Савченко О.Г., Валько Н.В.,
Кузьмич Л.В., Кавун Г.М.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Херсонський державний аграрний університет

О.Г.Савченко, Н.В.Валько, Л.В.Кузьмич, Г.М.Кавун

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни

Херсон - 2014

УДК 519.67: 519.86(075)
ББК 65В631Я7
О 62

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Херсонського державного аграрного університету, протокол № 9 від 25 червня 2014 р.

Рецензенти:

Львов М.С. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інформатики Херсонського державного університету.

Котова О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

О62 Оптимізаційні методи і моделі: [інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни] / Савченко О.Г., Валько Н.В., Кузьмич Л.В., Кавун Г.М. – Херсон: Айлант, 2014. – 430 с.

ISBN 978-966-630-095-2

Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» містить загальний інформативний блок, тематичний план та розподіл навчального часу за структурою дисципліни, робочу програму, методичні рекомендації до вивчення курсу, питання для самоконтролю з усіх тем робочої програми, зразки модульних контрольних робіт, завдання для індивідуальної роботи з усіх тем, методичні поради щодо їх виконання, питання і тестові завдання для підготовки до іспитів та список рекомендованої літератури. У навчальному посібнику обґрунтовано теоретико-методичні підходи до визначення оптимізаційних методів, економіко-математичного моделювання, розглянуті методи і моделі лінійного, нелінійного програмування, окремих класів задач лінійного програмування.

Для студентів напряму підготовки 6. 030509 «Облік і аудит» та 6.030504 «Економіка підприємства» (III семестр).

ISBN 978-966-630-095-2

ЗМІСТ

ВСТУП

У системі економічної освіти значна роль відведена курсу “Оптимізаційні методи і моделі” з циклу нормативних дисциплін бакалаврської підготовки фахівців за напрямами 6. 030509 «Облік і аудит» та 6.030504 «Економіка підприємства». Багато економічних проблем, наприклад, оптимізації, внутрішнього зв’язку прогнозів, вибору найефективніших інвестиційних рішень і т.п. можна розв’язати за допомогою математичних методів.

Даний інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» містить загальний інформативний блок, тематичний план та розподіл навчального часу за структурою дисципліни, робочу програму, методичні рекомендації до вивчення курсу, питання для самоконтролю з усіх тем робочої програми, зразки модульних контрольних робіт, завдання для індивідуальної роботи з усіх тем, методичні поради щодо їх виконання, питання і тестові завдання для підготовки до іспитів та список рекомендованої літератури. Навчальний посібник надає стислий опис основних понять, методичні поради щодо розв’язування типових задач, набір навчальних задач і задач для перевірки знань, питання для самоперевірки знань, тестові завдання теоретичного та практичного змісту, наведено термінологічний словник. Окремо подаються завдання для модульного контролю у вигляді індивідуальних завдань з курсу „Оптимізаційні методи і моделі”. Кожен параграф даного посібника лише оглядово розглядає загальні питання відповідних тем, а повні навчальні курси з них значно перевищують об’єм даної книги.

У навчальному посібнику розглядаються питання, які традиційно входять у курс „Оптимізаційні методи і моделі" такі, як: основи пошуку екстремуму функцій кількох змінних на основі необхідних і достатніх умов, деякі числові методи розв’язування задач безумовної та умовної оптимізації, описано основи теорії лінійного та цілочислового програмування, методи та алгоритми розв'язання спеціальних задач лінійного програмування. Розв'язування задач практичної тематики підготує студентів до вивчення економіко-математичного моделювання виробничих систем у господарстві.

Навчальний посібник розрахований для аудиторної та самостійної роботи студентів бакалаврського рівня підготовки економічного факультету, для самостійного вивчення студентами матеріалу курсу, перевірки як теоретичних знань, так і відповідних навичок з дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі". Посібник також має на меті закріплення теоретичних знань, отриманих з курсу лекцій, оволодіння основними практичними завданнями та контроль отриманих знань.

Дисципліна має практичну спрямованість на вирішення широкого спектра прикладних питань на усіх рівнях ієрархії управління щодо прийняття рішень (планів, програм, об'єктів, проектів, стратегій тощо) з урахуванням наявних економічних умов та обмежень.

Посібник є інтерактивним комплексом учбово-методичного забезпечення для вивчення курсу „Оптимізаційні методи і моделі" та містить: теоретичні відомості з лекційного курсу, практичні матеріали, методичні рекомендації щодо виконання типових завдань та контрольних робіт, а також тестові завдання теоретичного та практичного характеру.

Навчально-методичний посібник розрахований для самостійної роботи студентів бакалаврського рівня підготовки економічного факультету: для самостійного вивчення студентами матеріалу курсу, перевірки як теоретичних знань, так і відповідних навичок з дисципліни „Оптимізаційні методи і моделі ". Посібник також має на меті закріплення теоретичних знань, отриманих з курсу лекцій, оволодіння основними практичними завданнями та контроль отриманих знань.

ТЕМА 1

ВСТУП ДО МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

Розглядається загальна постановка задачі оптимізації; вказуються найважливіші класи оптимізаційних задач; висвітлюються деякі відомості курсу математичного аналізу, що стосуються теми даного курсу.

1.1. Загальна постановка задачі оптимізації та основні положення

Постановка задачі пошуку *мінімуму функцій* містить:

✓ цільову функцію $f(x)$, яка задана на множині X скінченновимірного евклідового простору R^n. Її значення характеризують ступінь досягнення мети (цілі), яка поставлена за умовою задачі;

✓ множину допустимих значень (точок) $X \subseteq R^n$, серед елементів яких робиться пошук.

Треба знайти такий вектор x^* з множини допустимих значень, якому відповідає мінімальне значення цільової функції на цій множині:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \text{ або } f(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{1.1}$$

При цьому точка $x^* \in X$ може бути:

а) точкою *глобального (абсолютного)* мінімуму функції $f(x)$ на *X*, або глобальним розв'язком задачі (1.1), якщо

$$f(x^*) \le f(x) \text{ при всіх } x \in X; \tag{1.2}$$

б) точкою *локального (відносного)* мінімуму функції $f(x)$ на *X*, або локальним розв'язком задачі (1.1), якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$f(x^*) \le f(x) \text{ при всіх } x \in X \text{ таких, що } |x - x^*| \le \varepsilon. \tag{1.3}$$

В умові (1.2) точка x^* порівнюється з усіма точками x множини допустимих розв'язків X, а в (1.3) – лише з точками ε-околу (рис. 1.1).

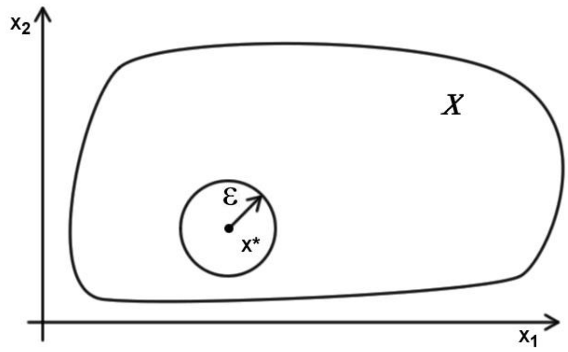


Рис. 1.1

Якщо нерівності в умовах (1.2) або (1.3) виконуються як строгі при $x \neq x^*$, то кажуть, що x^* - точка *строгого мінімуму* (строгого розв'язку) в глобальному або локальному розумінні.

По аналогії ставиться задача максимуму (глобального або локального), при цьому в умовах (1.2) та (1.3) знаки $\leq$ замінюються на $\geq$, і задача максимізації матиме вигляд:

$$f(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{1.4}$$

Задачу (1.4) можна отримати із задачі (1.1), якщо в останній замінити слово „мінімум" на „максимум", а в умовах (1.2) та (1.3) знаки $\leq$ замінити на $\geq$. Отже, задача (1.4) еквівалентна задачі

$$-f(x) \to \min, \quad x \in X$$

в тому розумінні, що множини глобальних і локальних, строгих або нестрогих розв'язків цих задач співпадають. Це дозволяє переносити результати, що отримані для задачі мінімізації, на задачі максимізації, і навпаки. В подальшому ми, як правило, будемо розглядати задачу мінімізації.

Розв'язки задач (1.1) та (1.4), тобто точки мінімуму і максимуму функції $f(x)$ на X, називають також *точками екстремуму*, а самі задачі – задачами на екстремум або екстремальними задачами. Очевидно, що глобальний екстремум є одночасно локальним, але не навпаки.

