ВИДАВНИЦТВО ХДПУ

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний педагогічний університет
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Кузьмич Л.В.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ ГЕОМЕТРІЇ

для студентів 2-3 курсів
спеціальності "Інформатика"

Херсон-2002

Методичні рекомендації обговорено на засіданні кафедри вищої математики (Протокол №2 від 17.10.2001).

Схвалено науково-методичною радою університету. (Протокол №2 від 24.12.2001).

Рекомендовано до видання Вченою радою Херсонського державного педагогічного університету (Протокол №4 8.01.2002).

Укладач: **Кузьмич Л.В.** - кандидат педагогічних наук, доцент.

Рецензенти: **Савченко О.Г.** – доцент, кандидат фізико-математичних наук.
Самойленко В.Г. – доцент, кандидат фізико-математичних наук.

Кузьмич Л.В.
Вища геометрія: Методичні вказівки для студентів спеціальності “Інформатика”. Херсон: Видавництво ХДПУ, 2002. – 60 с.

ЗМІСТ

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Курс "Вища геометрія" має на меті допомогти майбутнім спеціалістам з прикладної математики краще засвоїти програмний матеріал, оволодіти різними математичними методами, навчитися вільно застосовувати їх на практиці. Курс формує просторову уяву у взаємозв‘язку з аналітичними методами, з груповою і структурною точками зору на геометрію; дає ґрунтовні загальні уявлення про сучасний аксіоматичний метод, елементи многовимірної геометрії, афінного і евклідового просторів, неевклідових геометрій, топологій, тобто формує достатньо широкий погляд на геометрію та її методи і на елементарну геометрію з точки зору вищої; дає достатні знання і навички для успішного викладання геометрії в школі, кваліфікованого ведення факультативних занять, причому виробляє здатність здійснювати це на базі довільного навчального посібника або підручника. Завдання, що запропоновані для самостійного розв’язування, доступні кожному студентові.

Дана програма складена на основі раніше діючих з урахуванням сучасних вимог до підготовки спеціаліста з прикладної математики, загальноосвітньої і професійної підготовки вчителя математики, міжпредметних зв‘язків і зв‘язку зі шкільним курсом математики, досвіду викладання геометрії в педвузах. Принципово вона відрізняється від попередніх більшою детальністю і гнучкістю, оскільки включає інваріантну обов‘язкову і варіативну на вибір кафедри, викладача частини (в програмі вона міститься в квадратних дужках).

Курс вищої геометрії в педагогічному інституті для спеціальності “Прикладна математика. Інформатика. ПМСО. Математика” вивчається протягом п‘яти семестрів і охоплює такі розділи:

- елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії;
- проективна геометрія;
- елементи конструктивної геометрії;
- деякі питання топології та диференціальної геометрії;
- основи геометрії.

Ці розділи містять дванадцять блоків:

Елементи векторної алгебри.

Аналітична геометрія на площині.

Аналітична геометрія у просторі.

n - вимірна геометрія.

Геометричні перетворення.

Поняття проективного простору та основні факти проективної геометрії.

Геометричні побудови.

Методи зображень.

Елементи топології.

Елементи диференціальної геометрії.

Неевклідові геометрії.

Теорія вимірювання геометричних величин.

Аналогічний зміст курсу пропонується для вивчення студентами спеціальностей "Математика та основи інформатики", "Математика і фізика", але з урахуванням учбового плану з цих спеціальностей, тобто протягом 1-4 семестрів. Допускається перестановка окремих блоків і тем курсу.

Програма курсу передбачає читання лекцій, проведення практичних робіт; у 5 семестрі наголос переноситься на теоретичний курс.

Для спеціальності "Прикладна математика. Інформатика. ПМСО. Математика": у 1-2 семестрах - по 2 години на тиждень; у 3-4 семестрах - по 3 години на тиждень. По дві контрольні роботи передбачається у кожному з I, 2, 3 семестрів, у 4 семестрі - одна. В кожному семестрі планується проведення колоквіуму. Дана програма рекомендована як один з можливих варіантів викладання курсу вищої геометрії для студентів педагогічних інститутів спеціальності 01.01..

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

I. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОІ АЛГЕБРИ І АНАЛ1ТИЧН0Ї ГЕОМЕТРІЇ

I. Елементи векторної алгебри.

1.1. Вектори, їх координати. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток двох векторів.

1.2. Аналітична геометрія на площині.

1.2.1. Метод координат.

1.2.2. Пряма лінія на площині.

1.2.3. Еліпс, гіпербола, парабола.

1.2.4. Загальна теорія кривих 2-го порядку

1.3. Аналітична геометрія у просторі.

1.3.1. Метод координат.

1.3.2. Векторний та мішаний добуток векторів.

1.3.3. Площини і прямі.

1.3.4. Поверхні другого порядку, задані канонічними рівняннями.

1.4. n-вимірна геометрія.

1.4.1. Афінні і евклідові векторні простори.

1.4.2. Квадратичні форми і квадрики.

1.5. Геометричні перетворення.

1.5.1. Перетворення площини і простору. Група перетворень та її підгрупи.

1.5.2. Рухи на площині.

1.5.3. Перетворення подібності.

1.5.4. Афінні перетворення.

2. ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1. Поняття проективного простору та основні факти проективної геометрії.

2.1.1. Побудова проективного простору, його аксіоми. Моделі проективної прямої, проективної площини, проективного простору.

2.1.2. Проективні координати, їх перетворення.

2.1.3. Принципи двоїстості. Теорема Дезарга.

2.1.4. Проективні перетворення, їх група. Підгрупи групи проективних перетворень. Предмет проективної геометрії.

2.1.5. Подвійне відношення чотирьох точок прямої, його властивості. Гармонізм. Побудова четвертої гармонічної точки.

2.1.6. Квадрики на проективній площині, їх проективна класифікація. Взаємне розміщення прямої і квадрики. Поляри і полюси.

2.1.7. Теореми Паскаля і Бріаншона, їх застосування до розв‘язування задач шкільного курсу геометрії.

2.1.8. Евклідова геометрія з проективної точки зору.

3. ЕЛЕМЕНТИ КОНСТРУКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Геометричні побудови. Методи зображень.

3.1.1. Геометричні побудови на площині.

3.1.2. Геометричні побудови у просторі.

3.1.3. Паралельне проектування.

3.1.4. Зображення многогранників у паралельній проекції.

3.1.5. Аксонометрія.

3.1.6. Позиційні задачі. Метричні задачі. Метод Монжа.

4. ДЕЯКІ ПИТАННЯ ТОПОЛОГІЇ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

4.1. Елементи топології.

4.1.1. Топологічні простори.

4.1.2. Топологічні многовиди.

4.1.3. Многогранники в евкл1довому просторі.

4.2. Елементи диференціальної геометрії.

4.2.1. Лінії в евклідовому просторі.

4.2.2. Поверхні в евклідовому просторі.

4.2.3. Внутрішня геометрія поверхні.

5. ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

5.1. Загальні питання аксіоматики.

5.1.1. Поняття математичної структури. Ізоморфізми. Поняття про інтерпретацію системи аксіом. Несуперечливість, незалежність та повнота системи аксіом.

5.1.2. Геометрія до Евкліда. П‘ятий постулат та спроби його доведення.

5.1.3. Система аксіом Гільберта (огляд).

5.1.4. Система аксіом Вейля, її несуперечливість і повнота. Приклади доведення теорем шкільного курсу геометрії із застосуванням аксіом Вейля.

5.1.5. Система аксіом шкільного курсу геометрії.

5.2. Неевклідові геометрії.

5.2.1. М.Л.Лобачевський та його геометрія.

5.2.2. Різні моделі площини Лобачевського. Реалізація "в малому" геометрії Лобачевського на поверхні сталої від‘ємної кривизни. Незалежність аксіоми паралельних прямих від інших аксіом шкільного курсу геометрії.

5.2.3. Елементи сферичної геометрії.

5.2.4. Еліптична геометрія Рімана та гіперболічна геометрія Лобачевського в схемі Вейля.

5.3. Теорія вимірювання геометричних величин.

5.3.1. Довжина відрізка, аксіоми. Теорема про існування і єдиність.

5.3.2. Площа многокутника, аксіоми. Теорема про існування і єдиність.

5.3.3. Рівновеликість і рівноскладеність. Теорія об‘ємів (огляд).

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. - М.: Просвещение, 1986. - 336 с.
2. Певзнер С.Л. Проективная геометрия. - М.: Просвещение, 1980.-128 с.
3. Егоров И.П. Геометрия. - М.: Просвещение, 1979. - 56 с.
4. Трайнин Я.Л. Основания геометрии. - М.: Учпедгиз, 1961. -326 с.
5. Вернер А.Л., Кантор В.Е. Элементы топологии и дифферентальной геометрии. - М.: Наука, 1985. - 112 с.
6. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Сборник задач по геометрии. - М.: Просвещение, 1980. - 240 с.
7. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. -М.: Просвещение, 1973. - 256 с.
8. Атанасян Л.С., Васильева М.В. Сборник задач по геометрии. -М.: Просвещение, 1975. - 176 .с.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука,1986. - 224 .с.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1968. - 336 с.

11. Певзнер С.Л., Паденко М.М. Задачник-практикум по проективной геометрии.- М.: Просвещение, 1982. - 80 с.
12. Сергунова О.П., Котлова В.М. Практикум з проективної геометрії.-К.: Вища шк., 1971. - 188 с.
13. Кованцов Н.И., Зражевская Г.М. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. - К.: Выща шк., 1982. - 376 с.

Додаткова

1. Атанасян Л.С. Геометрия. - М.: Просвещение, 1973.
2. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия. - М.: Просвещение, 1976. - 447 с.
3. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. -М.: Просвещение, 1974. - 351 с.
4. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. - М.: Просвещение, 1975. - 367 с.
5. Білоусова З.П., Ільїн Л.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія. - К.: Вища шк., 1973. - 328 с.
6. Четверухин Ч.Ф. Проективная геометрія. - М. : Просвещение, 1969. - 368с.
7. Семенович О.Ф. Геометрія. Аксіоматичний метод. - К.: Радянська школа, 1976. - 166 с.
8. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования. -М.: Просвещение, 1975. - 110 с.

МЕТОДИЧНЕ НАПОВНЕННЯ ПРОГРАМИ

Курс вищої геометрії, поданий в програмі, повинен бути викладений аксіоматичним методом, причому на базі такої аксіоматики, з якої легко отримати будь-яку аксіоматику шкільного курсу і переходити до інших галузей математики. Такою є аксіоматика Г.Вейля. Але, враховуючи програму з "Алгебри та теорії чисел", міркування методичного характеру і традиції, такий виклад вважаємо доцільним, починаючи з блоку "n-вимірна геометрія". Це дає можливість узагальнити, переусвідомити раніше розглянутий матеріал і заощадити час.

Розпочати вивчення курсу доцільно як продовження шкільної геометрії. Саме векторна алгебра, якій присвячено перший блок програми, відповідає цій меті. Студенти повинні розглянути різні означення вектора: як впорядкованої множини точок прямої, як напрямленого відрізка, як паралельного перенесення. Саме з останнім означенням вони ознайомлювалися в курсі геометрії середньої школи. Друге означення більш застосовуване у фізиці, тому, розглядаючи скалярний добуток векторів, необхідно підкреслити його фізичний зміст як роботи по переміщенню матеріальної точки вздовж деякого вектора.

Другий блок програми дуже тісно пов‘язаний з питаннями, які мали місце в шкільному курсі геометрії, а саме, з методом координат і прямою лінією на площині. Але новими є поняття перетворення системи координат. При вивченні цих питань потрібно наголосити на практичному застосуванні полярної системи у фізиці, картографії, астрономії тощо.

При вивченні кривих 2-го порядку, заданих канонічними рівняннями, тобто еліпса, гіперболи та параболи, слід звернути увагу на дослідження їх форми, оптичні та фокальні властивості, які широко застосовуються в оптиці. Розглядаючи загальну теорію кривих 2-го порядку, слід більш детально зупинитися на класифікації кривих та загальному спрощенні їх рівнянь.

В третьому блоці крім питання про різні системи координат у просторі розглядається геометричне тлумачення рівнянь та нерівностей. При цьому необхідно використати велику кількість прикладів з курсу математики середньої школи. При вивченні векторного та мішаного добутків векторів, які є новими поняттями порівняно зі скалярним добутком, треба наголосити на кінцевому результаті того чи іншого добутку, а також на алгебраїчних та геометричних властивостях цих добутків, зокрема на обчислення площ трикутника та об‘єму тетраедра. Необхідно підкреслити важливе застосування векторного добутку векторів як моменту сили у фізиці. При вивченні поверхонь 2-го порядку слід пригадати, які з них мали місце у шкільному курсі геометрії, продемонструвати моделі розглядуваних поверхонь і. виконати самостійну домашню роботу на побудову їх за допомогою перерізів.

Четвертий блок має тісний зв‘язок з теорією відносності. Він присвячений елементам многовимірної геометрії, афінному та евклідовому n-вимірним просторам. При його вивченні необхідно розкрити суть аксіоматики Вейля, її зв‘язок зі шкільною аксіоматикою. У питанні про квадратичні форми і квадрики важливим є зведення квадратичної форми до канонічного вигляду і так званий закон інерції квадратичної форми. Найбільш зрозумілим підсумком вивчення цієї теми є дослідження квадрик у тривимірному евклідовому просторі, що приводить до афінної їх класифікації, серед яких є такі, що знайомі студентам зі шкільного курсу геометрії.

Сучасному теоретико-груповому підходу до геометрії присвячений п‘ятий блок програми. Нащо врахувати, що поняття геометричного перетворення тісно пов‘язане з поняттям функції та групи, то цілком зрозуміла необхідність систематичного використання його в шкільному курсі математики. Вивчення цього розділу передбачав класифікацію рухів, перетворень, подібності, афінних перетворень, а також розв‘язування великої кількості прикладів.

В шостому блоці досить важливим є процес введення невласних елементів та побудови проективного простору. Необхідно підкреслити рівноправність невласних і звичайних точок і прямих, добре проілюструвати моделі проективної прямої, проективної площини та проективного простору. При вивченні принципів двоїстості та теореми Дезарга обов‘язково потрібно вказати на застосування цієї теореми до розв‘язування задач на побудову. Поняття подвійного відношення рекомендуємо вводити через поняття простого відношення, з яким студенти вже зустрічалися при вивченні теми "Аналітична геометрія на площині. Особливу увагу слід звернути на гармонізм як частковий випадок поданого відношення точок прямої. Це питання повинно розглядатися при розгляді повного чотиривершинника, властивості якого на розширеній евклідової площини відображені у теоремах шкільного курсу геометрії. Варіативно можна розглянути застосування теореми Дезарга та властивостей повного чотиривершинника до розв‘язування задач на побудову з "недоступними" елементами, а також побудову четвертої гармонійної точки різними методами - бісектрис, подібних трикутників тощо. Вивчення квадрик потребує їх .класифікації та можливості використання теорем Паскаля і Бріаншона при розв‘язуванн1 задач на побудову. Варіативно може бути розглянуто питання про геометрію на площині з фіксованою прямою.

Сьомий блок фактично поглиблює та науково обґрунтовує знання студентів, які вони одержали в шкільному курсі геометричних побудов. Особливу увагу слід звернути на зображення фігур у паралельній проекції, а також на ортогональне проектування. При вивченні методів зображень необхідно пов‘язати їх з курсом креслення середньої школи. Варіативно рекомендуємо розглянути геометричні побудови у просторі.

