НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Сборник научных трудов

КИЕВ - 1998

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ХЕРСОНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХЕРСОНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Херсон, 3 сентября - 6 сентября 1998 г.

Сборник научных трудов

Киев
1998

УДК 519.6

Математические модели и современные информационные технологии. Сб. науч. тр./НАН Украины. Ин-т математики; Редкол.: Самойленко А. М. (отв. ред.), Березовский А. А. (отв. ред.) и др. -Киев, 1998.- 280с.

Тематический сборник посвящен разработке математического обеспечения, созданию алгоритмов и компьютерных программ для решения актуальных научно-исследовательских и инженерно-технических задач.

Работы сборника отражают новые результаты использования дискретных и непрерывных моделей случайных блужданий, цифрового моделирования рельефа местности, моделей и алгоритмов теории графов. Много внимания уделяется экономическим моделям и методам прогнозирования, новейшим применениям информационных технологий, в том числе, образовательных.

Многочисленные примеры эффективного применения математических моделей и прогрессивных технологий в естествознании, технике, экономике, образовании представляют интерес для научных работников, инженеров, преподавателей и студентов.

Рецензент д. ф.-м. н., профессор М.П.Ленюк

Утверждено к печати ученым советом Института математики НАН Украины.

УДК 517.512

В.І.Кузьмич (Херсонськ. держ. пед. ін-т, Україна)

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ БІЛЯ ТОЧКИ

В роботі [1] введено поняття збіжності біля точки, яка виявилась відповідальною за збереження граничних властивостей (існування границі, неперервності, диференційовності) елементів функціональної послідовності граничною функцією. Зокрема були отримані необхідні і достатні умови диференційовності функціональної послідовності (ряду) [2, с.140]. В даній роботі буде розглянуто один частинний випадок збіжності біля точки. Він цікавий тим, що без додаткових вимог до елементів послідовності гранична функція містить щільну множину точок неперервності, а в окремих випадках – неперервна на проміжку.

Означення 1. *Нехай функції $f_n(x)$ $(n \in N)$ визначені в деякому проколеному околі точки x_0. Будемо казати, що послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається до числа A біля точки x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon) > 0$, що для кожного номера $n > N(\varepsilon)$ існує проколений $\partial_n(\varepsilon)$ - окіл точки x_0, в кожній точці якого виконується нерівність*

$$| f_n(x) - A | < \varepsilon$$

Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається до числа A біля точки x_0, то цю послідовність будемо називати збіжною біля точки x_0, а число A – границею послідовності $\{f_n(x)\}$ біля точки x_0.

Означення 1 є узагальненням означення границі функції в точці; його можна отримати поклавши в означенні 1 $f_n(x) = f(x)$ $(n \in N)$.

Досить просто вирішується питання про єдиність границі біля точки.

Теорема 1. *Якщо функціональна послідовність має границю біля точки, то ця границя єдина.*

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно доведенню єдиності границі функції в точці.

Для збіжності біля точки виконується своєрідний критерій Коші.

Теорема 2. *Для того, щоб послідовність $\{f_n(x)\}$ збігалась біля точки x_0, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існувало таке число $N(\varepsilon) > 0$, що для кожної пари номерів n і m $(n \neq m)$ більших ніж $N(\varepsilon)$ існував би такий проколений $\partial_{nm}(\varepsilon)$ - окіл точки x_0, що для будь-яких точок x' і x'' цього околу виконувалась би нерівність*

$$| f_n(x') - f_n(x'') | < \varepsilon$$

Зазначимо, що в умові теореми 2 обмеження $n \neq m$ не є обов'язковим в частині необхідності, а в частині достатності воно дещо послаблює вимоги до послідовності $\{f_n(x)\}$, хоча теж не є обов'язковим.

Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ має границю біля кожної точки множини X, то тим самим цій послідовності на множині X ставиться у відповідність єдина функція $f(x)$, яку будемо називати граничною для послідовності $\{f_n(x)\}$ в розумінні збіжності біля точки на множині X. Ця функція може значно відрізнятись від граничної функції цієї послідовності в розумінні класичної точкової збіжності.

Збіжність біля точки є в деякому розумінні більш сильнішою умовою ніж точкова збіжність. Про це може свідчити наступна теорема.

<u>Теорема 3</u>. *Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається біля кожної точки проміжку до функції $f(x)$, то вона збігається до цієї функції в кожній точці проміжку, крім, можливо, скінченої або зчисленної множини точок цього проміжку.*

З іншого боку, навіть рівномірна збіжність функціональної послідовності на проміжку не може забезпечити існування хоча б однієї точки, біля якої ця послідовність мала б границю. Прикладом цього може служити послідовність функцій Діріхле: вона рівномірно збігається до функції Діріхле, але ні для однієї з точок сегменту $[0;1]$ не виконуються умови означення 1.

Тепер розглянемо питання неперервності граничної в розумінні збіжності біля точки функції.

<u>Теорема 4</u>. *Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається біля кожної точки проміжку $\langle a;b\rangle$ до функції $f(x)$, то множина точок неперервності функції $f(x)$ є щільною на цьому проміжку.*

Ця теорема цікава тим, що неперервність граничної функції досягається лише за рахунок збіжності біля точки функціональної послідовності, без будь-яких додаткових обмежень на елементи цієї послідовності.

Частинним випадком теореми 4 є відомий факт щільності на проміжку точок неперервності функції, яка є граничною (в розумінні точкової збіжності) для послідовності неперервних на цьому проміжку функцій [3, с. 44].

1. Кузьмич В.И. Сходимость возле точки и теоремы типа Арцела-Асколи. // Укр. мат. журн.- 1993.-45, № 8.- С.1090 – 1095.
2. Кузьмич В.И. Сходимость возле точки. // Математическое моделирование. – Киев: Институт математики АН Украины, 1996. – С. 140 – 144.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967, - 251 с.