Якщо множина допустимих розв'язків *X* задається обмеженнями (умовами), що накладаються на вектор *x*, то розв'язується задача пошуку *умовного екстремуму*. Якщо обмеження на вектор *x* відсутні, тобто $X = R^n$, то має місце задача пошуку *умовного екстремуму*.

Розв'язком задачі пошуку екстремуму є пара $(x^*; f(x^*))$, що включає точку *x** і значення цільової функції в ній. Множину точок екстремуму (мінімуму або максимуму) цільової функції $f(x)$ на множині *X* позначимо *X**. Вона може містити скінчену кількість точок (зокрема, одну точку), нескінченну або бути порожньою.

При вивченні задач оптимізації важливим є питання про існування розв'язку. Має місце теорема (її доведення можна знайти у курсі математичного аналізу):

Теорема 1.1*. (Вейєрштрасса)*. Нехай *X* – замкнута обмежена множина в R^n, *f* – неперервна функція на *X*. Тоді точка глобального мінімуму функції *f* на *X* (глобальний розв'язок задачі (1.1)) існує.

1.2. Задачі безумовної оптимізації

Задача (1.1) є задачею безумовної оптимізації. Розглянемо питання про *умови оптимальності* або *умови екстремуму.* Умови оптимальності є основою кількісних методів теорії оптимізації, що направлені на вивчення екстремальних задач. Вони використовуються при побудові й обґрунтуванні числових методів розв'язування таких задач. В найпростіших випадках умови оптимальності дають можливість явно розв'язати задачу на екстремум.

Розрізняють *необхідні* умови оптимальності, тобто умови, яким повинні задовольняти точки, що є розв'язком задачі, і *достатні* умови оптимальності, тобто умови, з яких випливає, що дана точка є розв'язком задачі.

Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на множині $X = R^n$. Потрібно дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, тобто визначити точки $x^* = R^n$ її локальних мінімумів і максимумів на R^n:

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x \in R^n} f(x) \qquad (1.5)$$

Алгоритм розв’язання таких задач наступний:

1) знаходиться точка x^* локальних екстремумів за допомогою необхідних умов першого і другого порядку (що залежить від порядку використовуваних похідних) і достатніх умов безумовного екстремуму;

2) обчислюються значення $f(x^*)$ функції в знайдених точках локальних екстремумів.

Відомо, що *необхідною* умовою екстремуму функції є рівність нулю частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} = 0, \text{ де } i = \overline{1,n}. \qquad (1.6)$$

Точки *Х**, що задовольняють умову (1.6), називаються *стаціонарними.* Серед розв’язків системи (1.6) можуть бути як точки екстремуму, так і точки, які не є оптимальними. Щоб визначити характер оптимальності точки *x**, необхідно обчислити частинні похідні другого порядку. А це залежить від знака виразу - квадратичної форми

$$\Sigma \frac{\partial^2 f(x_1^*,...x_n^*)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*). \qquad (1.7)$$

Для його визначення складають симетричну матрицю Гессе других частинних похідних (гесіан) функції $f(x)$ у точці $X^* = R^n$:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & ... & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & ... & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & ... & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ h_{n1} & h_{n2} & ... & h_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.8)$$

де $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad i, j = 1,...,n$. Гесіан лінійної функції є нульовою матрицею, а гесіан квадратичної функції збігається з матрицею $H(x)$. Якщо матриця $H(x)$ додатно (від'ємно) визначена в точці $X^* \in R^n$, то і вираз (1.7) є додатно (від'ємно) визначений.

Найпростіше додатну (від'ємну) визначеність матриці $H(x)$ можна дослідити за умовами Рауса-Гурвіца. Для цього знаходять головні мінори матриці $H(x)$:

$$M_1 = \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right|; \quad M_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}; \quad M_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}; \; . \; . \; . \; ;$$

$$M_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}. \qquad (1.9)$$

Якщо головні мінори (1.9) матриці $H(x)$ (1.8) задовольняють умови:

1) $M_i > 0, \;\; i = \overline{1,n}$, то в точці X^* функція *f* має мінімум; (1.10)
2) $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, ..., (-1)^n M_n > 0$, то в точці X^* функція *f* має максимум. (1.11)

1.3. Задача умовної оптимізації. Опукла задача оптимізації

Задача (1.1) називається задачею умовної оптимізації (умовною задачею), якщо X – власна підмножина простору R^n. Очевидно, що для цієї задачі мають місце умови (1.2) – (1.4), якщо її локальний розв'язок x* є внутрішньою точкою допустимої множини X ($x \in \operatorname{int} X$). Про умовний екстремуму говорять і тоді, коли необхідно знайти екстремум функції кількох змінних, які пов'язані між собою одним або кількома рівняннями (число рівнянь повинне бути меншим від числа невідомих). Але для багатьох умовних задач мінімум досягається саме на межі, тому для них класичні методи аналізу непридатні. Взагалі, при переході від безумовних до умовних задач питання оптимізації стають більш складними.

Для визначення умовного екстремуму можуть бути використані методи диференціального числення, коли функція $f(x_1,....x_n)$ має не нижче другої похідної.

Має місце теорема:

Теорема 1.2. Якщо функція $f(x_1,....x_n)$ є функцією кількох змінних, що визначена на допустимій області *R*, то мінімальне (максимальне) значення f, якщо воно існує, досягається в одній або декількох точках, які належать одній із наступних множин:

2) S_1 - множина стаціонарних точок;

3) S_2 - множина точок межі;

4) S_3 - множина точок, де f недиференційована.

Тоді алгоритм розв'язання задачі на умовний екстремум полягає у наступному:

1) визначити всередині допустимої множини всі стаціонарні точки функції $f(x_1,....x_n)$, що задовольняють необхідну умову екстремуму (1.6);

2) перевірити всі стаціонарні точки на мінімум (максимум);

3) порівняти отримані значення з найменшими (найбільшими) значеннями, яких досягає цільова функція на межі допустимої множини.

Недоліком класичного методу є відсутність стандартизованого методу, який був би придатний для будь-яких обмежень.

У випадку мінімуму *достатньо*, щоб в околі точки *X** виконувалась умова $f(x_1,...,x_n) \geq f(x_1^*,...,x_n^*)$, у випадку максимуму - $f(x_1,...,x_n) \leq f(x_1^*,...,x_n^*)$.

Важливою складовою сучасного апарату теорії оптимізації є опуклий аналіз – розділ математики, в якому вивчаються властивості опуклих множин і опуклих функцій.

Для того щоб визначити, чи є знайдені стаціонарні точки точками мінімуму або максимуму (або ні тим і ні іншим), необхідно дослідити функцію в околі стаціонарних точок і визначити, чи є вона опуклою або вгнутою.

Означення. Множина $X \subseteq R^n$ називається *опуклою*, якщо вона містить будь-який відрізок, кінці якого належать *X*. Або: для будь-яких точок $x_1, x_2 \in X$ і $0 \leq \lambda \leq 1$ має місце умова

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X, \tag{1.12}$$

тобто множина *X* разом зі своїми будь-якими двома точками містить і відрізок, який їх з’єднує.

Прикладом опуклих множин є сам простір R^n, будь-який його лінійний підпростір, одно точкова множина, пряма, її різноманітні проміжки (відрізок, півінтервал, півпряма тощо), куля.

Геометрично опуклість функції означає, що будь-яка точка довільної хорди графіка функції *f* розташована не нижче відповідної точки самого графіка (Рис. 1.2, а). Для вгнутої функції взаємне розташування хорди і графіка обернене (рис. 1.2, б).

Критерій опуклості або вгнутості функції $f(x_1,....x_n)$ може бути сформульований у вигляді наступної теореми 1.3.

Теорема 1.3. У випадку (1.10), коли знаки всіх визначників (1.9) додатні, функція *f* є строго опуклою (опуклою вниз) в деякому околі точки $X*$, а у випадку (1.11), коли знаки визначників (1.9) чергуються, – строго вгнутою (опуклою вгору) в деякому околі точки $X*$.

Інакше: Якщо у точці $X^* = (x_1^*, \ldots x_n^*)$, де всі частинні похідні функції $f(x_1, \ldots. x_n)$ дорівнюють нулеві, матриця Ґессе (складена із других похідних)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

від'ємно визначена, то у цій точці досягається максимум. Якщо ця матриця додатно визначена, то досягається мінімум.