При вивченні восьмого блоку необхідно нарівні з викладанням нових понять при розгляді ейлеревої характеристики многогранників, пригадати саме ті, які мали місце в курсі геометрії середньої школи, тобто правильні многогранники: тетраедр і куб.

Дев‘ятий блок дуже тісно пов‘язаний з питаннями, які вивчаються в курсі математичного аналізу /дослідження функції на існування особливих точок, асимптоти кривих тощо/. Але є і досить специфічні питання: супровідний тригранник Френе, кривизна та скрут кривої, дотик кривих та ін., багато з яких відображені і безпосередньо застосовуються в теорії різання металів, металознавстві тощо. Варіативно пропонуємо розглянути більш детально властивості плоских кривих, деякі з яких розглядаються в курсі "Алгебри і початку аналізу" середньої школи. При вивченні теорії поверхонь слід наголосити на властивостях першої та другої квадратичних форм поверхні, як приклад розглянувши гвинтову поверхню. Варіативно розглядаються індикатриса Дюпена і пов‘язана з нею класифікація точок поверхні. Досить важною для засвоєння є тема про внутрішню геометрію поверхні, тому при її викладанні потрібно звернути увагу на основні поняття, предмет внутрішньої геометрії, деризаційні формули рухомого реперу поверхні та згинання поверхні. Ці питання мають практичне застосування в теорії опору матеріалів, теорії деформації тощо. Всі інші питання програми, пов‘язані з внутрішньою геометрією поверхонь, ми виносимо на варіативний розгляд.

Десятий блок присвячений питанням аксіоматики, яка є основою для наукової побудови теорії. Необхідним є засвоєння суть аксіоматичного методу і вимог до системи аксіом. При цьому обов‘язково треба вміти доводити кожну з вимог на прикладах. Розгляд аксіоматики Гільберта-Вейля поширює математичний світогляд студентів, дозволяє застосувати кожну з аксіоматик до доведення теорем. Варіативно пропонуємо огляд до грецького періоду розвитку геометрії, різні способи доведення п‘ятого постулату та деяких теорем шкільного курсу за допомогою аксіоматики Вейля та огляд системи аксіом шкільного курсу геометрії.

Питання, яким присвячений одинадцятий блок, є важливими для сприйняття і потребують дуже чіткого стилю викладання. Слід строго сформулювати аксіоматику Лобачевського, поняття паралельних прямих та їх властивостей, розбіжних прямих і їх ознаки. Варіативно можна розглянути види кривих на площині Лобачевського, пов‘язані з різними видами пучк1в прямих, а також будову Пуанкаре моделі площини Лобачевського за допомогою інверсії. Досить важливим є доведення незалежності аксіоми паралельності і несуперечливості системи аксіом Лобачевського.

Цікавими є теми, пов‘язані з сферичною геометрією та еліптичною геометрією Рімана, які викладаються досить оглядово. Варіативно пропонуємо розглянути псевдоевклідову планіметрію та псевдоевклідів тривимірний простір. Як завершальний етап викладання одинадцятого блоку є аксіоматичне означення площини Лобачевського на підставі векторного простору, то дає змогу наблизити геометрію Лобачевського до шкільної геометрії.

Дванадцятий блок присвячений теорії вимірювання геометричних величин і висвітлює питання шкільного курсу геометрії - вимірювання довжини відрізка та площі многокутника. При доведенні теорем слід звернути увагу на аксіоми довжини та площі. При доведенні теорем шкільного курсу геометрії дуже часто ми використовуємо поняття рівноскладеності та рівновеликості фігур, тому ці питання потребують певної уваги. Варіативно розглядаються рівновеликі та рівноскладені многогранники і тісно пов‘язана з ними теорема Дена. До кожної теми курсу наведені список задач, які запропоновані у вигляді контролю за рівнем знань. Але це не означає відсутності можливості додавання практичних завдань до цього списку за розсудом викладача.

Тематика лекційних занять
5 семестр

<u>Лекція 1</u>

Тема: Паралельне проектування. Афінні відображення.

План

властивості паралельного проектування;

афінні відображення площини на площину;

афінна еквівалентність многокутників.

Зміст лекції:

доведення характерних властивостей паралельного проектування; визначення афінного відображення, приклади ; теорема про характеристику афінного відображення за допомогою систем координат; необхідна і достатня умова афінної еквівалентності чотирикутників; афінна еквівалентність кривих другого порядку (приклади).

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

<u>Лекція 2</u>

Тема: Зображення плоских фігур при паралельному проектуванні

План

1) необхідна і достатня умова того, щоб фігура Ф була зображенням фігури Ф';

2) зображення плоских многокутників (трикутника, чотирикутника , n-кутника);

основні способи побудови зображення кола (побудова точок еліпса).

Зміст лекції:

визначення зображення плоскої фігури при паралельному проектуванні; доводиться , що фігура Ф' є зображенням фігури Ф тоді і тільки тоді, коли вони є афінно-еквівалентними; ця теорема використовується для побудови зображення : трикутника, чотирикутника, n-кутника; для побудови зображення кола використовується твердження, що при довільному відображенні еліпс переходить у еліпс; розкривається два способи побудови точок еліпса (за спряженими діаметрами ; за допоміжним колом).

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 3

Тема: Зображення многокутників при паралельному проектуванні.

План

теореми про зображення афінного репера;

зображення призми і піраміди;

зображення циліндра, конуса , сфери.

Зміст лекції:

доводиться, що для двох афінно-еквівалентних плоских чотирикутників існує така площина G, що ортогональна проекція на цю площину одного з чотирикутників буде подібно до другого чотирикутника; доводиться теорема Польке-Шварца, далі розглядається зображення тетраедра, паралелепіпеда, призми; детально розглядається побудова зображення циліндра, конуса і сфери.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

<u>Лекція 4</u>

Тема: Метод аксонометричного зображення.

План

основні види аксонометричних проекцій;

приклади розв'язання найпростіших задач на взаємне розташування прямих і площин;

повні і неповні зображення; позиційні задачі.

Зміст лекції:

розкриваються теоретичні основи методу аксонометричного зображення; на практиці розрізняють наступні види аксонометричних проекцій : тригонометричні, діметричні, ізометричні; далі розглядається зображення прямих і площин методом аксонометричного проектування ; дається розв'язок п'яти основних задач; дається визначення повного і неповного зображення; розглядаються позиційні задачі.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

<u>Лекція 5</u>

Тема: Побудова перерізів найпростіших многогранників.

План

побудова перерізів піраміди і призми;

розв'язання метричних задач;

поняття про метод Монжа.

Зміст лекції:

основні задачі на побудову перерізів многогранників; метричні задачі на площини:

а) дано зображення ABC прямокутного трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ з прями кутом $\overline{C}$ і кутом $\overline{A}$, рівним 30°, потрібно побудувати зображення висоти , проведеної з висоти С;

б) трикутник ABC є зображенням трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, який подібний до заданого трикутника A0B0C0; побудувати зображення ортоцентра трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

далі розглядається розв'язок двох метричних задач простору; метод Монжа полягає в ортогональному проектуванні фігури на дві взаємно перпендикулярні площини з наступним суміщенням цих площин; розглядаються основні задачі на метод Монжа.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

<u>Лекція 6</u>

Тема: Властивості топологічного простору.

План

топологія метричного простору; приклади;

абстрактний топологічний простір;

неперервні відображення і гомеоморфізми.

Зміст лекції:

за допомогою метрики визначаються відкриті і замкнені множини; приклади; внутрішні . граничні і зовнішні точки множини; основна теорема: у метричному просторі об'єднання довільного класу відкритих множин є відкрита множина; перетин двох відкритих множин є відкрита множина; дається означення довільного топологічного простору, наводяться приклади з геометрії ; вводиться поняття околу точки; бази топології; доводиться , що множина А замкнена тоді і тільки тоді, коли вона співпадає зі своїм замиканням ; дається визначення неперервного відображення і гомеоморфізму; приклади.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 7

Тема: Основні типи топологічних просторів.

План

хаусдорфові топологічні простори і їх властивості;

компактні і зв'язні топологічні простори;

необхідна і достатня умова компактності множини у топологічному просторі Rn.

Зміст лекції:

даються різні означення хаусдорфового простору; аксіома Бореля-Лебега; теорема про компактні підмножини; зв'язні топологічні простори ; приклади; доводиться, що евклідовий, афінний і проективний простір є зв'язними просторами; доведення того, що основні властивості зберігаються при гомеоморфізмах; опис відкритих множин числової осі; теорема про компактність інтервалу.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 8

Тема: Многовиди і їх топологічні властивості.

План

поняття многовиду; приклади многовидів;

ейлерова характеристика многовиду;

двомірні многовиди і їх класифікація.

Зміст лекції:

топологічний многовид вводиться, як хаусдорфовий топологічний простір з зчисленною базою, який можна покрити координатними околами *к*-мірних карт; приклади; вводиться поняття евклідової характеристики, яка є топологічним інваріантом многовиду; основні теореми про компактні двомірні многовиди; топологічні властивості листа Мебіуса; доводиться формула $\chi(Qp,r)=2-2p-r$; яка і розкриває ейлерову характеристику.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 9

Тема : Многогранники у евклідовому просторі.

План

опуклі многогранники ; теорема Коші та теорема Александрова;

правильні многогранники; теорема Ейлера;

група симетрій правильних многогранників.

Зміст лекції:

опуклі фігури; основні твердження про випуклі многогранники; класифікація правильних многогранників; група симетрій правильного многогранника; основні твердження: а) число елементів групи симетрій дорівнює подвійному числу плоских кутів всіх його граней; б) взаємно-правильні многогранники мають одній і ті ж елементи симетрії; детально вивчають елементи симетрії куба і тетраедра.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрия. - М., 1987.

2) Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978;

3) Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 10

Тема : Лінії у евклідовому просторі.

План

векторна функція скалярного аргументу;

визначення лінії у просторі; різні способи задання;

гладкі лінії; способи задання ;приклади.

Зміст лекції:

елементи аналізу векторних функцій скалярного аргументу; лема про дотичну до одиничної векторної функції скалярного аргументу; координатне та параметричне визначення гладкої лінії; елементарні, прості лінії класу Ск ; приклади; теорема про неявні функції, та їх застосування до задання гладкої лінії перетином двох поверхонь; заміна параметра; натуральна параметризація.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 11

Тема : Дотична до лінії ; довжина дуги.

План

рівняння дотичної; умова існування;

вивід формули для обчислення довжини дуги;

теорема про заміну параметру; одиничний вектор дотичної при натуральній параметризації.

Зміст лекції:

для гладкої лінії дається визначення дотичної у точці; доводиться теорема про існування дотичної; доводиться формула для обчислення довжини дуги; доводиться , що довжина дуги гладкої лінії є зростаюча функція; розглядається натуральна параметризація і доводиться, що $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ - одиничний вектор дотичної.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 12

Тема : Кривизна і скрут лінії.

План

визначення кривизни та теорема про лінію з кривизною рівною нулеві;

формули Френе та їх геометричний зміст;

скрут лінії ; лінії , які лежать у площині;

Зміст лекції:

розглядається гладка крива класу Ск , де к ≥ 3 ; яка задається векторним рівнянням від натурального параметру; $\bar{r} = \bar{r}(s)$; визначається вектор кривизни; формула для обчислення кривизни; доводиться, що звґязна лінія буде найпростішою тоді і тільки тоді ,коли кривизна в кожній точці дорівнює нулеві; теорія гладких ліній базується на формулах Френе, вивід яких дається; доводиться , що гладка лінія у просторі є колом тоді і тільки тоді , коли всі її головні нормалі перетинаються у одній точці.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 13

Тема : Обчислення кривизни і скруту для довільної параметризації.

План

вивід формули для обчислення кривизни і зкруту для лінії, заданої від натурального параметру;

рівняння гвинтової лінії; головна нормаль;

криві Бертрана та їх властивості.

Зміст лекції:

для кривої ,що задається рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(t)$дається вивід для обчислення кривизни к і скруту χ; розглядається задача про складний рух точки у просторі, розв'язок якої є гвинтова лінія ; вивчаються геометричні властивості цієї лінії;

доводиться , що кривизна і скрут постійні ; розглядається узагальнення : криві Бертрана, їх найпростіші властивості.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 14

Тема : Поверхні у евклідовому просторі.

План

визначення поверхні; приклади;

гладкі поверхні; приклади;

достатні умови того, щоб функція f(x,y) задавала гладку поверхню.

Зміст лекції:

елементи аналізу векторної функції від двох скалярних аргументів; векторне і параметричне задання поверхні; визначення гладкої поверхні; приклади; криволінійні координати точки на поверхні; заміна параметризації; доведення теореми: якщо функція z=f(x,y) у області G має неперервні частинні похідні до *к*-го порядку включно, тоді рівняння z=f(x,y) задає гладку криву класу Ск.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 15

Тема : Дотична площина і нормаль до поверхні.

План

гладкі лінії на поверхні;

рівняння дотичної площини;

перша квадратична форма поверхні;

основні задачі на застосування першої квадратичної форми.

Зміст лекції:

доводиться, що всі дотичні у точці М гладкої поверхні до гладких кривих, що проходять через точку М, утворюють площину; доводиться рівняння дотичної площини; приклади; встановлюється , що значення першої квадратичної форми поверхні є квадратом диференціала довжини дуги, для нескінченно малого зміщення точки вздовж цієї лінії; розкривається застосування квадратичної форми до : обчислення довжини дуги гладкої лінії, кута між двома гладкими лініями; обчислення площі гладкої компактної поверхні.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

<u>Лекція 16</u>

Тема : Кривизна кривої на поверхні. Друга квадратична форма.

План

визначення другої квадратичної форми поверхні;

формула для обчислення нормальної кривизни;

індикатриса Дюпена і її геометричний зміст;

повна і середня кривизна поверхні.

Зміст лекції:

вектор нормалі до поверхні. Коефіцієнти другої квадратичної форми; нормальна кривизна; дослідження індикатриси Дюпена; головні напрямки у точці на поверхні; формула Родріга; вивід формул для повної і середньої кривизни; приклади: сфера і псевдосфера.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 17

Тема : Внутрішня геометрія поверхні.

План

предмет внутрішньої геометрії поверхні;

теореми Гауса ; геодезична кривизна лінії на поверхні;

ізометричні поверхні.

Зміст лекції:

внутрішня геометрія вивчає ті властивості поверхні, які визначаються лише першою квадратичною формою; доведення теореми Гауса; повна кривизна гладкої поверхні класу Ск , $\kappa \geq 3$, виражається тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми і їх похідні; основна теорема про необхідну і достатню умову ізометричності двох гладких поверхонь.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

Лекція 18

Тема : Геодезичні лінії на поверхні .

План

основна теорема про геодезичні лінії на гладкій поверхні;

дефект геодезичного трикутника;

ейлерева характеристика гладкої поверхні.

Зміст лекції:

доводиться, що через кожну точку М гладкої поверхні класу Ck у кожному напрямку, в достатньо малому околі, проходить геодезична лінія і тільки одна; дається теорема про повну кривизну внутрішніх точок геодезичного трикутника; без доведення формулюється теорема про ейлерову характеристику гладкої поверхні з р ручками.

Література

1)Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.

2)Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.

3)Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

6 семестр

Лекція 1

Тема: Історичний огляд обґрунтування геометрії.

