МЕЖДУНАРОДНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Санкт-Петербургское отделение

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБРАЗОВАНИИ, НАУКЕ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

МАН ВШ
Санкт-Петербургское
отделение
03.11.92

Санкт-Петербург

2005

Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности: Сб. науч. трудов. – СПб.: Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2005.- 120 с.

В сборник включены материалы, представленные на VII международную конференцию по математическому моделированию (МКММ'2005), которая состоялась 6-10 сентября 2005 года в Херсонском национальном техническом университете.

Рецензенты: Ленюк М.П. – д.ф.-м.н. (Черновцы)
Сердюченко А.Н. – д.ф.-м.н. (Николаев)

Печатается по рекомендации Президиума Санкт-Петербургского отделения Международной академии наук высшей школы в соответствии с планом научных мероприятий и издательской деятельности 2005 г. (поз. 34).

Адрес президиума: 191186, г. Санкт-Петербург,
наб. р. Мойки, д.61, к. 403
тел. (812) 314-13-94

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.98

В.И. Кузьмич

ОБ ОБЩЕЙ ТОЧКЕ ОПЕРАТОРОВ

1. Постановка проблемы и ее актуальность.

В задачах нахождения точного или приближенного решения дифференциального или интегрального уравнений важным этапом является доказательство существования этого решения. Одним из наиболее употребляемых методов исследования этих уравнений на существование решения является метод, опирающийся на классическую теорему Банаха об операторе сжатия. Этот оператор является непрерывным и имеет единственную неподвижную точку, нахождение которой проводится методом последовательных приближений [1, с. 605 - 606]. Если оператор, который соответствует исследуемому уравнению, не является оператором сжатия, то поиск решения усложняется. С другой стороны, дифференциальное или интегральное уравнение можно записать в виде равенства двух операторов, а поиск решения этого уравнения привести к поиску точки, в которой оба оператора принимают одинаковое значение, то есть к поиску общей точки операторов. Особенно это удобно, если каждый из полученных операторов более простой чем исследуемый оператор.

2. Анализ достижений и публикаций по теме исследования.

Существуют теоремы и методы поиска неподвижных точек оператора, которые не используют условия теоремы Банаха. Это, например, принцип Шаудера [1, с. 616], теорема Какутани [1, с. 630], которую используют в теории игр. Однако, они справедливы лишь на компактных пространствах, и существенно используют свойства непрерывности или замкнутости оператора.

3. Цель работы.

Целью этой работы является определение достаточных условий существования общей точки двух операторов, которые отображают полное метрическое пространство на себя, а также построение метода поиска этой точки.

4. Главный материал.

В дальнейшем будем рассматривать полное метрическое пространство X с метрикой ρ в нем. Общей точкой двух операторов u и v, которые определены на пространстве X, будем называть такую точку x^* этого пространства, в которой выполняется равенство $u(x^*) = v(x^*)$.

Теорема 1. Пусть операторы u и v отображают полное метрическое пространство X на себя, и для оператора v на этом пространстве существует обратный оператор.

Если для произвольных точек x' и x'' пространства X выполняется неравенство

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) \le \alpha \cdot \rho\big(v(x');v(x'')\big), \tag{1}$$

где $0 \le \alpha < 1$, то существует единственная общая точка операторов u и v, которую можно получить методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки пространства.

Доказательство. Возьмем произвольную точку x_0 пространства X и найдем точку x_1 из уравнения $v(x_1) = u(x_0)$. Так как по условию теоремы оператор v отображает пространство X на себя и для него существует обратный оператор v^{-1}, то такая точка x_1 существует, причем она единственная и находится по формуле $x_1 = v^{-1}\big(u(x_0)\big)$. Аналогично, из равенства $v(x_2) = u(x_1)$ находим точку x_2: $x_2 = v^{-1}\big(u(x_1)\big)$. Продолжая этот процесс до бесконечности, из равенства

$$v(x_n) = u(x_{n-1}) \tag{2}$$

строим последовательность $\{x_n\}$ точек $x_{1n} = v^{-1}(u(x_{n-1}))$, $n = 1,2,\ldots$. Учитывая равенство (2), из неравенства (1) для этой последовательности получаем:

$$\rho(v(x_2);v(x_1)) = \rho(u(x_1);u(x_0)) \le \alpha \cdot \rho(v(x_1);v(x_0)),$$
$$\rho(v(x_3);v(x_2)) = \rho(u(x_2);u(x_1)) \le \alpha \cdot \rho(v(x_2);v(x_1)) \le \alpha^2 \cdot \rho(v(x_1);v(x_0)),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\rho(v(x_n);v(x_{n-1})) \le \alpha^{n-1} \cdot \rho(v(x_1);v(x_0)), \qquad \text{n} = 2,3,\ldots$$

Из последнего неравенства следует, что последовательность $\{v(x_n)\}$ является сходящейся в себе [1, с. 606] и вследствие полноты пространства X сходится к некоторой точке x' этого пространства. Из равенства (2) получаем, что последовательность $\{u(x_n)\}$ тоже сходится к точке x'.

Пусть точка x^* пространства X такая, что $v(x^*) = x'$. Тогда из неравенства (1) для этой точки получим неравенство

$$\rho(u(x_n);u(x^*)) \le \alpha \cdot \rho(v(x_n);v(x^*)) = \alpha \cdot \rho(v(x_n);x').$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим: $\rho(x';u(x^*)) \le \alpha \cdot \rho(x';x') = 0$. Таким образом, справедливо равенство: $u(x^*) = x'$ и, следовательно, x^* - общая точка операторов u и v. Единственность этой точки можно получить из неравенства (1), так же как и при доказательстве теоремы Банаха. Теорема 1 доказана.

Если в условия теоремы 1 в качестве оператора v взять единичный оператор: $v(x) = x$ для любой точки x пространства X, то получим вышеупомянутую теорему Банаха о неподвижной точке оператора сжатия. В этом случае оператор u по теореме Банаха будет непрерывным в каждой точке пространства X.

Пример построения последовательных приближений в случае если $u = k_1 x,\ \ v = k_2 x\ \ (k_1 < \text{k}_2)$ показан на рис. 1.

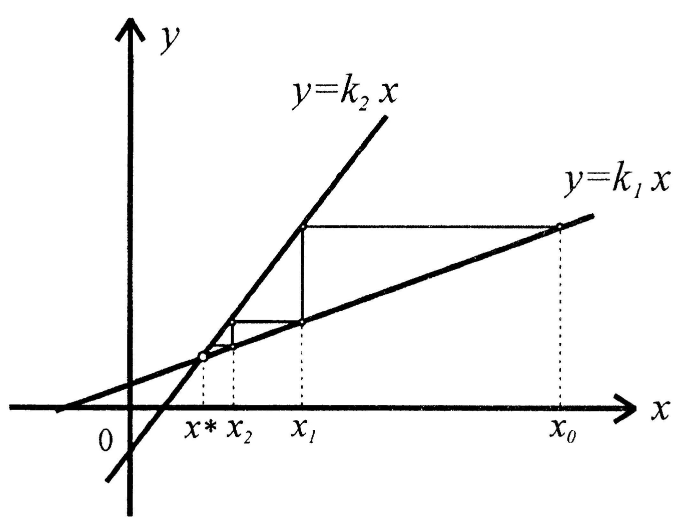

Рис. 1.

Условие (1), вообще говоря, не обязательно для существования общей точки двух операторов. На это указывает следующий результат.

Теорема 2. Пусть операторы u и v отображают полное метрическое пространство X на себя, и для оператора v на этом пространстве существует обратный оператор.

Если для произвольных точек x' и x'' пространства X выполняется неравенство

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) \geq \alpha \cdot \rho\big(v(x');v(x'')\big), \tag{3}$$

где $\alpha > 1$, то существует единственная общая точка операторов u и v, которую можно получить методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки пространства.