Зрозуміло, що існують випадки, коли матриця не є ні додатно, ні від'ємно визначеною.

Отже, якщо маємо довільне *n*, складається система із *n*, взагалі кажучи, нелінійних рівнянь з *n* невідомими

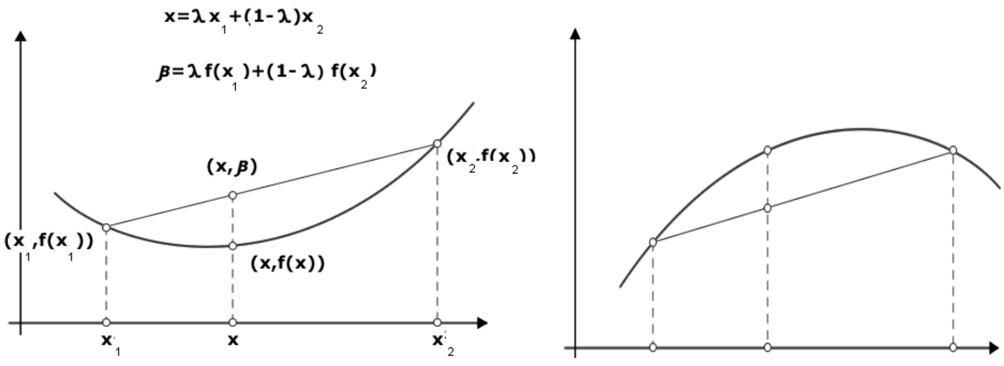
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи знаходимо всі критичні точки та за допомогою матриці Ґессе перевіряємо їх на екстремум (максимум та мінімум).

У загальному випадку розв'язання подібної системи рівнянь є складною математичною задачею. Найчастіше застосовують наближені методи, зокрема метод Ньютона. Складною математичною задачею є також аналіз матриці Ґессе. Задача ще більше ускладнюється, якщо наперед невідомо, де знаходиться екстремум функції - всередині заданої області чи на її межі.

Пошук та дослідження на екстремум критичних точок (які в математичному програмуванні ще називаються стаціонарними) може бути набагато полегшений, якщо відомі деякі властивості функції

$z = f(x_1,...x_n)$. Ці властивості можуть бути відомими, наприклад, внаслідок аналізу економічного сенсу задачі.



а) б)

Рис. 1.2

Зокрема, коли ця функція опукла, то її локальний екстремум завжди буде найбільшим або найменшим значенням (розділ математичного програмування, який займається опуклими функціями, називається *опукле програмування*).

Якщо функція *f* строго опукла (вгнута) на R, то *f* має єдиний відносний мінімум (максимум), який є і абсолютним.

Теорема 1.4. Для того щоб у точці *x** досягався внутрішній відносний мінімум (максимум) функції $f(x_1,....x_n)$, достатньо рівності нулю всіх перших частинних похідних і строгої опуклості (вгнутості) функції в околі точки *x**. Або: якщо в деякій точці $X^* = (x_1^*,...x_n^*)$ неперервна функція $z = f(x_1,...x_n)$ має екстремум, то всі її перші частинні похідні у цій точці дорівнюють нулеві.

Вищенаведені поняття і теореми стосуються задач опуклої оптимізації. Властивості опуклих задач мають важливе значення не лише в теорії, але і в чисельних методах оптимізації, оскільки, взагалі кажучи, дозволяють знаходити лише локальні розв'язки, зокрема, стаціонарні точки задачі. Але відшукання стаціонарних точок автоматично означає відшукання розв'язку, причому глобального.

Наведемо деякі алгебраїчні й аналітичні *властивості* опуклих функцій:

1) Якщо функція $F(x)$ опукла, то функція $-F(x)$ вгнута, і, навпаки.

2) Функція $F(x)=C$ і лінійна функція $F(x)=aX+b$ є скрізь опукла і скрізь вгнута.

3) Якщо функції $F_l(x),\ i=\overline{1,m}$ опуклі, то для будь-яких дійсних чисел $a_i \geq 0$ функції $\sum a_i F_i(x)$ теж є опуклими.

4) Якщо функція $F(x)$ опукла, то для будь-якого числа α область розв'язків нерівності $F(x)<\alpha$ є або опуклою множиною, або порожньою.

5) Якщо функції $g_i(x)$ опуклі для всіх невід'ємних значень змінних, то область розв'язків системи нерівностей $g_i(x) \leq b_i,\ i=\overline{1,m}$ є опуклою множиною, якщо вона не порожня.

6) Опукла (вгнута) функція, що визначена на множині X, є неперервною в кожній внутрішній точці цієї множини.

7) Будь-яка диференційовна строго опукла (вгнута) функція має не більше однієї стаціонарної точки (в них перші частинні похідні дорівнюють нулю). При цьому ці стаціонарні точки завжди є точками локального і глобального оптимуму.

Теорема 1.5. Двічі диференційовна функція $F(x)=F(x_1,...,x_n)$ є опуклою тоді і тільки тоді, коли виконується умова невід'ємності для квадратичної форми (1. 7), тобто

$$\Sigma \frac{\partial^2 f(x_1^*,...x_n^*)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \geq 0, \tag{1.13}$$

де $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$, і $\Delta x_i = (x_i - x_i^*);\ \Delta x_j = (x_j - x_j^*)$ не перетворюються в нуль одночасно. Вище вказано, що для виконання цієї умови використовується критерій Сильвестра: всі головні мінори $M_i,\ i=\overline{1,n}$ (1.9) матриці других частинних похідних (1.8) задовольняють умови невід'ємності. Якщо $M_i > 0,\ i=\overline{1,n}$, то нерівність (1.13) виконується як строга, і тоді функція $F(x) = F(x_1,...,x_n)$ є строго опуклою.

1.4. Геометрична інтерпретація задачі умовної оптимізації

При розв'язуванні задач умовної оптимізації часто застосовують геометричну інтерпретацію, яка базується на понятті ліній (або поверхонь) рівня функції $f(x_1,....x_n)$.

Означення. Лінією (поверхнею) рівня функції $f(x)$ називається множина точок, в яких функція приймає стале значення, тобто $f(x) = const$.

Для геометричної інтерпретації двовимірної задачі оптимізації необхідно зобразити її допустиму множину *X* і декілька характерних ліній рівня функції $f(x)$. (Приклади 1.3; 1.4). Щоб відобразити характер зміни функції , у даній лінії рівня доцільно ставити знак «+» з того боку, де значення функції $f(x) > h$, а знак «- » - з іншого.

1.5. Класична задача на умовний екстремум

Поряд з безумовною задачею, часто розв'язується також класична задача умовного екстремуму. Це задача виду (1.1) або (1.4) з допустимою множиною *X*, на якій задана система скінченої кількості рівнянь $g_i(x_j) = 0,\ i=\overline{1,m};\ j-\overline{1,n}$. Тут явно вказується не сама множина *X*, а система, що її визначає. Для розв'язування цієї задачі використовується *метод невизначених множників Лагранжа*, що дозволяє звести розглядувану задачу до задачі відшукання екстремуму спеціально побудованої функції Лагранжа без обмежень.

Щоб знайти умовний екстремум функції двох змінних $f(x_1,x_2)$ при наявності рівняння зв'язку $g(x_1,x_2)=0$, потрібно ввести *функцію Лагранжа:*

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \qquad (1.14)$$

де λ - невизначений сталий множник, і знайти її екстремум.

Необхідні умови екстремуму функції (1.14) виражаються системою трьох рівнянь: з трьома невідомими x_1, x_2, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2}, \\ g(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \qquad (1.15)$$

Питання про існування і характер умовного екстремуму розв'язується на основі дослідження знаку другого диференціала функції Лагранжа

$$d^2 F = F''_{x_1 x_2} dx_1{}^2 + 2F''_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + F''_{x_2 x_2} dx_2^2$$

для досліджуваної системи значень x_1, x_2, λ, що отримана із системи (1.15) при умові, що dx_1 та dx_2 зв'язані рівнянням

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (dx_1^2 + \mathrm{dx}_{\mathrm{x}}^2 \neq 0).$$

Функція $f(x_1, x_2)$ має умовний максимум, якщо $d^2 F < 0$, і умовний мінімум, якщо $d^2 F > 0$.