План

1) геометрія до Евкліда; побудова геометрії за системою Евкліда;

2) критика системи Евкліда; абсолютна геометрія;

3) п’ятий постулат і його еквіваленти, геометрії.

Зміст лекції:

історичний екскурс обґрунтування геометрії; геометрія стародавньої Греції (Піфагор, Аристотель, Гіпокріт, Федій, Платон, Евклід); критика геометрії Евкліда; історія п’ятого постулату; доведення еквівалентів до п’ятого постулату; теореми Саккері-Лежандра.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 2

Тема: Побудова геометрії по Гільберту.

План

1) система аксіом Гільберта; наслідки із аксіом;

2) Лобачевський і його геометрія;

3) аксіома Лобачевського; визначення паралельних прямих.

Зміст лекції:

основні об’єкти геометрії, які побудовані Гільбертом; аналіз системи аксіом; М.І.Лобачевський і його геометрія; четверта ознака рівності трикутників; доведення існування паралельних прямих; теореми про відношення паралельних прямих на площині Лобачевського.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 3

Тема: Основні факти площини Лобачевського.

План

функція Лобачевського та її властивості;

трикутники і чотирикутники на площині Лобачевського;

взаємне розташування двох прямих на площині Лобачевського.

Зміст лекції:

аналітичний вираз функції Лобачевського; залежність між кутовими і лінійними величинами; сума кутів трикутника; чотирикутника Аскері; взаємне розташування двох прямих на площині Лобачевського; теорема про віддаль між двома паралельними прямими

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 4

Тема: Геометрія пучків на площині Лобачевського.

План:

1) коло, еквідістанта і оріцикл;

2) доведення логічної несуперечливості геометрії Лобачевського;

3) модель Келі-Клейна площини Лобачевського.

Зміст лекції:

основні типи пучків прямих на площині Лобачевського; коло та його властивості; основні теореми про еквідістанту; визначення оріциклу та його геометричні властивості; доведення теореми про те, що - кожна пряма у площині оріциклу, перетинає оріцикл не більше ніж у двох точках.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 5

Тема: Система аксіом Вейля тривимірного евклідового простору.

План:

1) визначення геометрії за Вейлем; наслідки із аксіом; несуперечливість геометрії;

2) прямі, площини і їх рівняння у геометрії Вейля;

3) доведення елементарних теорем за схемою Вейля.

Зміст лекції:

поняття про математичну структуру; інтерпретація, ізоморфізм, несуперечливість теорії і повнота системи аксіом; система аксіом Вейля побудови евклідової геометрії; наслідки із аксіом; геометричні фігури в геометрії Вейля; доведення деяких теорем цієї геометрії (V-постулат; перетин площин по прямій і інші).

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 6

Тема: Аналіз побудови шкільного курсу геометрії.

План:

1) система аксіом Гільберта та наслідки з неї;

2) аксіоматика А.І. Погарєлова шкільного курсу геометрії;

3) побудова геометрії по А.С. Атанасяну.

Зміст лекції:

характеристика системи аксіом Гільберта; визначення геометричних фігур; наслідки з аксіом; аналіз геометрії, побудованої за схемою А.І. Погорєлова; доцільність застосування векторного апарату у ШКГ; побудова геометрії по А.С. Антанасяну; інші можливості концепції побудови елементарної геометрії.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 7

Тема: Елементарні теорії вимірювання геометричних величин.

План:

1) довжина відрізка; теорема існування;

2) вимірювання відрізків; теорема єдиності;

3) побудова системи координат в абсолютній геометрії.

Зміст лекції:

функція вимірювання відрізків в абсолютній геометрії; доведення існування такої функції; доведення теореми про те, що для довільного відрізка [AB] існує єдина функція вимірювання відрізків, для якої [AB] є одиничним відрізком; доводиться, що для довільного числа E>0 існує такий відрізок, довжина якого дорівнює E.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 8

Тема: Вимірювання площі у евклідовій геометрії.

План:

площа многокутника; теорема існування;

теорема єдності; площа прямокутника;

рівновеликі і рівноскладені многокутники.

Зміст лекції:

визначення площі многокутника у евклідовій геометрії; теорема існування площі та її єдність (без доведення); доведення теореми про площу прямокутника; теореми про рівноскладені та рівновеликі фігури; огляд теорії вимірювання об'єму у просторі.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 9

Тема: Неевклідові геометрії.

План:

1) побудова гіперболічної геометрії на векторній основі;

2) поняття про еліптичну геометрію Римана;

3) геометрія еліптичної площини.

Зміст лекції:

під неевклідовими геометріями розуміють: гіперболічну геометрію Лобачевського; еліптичну геометрію Римана і сферичну геометрію; перші дві геометрії будуються на векторній основі (огляд); дається визначення неевклідового векторного простору індексу k; вводиться n-мірний гіперболічний простір, його кривизна; доводиться несуперечливість такої геометрії; еліптична геометрія будується на базі аксіом проективного простору.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Лекція 10

Тема: Сферична геометрія.

План:

1) основні поняття сферичної геометрії;

2) група рухів на сфері;

3) теорема синусів і косинусів сферичного трикутника.

Зміст лекції:

сферична геометрія вивчає фігури, що належать сфері евклідового простору; вводяться поняття сферичного двокутника і трикутника; доводиться теорема синусів і косинусів; дається вивід формули для площі сферичного трикутника; лишок сферичного трикутника; основні відмінності сферичної геометрії від евклідової.

Література

1) Атанасян Л.С., Базилев В.Т. Геометрия. - М., 1987.

2) Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.

3) Погорєлов А.В. Геометрія. - К.,1984.

Тематика практичних занять

5 семестр

Практичне заняття №1
Паралельне проектування

Аудиторне завдання:

Задача 1. (741, [1]) Довести, що довільний трикутник ABC площини Π є паралельною проекцією трикутника, подібного будь-якому заданому трикутнику $\overline{A_0}\overline{B_0}\overline{C_0}$.

Задача 2. (743, [1]) Довести, що будь-який паралелограм площини Π є проекцією квадрата.

Задача 3. (744, [1]) Довести, що коло при паралельному проектуванні переходить в еліпс, його взаємно перпендикулярні діаметри - в спряжені діаметри, а дотична до кола - в дотичну до еліпса.

Домашнє завдання:

Задача 1. (742, [1]) Довести: коли для трьох неколінеарних точок $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ плоскої фігури дано їх зображення A, B, C, то зображення M будь-якої точки $\overline{M}$ цієї плоскої фігури визначено однозначно.

Задача 2. (1359, [2]) Яка фігура буде зображенням в паралельної проекції рівнобічної трапеції, довжини основ якої відносяться як 2:3?

Література:

1. Сборник задач по геометрии. Ч. II. /Под ред. Л.С. Атанасяна. - М.: Просвещение, 1975. - с. 80
2. Сборник задач по геометрии. /Под ред. В.Т. Базылева. - М.: Просвещение, 1980. - с. 133

Практичне заняття №2

Зображення плоских фігур при паралельному проектуванні

Аудиторне завдання:

Задача 1. (741, [1]) Довести, що довільний трикутник ABC площини Π є паралельною проекцією трикутника, подібного будь-якому заданому трикутнику $\overline{A_0}\overline{B_0}\overline{C_0}$.

Задача 2. (1358, [2]) В паралельній проекції побудувати зображення правильного п'ятикутника.

Задача 3. (744, [1]) Довести, що коло при паралельному проектуванні переходить в еліпс, його взаємно перпендикулярні діаметри - в спряжені діаметри, а дотична до кола - в дотичну до еліпса.

Задача 4. (746, [1]) В площині Π задано еліпс - зображення кола $\overline{\Omega}$. Побудувати зображення правильного трикутника (квадрата, правильного шестикутника, правильного восьмикутника), вписаного в коло $\overline{\Omega}$.

Задача 5. (751, [1]) В площині Π задано пряму ℓ і трикутник ABC - зображення прямої $\overline{\ell}$ і правильного трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, які лежать в одній площині. Побудувати зображення перпендикуляра, опущеного з точки $\overline{C}$, на пряму $\overline{\ell}$.

Домашнє завдання:

Задача 1. (743, [1]) Довести, що будь-який паралелограм площини Π є паралельною проекцією квадрата.

Задача 2. (750, [1]) Побудувати зображення трапеції, вписаної в коло, основи якої видно з центра кола під кутами 60^0 і 120^0, якщо в площині Π задано зображення кола.

Задача 3. (752, [1]) В площині Π задані пряма ℓ, точка P і паралелограм $ABCD$ - зображення прямої $\overline{\ell}$, точки $\overline{P}$ і квадрата $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, які лежать в одній площині. Побудувати зображення перпендикуляра, опущеного з точки $\overline{P}$ на пряму $\overline{\ell}$.

Література:

[1]: с. 80-81

[2]: с. 133

<u>Практичне заняття №3</u>

Зображення правильних описаних многокутників

Аудиторне завдання:

Задача 1. (747, [1]) В площині Π задано еліпс - зображення кола $\overline{\Omega}$. Побудувати зображення правильного трикутника (квадрата, правильного шестикутника), описаного навколо кола $\overline{\Omega}$.

Задача 2. (749, [1]) В площині Π дано зображення кола. Побудувати зображення описаного навколо цього кола ромба, гострий кути якого дорівнює 60^0.

Задача 3. (1370, [2]) Еліпс Q задано осями AB і CD. Побудувати яку-небудь точку цього еліпса і дотичну до еліпса в цій точці.

Задача 4. (1373, [2]) Еліпс Q задано парою спряжених діаметрів AB і CD. Побудувати осі цього еліпса, не викреслюючи його.

Задача 5. (1374, [2]) Дано зображення квадрата в паралельній проекції. Побудувати зображення кола, вписаного в цей квадрат.

Задача 6. (1375, [2]) Дано зображення квадрата в паралельній проекції. Побудувати зображення кола, описаного навколо цього квадрата.

Домашнє завдання:

Задача 1. (748, [1]) Побудувати зображення прямокутного рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола, якщо в площині Π дано зображення кола.

Задача 2. (1362, [2]) Через задану точку провести дотичну до даного еліпса.

Задача 3. (1368, [2]) Побудувати еліпс Q, заданий своїми спряженими діаметрами AB і CD.

Задача 4. (1378, [2]) Дано зображення квадрата в паралельній проекції. Через дану точку P площини зображень Π провести дотичні до зображення кола, вписаного в квадрат.

Література:

[1]: с. 81

[2]: с. 134-135

<u>Практичне заняття №4</u>

Зображення просторових фігур при паралельному проектуванні

Аудиторне завдання:

Задача 1. (1356, [2]) Побудувати зображення правильної трикутної піраміди, правильної шестикутної призми в паралельному проектуванні.

Задача 2. (1357, [2]) Побудувати зображення куба, правильної восьмикутної піраміди в паралельному проектуванні.

Задача 3. (1361, [2]) Побудувати зображення правильної трикутної призми, вписаної в циліндр (описаної навколо циліндра) при ортогональному проектуванні.

Задача 4. (1380, [2]) В площині Π побудувати зображення циліндра, вписаного в конус так, що нижня основа циліндра належить основі конуса, а коло верхньої основи циліндра належить бічній поверхні конуса.

Задача 5. (1383, [2]) Побудувати зображення циліндра, описаного навколо кулі.

Задача 6. (1385, [2]) Дано зображення кулі і її екватора. Побудувати зображення двох її меридіанів, площини яких взаємно перпендикулярні.

Домашнє завдання:

Задача 1. (1366, [2]) Побудувати зображення правильної чотирикутної піраміди, вписаної в конус (описаної навколо конуса) при паралельному проектуванні.

Задача 2. (1367, [2]) Побудувати при ортогональному проектуванні зображення прямокутного паралелепіпеда, вписаного в циліндр.

Задача 3. (1381, [2]) Побудувати зображення правильної трикутної піраміди, вписаної в кулю, якщо площина її основи проходить (не проходить) через центр кулі.

Задача 4. (1389, [2]) Побудувати зображення правильного тетраедра, описаного навколо кулі.

Література:

[2]: с. 133-135

<u>Практичне заняття №5</u>

Повні та неповні зображення. Позиційні задачі

Аудиторне завдання:

Задача 1. (753, [1]) Дана пряма (ℓ, ℓ_3). Побудувати її сліди на аксонометричних площинах.

Задача 2. (757, [1]) Побудувати сліди площини, заданої двома прямими (ℓ, ℓ_3) і (m, m_3), які перетинаються.

Задача 3. (760, [1]) Одна площина задана своїми слідами, друга - трьома точками (A, A_3), (B, B_3), (C, C_3). Побудувати їх лінію перетину.

Задача 4. (793, [1]) Побудувати рисунок до задачі: у зрізаному паралелепіпеді три бічних ребра мають довжини a, b, c (по порядку); визначити довжину четвертого бічного ребра.

Задача 5. (763, [1]) Піраміда $SABC$ задана вершиною (S, S_3) і площиною основи $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, яка співпадає з площиною $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$. Побудувати точки перетину даної прямої (ℓ, ℓ_3) з бічними гранями піраміди.

Домашнє завдання:

Задача 1. (754, [1]) Дано сліди прямої на площинах $\overline{Z}\overline{O}\overline{X}$, $\overline{Y}\overline{O}\overline{Z}$. Знайти слід цієї ж прямої на площині $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$.

Задача 2. (759, [1]) Дано три прямі (a, a_3), (b, b_3), (ℓ, ℓ_3); при цьому перші дві лежать в одній площині $\overline{\alpha}$. Побудувати точку (μ, μ_3), в якій площина $\overline{\alpha}$ перетинається з прямою $\overline{\ell}$.

Задача 3. (762, [1]) Одна площина задана прямими (a, a_3) і (b, b_3), а друга - прямими (c, c_3) і (d, d_3). Побудувати пряму, по якій перетинаються задані площини.

Література:

[1]: с. 81-85

<u>Практичне заняття №6</u>

Побудова перерізів найпростіших многогранників

Аудиторне завдання:

Задача 1. Дано зображення трикутної призми $ABCA'B'C'$ і точок $M, N, P,$ які лежать відповідно на ребрі AA' і гранях $ABB'A'$ і $BCC'B'$. Побудувати переріз цієї призми площиною MNP.

Задача 2. Дано зображення чотирикутної призми $ABCDA'B'C'D'$ і точок $M, N, K,$ які лежать відповідно на гранях $DAA'D'$, $ABB'A'$ і $BCC'B'$. Побудувати переріз цієї призми площиною MNK.

Задача 3. Дано зображення паралелепіпеда $ABCD\,A'B'C'D'$ і точок $M, N, P,$ які лежать відповідно на ребрах AA', BB' і CC'. Побудувати переріз паралелепіпеда площиною MNP.

Задача 4. Дано зображення трикутної піраміди $SABC$ і точок $M, N, P,$ які лежать відповідно на ребрі AS і гранях ABS і BCS. Побудувати переріз піраміди площиною MNP.

Задача 5. Дано зображення чотирикутної піраміди $SABCD$ і точок $M, N, K,$ які лежать відповідно на гранях ABS, BCS і CDS. Побудувати переріз цієї піраміди площиною MNK.

Домашнє завдання:

Задача 1. (794, [1]) Зобразити куб і його переріз площиною, що проходить через середини двох суміжних сторін верхньої основи і через центр нижньої сторони.

Задача 2. (795, [1]) Дано зображення $SABCD$ чотирикутної піраміди і точки $\overline{K}$. На її ребрі. Переріз піраміди площиною $\overline{\alpha}$, який проходить через точку $\overline{K}$, має форму паралелограма; побудувати цій переріз.