Доказательство. Из неравенства (3) следует, что для оператора u на пространстве X существует обратный оператор u^{-1}. Действительно, по условию теоремы 2 оператор u отображает пространство X на себя. Предположим, что в двух различных точках x' и x'' пространства оператор u принимает одинаковое значение: $u(x') = u(x'') = x$ и $\rho\big(x';x''\big) \neq 0$. Тогда из неравенства (3) для этих точек получим:

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) = \rho\big(x;x\big) \geq \alpha \cdot \rho\big(v(x');v(x'')\big),$$

или $\rho\big(v(x');v(x'')\big) = 0$. Следовательно, оператор v в точках x' и x'' тоже принимает одинаковое значение, что противоречит условию существования обратного оператора v^{-1}. Из неравенства (3) находим

$$\rho\big(v(x');v(x'')\big) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \rho\big(u(x');u(x'')\big). \tag{4}$$

Так как $0 < \dfrac{1}{\alpha} < 1$, то, учитывая неравенство (4), имеем, что операторы u и v удовлетворяют условиям теоремы 1, и, следовательно, для них существует единственная общая точка, которую можно получить методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки пространства. Теорема 2 доказана.

Используя теоремы 1 и 2, можно делать вывод о существовании общей точки трех операторов.

Следствие 1. Пусть для операторов u и v, которые удовлетворяют условиям теоремы 1 или теоремы 2, и для оператора f, который отображает полное метрическое пространство X на себя, выполняется равенство

$$\rho\big(u(x);f(x)\big) + \rho\big(f(x);v(x)\big) = \rho\big(u(x);v(x)\big) \tag{5}$$

в каждой точке x пространства X.

Тогда операторы u, v и f имеют единственную общую точку, которую можно получить методом последовательных приближений.

Доказательство. По теоремам 1 или 2 операторы u и v имеют единственную общую точку x^* в пространстве X. То есть, $u(x^*) = v(x^*)$. Для этой точки равенство (5) примет вид

$$\rho\big(u(x^*);f(x^*)\big) + \rho\big(f(x^*);v(x^*)\big) = \rho\big(u(x^*);v(x^*)\big), \text{ или } \rho\big(v(x^*);f(x^*)\big) = 0.$$

Поэтому $v(x^*) = f(x^*)$, и точка x^* - общая точка операторов v и f, а, следовательно, и операторов u, v и f.

Следствие 2. Пусть оператор сжатия u и оператор f, которые отображают полное метрическое пространство X на себя, удовлетворяют равенство

$$\rho\big(u(x);f(x)\big) + \rho\big(f(x);x\big) = \rho\big(u(x);x\big) \tag{6}$$

для любой точки x пространства X.

Тогда оператор f имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки пространства.

Это следствие получаем из следствия 1, выбрав в качестве оператора v - единичный оператор. Следствие 2 интересно тем, что оператор f не обязательно должен быть оператором сжатия, непрерывным либо иметь обратный оператор.

5. Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Результаты работы указывают на то, что при исследовании существования решения дифференциальных и интегральных уравнений соответствующие операторы, в случае, если они не является операторами сжатия, можно разбивать на несколько более простых операторов и искать их общую точку. Если оператор f не является непрерывным и не имеет обратного, то можно искать такой оператор сжатия u, чтобы они оба удовлетворяли равенству (6), а после искать неподвижную точку оператора u. По следствию 1 эта точка будет неподвижной точкой оператора f.

В дальнейшем важно, используя результаты работы, получить новые условия существования и единственности решений конкретных типов дифференциальных и интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

КУЗЬМИЧ Валерий Иванович – к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Херсонского государственного университета.

Научные интересы:

– функциональный анализ, суммирование расходящихся рядов.

Международная академия наук высшей школы

Санкт–Петербургское отделение

Научное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБРАЗОВАНИИ, НАУКЕ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Ответственные за выпуск:
Ванько В.И., Хомченко А.Н.

Научный редактор:
Иванов П.И.

Технический редактор:
Цыбуленко О.В.

Компьютерный набор и макетирование:
Урупа Н.В.

Подписано к печати 15.06.2005 г. Формат 60х84. 1/8. Бумага офсетная.
Условных печатных листов 15,25. Заказ №017. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Херсонского Морского Института.
Свидетельство о государственной регистрации ХС №47 от 16.12.2004 года
73000, г.Херсон, проспект Ушакова, 14