Аналогічно знаходиться умовний екстремум функції трьох і більше змінних при наявності рівнянь зв'язку. Якщо, наприклад, потрібно знайти екстремум функції $f(x_1, x_2, x_3)$ при умовах

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0, \; h(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (1.16)$$

то вводять функцію

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3) + \mu h(x_1, x_2, x_3)$$

і до рівнянь (1.16) приєднують ще три: $F'_{x_1} = 0,\; F'_{x_2} = 0,\; F'_{x_3} = 0$.

1.6. Класифікація задач оптимізації. Задачі математичного програмування та їх види

Задачі оптимізації поділяють на *прямі* і *зворотні*. Прямі задачі відповідають на питання: що буде, якщо в заданих умовах ми приймемо визначене рішення, тобто яке значення прийме показник ефективності? Зворотні задачі відповідають на питання: які значення елементів розв'язку треба вибрати, щоб показник ефективності прийняв оптимальне значення. Зворотні задачі складніші за прямі і, крім того, їх розв'язок не завжди однозначний. Їх також називають *екстремальними* або *оптимізаційними* задачами. Застосування методів диференціального числення для знаходження екстремуму функції у заданій області обмежене вимогами диференційованості. Ці задачі об'єднує ряд спеціальних методів пошуку екстремуму з різних розділів математики.

Якщо ОДР містить скінчене число розв'язків, то знайти оптимальне значення цільової функції можна звичайним перебором, підставивши всі можливі розв'язки в цільову функцію й обравши найбільше або найменше значення F. Якщо ж число можливих розв'язків дуже велике або нескінченне, то для пошуку оптимального розв'язку застосовують спеціальні методи цілеспрямованого перебору, що розроблюються зокрема, в спеціальному розділі математики – "Математичне програмування".

У *загальному* випадку задачу математичного програмування можна поставити таким чином.

Знайти найбільше (найменше) значення цільової функції:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max (\min) \qquad (1.17)$$

на допустимій множині (області допустимих розв'язків) G, де G задається системою обмежень у вигляді нерівностей і (або) рівнянь:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = (<, >, \le, \ge, \ne)\ 0, \text{ де } i = \overline{1, m}. \qquad (1.18)$$

Функцію $F(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називають також *критерієм ефективності*.

Задачі оптимізації, а, отже, і задачі математичного програмування, можна класифікувати за різними ознаками.

1) Якщо за основу взяти *структуру функцій*, що входять до складу задачі, то отримуємо задачу *лінійного програмування* (усі функції F і g_i умов (1.17) - (1.18) – лінійні), у протилежному випадку, коли критерій ефективності і (або) система обмежень задаються нелінійними функціями, говорять про *нелінійне* програмування. Зокрема, якщо такі функції мають властивості опуклості, то отримана задача є задачею *опуклого програмування*; окремим її видом є задача *квадратичного програмування*.

2) Якщо область допустимих розв’язків G складається з окремих ізольованих точок, то говорять про дискретне або цілочислове програмування (розв’язки можуть бути лише цілочисловими).

3) За наявністю *додаткових обмежень* на змінні задачі їх поділяють на задачі *безумовної* (немає додаткових обмежень) або *умовної оптимізації* (є додаткові умови, наприклад, цілочисельності розв’язків).

4) Якщо важливим є *вплив фактору часу*, то говорять про *статичні* (задачі планування) або *динамічні* задачі. Задачі динамічного програмування (оптимального управління) є багатокроковими.

5) Усі вищезгадані задачі математичного програмування відносять до так званих *детермінованих моделей*, тобто таких, що не містять невідомих параметрів, на які *не впливають випадкові фактори*. При наявності таких параметрів говорять про вибір в умовах невизначеності. У кращому випадку ці параметри є випадковими величинами з відомими законами розподілу ймовірностей. Такі задачі вирішує *стохастичне програмування, теорія прийняття статистичних рішень, теорія статистичного моделювання методом Монте-Карло, теорія масового обслуговування*.

6) Набагато гіршим є випадок, коли розподіл цих параметрів невідомий або взагалі не існує. В цьому випадку застосовують методи “гарантованого виграшу”, “експертних оцінок”, “адаптованих алгоритмів”.

7) Випадками ворожої невизначеності, коли в операції беруть участь дві або більше сторін з протилежними інтересами, займається спеціальний розділ математики – “*Теорія ігор*”.

8) Деякі класи задач оптимізації носять характер моделей, які є окремими класами задач оптимізації і застосовуються в різних галузях. До таких можна віднести: симплексну і транспортну задачу лінійного програмування, задачі про призначення, теорію оптимального розподілу ресурсів, теорію сіткових графіків, сіткового планування й управління, теорію керування запасами, задачі ремонту й заміни обладнання, вибору маршрутів, теорію розкладів, теорію надійності, теорію масового обслуговування, упорядкування та багато розділів теорії ігор, а також комбіновані задачі. Таким чином, масштаб моделей оптимізаційних задач дуже широкий: від конкретних задач до розгалужених теорій.

9) Усі ці методи мають один критерій оптимальності і називаються *однокритеріальними*. Задача з декількома критеріями (*багатокритеріальна*) набагато складніша і, крім того, принципово не може мати чисто математичного розв’язання (вирішення). Математичні методи у багатокритеріальних задачах дозволяють лише визначити оптимальну множину розв’язків (рішень), що явно краща від інших.

Наприклад, задачу одержання максимального прибутку з мінімальними витратами не можна коректно розв’язати суто математичними методами. За допомогою таких методів можна в кращому випадку виділити лише оптимальну множину розв’язків (дуга *AB* на рис. 1.3), яка напевно краща від інших. Остаточний вибір залишається суб’єктивним.

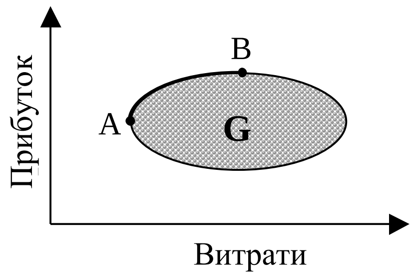


Рис. 1.3

В останні роки всі розділи математичного програмування отримали подальший розвиток, а багато з них склались у самостійні дисципліни (теорія ігор, програмування на мережах, динамічне програмування та ін.) зі своєю методологією, системою позначень і термінологією.

1.7. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1.1.

$z = f(x_1,...x_n) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3 - 5x_1 + 10 \to \min$.

Розв'язання. Критична точка знаходиться як розв'язок системи виду (1.6) трьох рівнянь:

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5 = 0,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0,$$

З допомогою одного з відомих методів (Ґаусса, Крамера тощо) знаходимо цю критичну точку : $x_1 = 30,\ x_2 = -20,\ x_3 = -5$.

Якщо невідомі мають бути невід'ємними ($x_1, x_2, x_3 \geq 0$), то потрібно дослідити функцію *z* ще й на межі, тобто на площинах $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ та на прямих $x_1 = x_2 = 0,\ x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = x_3 = 0$. Отримаємо остаточно $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$; $z_{\min} = 3{,}75$.

Задача 1.2. Дослідити на екстремум функцію

$$f = 3x_1^2x_2 + x_2^2 - 18x_1 - 30x_2.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь (1.6):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=6x_1x_2-18=0;\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=3x_1^2+3x_2^2-30=0 \text{ або } \begin{cases} x_1x_2-3=0, \\ x_1^2+x_2^2-10=0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо чотири стаціонарні точки $K_1(1;3);\ K_2(3;1);\ K_3(-1;-3);\ K_4(-3;-1)$.

Запишемо вирази для частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=6x_2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=6x_1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=6x_2,$$

обчислимо їх значення в стаціонарних точках, за формулами (1.9) складемо матриці H_i та знайдемо їхні головні мінори для кожної стаціонарної точки K_i.

Для точки K_1 отримаємо такі значення:

$$\frac{\partial^2 f(K_1)}{\partial x_1^2}=6\cdot 3=18=h_{11};\qquad \frac{\partial^2 f(K_1)}{\partial x_1 \partial x_2}=6\cdot 1=6=h_{12}=h_{21};\qquad \frac{\partial^2 f(K_1)}{\partial x_2^2}=6\cdot 3=18=h_{22}.$$

Гесева матриця для даної функції має вигляд $H_1=\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$.

Оскільки всі головні мінори першого і другого порядку додатні: $M_1=18>0$, $M_2=\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}=18^2-6^2>0$, то в точці K_1 функція має мінімум, що дорівнює значенню функції при $x_1=1,\ x_2=3$:

$f_{\min}=f(1;3)=3\cdot 1^2\cdot 3+3^2-18\cdot 1-30\cdot 3=-72$.