Задача 3. (797, [1]) Побудувати зображення шестикутної призми та її перерізу площиною, що проходить через сторону основи і точку на бічному ребрі.

Література:

[1]: с. 85

Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия . В 2-х частях. ч. II - М: Просвещение, 1987. - с. 121-125.

Практичне заняття №7

Метричні задачі. Метод Монжа

Аудиторне завдання:

Задача 1. (805, [1]) В площині Π дано зображення ABC рівнобедреного трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ($\overline{A}\overline{B} = \overline{A}\overline{C}$), висота якого дорівнює стороні основи. Побудувати зображення висот трикутника і центра кола, описаного навколо трикутника.

Задача 2. (806, [1]) Дано зображення ABC трикутника і його ортоцентра H. В площині Π побудувати трикутник, подібний оригіналу.

Задача 3. (807, [1]) Дано зображення $ABCD$ квадрата і точки M на його стороні. Побудувати зображення правильного трикутника, одна б з вершин якого знаходилася в точці M, а дві інші - на інших сторонах квадрата.

Задача 4. (811, [1]) Побудувати зображення трикутної піраміди і її висоти $\overline{S}\overline{H}$, якщо основою піраміди є трикутник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ з тупим кутом $\overline{A}$, а вершина $\overline{S}$ однаково віддалена від точок $\overline{A}, \overline{B}$ і $\overline{C}$.

Задача 5. (823, [1]) Як розміщуються на епюрі горизонтальна і фронтальна проекції ℓ_1 і ℓ_2 прямої $\overline{\ell}$, якщо $\overline{\ell}$ паралельна одній з площин σ_1 і σ_2?

Задача 6. (826, [1]) По проекціям ℓ_1 і ℓ_2 прямої $\overline{\ell}$ побудувати її сліди P_1 і P_2, і навпаки: по слідах P_1 і P_2 побудувати проекції ℓ_1 і ℓ_2.

Домашнє завдання:

Задача 1. Дана правильна трикутна призма $ABCA_1B_1C_1$, бічне ребро якої дорівнює стороні основи. Побудувати перпендикуляр, проведений з вершини A до площини A_1BC.

Задача 2. Дано куб $ABCDA'B'C'D'$. Побудувати перпендикуляр, проведений з точки $M \in AA'D'$ до площини $BC'D$.

Задача 3. Побудувати зображення правильного п'ятикутника і правильного восьмикутника.

Задача 4. По заданій горизонтальній проекції K_1 точки $\overline{K}$, яка лежить в площині, побудувати її фронтальну проекцію якщо:

а) площина задана трьома точками;

б) площина задана слідами.

Література:

[1]: с. 85-88

[2]: с. 129-131

<u>Практичне заняття №8</u>

Контрольна робота №1

Варіант 1

1. Дано зображення кола при паралельному проектуванні. Побудувати зображення вписаного в нього правильного шестикутника.
2. Дано аксонометричне зображення п'ятикутної призми, основа якої лежить в площині $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$, а ребра паралельні осі $\overline{O}\overline{Z}$. Побудувати зображення перерізу призми площиною $\overline{\alpha}$, заданою своїми слідами на площинах $\overline{Y}\overline{O}\overline{Z}$, $\overline{X}\overline{O}\overline{Z}$.

3. В паралельному проектуванні дано зображення трикутника, вписаного в коло. Побудувати зображення його висот.

Варіант 2

1. Дано зображення кола в паралельному проектуванні. Побудувати зображення: описаного навколо нього правильного трикутника.
2. Дано зображення куба при паралельному проектуванні. Побудувати зображення перерізу цього куба площиною, що проходить через точки M', N', P', такі, що точки M' і N' лежать на бічних гранях куба, а точка P' - на продовженні одного з бічних ребер.
3. Бічне ребро правильної трикутної призми $ABCA'B'C'$ рівне стороні основи. З вершини A' опущено перпендикуляр на площину $AB'C'$. Побудувати зображення при паралельному проектуванні.

Варіант 3

1. Дано зображення кола в паралельній проекції. Побудувати зображення правильного восьмикутника, вписаного в це коло.
2. Дано зображення правильної чотирикутної піраміди при паралельному проектуванні. Побудувати зображення перерізу піраміди площиною, що проходить через точки M, N, P, такі що точка M лежить на одному з бічних ребер, а точки N і P - на її бічних гранях.
3. Дано зображення трикутника вписаного в коло. Побудувати зображення центра кола, вписаного в цей трикутник.

Варіант 4

1. В паралельному проектуванні побудувати зображення правильної чотирикутної піраміди, вписаної в конус.

2. При паралельному проектуванні дано зображення циліндра F і площини Π, заданої трьома точками на твірних циліндра. Побудувати зображення перерізу циліндра F площиною Π.
3. При паралельному проектуванні дано зображення трикутника, вписаного в коло. Побудувати зображення його висот.

Варіант 5

1. При паралельному проектуванні дано зображення квадрата $A'B'C'D'$. Побудувати зображення будь-якого квадрата, сторони якого дотикаються кола, описаного навколо квадрата $A'B'C'D'$.
2. Побудувати сліди площини заданої двома прямими (ℓ, ℓ_3) і (m, m_3), які перетинаються.
3. Дано зображення куба $ABCDA'B'C'D'$ при паралельному проектуванні. Побудувати зображення спільного перпендикуляра мимобіжних прямих (AC') і (BD), які містять діагональ куба і діагональ його грані. Обчислить відстань між цими прямими, якщо a - довжина ребра цього куба.

Варіант 6

1. Зображення Q кола Q' при паралельному проектуванні задано зображеннями AB і CD його перпендикулярних діаметрів. Також дано зображення ℓ прямої ℓ', яка не проходить через центр кола Q' і перетинає його в точках M', N'. Побудувати зображення M і N цих точок.
2. В паралельній проекції дано зображення конуса F і площини Π, заданої слідом на площині основи конуса і точкою на його бічній поверхні. Побудувати переріз конуса F площиною Π.
3. Дано зображення трикутника, описаного навколо кола, при паралельному проектуванні. Побудувати зображення його медіан, висот.

Варіант 7

1. Дано зображення кола в паралельному проектуванні. Побудувати зображення вписаного в нього правильного трикутника.
2. Одна площина задана своїми слідами, друга - трьома точками (A, A_3), (B, B_3), (C, C_3). Побудувати лінію їх перетину.
3. Через ребро AD верхньої основи куба $ABCDA'B'C'D'$ проведена площина, яка перетинає нижню основу по відрізку $M'N'$. З точки P верхньої основи опущено перпендикуляр на площину перерізу. Побудувати його зображення при паралельному проектуванні.

Варіант 8

1. Дано зображення квадрата при паралельному проектуванні. Через дану точку площини зображень провести дотичні до зображення кола, вписаного в квадрат.
2. Одна площина задана прямими (a, a_3) і (b, b_3), а друга - прямими (c, c_3) і (d, d_3). Побудувати пряму, по якій перетинаються дані площини.
3. При паралельному проектуванні дано зображення куба $ABCDA'B'C'D'$ і точок M, N, в яких пряма (MN) перетинає бічні грані куба. Побудувати зображення спільного перпендикуляра прямих (MN) і (DD').

Варіант 9

1. Дано зображення рівнобедреного прямокутного трикутника при паралельному проектуванні. Побудувати зображення описаного навколо цього кола.

2. Піраміда $SABC$ задана вершиною (S, S_3) і площиною основи $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, яка співпадає з площиною $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$. Побудувати точки перетину даної прямої (ℓ, ℓ_3) з бічними гранями піраміди.
3. На епюрі задані проекції $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ трикутника ABC. Побудувати вертикальну проекцію M_2 точки $M \in (ABC)$, знаючи її горизонтальну проекцію M_1.

Варіант 10

1. Побудувати зображення правильної чотирикутної призми, вписаної в кулю.
2. Знайти точку перетину прямої (ℓ_1, ℓ_2) з площиною, заданою двома прямими (p_1, p_2) і (q_1, q_2), які в ній лежать.
3. В площині Π дано зображення ABC рівнобедреного трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ $(\overline{A}\overline{B} = \overline{A}\overline{C})$, висота якого дорівнює стороні основи якого дорівнює стороні основи. Побудувати зображення висот трикутника.

Варіант 11

1. Побудувати зображення правильної трикутної призми, описаної навколо кулі.
2. Дано трикутник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ проекціями своїх вершин. Знайти сліди сторін цього трикутника на площинах проекцій.
3. Призма, в основі якої лежить чотирикутник $ABCD$ із взаємно перпендикулярними діагоналями і кутами $\overline{A} = 60^0$ і $\overline{C} = 120^0$, описана навколо сфери. Побудувати її зображення, якщо дано обриси сфери і зображено екватор.

Варіант 12

1. Дано зображення квадрата при паралельному проектуванні. Побудувати зображення кола, описаного навколо цього квадрата.
2. Дано зображення куба $ABCDA'B'C'D'$ при паралельному проектуванні. Побудувати зображення перерізу куба площиною, що проходить через вершину A' перпендикулярно діагоналі AC' куба, і точки X перетину цієї площини з діагоналлю AC'.
3. На епюрі знайти істинну величину відрізка AB за його проекціями A_1B_1 і A_2B_2.

Варіант 13

1. Побудувати зображення куба, вписаного в кулю.
2. На епюрі задані горизонтальна і вертикальна проекцій тетраедра $ABCD$. Побудувати переріз тетраедра площиною, заданою трьома її точками $M(M_1,M_2)$, $N(N_1,N_2)$, $P(P_1,P_2)$, що не лежать на одній прямій.
3. При паралельній проектуванні дано зображення трикутника, описаного навколо кола. Побудувати зображення його бісектрис.

Варіант 14

1. Побудувати зображення правильного тетраедра, описаного навколо кулі.
2. Дано три точки (M,M_3), (N,N_3) і (P,P_3) кола. Побудувати його центр (C,C_3).
3. Площина Σ задана на епюрі своїми слідами $m_1 \subset \Pi_1$ і $\ell_2 \subset \Pi_2$. Побудувати основу перпендикуляра, опущеного з точки $A(A_1,A_2)$ на площину Σ.

Варіант 15

1. Дано зображення кола в паралельній проекції. Побудувати зображення правильного восьмикутника, описаного навколо цього кола.
2. Довжина висоти правильної чотирикутної призми $ABCDA'B'C'D'$ дорівнює $3/2$ довжини сторони основи. Через вершину C' основи проведена площина, перпендикулярна діагоналі $A'C$ призми. Побудувати зображення перерізу призми цією площиною при паралельному проектуванні.
3. Дано слід площини $\overline{\alpha}$ на площині $\overline{Y}\overline{O}\overline{Z}$ і точка (A, A_3), через яку проходить площина $\overline{\alpha}$. Побудувати два інших сліди цієї площини.

Варіант 16

1. Через дану точку провести дотичні до заданого еліпса.
2. При паралельному проектуванні дано зображення правильної чотирикутної піраміди, висота якої рівна стороні основи. Побудувати зображення перерізу піраміди площиною, що проходить через сторону основи і перпендикулярного до площини протилежної бічної грані.
3. Дано сліди прямої на площинах $\overline{Z}\overline{O}\overline{X}$ і $\overline{Y}\overline{O}\overline{Z}$. Знайти слід тієї ж прямої на площині $\overline{X}\overline{O}\overline{Y}$.

Варіант 17

1. Побудувати еліпс, заданий своїми спряженими діаметрами AB і CD.
2. Побудувати зображення $\overline{S}\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ правильної трикутної піраміди і всіх точок на її поверхні, рівновіддалених від кінців бічного ребра $\overline{S}\overline{A}$, якщо $\overline{S}\overline{A} : \overline{A}\overline{B} = 2 : 1$.
3. В площині Π дано зображення ABC рівнобедреного трикутника $A'B'C'$ $(A'B' = A'C')$, висота якого дорівнює стороні основи. Побудувати зображення центра кола, описаного навколо трикутника.

Варіант 18

1. Еліпс Q, заданий парою спряжених діаметрів AB і CD, є зображенням кола Q' при паралельному проектуванні. Побудувати зображення правильного п'ятикутника, вписаного в коло Q'.
2. Дано зображення $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куба. Побудувати зображення спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих $\overline{B}\overline{D}$ і $\overline{A}\overline{D_1}$.
3. Дано зображення ABC трикутника і його ортоцентра H. В площині Π побудувати трикутник, подібний оригіналу.

Варіант 19

1. Еліпс Q заданий парою спряжених діаметрів AB і CD. Побудувати ще одну пару спряжених діаметрів еліпса Q, не викреслюючи його.
2. Дано зображення $SABCD$ чотирикутної піраміди і точки $\overline{K}$ на її ребрі. Переріз піраміди площиною $\overline{\alpha}$, що проходить через точку $\overline{K}$, має форму паралелограма; побудувати цей переріз.
3. Площина задана слідами, пряма - аксонометричною і вторинною проекціями. Знайти точку їх перетину.

Варіант 20

1. Еліпс Q заданий парою спряжених діаметрів в AB і CD. Побудувати осі цього еліпса, не викреслюючи його.
2. Побудувати зображення шестикутної призми та її перерізу площиною, що проходить через сторону основи і точку на бічному ребрі.

3. В площині Π задані пряма ℓ і трикутник ABC - зображення прямої ℓ' і правильного трикутника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, які лежать в одній площині. Побудувати зображення перпендикуляра, опущеного з точки $\overline{C}$ на пряму $\overline{\ell}$.

Варіант 21

1. В площині П дано зображення кола. Побудувати зображення описаного навколо кола ромба, гострий кут якого 60^0.
2. Побудувати зображення п’ятикутної піраміди та її перерізу площиною, що проходить через три точки, які лежать на різних бічних гранях піраміди.
3. Побудувати сліди площини, перпендикулярної прямій (ℓ, ℓ_3), і яка проходить через точку (A_1, A_2).

Варіант 22

1. В паралельному проектуванні побудувати зображення правильної чотирикутної піраміди, описаної навколо конуса.
2. Зобразити похилу призму та її висоту $\overline{A}_1\overline{H}$, якщо в основі призми лежить рівнобедрений трикутник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ $(\overline{A}\overline{B} = \overline{A}\overline{C})$, а вершина $\overline{A_1} \in \overline{A}\overline{A}_1$ рівновіддалена від точок $\overline{A}, \overline{B}$ і $\overline{C}$.
3. Побудувати пряму (ℓ, ℓ_1), яка проходить через дану точку (A, A_1) і перетинає задані прямі (b, b_1) і (d, d_1).

Варіант 23

1. Побудувати зображення трапеції, вписаної в коло, основи якої видно з центра кола під кутами 60^0 і 120^0, якщо в площині паралельного проектування дано зображення кола.

2. Побудувати зображення SABCD правильної чотирикутної піраміди і всіх точок на її поверхні, рівновіддалених від площини основи і площини грані $\overline{S}\overline{A}\overline{B}$, якщо $\overline{S}\overline{A}:\overline{A}\overline{B}=\sqrt{5}$:2.
3. Побудувати фронтальну проекцію точки $\overline{K}$ за даною горизонтальною проекцією K_1, якщо площина задана трьома точками.

