точок сегменту  $[0;1]$  не виконуються умови означення 1.

Тепер розглянемо питання неперервності граничної в розумінні збіжності біля точки функції.

**Теорема 4.** *Якщо послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігається біля кожної точки проміжку  $(a;b)$  до функції  $f(x)$ , то множина точок неперервності функції  $f(x)$  є щільною на цьому проміжку.*

Ця теорема цікава тим, що неперервність граничної функції досягається лише за рахунок збіжності біля точки функціональної послідовності, без будь-яких додаткових обмежень на елементи цієї послідовності.

Частинним випадком теореми 4 є відомий факт щільності на проміжку точок неперервності функції, яка є граничною (в розумінні точкової збіжності) для послідовності неперервних на цьому проміжку функцій [3, с. 44].

1. Кузьмич В.И. Сходимость возле точки и теоремы типа Арцела-Асколи. // Укр. мат. журн. - 1993. -45, № 8. - С.1090 – 1095.
2. Кузьмич В.И. Сходимость возле точки. // Математическое моделирование. – Киев: Институт математики АН Украины, 1996. – С. 140 – 144.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967, - 251 с.