Аналогічно, в точці K_2: $h_{11}=6,\ h_{12}=18,\ h_{22}=6$, $H_2=\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$. Тому що $M_1=6>0$, $M_2=\begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}=6^2-18^2<0$, то екстремуму тут нема.

Для точки K_3: $h_{11}=-18,\ h_{12}=-6,\ h_{22}=-18$, $H_3=\begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}$, $M_1=-18<0$, $M_2=\begin{vmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -18 \end{vmatrix}=(-18)^2-(-6)^2>0$. Отже, в цій точці функція має максимум, причому $f_{\max}=f(-1;-3)=3\cdot(-1)^2\cdot(-3)+(-3)^2-18\cdot(-1)-30\cdot(-3)=72$.

Для точки K_4: $h_{11}=-6,\ h_{12}=-18,\ h_{22}=-6$, $H_4=\begin{pmatrix} -6 & -18 \\ -18 & -6 \end{pmatrix}$. Тому що $M_1=-6<0$, $M_2=\begin{vmatrix} -6 & -18 \\ -18 & -6 \end{vmatrix}=(-6)^2-(-18)^2<0$, отже, екстремуму в цій точці нема.

Задача 1.3. Дослідити на опуклість функції:

a) $F(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-x_1x_2+5x_1-6x_2-3$;

b) $F(x_1,x_2)=-\sqrt{x_1x_2}$.

Розв'язання. а) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=4x_1-x_2+5;\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2-x_1-6.$$

Запишемо вирази для частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=4;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=-1;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=2.$$

Матриця других частинних похідних даної функції має вигляд $H=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Оскільки всі її головні мінори першого і другого порядків додатні: $M_1=4>0$, $M_2=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8-1=7>0$, то, на основі теореми 1.3, функція є строго опуклою (опуклою вниз) для всіх *X*.

b) Маємо: $\frac{\partial F}{\partial x_1}=-\frac{x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}$; $\frac{\partial F}{\partial x_2}=-\frac{x_1}{2\sqrt{x_1x_2}}$;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}=-\frac{x_2}{2}\left((x_1x_2)^{-\frac{1}{2}}\right)'_{x_1}=\frac{x_2^2}{4(x_1x_2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}};\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=\frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Матриця других частинних похідних буде:

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{pmatrix}.$$

Її головні мінори $M_1 = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$, $M_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{1}{4\sqrt{x_1 x_2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{x_1 x_2}} & \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{16x_1 x_2} - \frac{1}{16x_1 x_2} = 0$.

Отже, функція $F(x)$ є вгнутою (опуклою вгору), але не строго вгнутою при $x_1 > 0,\ x_2 > 0$.

Задача 1.4. Побудувати лінії рівня функцій:

а) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$; б) $f(x) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4}$; в) $f(x) = x_2^2 - x_1^2$; г) $f(x) = x_1^2$.

Розв'язання. Рівняння ліній рівня мають вигляд:

а) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 = const = r^2$ - рівняння кіл з центром у точці (0;0) і радіусом r (рис. 1.4).

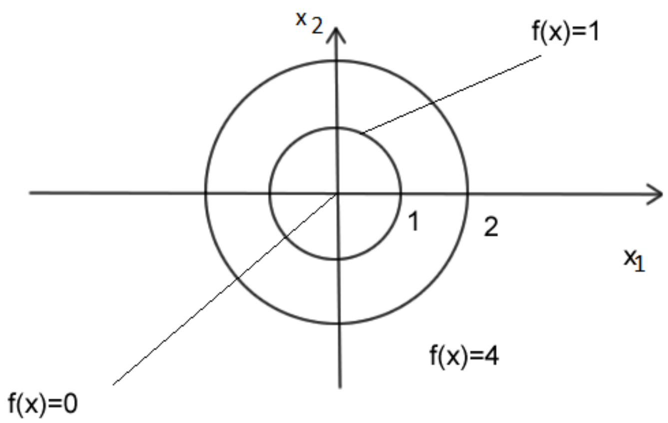


Рис. 1.4

б) $f(x) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = const$ - рівняння еліпса. Якщо $const = 1$, то $a = 3,\ b = 2$ - відповідно велика і мала його півосі (рис. 1.5).

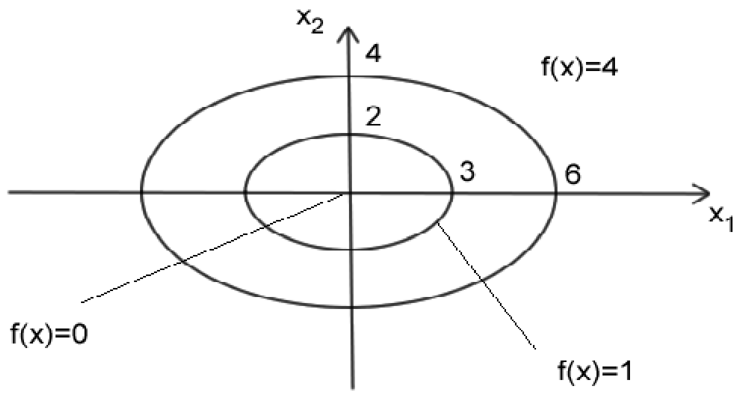


Рис. 1.5

в) $f(x) = x_2^2 - x_1^2 = const$ - рівняння гіперболи; при лінії рівня $h = 1$ вітки гіперболи симетричні відносно осі OX_2, $a = 1, b = 1$ - відповідно уявна і дійсна півосі; при $h = -1$ $a = 1, b = 1$ - відповідно дійсна й уявна півосі, а вітки гіперболи симетричні відносно осі OX_1; при $h = 0$ графіком є дві прямі, що перетинаються з рівняннями $x_2 = \pm x_1$.

г) $f(x) = x_1^2 = const$ - рівняння двох паралельних осі OX_1 прямих.

Задача 1.5. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множині $X = \langle x \,|\, x_2^2 - x_1 + 3 = 0 \rangle$.

Розв'язання. Це задача на пошук умовного екстремуму. Лінії рівня функції $f(x)$ є колами (рис.1.4), а множина допустимих розв'язків *X* – параболою з рівнянням $x_1 = x_2^2 + 3$. У точці $x^*(3;0),\ f(x^*) = 9$ досягається глобальний мінімум (рис. 1.6).

Бачимо, що ця точка є точкою дотику лінії рівня і кривої, що описує множину *X*. Глобальний максимум на даній множині не досягається. Якщо поміняти знак перед функцією на протилежний, то в точці *x** функція $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ буде досягати максимуму на даній множині *X*.

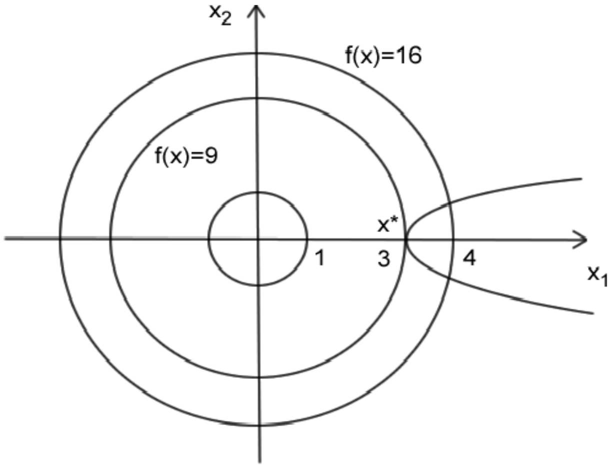


Рис. 1.6

Задача 1.6. Знайти екстремум функції $f(x_1, x_2) = 9 - 8x_1 - 6x_2$ при умові, що її аргументи задовольняють рівняння $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Розв'язання. Геометрично задача зводиться до знаходження екстремальних значень аплікати x_3 площини $f(x_1, x_2) = 9 - 8x_1 - 6x_2$ для точок її перетину з циліндром $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Складаємо функцію Лагранжа, яка визначається формулою (1.14) $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$, а саме:

$$F(x_1, x_2) = 9 - 8x_1 - 6x_2 + \lambda(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 25);$$

знаходимо її частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -8 + 2\lambda x_1,\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = -6 + 2\lambda x_2$.

Система рівнянь (1.15) набуде вигляду:

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x_1 = 0, \\ -6 + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \lambda x_1 - 4 = 0, \\ \lambda x_2 - 3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо два розв'язки: 1) $\lambda_1 = 1,\ x_1 = 4,\ x_2 = 3$, 2) $\lambda_2 = -1,\ x_1 = -4,\ x_2 = -3$.