Варіант 24

1. Побудувати при паралельному проектуванні зображення правильного п'ятикутника.
2. Зобразити: правильний тетраедр $\overline{S}\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ і перпендикуляр, проведений через точку $\overline{p}$ на його грані $\overline{S}\overline{A}\overline{B}$ до грані $\overline{S}\overline{B}\overline{C}$.
3. Визначити, якій умові повинні задовольняти проекції L_1 і L_2 прямої $\overline{L}$, щоб вона лежала в площині, заданій слідами.

Варіант 25

1. Дано зображення квадрата при паралельному проектуванні. Побудувати зображення кола, вписаного в цей квадрат.
2. В правильній призмі $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\,\overline{A'}\overline{B'}\overline{C'}$ з основою $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ $\overline{A}\overline{A'}:\overline{A}\overline{B}=3:2.$ Побудувати зображення цієї призми і всіх точок на її поверхні, рівновіддалених від вершин $\overline{B}$ і $\overline{C'}$.
3. Побудувати лінію перетину (p_1, p_2) двох площин, заданих своїми слідами.

<u>Практичне заняття 9</u>

Властивості топологічного простору

Аудиторне завдання:

Задача 1. На множині E=$\{1,2,3\}$ задати які-небудь довільні топології T_1, T_2; обчислити $T_1 \cap T_2, T_1 \cup T_2$.

Задача 2. Довести: якщо T_1, T_2- топології на множині E, то $T_1 \cap T_2$ також топологія на E.

Задача 3. Множина A називається щільною множиною топології простору E, якщо $\overline{A} = E$. Довести, що множина раціональних чисел Q є щільною множиною всіх дійсних чисел R, тобто $\overline{Q} = R$.

Задача 4. Знайти внутрішню частину замикання і межу різних проміжків на числовій прямій.

Задача 5. Довести, що перетин двох відкритих і щільних множин є щільна множина.

Задача 6. Нехай A - відкрита множина, а B - замкнена множина. Довести, що A\B - відкрита , а B\A - замкнена множина.

Задача 7. Довести, що існує таке неперервне відображення φ топологічного простору ε на топологічний простір ε', при якому образ відкритої множини може не бути відкритою множиною.

Задача 8. (1177 А) Нехай S - множина точок простору T^{E_3}, координати яких задовольняють умові: f(x, y, z) = c = const. Довести, що коли f(x, y, z) - неперервна функція у всіх точках простору T^{E_3}, то S - замкнена множина.

Домашнє завдання:

Задача 1. Нехай E - топологічний простір і A - щільна множина в E. Довести, що для щільної множини $D \subset \overline{A \cap D}, \overline{A} = E$, D - відкрита множина.

Задача 2. Довести включення $в(\overline{A}) \subset в(A)$, $в(A^0) \subset в(A)$ для довільної множини A топології простору E.

Задача 3. Нехай A і B - відкриті множини, які не перетинаються. Довести, що $A \cap \overline{B} = \varnothing$

Задача 4. Нехай E - довільний топологічний простір, A - довільна його підмножина. Довести рівносильність тверджень:

а) для кожної точки x $\in$ A існує такий окіл V_x, що $A \bigcap V_x$ - замкнена підмножина в V_x;

б) $\overline{A} \setminus A$ - замкнена множина в E;

в) A є перетин замкненої множини з відкритою.

Література:

[3]. С. 139 - 144, 146 - 148.

Практичне заняття 10

Неперервні відображення. Гомеоморфізми. Компактність. Зв'язність. Многовиди

Аудиторне завдання:

Задача 1. Нехай E - зв'язний топологічний простір і φ - неперервне відображення E на F. Довести, що F - зв'язний топологічний простір.

Задача 2. (1192, [1]) З'ясувати, які із заданих множин точок простору E будуть компактними:

а) скінчена множина точок $P_1, \ldots, P_к$;

б) відкритий круг, тобто множина всіх точок M, що задовольняють умові $|OM| < r$, де r>0;

в) нескінчена множина точок числової осі OX з координатами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Задача 3. (1200, [1]) Довести, що при неперервному відображенні образ компактної множини є компактною множиною.

Задача 4. (1205, [1]) Довести, що співвідношення x = cosu, y = sinu $(0 \le u < 2\pi)$ визначають взаємно-однозначне і неперервне відображення $x : U_1 \to S$, де $U_1 = \{U : 0 \le U < 2\pi\}$, S - коло радіуса 1 з центром в початку координат. Чи буде x гомеоморфізмом? Результат пояснити.

Задача 5. (1209, [1]) Довести, що інтервал гомеоморфний прямій; сфера без 1 точки гомеоморфна площині.

Задача 6. (1214, [1]) Знайти ейлереву характеристику сфери, тора.

Домашнє завдання:

Задача 1. (1190, [1]) Чи будуть вказані множини точок зв'язними:

а) множина точок площини, кожна з яких має хоча б одну раціональну координату;

б) множина точок площини, що мають тільки одну раціональну координату.

Задача 2. (1194, [1]) Показати, що об'єднання скінченої кількості компактних множин є компактна множина. Навести приклад, що наказує, що об'єднання нескінченої кількості компактних множин не завжди є компактною множиною.

Задача 3. (1201, [1]) Чи справедливе твердження: при неперервному відображенні прообраз компактної множини є компактна множина.

Задача 4. (1213, [1]) Довести, що не існує випуклого многогранника, всі грані якого - шестикутники.

Література:

[1]. С. 131 - 134.

Практичне заняття 11

Правильні многогранники. Група симетрій правильних многогранників

Аудиторне завдання:

Задача 1. (1077, [1]) Знаючи довжину a ребра правильного тетраедру, обчислити:

- площу його поверхні S;
- об'єм V;
- радіус вписаної сфери r;
- радіус описаної сфери R;
- величину двогранного кута φ.

Задача 2. Задано куб з ребром a. Знайти радіус описаної кулі R; радіус вписаної кулі r; віддаль між мимобіжними прямими.

Задача 3. (1083, [2]) Довести, що, використовуючи зрізання частин, можна з куба одержати правильний октаедр.

Задача 4. (1086, [2]) Довести, що кожний многогранний кут архімедового многогранника має не більше п'яти граней.

Задача 5. Довести, що центр кожного правильного многогранника є інваріантною точкою для кожної симетрії многогранників.

Задача 6. Довести, що всяка вісь симетрії будь-якого многогранника проходить через його центр.

Домашнє завдання:

Задача 1. (1078, [2]) Знаючи довжину a ребра правильного октаедра, обчислити S, V, r, R, φ.

Задача 2. Довести, для будь-якого многогранника або немає центральної симетрії, або є єдина, відносно центра многогранника.

Задача 3. Довести, що число всіх симетрій правильного многокутника дорівнює подвоєному числу всіх плоских кутів всіх його граней.

Література:

[2]: с. 107 - 110.

Практичне заняття № 12

Векторна функція скалярного аргументу.

Гладкі лінії. Дотична. Довжина дуги

Аудиторне завдання:

Задача 1. (28, [4]) Для вектор-функції $\bar{r}(t)=(t^2+8{,}4t-7, t+5)$ знайти значення t_0, при якому лінійне відображення $\overline{r'}(t_0)$ переводить число 2 в вектор (4, 8,

Задача 2. (30, [4]) Чи можна стверджувати, що для функції r(t) мають місце рівності: $|\overline{r'}|=|\bar{r}|'$, $\bar{r}*\bar{r}'=|\bar{r}|*|\overline{r'}|$?

Задача 3. (37, [4]) Довести, що образом кривої, заданої вектор-функцією $\bar{r}=\overline{r_0}+\cos t*\overline{r_1}+\sin t*\overline{r_2}$, $t\in[0,2\pi]$ є еліпс, якщо вектори $\overline{r_1}$ і $\overline{r_2}$ не колінеарні. Що буде у випадку колініарності векторів r_1 і r_2.

Задача 4. (1630, [2]) Лінія γ задана параметричними рівняннями: $x=e^t*\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t, -\infty<t<\infty$. Визначити клас гладкості лінії γ і скласти рівняння дотичної в точці t=0.

Задача 5. (1634, [2]) Показати, що лінія x=a*tgt, y=b*cost, z=b*sint, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, a=const, b=const розміщена на гіперболічному параболоїді.

Задача 6. (1649, [2]) Довести, що частина циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, z=0, 0<t<2π є гладкою лінією. Знайти довжину однієї арки циклоїди (аркою циклоїди називають її дугу з кінцями в точках t=2πk, t=2π(k+1), де $k\in z$.

Домашнє завдання:

Задача 1. (1635, [2]) Показати, що дана лінія лежить на сфері: $x = \sin 2\varphi, y = 1 - \cos 2\varphi, z = 2\cos\varphi, 0 \le \varphi < 2\pi$. Написати рівняння дотичної до цієї лінії в точці $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Задача 2. (1642, [2]) Знайти довжину дуги лінії $x^3 = 3a^2 y, 2xz = a^2$ між площинами $y = \frac{a}{3}$ і y=9a.

Задача 3. (1650, [2]) Гладка лінія задана системою рівнянь $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$. Написати рівняння дотичної прямої і нормальної площини цієї лінії в її точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Задача 4. (14, [4]) Довести, що гладкість вектор - функції рівносильна гладкості її складових.

Задача 5. (21- 26, [4]) Знайти похідні функції однієї змінної t:

1) $\overline{r}^2$; 4) $\overline{r'}.\overline{r''}.\overline{r'''}$;

2) $(\overline{r'})^2$; 5) $(\overline{r'} * \overline{r''}) * \overline{r'''}$;

3) $\overline{r'} * \overline{r''}$; 6) $\sqrt{\overline{r}^2}$.

Література:

[2]. С. 152 - 162.

4.Сборник задач по дифференциальной геометрии /Под ред. А.С.Феденко. - М.; Наука, 1979 -272с. (с. 22 - 25).

<u>Практичне заняття № 13</u>

Кривизна та скрут лінії.

Аудиторне завдання:

Задача 1. (1654, [2]) Знайти координатні вектори канонічного репера лінії x=a(t - sint), y=a(1-cost), z=4acost, $-\infty < t < +\infty$, a=const>0 в її довільній точці.

Задача 2. (1657, [2]) Знайти рівняння головної нормалі лінії x=t, y=t^2 , z=e^t в точці t=0.

Задача 3. (1660, [2]) На лінії $x = \frac{2}{t}, y = \ln t, z = -t^2, 0 < t < +\infty$ знайти точки, в яких бінормаль паралельна площині: x - y + 8z + 2 = 0.

Задача 4. (1658, [2]) Написати рівняння стичної площини лінії $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,$ z=cos2t, $0 \le t \le 2\pi$ в її довільній точці.

Задача 5. (1667, [2]) Знайти кривизну і скрут лінії: x=a ch t, y=a ch t, z=at, $t \in R$, a=const>0 в її довільній точці.

Задача 6. (1668, [2]) Довести, що кривизна і скрут звичайної гвинтової лінії постійні.

Задача 7. (1682, [2]) Знайти еволюту циклоїди: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, z=0, $t \in (-\infty; \infty)$.

Домашнє завдання:

Задача 1. (1664, [2]) Дана лінія: X=sint, y=cost, z=tgt, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Написати рівняння дотичної, нормальної площини, бінормалі, стичної площини, головної нормалі і спрямної площини в точці t=$\frac{\pi}{4}$. В цій же точці знайти координатні вектори канонічного репера.

Задача 2. (1666, [2]) Обчислити кривизну кривої: X=t - sint, y=1 - cost, t=4sin$\frac{t}{2}$, $-\infty < t, \infty$ в точці t=π.

Задача 3. (1679, [2]) Довести, що коли дві лінії γ_1 і γ_2 (криві Бертрана) мають спільні головні нормалі, то кривизна і скрут лінії γ_1(і γ_2) знаходяться у лінійній залежності: ak + bx =1 (a=const, b=const).

Задача 4. (1683, [2]) Знайти еволюту параболи: $y^2 = 2px, z = 0$.

Література:

[2]. С. 162 - 164.

Практичне заняття №14

Дослідження і побудова ліній (кривих).

Аудиторне завдання:

Задача 1. (215-222, [4]) Дослідити і побудувати лінії, задані рівняннями в явному вигляді:

а) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

Задача 2. (223-238, [4]) Дослідити і побудувати зразки кривих, заданих параметричними рівняннями:

а) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$;

б) $x = t^4$, $y = t^2 - t^5$.

Задача 3. (239-274, [4]) Дослідити і побудувати лінії (з особливими точками), задані рівняннями:

а) $x^3 - y^2 + 1 = 0$;

б) $xy^2 - y^2 - 4x = 0$.

Задача 4. (275-281, [4]) Дослідити і побудувати зразки кривих, заданих рівняннями в полярних координатах:

а) $r^2 = a^2\varphi, (a \neq 0)$ - спіраль Ферма;

б) $r = a\sin 3\varphi, a > 0$.

Домашнє завдання:

Задача 1. (71, [4]) Точка М рівномірно рухається по прямій ON, яка рівномірно обертається навкруг точки О. Скласти рівняння траєкторії точки М (спіраль Архімеда).

Задача 2. (93, [4]) Показати, що рівняння $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$

$x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, y = b\dfrac{2t}{1+t^2}$

є параметризаціями однієї й тієї ж лінії. Зробити рисунок лінії. Як рухається точка по лінії, коли параметр t зростає від $-\infty$ до $+\infty$?

Задача 3. (94, [4]) Вказати, які лінії задаються в полярних координатах такими рівняннями:

а) r=4;

б) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$;

в) $r = b\sin\varphi$.

Література:

[4]. С. 27-43.

Практичне заняття №15

Поверхні у евклідовому просторі.

Аудиторне завдання:

Задача 1. (529, [4]) Написати рівняння тора, який одержується при обертанні кола $x = a + b\cos u, y = 0, z = b\sin u, (b < a)$ навколо осі OZ.

Задача 2. (545, [4]) Яка поверхня задається рівняннями: $x = u + \sin v, y = u + \cos v, z = u + a$?

Задача 3. (575, [4]) Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до вказаних поверхонь у заданих точках:

а) $z = x^3 + y^3$ в точці М(1, 2, 9);

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точці M(3, 4, 12);

в) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точці M(3, 1, -1).

Задача 4. (639, [4]) Знайти першу квадратичну форму таких поверхонь обертання:

а) $x = R\cos u \cos v, y = R\cos u \sin v, z = R\sin u$ - сфера;

б) $x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$ - круговий циліндр.

Задача 5. (686, [4]) Знайти кут між лініями $v = u + 1$ і $v = 3 - u$ на поверхні $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$.

Задача 6. Для прямого гелікоїда $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ знайти:

другу квадратичну форму;

головні напрямки і головні кривизни;

повну і середню кривизну. На яких лініях повна кривизна постійна?

Домашнє завдання:

Задача 1. (1690, [2]) Скласти рівняння катеноїда - поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}, z = 0$ навколо осі OX.

Задача 2. (549, [2]) З'ясувати вид координатних ліній на площині:

а) x=u, y=v, z=0;

б) $x = u\cos v, y = u, z = 0$.

Задача 3. До поверхні xyz=1 провести дотичну площину, паралельну площині x+y+z-3=0.

Задача 4. (681, [4]) Дана поверхня $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ $(|u| + |v| \neq 0)$

а) знайти першу квадратичну форму;

б) обчислити диференціал довжини дуги для лінії u=2, v=1, v=πu;

в) обчислити довжину дуги лінії v=au між точками її перетину з лініями u=1, u=2.

Задача 5. (734, [4]) Довести, що головні напрямки прямого гелікоїда Ділять навпіл кути між напрямками твірної і гвинтової лінії.

Література:

[2]. С. 165 - 170.