Знайдемо другі частинні похідні: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^{\ 2}} = 2\lambda,\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial x_2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^{\ 2}} = 2\lambda$

і вираз для диференціала другого порядку $d^2F = 2\lambda(dx_1^{\ 2} + dx_2^2)$. Оскільки:

1) для першого розв'язку $d^2F > 0$, то функція $F(x_1, x_2)$ у точці (4; 3) має умовний мінімум; 2) у другому випадку, оскільки $d^2F < 0$, функція $F(x_1, x_2)$ має умовний максимум у точці (- 4; - 3), при $\lambda_2 = -1,\ x_1 = -4,\ x_2 = -3$.

Отже, $f_{\max} = f(-4;-3) = 9 - 8(-4) - 6(-3) = 59$,

$$f_{\min} = f(4;3) = 9 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = -41.$$

Зауваження. Якщо при обчисленні координат оптимальної точки конкретне значення λ нас не цікавить, то там, де це можливо, множники Лагранжа треба виключити, що дозволить знизити порядок рівнянь.

1.8. Питання для самоперевірки

1. Дати означення локального екстремуму.
2. Сформулювати теорему про необхідні і достатні умови локального екстремуму функції кількох змінних.
3. Сформулювати теорему про необхідні і достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
4. Дати означення і описати спосіб знаходження умовного екстремуму.
5. У якому випадку задачу на умовний екстремуму можна звести до задачі на звичайний екстремум?

1.9. Ключові поняття

Екстремальне значення
Глобальний екстремум
Локальний екстремум
Опукла функція
Стаціонарна точка
Умовна оптимізація
Частинні похідні першого (другого) порядку
Гесева матриця
Лінії рівня
Математичне програмування
Оптимальна множина розв'язків
Умовний екстремум
Функція Лагранжа

1.10. Навчальні завдання

№ 1.1.Знайти екстремум функції $f = x_1^{\,3} x_2^2 (1 - x_1 - x_2)$.

Відповідь. $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$.

№ 1. 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x_1 + x_2$ у крузі $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le 1$.

Відповідь. $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$.

Вказівка. При знаходженні стаціонарних точок на межі області скористатись параметричним рівнянням кола.

№ 1.3. Знайти умовний екстремум функції $f = x_1 x_2$, якщо $x_2 + x_1^{\,2} - 3 = 0$. Розв'язати задачу двома способами: як задачу на звичайний екстремум функції однієї змінної і за допомогою функції Лагранжа.

Відповідь. $f_{\max} = 2, \quad f_{\min} = -2$.

1.11. Завдання для перевірки знань

№ 1.4. Дослідити на екстремум функції:

а) $f = (x_1 - 1)^2 + 2x_2^2$;

б) $f = 4(x_1 - x_2) - x_1^2 - x_2^2$;

в) $f = x_1^{\,2} - x_1 x_2 + x_2^2 + 9x_1 - 6x_2 + 20$;

г) $f = x_1^{\,2} + x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2$.

Відповідь. а) $f_{\min}(1;0;0)$; б) $f_{\max}(2;-2;8)$;

в) $f_{\min}(-4;1;-1)$; г) $f_{\min}(1;0;-1)$.

№ 1.5. Знайти найбільше та найменше значення функції в заданій області:

а) $f = x_1^{\,2} - x_2^2$, якщо $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le 4$;

б) $f = x_1 x_2$, якщо $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le 1$;

в) $f = x_1 x_2 + x_1 + x_2$, якщо $x_1 \ge 1;\ x_1 \le 2;\ x_2 \ge 2;\ x_2 \le 3$;

г) $f = x_1^{\,2} + 3x_2^{\,2} + x_1 - x_2$, якщо $x_1 = 1;\ x_2 = 1$; $x_1 + x_2 = 1$.

Відповідь. а) $f_{\max}(\pm 2;0) = 4, \quad f_{\min}(0;\pm 2) = -4$;

б) $f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$, $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$;

в) $f_{\max}(2;3) = 11$, $f_{\min}(1;2) = 5$; г) $f_{\max}(1;1) = 4$, $f_{\min}(1;\frac{1}{6}) = \frac{23}{12}$.

№ 1.6. За допомогою функції Лагранжа знайти оптимальні значення функції: $f = 2x_1^{\ 2} + x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2$, якщо $x_1 + x_2 = 2$.

Відповідь. $f_{\min}(-1;3) = -6$.

ТЕМА 2
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Побудова математичних моделей задач математичного програмування шляхом дослідження постановки задачі з метою виділення змінних, аналізу обмежень, яким повинні задовольняти змінні, і побудови цільової функції.

2.1. Математична модель економічних процесів

Розв'язування задач планування господарства, підвищення ефективності виробництва, економії ресурсів, покращення методів економічних розрахунків та їх обґрунтування дають можливість вивчати закономірності ринкової економіки, розробляти нові методи економічних розрахунків і аналізу, методів планування. Значну роль тут відіграє використання сучасних інформаційних технологій. При вивченні складних процесів і явищ, коли проведення експериментів вимагає значних витрат або взагалі неможливі, застосовується моделювання.

Модель – це спеціально створюваний об'єкт, на якому відтворюються цілком визначені характеристики досліджуваного об'єкта з метою його вивчення. *Моделювання* – це спосіб відображення характеристик об'єкта, який вивчається, це процес побудови, вивчення та застосування моделей. Метод моделювання є одним з основних методів пізнання закономірностей різноманітних процесів і явищ.

Математичне моделювання є найдосконалішим і найефективнішим методом моделювання. *Математичне моделювання* – це опис кількісних закономірностей за допомогою математичних виразів. *Математична модель* є абстрактним відображенням реального процесу, що з більшою чи меншою точністю характеризує його.

Економічна наука віддавна використовує моделі. Одна з перших згадок про моделі відноситься до XYIII століття (1758 р., «Економічна таблиця», модель відтворення французького ученого Ф.Кєне), потім були А.Сміт (автор класичної макроекономічної моделі), Д.Рікардо (модель міжнародної торгівлі). XIX століття у зв'язку з розвитком ринкової економіки дало нові імена (Л.Вальрас, О.Курно, В. Парето та інші). У XX столітті математичні методи моделювання набули ще ширшого використання як закордоном (Р.Акоф, Р.Беллман, Г.Данціг, Г.Кун, В.Леонтьєв, Дж.Нейман, Т.Сааті, П.Самуельсон, Р. Солоу, Д.Хікс та інші), так і у вітчизняній економіці (М.П.Бусленко, О.С.Вентцель, В.К.Дмитрієв, Л.В.Канторович, В.С.Немчинов, В.В.Новожилов, Е.Е.Слуцький, Д.Б.Юдін та інші).

Процес математичного моделювання можна поділити на чотири основних етапи:

I етап: Формулювання законів, що пов'язують основні проекти моделі, тобто запис у вигляді математичних термінів сформульованих якісних уявлень про зв'язки між проектами моделі.

II етап: Дослідження математичних задач, до яких приводять математичні моделі. На цьому етапі поводяться вибір або розробка методів дослідження, програмування моделі на ПК. Також перевіряється придатність машинної моделі на основі правильності отримуваних результатів та оцінка їх стійкості.

Основне питання – розв'язування прямої задачі, тобто отримання в результаті аналізу моделі вихідних даних (теоретичних наслідків) для подальшого їх співставлення з результатами спостережень явищ, що вивчаються.

III етап: Коректування прийнятої гіпотетичної моделі згідно з критерієм практики, тобто вияснення питання про те, чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень.

Якщо модель була цілком визначена - всі параметри її були дані, - то визначення відхилень теоретичних наслідків від спостережень дає розв’язок прямої задачі з наступною оцінкою відхилень.

Якщо відхилення виходять за межі точності спостережень, то модель не може бути прийнята. Часто при побудові моделі деякі її характеристики залишаються не визначеними.

Застосування критерію практики до оцінки математичної моделі дозволяє робити висновок про правильність положень, що лежать в основі (гіпотетичної) моделі, яку належить вивчити.

IV етап: Наступний аналіз моделі у зв’язку з накопиченням даних про вивчені явища, і модернізація моделі.

На першому етапі будь-якого економічного дослідження необхідно скласти його математичну модель. *Математична модель* – це система математичних формул, яка з більшою або меншою точністю описує процеси, які проходять у досліджуваній системі. При цьому дуже часто різні явища можуть мати однакову математичну модель. Проте при вирішенні практичних задач недостатньо мати математичну модель досліджуваної системи, необхідно також уміти використовувати її для прийняття рішень з оптимального керування такою системою.

Загальних методів побудови математичних моделей не існує, але можна виділити наступні *основні стадії* побудови математичної моделі:

Створення функціональної (наочної, описової) моделі, тобто формування основних законів, що пов’язують об’єкти досліджуваного явища. При цьому реальне явище спрощується, схематизується. Функціональна модель повинна відбивати основні риси явища, виходячи з цільової спрямованості дослідження.

Вибираються параметри моделі, які можна розбити на три групи:

а) задані, заздалегідь відомі фактори (умови, обмеження) α_1, α_2,…, α_k, на які ми впливати не можемо;

б) невідомі (випадкові) фактори β_1, β_2,…, β_l, значення яких не можна передбачити заздалегідь;

в) фактори, що залежать від нас (елементи розв'язку), $x_1, x_2, \ldots, x_n$, котрі ми у відомих межах можемо вибирати за своїм розсудом.

Складають систему обмежень і зв'язків між параметрами у вигляді рівнянь, нерівностей і т.д., що адекватно відбивають закони й зв'язки функціональної моделі:

$$\Phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

або $\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}$.

Усякий певний вибір параметрів, що залежать від нас, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, який задовольняє даній системі обмежень, називають *допустимим розв'язком (планом)*. Множину всіх допустимих у даній задачі розв'язків називають *областю допустимих розв'язків* (ОДР = G).

Для вибору розв'язку, що найбільш ефективно реалізує ціль дослідження, необхідно визначити кількісний критерій, який називають *показником ефективності*. На цій стадії складають *цільову (виробничу) функцію* залежності показника ефективності від параметрів моделі, оптимальне (максимальне або мінімальне) значення якої необхідно знайти:

$$F = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ або } F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В залежності від ознак математичні моделі класифікуються на: лінійні і нелінійні; динамічні і статичні; стохастичні (імовірнісні) і детерміновані (регулярні); неперервні і дискретні.

За наявністю зворотних зв'язків моделі поділяються на відкриті, закриті та комбіновані. Є й інші класифікації: в залежності від характеру властивостей, що відображаються (структурні, функціональні), від способу представлення властивостей об'єктів (аналітичні, алгоритмічні, імітаційні), від способу отримання моделі (теоретичні, емпіричні), особливостей поведінки об'єкта (імовірнісні та детерміновані) тощо.

До математичних моделей висуваються вимоги універсальності, точності, адекватності, економічності та інші [5].

Коротка класифікація моделей математичного програмування представлена на рис. 2.1.

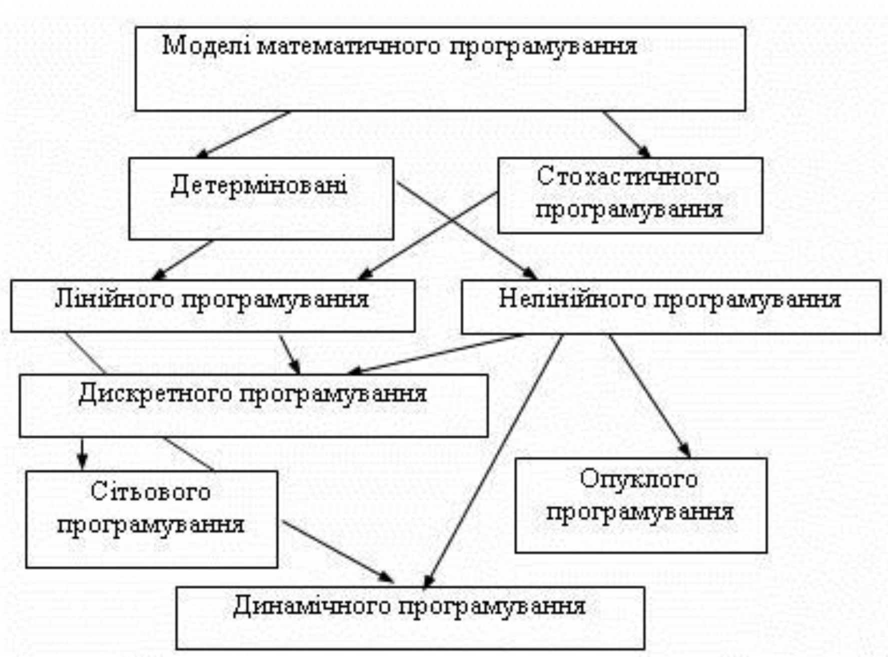


Рис. 2.1. Класифікація моделей математичного програмування.

2.2. Приклади лінійних математичних моделей

Лінійне програмування (ЛП) являє собою теоретичний апарат модельного дослідження, що спрямоване на відшукання найкращого способу розподілу обмежених ресурсів за декількома взаємозалежними за метою і використанням ресурсів видами виробничої діяльності. ЛП знайшло широке застосування при розв’язанні багатьох практичних задач організаційно-економічного керування.

Задача 2.1. *Задача оптимального планування виробництва (або задача оптимального використання ресурсів (сировини), або оптимального асортименту)*.

Нехай підприємство для виготовлення *m* різних видів продукції використовує *n* типів ресурсів у заданих обсягах (запасах) $a_i, i=\overline{1,m}$.

Нормативні витрати *i*-го ресурсу для виготовлення одиниці продукції *j*-го виду становлять $(a_{ij}), i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,n}$. Нехай одиниця готової продукції j-го виду дає підприємству прибуток *p.* потрібно визначити обсяги виробництва продукції кожного виду з даних обсягів ресурсів, щоб знайти найбільший прибуток.

Побудуємо математичну модель задачі. Керованими змінними вибираємо планову кількість x_j виробництва продукції j-го виду.

Сталими параметрами є відома для даної технології матриця нормативних витрат $(a_{ij}), i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,n}$, обсяги ресурсів $b_i, i=\overline{1,m}$ та прибуток p_j.

За цих умов цільовою функцією *z* буде загальний прибуток підприємства, що є лінійною функцією *n* змінних x_j, який повинен досягати максимуму, тобто $z=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$. Тут $p_j x_j$ - прибуток, який отримує підприємство за *j*-й вид виготовленої продукції в кількості x_j.

Кожне *i*-те співвідношення із системи обмежень є лінійним і відображає те, що *i*-й ресурс для виготовлення всієї продукції не може перевищувати наявного запасу. Тоді система обмежень матиме вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i=\overline{1,m}.$$

До цієї системи обмежень додамо природні додаткові обмеження невід'ємності обсягів виробництва (параметрів розв'язку): $x_j \ge 0$.

Математична модель побудована.

Задача 2.2. З*адача планування оптимальної структури товарообігу.*

Нехай торгівельне підприємство реалізує *n* груп товарної продукції. Нормативні витрати ресурсів у розрахунку на одиницю продукції *k*-ої товарної групи ($k=\overline{1,n}$) становлять:

- торгівельної площі a_k м^2;
- фонду робочого часу b_k год.;
- витрат обігу c_k грн.

Загальні обсяги ресурсів торгівельного підприємства на період планування становлять: a м^2 торгівельної площі, b год. робочого часу, *c* гривень загальних витрат обігу. Крім того, торгівельне підприємство може укласти угоди з виробниками для продажу деяких груп товарів у обсягах, не менших, ніж d_k. Відома також вартість одиниці товару кожної групи p_k.

Потрібно визначити оптимальний асортимент товарів кожної групи за критерієм найбільшого прибутку торгівельного підприємства.

Позначимо через $x_k, k = \overline{1,n}$, обсяги товару *k*-ої товарної групи, що необхідно взяти на реалізацію. Це будуть керовані змінні даної задачі. Сталими параметрами будуть задані величини a_k, b_k, c_k, a, b, c, d_k, p_k. Цільова функція z – загальний прибуток, який має бути максимальним, матиме вигляд:

$$z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max .$$

Система обмежень, при якій використаний ресурс не повинен перевищувати наявних запасів, набуває вигляду:

$$\begin{gathered} a_1 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_1 x_n \le a; \\ a_2 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_2 x_n \le b; \\ a_3 x_1 + a_3 x_2 + \ldots + a_3 x_n \le c. \end{gathered}$$

До цих обмежень потрібно додати обмеження, пов'язані з угодами між торгівельним підприємством та деякими виробниками: $x_k \ge d_k$, а також умовами невід'ємності керованих змінних (параметрів розв'язку) $x_k \ge 0$.