[4]. С. 68 - 98.

Практичне заняття №16

Контрольна робота №2

Варіант 1

1. Довести, що перетин будь-якого сімейства топологій на множині X є топологією на У.
2. Довести, що еліпсоїд гомеоморфний сфері.
3. Довести, що не існує випуклого многогранника, всі грані якого - шестикутники.

Варіант 2

1. Довести: якщо множина X містить більше двох точок, то об'єднання двох топологій на X може бути топологією на X.
2. Довести, що однополий гіперболоїд гомеоморфний еліптичному циліндру.
3. Знайти ейлереву характеристику сфери.

Варіант 3

1. Нехай (X,T) - топологічний простір; V_x - сімейство всіх околів точки $x \in X$. Довести, що коли $U \in V_x$, то $x \in U$.
2. Довести, що кожен параболоїд гомеоморфний площині.

3. Обчислити площу поверхні S, об'єм V, радіус вписаної сфери r, радіус описаної сфери R, двогранний кут φ правильного додекаедра, якщо відома довжина a його ребра.

Варіант 4

1. Довести: якщо множина A щільна в просторі (X,T) і $U \in T$, то $U \subset \overline{A \cap U}$.
2. Довести, що еліптичний циліндр гомеоморфний відкритому кільцю.
3. Довести, що центр правильного многогранника є інваріантною точкою будь-якої симетрії цього многогранника.

Варіант 5

1. Нехай A - множина в топологічному просторі (X,T) і $\alpha(A) = \overline{A}$. Довести, що $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$.
2. Довести, що двополий гіперболоїд гомеоморфний парі паралельних площин.
3. Довести, що всі осі симетрії, площини симетрії правильного многогранника F проходять через його центр O.

Варіант 6

1. Довести, що в евклідовому просторі відкриті кулі з раціональними радіусами і раціональними центрами утворюють базу топології.
2. Довести, що співвідношення $x = \cos u, y = \sin u, 0 \le u \le \pi$ визначають гомеоморфні відображення числового відрізка $0 \le u \le \pi$ на півколо S_1 кола S, розміщене в півплощині $y \ge 0$.
3. Довести, що взаємні правильні многогранники F і F' мають одні й ті ж самі елементи симетрії.

Варіант 7

1. Нехай (X,T) - топологічний простір; V_x - сімейство всіх околів точки $x \in X$. Довести, що коли $U, V \in V_X$, то $U \cap V \in V_X$.
2. Довести, що інтервал гомеоморфний прямій.
3. Знайти елементи симетрії правильного ікосаедра.

Варіант 8

1. Довести, що $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Довести, що внутрішність круга гомеоморфна множині всіх точок площини.
3. Знайти елементи симетрії куба.

Варіант 9

1. Довести, що $в(\overline{A}) \subset в(A)$ і $в(\overset{0}{A}) \subset в(A)$.
2. Довести, що гіперболічний циліндр гомеоморфний парі паралельних площин.
3. Довести, що не існує випуклого многогранника, всі грані якого - шестикутники.

Варіант 10

1. Нехай A - множина в топологічному просторі (X, T) і $\beta(A) = \overline{\overset{0}{A}}$. Довести, що $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.
2. Довести, що внутрішність кулі гомеоморфна множині всіх точок евклідового простору.
3. Обчислити ейлереву характеристику сфери з ручкою.

Варіант 11

1. Нехай (X,T) - топологічний простір. O_x - сімейство всіх околів точки $x \in X$. Довести, що: якщо $U \in O_x$ і $U \subset V$, то $V \in O_x$.
2. Довести, що площина гомеоморфна сфері без однієї точки в просторі.
3. Знайти елементи симетрії правильного додекаедра.

Варіант 12

1. Довести, що $в(A \cup B) \subset в(A) \cup в(B)$.
2. Протилежні сторони витягнутого паперового прямокутника притискуються одна до одної (можливо з деякими переворотами). Показати, що одержана поверхня гомеоморфна або бічній поверхні циліндра, листу Мьобіуса
3. Обчислити ейлереву характеристику тора.

Варіант 13

1. Чи буде R - топологічним простором, якщо R - квадрат, тобто множина точок площини, координати яких зв'язані відношеннями $0 \le x \le 1$ і $0 \le y \le 1$?
2. Довести, що при неперервному відображенні образом компактної множини є компактна множина.
3. Знайти елементи симетрії правильного тетраедра.

Варіант 14

1. Нехай A - множина в топологічному просторі (X, T) і $\alpha(A) = \overline{\overset{0}{A}}$. Довести, що: якщо A відкрита, то $A \subset \alpha(A)$.
2. Довести, що півсфера з границею гомеоморфна замкненому кругу.
3. Знайти ейлереву характеристику листа Мьобіуса.

Варіант 15

Показати, що множина M, яка належить топологічному простору R, відкрита тоді, коли будь-яка точка цієї множини є внутрішньою.

Довести, що підпростір $\{(x, y)/\ x^2 + y^2 = 1\}$ евклідової площини не гомеоморфний жодному підпростору числової прямої.

Знаючи довжину a ребра правильного ікосаедра, обчислити площу його поверхні S, об'єм V, радіус вписаної r і описаної R сфер, величину двогранного кута.

Варіант16

1. Нехай (X, T) - топологічний простір. O_x - сімейство всіх околів точки $x \in X$. Довести, що: якщо $U \in O_x$, то існує елемент $V \in O_x$, який задовольняє двом умовам: а) $V \subset U$; б) $V \in O_y, \forall y \in V$, тобто V є околом кожної із своїх точок.
2. Довести, що півсфера без границі гомеоморфна відкритому кругу.
3. Довести, що всілякі осі асиметрії правильного многогранника проходять через його центр.

Варіант 17

1. Показати, що точка a належить границі множини M тоді і тільки тоді, коли для будь-якого околу U точки a виконуються умови: $U \cap M \neq 0, U \cap (R \setminus M) \neq \varnothing$.
2. Довести, що два напіввідкритих інтервали гомеоморфні.
3. Обчислити ейлереву характеристику з двома ручками і 1 діркою.

Варіант 18

1. Довести, що: якщо $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, то $в(A \cup B) = в(A) \cup в(B)$.
2. Довести, що параболічний циліндр гомеоморфний площині.
3. Обчислити S, V, r, R, φ правильного тетраедра.

Варіант 19

1. Нехай R - квадрат, тобто множина точок площини, для яких $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

   Знайти замикання $\overline{N_1}$ і $\overline{N_2}$, де N_1 і N_2 - квадрати, що визначаються співвідношеннями:
   $$N_1 = \{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$$
   $$N_2 = \{\frac{1}{2} \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}.$$
2. Довести, що два замкнених інтервали числової прямої гомеоморфні.
3. Обчислити ейлереву характеристику сфери з двома ручками.

Варіант 20

1. Нехай при неперервному відображенні f множина M переходить в множину $M' = f(M)$. Довести, що коли A - гранична точка множини M, то f(A) - гранична точка множини M'.
2. Довести, що випуклий многокутник гомеоморфний замкненому кругу.
3. Знайти елементи симетрії правильного октаедру.

Варіант 21

1. Нехай A - множина в топологічному просторі (X, T) і $\alpha(A) = \overline{\overset{0}{A}}, \beta(A) = \overset{0}{\overline{A}}$.

   Довести, що: якщо A замкнена, то $A \supset \beta(A)$.
2. Довести, що двополий гіперболоїд гомеоморфний гіперболічному циліндру.
3. Знайти елементи симетрії правильного додекаедру.

Варіант 22

1. Довести, що відображення $f:\Pi_2 \to a$, де Π_2- евклідова площина, а - пряма цієї площини, f - ортогональне проектування площини на пряму, - неперервне.
2. Довести, що будь-які два відкритих інтервали числової прямої гомеоморфні.
3. Знайти елементи симетрії правильного тетраедра.

Варіант 23

1. Дано відображення f: R$\to R'$, де R і R' - топологічні простори. Довести, що f неперервні тоді і тільки тоді, коли прообразом будь-якої замкненої множини є замкнена множина.
2. Довести, що промінь і півінтервал [а, в) гомеоморфні.
3. Знайти ейлереву характеристику проективної площини.

Варіант 24

1. Дано відображення f: R$\to R'$, де R і R' - топологічні простори. Довести, що f неперервні тоді і тільки тоді, коли прообраз будь-якої відкритої множини із R' і відкритий в R.
2. Показати, що відрізок і квадрат не гомеоморфні між собою.
3. Знайти ейлереву характеристику тора.

Варіант 25

1. Знайти замикання куба з центром в точці О і ребром а. Знайти границю куба.
2. Довести, що в неперервному відображенні образом зв’язного простору є зв’язний простір.

3. Знаючи довжину a ребра правильного октаедра, обчислити площу поверхні S, об'єм V, радіус вписаної сфери r, радіус описаної сфери R, величину двогранного кута φ.

6 семестр

Заняття №1.

Загальні питання аксіоматики.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Довести, що афінна пряма над полем К (одномірний афінний простір) містить хоча б дві точки.

Задача № 2.

Довести, що афінна площина над полем К містить хоча б чотири точки.

Задача № 3.

Довести, що тривіальний афінний простір над полем К містить хоча б вісім точок.

Задача № 4.

Довести, що друга аксіома Вейля із системи аксіом афінного простору не залежить від першої аксіоми.

Задача № 5.

Твердження: існують подібні, але не конгруентні трикутники, еквівалентно п'ятому постулату. Довести (можна використовувати всі інші аксіоми евклідової площини).

Задача № 6.

Твердження: навколо всякого трикутника можна описати коло, еквівалентно п'ятому постулату. Довести.

Домашнє завдання:

№№ 1474,1476,1477,1478,1479[1].

Завдання для індивідуального дослідження:

Нехай A2(F2) - афінна площина над полем F2 лишків за модулем 2. Довести, що на площині A2(F2):

1)діагоналі паралелограма паралельні;

2)кожна вершина паралелограма є його центром симетрії.

Література:

1.Сборник задач по геометри /под ред. Базылева. - М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.2.-М,1987.-352с.

3.А.В.Погорелов. Геометрия 7-11.- М: Просвещение, 1993.-384с.

<u>Заняття №2.</u>

Геометрія Вейля; деякі наслідки з аксіом.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Довести, що кожна з аксіом Вейля 1-2 незалежна від іншої.

Задача № 2.

Нехай A2(Z) - афінна площина над кільцем цілих чисел. Довести, що для довільного раціонального числа m/n існують прямі з кутовим коефіцієнтом m/n.

Задача № 3.

Довести, що кожна пряма на площині A2(Z) містить зчислену множину точок.

Задача № 4.

Довести, що на площині A2(Z) дві прямі можуть бути:

1)паралельними;

2)що перетинаються;

3)що не перетинаються і не паралельні.

Задача № 5.

Довести, що на площині A2(Z) існують відрізки, що не мають внутрішніх точок.

Домашнє завдання:

№№ 1480,1487,1488,1489 [1].

Завдання для індивідуального дослідження:

Нехай Mn,p- множина n×p над асоціативно-комутативним кільцем A з одиницею. Визначити на множині Mn,p структуру афінного простору над кільцем A.

Література:

1.Сборник задач по геометри /под ред. Базылева.-М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. - ч.2.-М,1987.-352с.

<u>Заняття №3.</u>

Система аксіом шкільного курсу геометрії.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Користуючись аксіомами шкільного курсу геометрії, довести, що:

1) кожен відрізок містить нескінчену множину точок;
2) кожна площина містить нескінчену множину точок, які не лежать на одній прямій;
3) простір містить нескінчену множину точок, які не лежать на одній площині.

Задача № 2.

Користуючись аксіомами шкільного курсу геометрії, довести, що:

1) сума величин внутрішніх кутів довільного трикутники дорівнює π;
2) існують подібні, але неконгруентні трикутники;
3) навколо кожного трикутника можна описати коло;
4) через довільну внутрішню точку гострого кута можна провести пряму, що перетинає обидві сторони кута.

Задача № 3.

Довести, що з аксіом Вейля афінного простору випливає аксіома паралельності.

Задача № 4.

Довести, що з аксіом Вейля евклідової площини над полем R випливає аксіома про рух площини.

Домашнє завдання:

№№ 1495,1496,1497,1499 [1].

Завдання для індивідуального дослідження:

Побудувати інтерпретацію?групи аксіом шкільного курсу геометрії на скінченій множині.

Література:

1.Сборник задач по геометрии/под ред. Базылева.-М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.?.-М,1987.-352с.

3.А.В.Погорелов. Геометрия 7-11.- М: Просвещение, 1993.-384с.

<u>Заняття №.4.</u>

Розв’язування задач, пов’язаних із обґрунтуванням шкільного курсу геометрії.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Використовуючи аксіоми належності, відстані і порядку, довести, що не існує трьох різних рухів площини, які переводять точку A в точку A1, точку B в точку B1, де |AB|=|A1B1|.

Задача № 2.

Довести, що кожна інволюція площини має хоча б одну нерухому точку.

Задача № 3.

Використовуючи аксіоми перших чотирьох груп, довести, що композиція трьох симетрій площини, вісі яких проходять через одну точку, є осьова симетрія.

Задача № 4.

Довести, що жодна композиція парного числа осьових симетрій площини не може бути замінена композицією непарного числа осьових симетрій.

Задача № 5.

Довести, що якщо рух площини лишає інваріантними три точки, які не належать одній прямій, то цей рух є тотожне перетворення.

Задача № 6.

Довести, що існує єдиний рух площини, який переводить трикутник ABC в трикутник A1B1C1, при умові, що |AB|=|A1B1|, |BC|=|B1C1|, |CA|=|C1A1| і A>A1, B>B1, C>C1.

Домашнє завдання:

№№ 1507,1509,1510.

Завдання для індивідуального дослідження:

Довести, що якщо точки A, B, C ?E3 не належать одній прямій, то існує два і лише два руха f1 і f2 простору, для яких кожна із даних точок є нерухомою: fk(A)=A, fk(B)=B,fk(C)=C (k=1,2).

Література:

1.Сборник задач по геометри / под ред. Базылева.-М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.2.-М,1987.-352с.

3.А.В.Погорелов. Геометрия 7-11.- М: Просвещение, 1993.-384с.

Заняття №5.

Елементи сферичної геометрії.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Довести, що кожна сторона сферичного трикутника менше суми двох інших його сторін, але більша за їх різницю.

Задача № 2.

Якщо в сферичному трикутнику дві сторони конгруентні, то конгруентні і кути, протилежні їм. Довести.

Задача № 3.

В сферичному трикутнику навпроти конгруентних кутів лежать конгруентні сторони. Довести.

Задача № 4.

Довести, що довжини сторін сферичного трикутника можна знайти, якщо знати величини трьох його кутів (радіус r сфери відомий).

Задача № 5.

Довести, що в сферичному трикутнику навпроти більшого кута лежить і більша сторона.

Задача № 6.

Обчислити довжину дуги паралелі земної кулі, яка містить α=45є15´ і проходить через точку з широтою φ=37є24´. Радіус земної кулі R=6370 км.

Домашнє завдання:

№№ 1521,1522,1524,1525,1531[1].

Завдання для індивідуального дослідження:

Довести формули Непера для сферичного трикутника.

Література:

1.Сборник задач по геометри / под ред. Базылева. - М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т. Базылев. Геометрия. ч.?.-М,1987.-352с.

Заняття №6.

Еліптична геометрія Рімана.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Довести, що на еліптичній площині S2 симетрія відносно прямої а і центральна симетрія відносно точки А співпадають, якщо точка А є полюсом прямої а.

Задача № 2.

Довести, що композиція двох центральних симетрій є поворот. Побудувати центр повороту і знайти величину кута повороту.

Задача № 3.

Довести, що на площині S2 всякі дві прямі перетинаються.

Задача № 4.

Знайти відстань між серединами двох відрізків, які мають спільні кінці.

Задача № 5.

Довести, що на еліптичній площині існує лише три типи рухів: поворотна кут, відмінний від π; центральна (чи осьова) симетрія; тотожне перетворення.

Домашнє завдання:

№№ 1546,1548,1552,1553.

Завдання для індивідуального дослідження:

Дано дві точки А і В, такі, що 2(А+В)= $\frac{\pi}{r}$. Скільки існує рухів, які лишають А і В інваріантними?

Література:

1.Сборник задач по геометри / под ред. Базылева. - М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. Ч.2.-М,1987.-352с.

Заняття №7.

Гіперболічна геометрія Лобачевського.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Довести, що на площині Лобачевського вписаний в коло кут, який спирається на діаметр, гострий.

Задача № 2.

Довести, що довжина відрізка, який з'єднує середини двох сторін трикутника, більше половини довжини третьої сторони.

Задача № 3.

Довести, що в прямокутному трикутнику величина хоча б одного з його гострих кутів менше $\underline{\pi}$.

Задача № 4.

Побудувати спільний перпендикуляр двох розбіжних прямих.

Задача № 5.

Через точку, яка не належить оріциклу, провести дотичну до оріцикла.

Домашнє завдання:

№№ 1561,1562,1563,1564.

Завдання для індивідуального дослідження:

Довести, що якщо кути одного трикутника конгруентні кутам другого трикутника, то трикутники конгруентні

Література:

1.Сборник задач по геометри / под ред. Базылева.-М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. Ч.2.-М,1987.-352с.

Заняття №8.

Планіметричні задачі на обчислення.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

В прямокутному рівнобедреному трикутнику ABC, кут C=90°, проведено медіани AA1 і BB1. Обчислити косінус кута між цими медіанами.

Задача № 2.

Дано правильний трикутник ABC зі стороною довжини a і точка M, яка йому належить. Обчислити суму відстаней від точки M до сторін трикутника.

Задача № 3.

В рівнобедреному трикутнику довжина висоти, проведеної до бічної сторони, дорівнює половині довжини цієї сторони. Обчислити кути трикутника.

Задача № 4.

Дано рівнобедрений трикутник ABC (¦AB¦=¦BC¦) з кутом при вершині 30°. На стороні BC побудовано точку D, так , що ¦AC¦:¦BD¦=√2. Знайти величину кута DAC.

Задача № 5.

Знайти величину кута між висотою і медіаною, які проведено із вершини прямого кута, якщо відомі величини кутів прямокутного трикутника.

Задача № 6.

Знаючи величини кутів трикутника ABC, знайти величину кута між медіаною і висотою, проведеної із вершини A.

Домашнє завдання:

№№ 1751,1752,1758,1763,1768.

Завдання для індивідуального дослідження:

Знаючи довжини a, b, c сторін трикутника, обчислити площину трикутника, вершинами якого є основи бісектрис даного трикутника.

Література:

1.Сборник задач по геометри / под ред. Базылева. - М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.2.-М,1987.-352с.

3.А.В.Погорелов. Геометрия 7-11.- М: Просвещение, 1993.-384с.

<u>Заняття №9.</u>

Задачі на вимірювання геометричних величин (коло і круг).

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

В напівкруг радіуса R вписано трапецію, в яку можна вписати коло. Обчислити радіус r цього кола.

Задача № 2.

Точки M і N - центри гомотетій двох кіл, що перетинаються в точках A і B. Знайти величину кута MAN.

Задача № 3.

Знайти довжину сторони квадрата, вписаного в сегмент круга радіуса r, якщо хорда цього сегменту стягує дугу в α градусів.

Задача № 4.

Три кола радіусів R1, R2, R3, попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайти радіус кола, яке проходе через точки дотику.

Задача № 5.

Два кола радіусів R і r дотикаються зовнішнім чином. Знайти віддаль від точки дотику до спільної зовнішньої дотичної.

Задача № 6.

В рівнобічну трапецію з довжинами основ 8 і 2 вписано коло. Знайти його радіус.

Домашнє завдання:

№№ 1838,1842,1855,1854,1863.

Завдання для індивідуального дослідження:

Обчислити площу криволінійного трикутника, обмеженого дугами трьох кіл радіуса r, які попарно перетинаються під прямими кутами.

Література:

1.Сборник задач по геометри / под ред. Базылева. - М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.2.-М,1987.-352с.

Заняття №10.

Застосування векторів до розв'язання задач шкільного курсу геометрії.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Довести, що сума квадратів довжин діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів довжин її непаралельних сторін, складеної з подвійним добутком довжин основ.

Задача № 2.

Довести, що сума квадратів довжин діагоналей чотирикутника дорівнює сумі квадратів довжин відрізків, які з'єднують середини його протилежних сторін.

Задача № 3.

Дано прямокутник ABCD. Довести, що для довільної точки Ь простору виконуються рівності:

1) MA2 + MC2 = MB2 + MD2 ; 2) MA ? MC = MB ? MD.

Задача № 4.

Знайти величину кута ВАС рівнобедреного трикутника АВС, знаючи, що медіани ВВо і ССо, які проведено з вершин основи, перпендикулярні.

Задача № 5.

В трикутнику АВС точка D ділить відрізок АВ у відношенні λ. Розкласти вектор CD за векторами базису СА і СВ. Знайти довжину відрізка CD, якщо a, b, c - довжини сторін трикутника.

Домашнє завдання:

№№ 75,77,85,99,101 [1].

Завдання для індивідуального дослідження:

В сферу вписано тетраедр ABCD. Пряма, проведена через вершину D і центр ваги G трикутника ABC, перетинає сферу повторно в точці M. Довести, що DA2+DB2+DC2=3DG•DM

Література:

1.Сборник задач по геометрии/под ред. Базылева.-М: Просвещение, 1980.- 240с.

2.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.?.-М,1987.-352с.

3.А.В.Погорелов. Геометрия 7-11.- М: Просвещение, 1993.-384с.

Заняття №11.

Нова геометрія трикутника.

Аудиторне завдання:

Задача № 1.

Нехай A', B', C' три точки, які лежать відповідно на сторонах ВС, СА, АВ трикутника. Для того, щоб прямі АА', ВВ', СС' перетинались в одній точці чи були б усі паралельні, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

Задача № 2.

Довести, що медіани, бісектриси внутрішніх кутів та висоти трикутника перетинаються кожні в одній точці.

Задача № 3.

Довести, що прямі, які з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола, перетинаються в одній точці.

Задача № 4.

Якщо пряма AD=α трикутника ABC ділить сторону BC на відрізки BD=*m* і CD=*n*, то $d^2a=b^2m+c^2n-amn$.

Задача № 5.

Довести, що сума квадратів медіан трикутника дорівнює s суми квадратів його сторін.

Задача № 6.

За медіанами трикутника m_a, m_b, m_c обчислити сторони трикутника.

Домашнє завдання:

№№ 1.21,1.32,1.35,1.46,1.51[2].

Завдання для індивідуального дослідження:

Сторона квадрата дорівнює 1. через його центр проведено пряму. Обчислити суму квадратів відстаней від вершин квадрата до цієї прямої.

Література:

1.Л.С.Атанасян, В.Т.Базылев. Геометрия. ч.?.-М,1987.-352с.

2.В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии.ч1.-М: Наука, 1986.-272с.

3.А.В.Погорелов. Геометрия 7-11.- М: Просвещение, 1993.-384с.

Контрольна робота №1

	Задача1	задача2	задача3
Варіант №1	№1 (К-169)	№20 (К-191)	1776(Б)
Варіант №2	№2 (К-170)	№19 (К-190)	1777(Б)
Варіант №3	№3 (К-170)	№18 (К-190)	1779(Б)

Варіант №4	№4 (К-170)	№17 (К-189)	1785(Б)
Варіант №5	№5 (К-171)	№15 (К-188)	1788(Б)
Варіант №6	№6 (К-171)	№10 (К-186)	1800(Б)
Варіант №7	№7 (К-172)	№7 (К-184)	1812(Б)
Варіант №8	№8 (К-172)	№6 (К-184)	1827(Б)
Варіант №9	№9 (К-172)	№5 (К-183)	1834(Б)
Варіант №10	№15 (К-175)	№4 (К-183)	1839(Б)
Варіант №11	№17 (К-176)	№3 (К-182)	1860(Б)
Варіант №12	№21 (К-177)	№2 (К-182)	1855(Б)
Варіант №13	№22 (К-178)	№1 (К-181)	1846(Б)
Варіант №14	№23 (К-179)	№22 (К-202)	1858(Б)
Варіант №15	№24 (К-180)	№20 (К-201)	11780(Б)

Контрольна робота №2

	Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3	Задача № 4
Варіант №1	№ 257(Б)	№312(Б)	1260(Б)	754(Б)
Варіант №2	№ 258(Б)	№313(Б)	1261(Б)	766(Б)
Варіант №3	№ 259(Б)	№ 315(1)(Б)	1262(Б)	769(Б)
Варіант №4	№ 267(Б)	№ 315(2)(Б)	1263(Б)	772(Б)
Варіант №5	№ 266(Б)	№ 316(Б)	1264(Б)	773(Б)
Варіант №6	№ 268(Б)	№ 318(Б)	1265(Б)	834(Б)
Варіант №7	№ 269(Б)	№ 319(Б)	1266(Б)	835(Б)
Варіант №8	№ 270(Б)	№ 323(Б)	1267(Б)	840(Б)
Варіант №9	№ 274(Б)	№ 328(Б)	1272(Б)	853(Б)
Варіант №10	№ 275(Б)	№ 329(1)(Б)	1273(Б)	848(Б)
Варіант №11	№ 283(Б)	№ 329(2)(Б)	1274(Б)	844(Б)
Варіант №12	№ 294(Б)	№ 329(3)(Б)	1282(Б)	739(Б)
Варіант №13	№ 295(Б)	№ 330(Б)	1283(Б)	741(Б)
Варіант №14	№ 298(Б)	№ 331(Б)	1295(Б)	749(Б)

Варіант №15 № 299(Б) № 333(Б) 1296(Б) 750(Б)

Література:

1. Базилев Г.П. Геометрия. - М., 1986.
2. Кушнир П. Веторные методы решения задач. - К., 1994, 207с.

Підсумкова контрольна робота з геометрії

Варіант 1

1. Знайти рівняння образу прямої $2x+3y=0$ при гомотетії з центром (1, 2), що переводить пряму $x+y+1=0$ в пряму $x+y-5=0$.
2. Представити подібність у вигляді добутку руху і гомотетії:

$$x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3; \qquad y' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2.$$

3. Споріднення задано віссю ℓ і парою відповідних точок A і A′. На даних прямих ℓ_1 і ℓ_2 знайти пару споріднених точок.

Варіант 2

1. Знайти рівняння прообразу прямої $3x-y=0$ при гомотетії, якщо точки A′(7, 4) і B′(11, 0) є образами точок A(2, 1) і B(3, 0).
2. Довести, що квадрат подібності другого роду є гомотетія.
3. Косий стиск задано віссю ℓ і парою відповідних точок A і A′. Побудувати образ і прообраз даної прямої ℓ.

Варіант 3

1. Скласти формули гомотетії, знаючи дві інваріантні прямі: $2x-y+2=0$ і $x+4y+1=0$ і коефіцієнт гомотетії $k=-2$.
2. Довести, що композиція зсуву і косої симетрії є ковзна симетрія або коса симетрія.

3. Спорідненння задане двома парами відповідних прямих ℓ і ℓ', d і d'. Побудувати образ заданої точки M.

Варіант 4

1. Знайти рівняння образу кола $x2+y2=2$ при гомотетії з коефіцієнтом k=-3, що переводить точку (1, 1) в точку (2, -3).
2. Довести, що будь-які два паралелограми афінно-еквівалентні.
3. Вказати вид афінного перетворення і знайти рівняння інваріантних прямих $x'=2x-3y+6$, $y'=x-2y+6$.

Варіант 5

1. Скласти формули гомотетії з центром у точці A(1, 2), що переводить пряму $3x+4y-5=0$ в пряму $3x+4y+19=0$.
2. Представити подібність у вигляді добутку руху і гомотетії зі спільною інваріантною точкою: $x'=4x+3y-1$, $y'=3x-4y+3$.
3. Протилежні сторони випуклого шестикутника ABCDEF попарно паралельні і рівні. Знайти відношення площ трикутника ACE і даного шестикутника.

Варіант 6

1. Скласти формули гомотетії з коефіцієнтом k=-2, що переводить прямі $2x-y+6=0$, $6x+5y-30=0$ в прямі $2x-y=0$ і $6x+5y=0$.
2. Довести, що кожне афінне перетворення площини, відмінні від подібності, є композицією подібності і косого тиску або зсуву площини.
3. Вказати вид афінного перетворення і знайти рівняння інваріантних прямих: $x'=4x+3y-12$, $y'=-3x-2y+12$.

Варіант 7

1. Знайти рівняння прообразу кола $(x-4)2+(y+1)2=1$ при гомотетії, яка пряму $5x-5y-2=0$ переводить у пряму $x-y-1=0$, а прямі $2x+y+1=0$ і $12x+8y+7=0$ інваріантні.
2. Знайти всі афінні перетворення, що переводять трикутник сам у себе.
3. Побудувати образ паралелограма ABCD при зсуві, заданому віссю ℓ і парою відповідних точок M і M′.

Варіант 8

1. Дано точки A(3, 0), B(-1, -2), A′(0, 1), B′(-2, 0). Скласти формули гомотетії, що переводить відрізок AB у відрізок A′B′.
2. Представити подібність у вигляді добутку руху і гомотетії зі спільною інваріантною точкою: $x'=-4x+3$, $y'=4x+5$.
3. Косий тиск задано віссю ℓ і парою відповідних точок A і A′. Побудувати образ даного квадрата.

Варіант 9

1. Знайти координати прообразу точки (-1, 8) при гомотетії з центром (1, -5), яка початок координат переводить у точку (-4, 20).
2. В якому випадку композиція двох косих симетрій є паралельним переносом?
3. В даний трикутник вписати прямокутник з найменшою діагоналлю.

Варіант 10

1. Знайти координати образу точки (2, -4) при гомотетії з центром (1, -3) і коефіцієнтом $k=-3$.
2. Представити подібність у вигляді добутку руху і гомотетії:
$x'=4x+2y+5$; $y'=2x-4y-3$.

4. Побудувати образ трапеції при косій симетрії, заданій віссю і напрямком споріднення.

Варіант 11

1. Обчислити координати ортогональної проекції M_1 точки M(1, 1, 1, -1) на гіперплощину $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 1 = 0.$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3.$
3. Дано п'ять точок A, B, C, D, E загального положення. Довести, що гіперплощина, яка проходить через середини відрізків AB, BC, DE, CD, паралельна прямій (AE).

Варіант 12

1. Обчислити координати ортогональної проекції точки M(1, -2, 3, -1) на пряму $x_1 = \lambda - 2,\ x_2 = -\lambda + 2,\ x_3 = 2\lambda + 1,\ x_4 = -3\lambda.$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$
3. Довести, що площина (ABC) паралельна площині (A′B′C′): A(2, -1, 0, 4), B(-1, 2, 0, 3), C(3, 0, 1, 1), A′(1, 1, 1, 1), B′(8, -4, -4, 6), C′(-3, 3, 3, 0).

Варіант 13

1. Обчислити координати ортогональної проекції точки M(2, -1, 3, 1) на площину
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2 = 0. \end{cases}$$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$

3. З'ясувати взаємне розташування прямих (AB) і (CD), якщо A(5, -3, 2, 1), B(2, -1, -3, 0), C(11, -7, 12, 3), D(2, -1, -3, 0).

Варіант 14

1. Обчислити координати ортогональної проекції M_1 точки M(0, -1, 2, 1) на гіперплощину $2x_1 + x_2 + x_4 - 3 = 0.$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$
3. В репері (O, $\overline{e_i}$) простору A^4 задано точки A_1(1, 0,1, 0), A_2(2, 1, 2, 1), A_3(0, 0, 1, 2), A_4(1, 2, 1, -1). Довести, що ця система точок має загальне положення в A^4.

Варіант 15

1. Обчислити відстань від точки A(1,1,-2,1) до прямої $x_1 = \lambda,\ \ x_2 = -\lambda + 1,\ \ x_3 = \lambda + 2,\ \ x_4 = 2\lambda - 1.$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$
3. Дано дві прямі (AB) і (CD). Вияснити їх взаємне розташування, якщо A(1,3,0,-1), B(0, 2, 1, 4), C(1, 0, -1, 0), D(3, 2, -3, -10).

Варіант 16

1. Обчислити відстань від точки A(2, 3, -1, 1) до площини

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3.$
3. Довести, що площини Π_2, Π_2' простору A_4, задані рівняннями:

П2: $x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \quad 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 4 = 0$ П2′: $\begin{matrix} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 1 = 0, \end{matrix}$ перетинаються по прямій, і знайти рівняння цієї прямої.

Варіант 17

1. Обчислити відстань від точки А(3, 1, -1, 1) до прямої $x_1 = -\lambda,\ \ x_2 = \lambda + 2,\ \ x_3 = -\lambda + 1,\ \ x_4 = 2\lambda.$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $6x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3.$
3. Довести, що через k+1 точок загального положення в афінному просторі A^n (k<n) проходить єдина k-вимірна площина і в кожній k-вимірній площині простору A^n існує максимальна система з k+1 точок загального положення.

Варіант 18

1. Обчислити відстань від точки А(3, -1, 1, 0) до площини
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3.$
3. Дано три гіперплощини в А4: $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0,\quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3 = 0,$ $x_1 + 12x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 8 = 0.$ Довести, що вони перетинаються по площині.

Варіант 19

1. Обчислити відстань від прямої (AB) до площини (PQR): A(2, 1, 0, 0), B(-1, 2, 3, 1), P(0, 0, 0, 1), Q(-2, 1, -1, 0), R(1, 1, 1, -1).
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду: $4x_1^2 + 8x_2^2 - x_3^2 - 12x_1x_2 + 2x_2x_3.$

3. В афінному просторі A^n задано репер (O, $\overline{e_i}$) (i=1, 2, …, n). Довести, що вектор $\overline{a} = a_i \overline{e_i}$ паралельний гіперплощині $П^{n-1}$: $b_i x_i + b = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a_i b_i = 0$.

Варіант 20

1. Обчислити відстань від прямої (AB) до площини (PQR), якщо A(0, 0, 0, 0), B(-3, 2, 1, 1), P(1, 1, 1, 1), Q(2, -3, -1, 1), R(-1, 1, 2, -2).
2. За допомогою ортогонального перетворення звести квадратичну форму до канонічного виду $x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 - 12x_2x_3 + 6x_1x_3$.
3. Дано три попарно мимобіжні прямі (AB), (CD), (EF), які не лежать в одній гіперплощині. Довести, що існує єдина пряма, що лежить з кожною із даних прямих в одній площині.

Варіант 21

1. Побудувати відрізок довжини $x = \dfrac{m^3\sqrt{mn}}{nk^2}$, де m, n, k - довжини заданих відрізків.
2. Побудувати п’ятикутник за серединами його сторін O1, O2, O3, O4, O5.
3. Дано два концентричних кола і точка. Побудувати коло, що проходить через цю точку, і дотикається заданих кіл.

Варіант 22

1. Дано коло і точка A поза ним. Через точку A провести січну так, щоб її зовнішня частина була б удвічі більша внутрішньої.
2. Побудувати трикутник за двома кутами і сумою протилежних сторін.
3. В дане коло вписати трикутник, сторони якого паралельні сторонам заданого трикутника.

Варіант 23

1. Побудувати три кола з центрами у вершинах даного трикутника так, щоб вони попарно дотикалися.
2. В даний сегмент вписати прямокутник із заданим відношенням сторін.
3. Побудувати трикутник за основою *a*, кутом при вершині A і радіусу *r* вписаного кола.

Варіант 24

1. Через дві задані точки провести коло так, щоб воно дотикалося даної прямої.
2. Побудувати чотирикутник ABCD за його сторонами і відрізком MN, що сполучає середини сторін AB і CD.
3. Побудувати трикутник за основою і точкам перетину основи з бісектрисою і висотою.

Варіант 25

1. Побудувати відрізок довжини $x = \frac{u^2 w^3}{v^3 z}$, де u, w, v, z - довжини заданих відрізків.
2. Побудувати коло, що дотикається іншого кола і сторін вписаного в нього центрального кута.
3. Побудувати трикутник за основою *a*, кутом при вершині A і точці D перетину основи з бісектрисою внутрішнього кута при вершині A.

Варіант 26

1. Через задану точку провести січну до даного кола так, щоб утворювалася хорда заданої довжини.

2. Побудувати трикутник за його трьома медіанами.
3. Побудувати паралелограм за його діагоналями і відношенню сторін.

Варіант 27

1. Побудувати відрізок довжини $x = \sqrt{\frac{a\sqrt{a^4 - b^4}}{b}}$, де a, b - довжини заданих відрізків.
2. В дане коло вписати трикутник, сторони якого паралельні сторонам даного трикутника.
3. Побудувати трикутник за периметром 2р, кутом при вершині А і висоті, що виходить з цієї вершини.

Варіант 28

1. Побудувати паралелограм за його сторонами, якщо сторони паралелограма пропорційні його діагоналям.
2. У даний трикутник АВС вписати ромб MNQS з даним гострим кутом так, щоб одна з його сторін лежала на основі АС трикутника, а дві вершини - на сторонах АВ і ВС.
3. Побудувати трикутник АВС, знаючи кути при вершинах В і С і медіану сторони ВС.

Варіант 29

1. Побудувати квадрат, рівновеликий заданому трикутнику.
2. В дане коло вписати прямокутник так, щоб прямі, які містять дві його протилежні сторони, проходили через дві задані точки.
3. Всередині трикутника АВС знайти точку, з якої сторони трикутника видно під однаковими кутами.

Варіант 30

1. Побудувати відрізок довжини $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4},$ де a, b - задані відрізки.
2. В даний трикутник вписати прямокутник, подібний заданому.
3. Побудувати паралелограм за його сторонами і відношенню діагоналей.

Варіант 31

1. Довести, що в n-вимірному проективному просторі P(V) існують n+2 точок загального положення.
2. Трапеція ABCD перетинається прямими p і q, паралельними основі AB, $p\cap(AD)=M$, $p\cap(AC)=P$, $q\cap(BD)=N$, $q\cap(BC)=Q$. Довести, що точка $(MN)\cap(PQ)$ лежить на прямій (AB).
3. Проективне перетворення τ: $\Pi(O)\rightarrow\Pi(O)$ задано трьома парами відповідних прямих: a, $a'=\tau(a)$; b, $b'=\tau(b)$, c, $c'=\tau(c)$. Побудувати образ x' довільної прямої x пучка O.

Варіант 32

1. На розширеній площині задано проективний репер $R'=(A1', A2', A3', E')$, де $A1'(0, 3)$, $A2'(4, 0)$, $A3'(4, 3)$, $E'(3, 2)$ - афінні координати. Знайти: проективні координати точки M, якщо її афінні координати M(1, 1).
2. Дано паралелограм ABCD, пряма m і точка M. За допомогою однієї лінійки через точку M провести пряму, паралельну прямій m.
3. Проективне відображення π: $(l)\rightarrow(l')$ задано трьома парами відповідних точок: A, $A'=\pi(A)$, B, $B'=\pi(B)$, C, $C'=\pi(C)$. Для точки $M\in l$ побудувати її образ $M'=\pi(M)$.

Варіант 33

1. На розширеній площині задано проективний репер $\tilde{R} = (A, B_\infty, C_\infty, E)$. Побудувати точки M(2, 4, -1) і N(0, 1, 2) за їх координатами в репері $\tilde{R}$.

2. Скласти формули перетворення проективних координат при переході від репера R=(A1, A2, A3, E) до репера R′=(A1′, A2′, A3′, E′), якщо в репері R A1′(1, 0, -1), A2′(2, 1, 0), A3′(0, 0, 1), E′(1, 1, 2).
3. Проективне відображення τ: П(O)$\rightarrow$П(O′) задано трьома парами відповідних прямих: a, $a'=\tau(a)$; b, $b'=\tau(b)$, c, $c'=\tau(c)$. Побудувати образ і прообраз прямої m=(OO′), якщо O$\neq$O′.

Варіант 34

1. Довести, що на проективній площині P(V) існують чотири точки, з яких ніякі три не лежать на одній прямій.
2. Трикутники ABC і DBC перетинаються трьома паралельними прямими p, q, r=(AD); p$\cap$(AB)=M, p$\cap$(DB)=P, q$\cap$(AC)=N, q$\cap$(DC)=Q. Довести, що прямі (MN), (PQ), (BC) належать одному пучку.
3. Проективне відображення τ: П(O)$\rightarrow$П(O′) задано трьома парами відповідних прямих: a, $a'=\tau(a)$; b, $b'=\tau(b)$, c, $c'=\tau(c)$. Побудувати образ $m'=\tau(m)$ довільно прямої m пучка O.

Варіант 35

1. Яка особливість прямої $l(1, 1, 1)$ з координатами відносно проективного репера R=(A1, A2, A3, E) на розширеній площині, якщо одинична точка E цього репера - точка перетину медіан координат трикутника A1A2A3?
2. На малюнку обмежених розмірів задано дві пари прямих: p, q, які перетинаються в недоступній точці A, і u, v, що перетинаються в недоступній точці B. Побудувати доступну частину прямої (AB).
3. Проективне відображення π: $(q)\rightarrow(q')$ задано трьома парами відповідних точок: A, A′=π(A), B, B′=π(B), C, C′=π(C). Побудувати образ і прообраз точки D=$q\cap q'$, якщо $q\neq q'$.

Варіант 36

1. F_3^3 - трьохвимірний векторний простір над полем F3 лишків за модулем 3. Скільки точок містить довільна пряма проективної площини $P(F_3^3)$?
2. Скласти формули перетворення проективних координат при переході від репера $R=(A_1, A_2, A_3, E)$ до репера $R'=(A_1', A_2', A_3', E')$, якщо в репері R $A_1'(1, 0, -1)$, $A_2'(2, 1, 0)$, $A_3'(0, 0, 1)$, $E'(3, 1, 0)$.
3. Проективне перетворення π: $(q)\to(q)$ задано трьома парами відповідних точок: A, $A'=\pi(A)$, B, $B'=\pi(B)$, C, $C'=\pi(C)$. Побудувати образ точки X прямої q.

Варіант 37

1. На проективній площині задано репер $R=(A_1, A_2, A_3, E)$. Ei - проекція точки E з центра A_i на пряму A_j A_k (i, j, k - різні). Знайти координати точок Ai, E, Ei і скласти рівняння прямих (AiAj), (AiEi) відносно репера R.
2. За допомогою однієї лінійки через задану точку A провести пряму, паралельну двом заданим паралельним прямим.
3. Дано три точки A, B, C, що лежать на прямій d, і три точки A′, B′, C′, що лежать на прямій d' ($d\neq d'$). Довести, що точки $K=(BC')\cap(B'C)$, $L=(A'C)\cap(AC')$, $M=(AB')\cap(A'B)$ лежать на одній прямій.

Варіант 38

1. Вершини координатного трикутника і одинична точка проективного репера R′ на розширеній площині мають такі афінні координати: $A_1'(0, 3)$, $A_2'(4, 0)$, $A_3'(4, 3)$, $E'(3, 2)$. Знайти афінні координати точки N, якщо її проективні координати N(4, 3, -6).
2. Довести, що коли прямі (AA′), (BB′), (CC′), що з'єднують вершини двох трикутників ABC і A′B′C′, паралельні і точки $(AB)\cap(A'B')$, $(BC)\cap(B'C')$, $(AC)\cap(A'C')$ існують, то ці точки лежать на одній прямій.

3. Проективне перетворення f площини задано трьома інваріантними точками A, B, C і парою відповідних точок D і $D'=f(D)$. Побудувати образ даної довільної точки M в заданому перетворенні.

Варіант 39

1. Довести, що прямі $a(a1, a2, a3)$, $b(b1, b2, b3)$, $c(c1, c2, c3)$ з координатами відносно проективного репера R мають спільну точку тоді і тільки тоді, коли детермінант системи цих прямих дорівнює нулю.
2. На малюнку обмежених розмірів задані точка A і пара прямих, що перетинаються за межами малюнка в недоступній точці B. Використовуючи теорему Дезарга, побудувати доступну частину прямої (AB).
3. Проективне відображення f: $d \to P(O)$ прямої d на пучок прямих P(O) задано відповідними реперами $(A, B, C) \subset d$ і $(a, b, c) \subset P(O)$. Побудувати прообраз заданої прямої $m \in P(O)$.

Варіант 40

1. В репері R=(A1, A2, A3, E) на проективній площині точки A, B, C, D мають координати: A(1, 0, -1), B(2, 1, 0), C(0, 0, 1), D(1, 1, 2). Перевірити, що ці точки є точками загального положення і знайти векторний базис, що породжує репер $R'=(A, B, C, D)$.
2. Дано паралелограм, пряма m і точка A. За допомогою однієї лінійки через точку A провести пряму, паралельну прямій m.
3. Проективне перетворення f площини задано двома інваріантними точками A, B і двома парами відповідних точок: C і $C'=f(C)$, $D'=f(D)$. Побудувати образ заданої довільної точки M в даному перетворенні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Атанасян Л.С., Базилєв В.Г. Геометрія. - М.,1987.
2. Савченко В.М. Зображення фігур в математиці. - К., 1978.
3. Атанасян Л.С. Гуревич Г.Б. Геометрия. - М., 1976.
4. Сборник задач по геометрии. Ч. II. /Под ред. Л.С. Атанасяна. - М.: Просвещение, 1975. - с. 80
5. Сборник задач по геометрии. /Под ред. В.Т. Базылева. - М.: Просвещение, 1980. - с. 133
6. Кушнир П. Веторные методы решения задач. - К., 1994, 207с.

Підписано до друку 1.03.2002. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. арк. 3,75. Наклад 300.

Друк здійснено з готового оригінал-макету у видавництві ХДПУ.
Свідоцтво серія ХС №28 від 11 червня 2002 р.
Видано управлінням у справах преси та інформації облдержадміністрації.
73000. Україна, м. Херсон, вул. 40 років Жовтня 4. Тел.: (0552) 32-67-95.