Задача 2.3. З*адача про раціон (дієту, меню, суміші).*

Щодобовий раціон годівлі сільськогосподарських тварин може включати декілька видів кормів (наприклад, сіно, силос, концентрати тощо) у різних пропорціях. При цьому одиниця кожного з *n* видів корму містить *m* поживних речовин у кількості $(a_{ij}), i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,n}$ (кальцію, магнію, фосфору, білків, протеїну тощо). Відома також вартість одиниці маси кожного з *n* видів корму - $p_k \ \ (k=\overline{1,n})$. Потреби однієї тварини поживних речовинах повинні відповідати нормативам $c_k, \ k=\overline{1,n}$.

Потрібно встановити добові обсяги кожного виду корму найменшої вартості (найекономніші для господаря).

Керованими змінними $x_j, \ j=\overline{1,n}$, будуть обсяги щодобового споживання однією твариною *і*-го виду корму. Тоді цільовою функцією будуть найменші витрати на одну тварину: $z=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \min$.

Система обмежень відображає відповідність поживних речовин кожного виду до нормативних вимог для кожної тварини:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \ge c_1,\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n \ge c_m,\\
&x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

Задача 2.4. З*адача про оптимальне закріплення працівників за видами робіт (про призначення; проблема вибору).*

Нехай є *n* працівників та *n* видів робіт (верстатів, обладнання, робочих місць тощо). Відома продуктивність праці c_{ij} *і*-го працівника на *j*-му робочому місці. Потрібно закріпити працівників таким чином, щоб кожний вид роботи виконував тільки один працівник. При цьому загальна ефективність такого закріплення повинна бути найвищою.

Керованими змінними будуть $x_{ij}=1$, якщо *і*-й працівник виконує *j*-ту роботу, та $x_{ij}=0$, коли *і*-й працівник не виконує *j*-ту роботу (отже, її виконує інший працівник). Цільова функція матиме вигляд:

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max .$$

Система обмежень буде такою:

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn}=1,$$
$$x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{n1}=1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{nn}=1.$$

Перші *n* умов означають, що кожний вид роботи виконує тільки один працівник, а інші *n* умов означають зайнятість працівника тільки на одному виді робіт.

Задача 2.5. *Задача про раціональний розкрій (розпил, розріз, обробку) матеріалів.*

На розкрій (розпил, розріз, обробку) поступає матеріал одного зразка у вигляді цілих одиниць стандартних розмірів у кількості *a* одиниць. Потрібно виготовити з нього *k* різних заготовок різного розміру та форми у кількостях, що пропорціональні числам $b_1, b_2, \ldots, b_k$ (умова комплектності). Кожна одиниця матеріалу може бути розкроєна n різними способами, причому кожен *i*-тий ($i=\overline{1,n}$) спосіб дає a_{ij} одиниць j-го виробу ($j=\overline{1,k}$). Необхідно знайти план розкрою, що забезпечує максимальне число комплектів.

Позначимо: x_i - число одиниць матеріалу, який розкроюється *i*-тим способом; *x* – кількість комплектів виробів, які потрібно виготовити. Оскільки загальна кількість матеріалу дорівнює сумі його одиниць, що розкроюються різними способами, то $\sum_{i=}^{n} x_i = a$.

Вимога комплектності виразиться системою рівнянь

$$\sum_{i=}^{n} x_i a_{ij} = b_j x \quad j=\overline{1,k}.$$

Очевидно, що $x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,n}$. Знайти таке рішення $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, яке задовольняє вищенаведеним умовам, а також цільовій функції $f = x \to \max$.

Іноді в задачах на розкрій за мету береться умова, щоб відходів було найменше.

Задача 2.6. *Оптимальна балансова модель міжгалузевих зв'язків.*

Нехай кожна *i*-та з *n* галузей виготовляє $x_i,\ \ i = \overline{1,n}$, одиниць валової продукції. Нехай $A = (a_{ij}),\ \ i, j = \overline{1,n}$ - матриця прямих витрат [24]. Тоді міжгалузеві зв'язки зі скінченим вектором попиту $Y = (y_1, ... y_n)$ записують за допомогою рівняння $X = AX + Y$ або $X = BY$,

де $B = (E - A)^{-1}$ - матриця повних сукупних витрат.

Для відомих вартостей одиниці готового продукту кожної галузі $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ та обмежень на виробничі потужності кожної галузі $x_i \leq d_i,\ \ i = \overline{1,n}$ виникає задача: якими повинні бути обсяги випуску продукції $y_i,\ \ i = \overline{1,n}$, щоб одержати найбільший прибуток.

Дана задача є ЗЛП. Цільова функція математичної моделі (загальний прибуток повинен бути максимальним) є

$$f = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \to \max.$$

Система обмежень характеризує виробничі потужності кожної галузі:

$X = BY \leq D$, де $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}$ та $Y \geq 0$, або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} &b_{11} y_1 + ... + b_{1n} y_n \leq d_1, \\ &b_{n1} y_1 + ... + b_{nn} y_n \leq d_n, \\ &y_1 \geq 0,\ ...\ ,\ y_n \geq 0, \end{aligned}$$

де $b_{ij},\ i, j = \overline{1,n}$ - елементи матриці В повних сукупних витрат.

2.3. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 2.7. Фабрика виготовляє два види фарб: для внутрішніх (І) та зовнішніх (Е) робіт. Продукція обох видів поступає в оптовий продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідних продукти - А та В. Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 6 і 8 тонн відповідно. Витрати А та В на 1 тонну відповідних фарб наведені в та6лиці 2.1.

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу І ніколи не перевищує попиту на фарбу Е більше ніж на 1 тонну. Крім того, установлено, що попит на фарбу І ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни 1 т фарб складають:

- на фарбу Е - 3000 одиниць,
- на фарбу І - 2000 одиниць.

Таблиця 2.1

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів (т) на тонну фарби		Максимально можливий запас, т
	Фарба Е	Фарба І	
А	1	2	6
В	2	1	8

Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід (прибуток) від реалізації продукції був максимальним?

Розв'язання.

Змінні: Оскільки необхідно визначити об'єми виробництва кожного виду фарби, змінними моделі є:

x_1 — добовий об'єм виробництва фарби Е (т)

x_2 — добовий об'єм виробництва фарби І (т).

Цільова функція: Оскільки вартість 1т фарби Е становить 3000, то добовий дохід від її реалізації складе $3x_1$ одиниць на добу.

Аналогічно, дохід від реалізації X_i тонн фарби I складе $2x_2$ одиниць на добу.

У припущенні незалежності об'ємів збуту кожної із фарб загальний дохід складе: $z = 3x_1 + 2x_2$ одиниць на добу.

Таким чином, можна дати наступне математичне формулювання цільової функції: визначити такі значення x_1 і x_2, щоб отримати максимальну величину загального доходу.

Обмеження: При розв'язуванні задачі повинні бути враховані обмеження на витрати вихідних продуктів і попит на фарби, що виготовляються. Обмеження на витрати вихідних продуктів можна записати наступним чином:

$x_1 + 2x_2 \le 6$, (для А),

$2x_1 + x_2 \le 8$ (для В).

Обмеження на величину попиту на продукцію мають вигляд:

$x_2 - x_1 \le 1$,

$x_2 \le 2$.

Неявні (додаткові) обмеження полягають у тому, що об'єми виробництва продукції не можуть набувати від'ємних значень:

$x_2 \ge 0$, $x_1 \ge 0$.

Отже, математичну модель можна записати наступним чином:

Визначити добові об'єми виробництва (x_2 та x_1) фарб І та Е (т), при яких досягається: max $z = 3x_1 + 2x_2$,

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 \le 6,\\
&2x_1 + x_2 \le 8,\\
&x_2 - x_1 \le 1,\\
&x_2 \le 2,\\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Дана модель є лінійною, оскільки всі функції, що містяться в ній (обмеження й цільова функція), лінійні. Лінійність передбачає наявність у функції двох властивостей: пропорційності та адитивності.

1. *Пропорційність* означає, що внесок кожної змінної до цільової функції та загальний обсяг споживання ресурсів є *прямо пропорційними* величині цієї змінної. Якщо ж, наприклад, підприємство надасть покупцеві знижку, продаючи фарбу першого виду при обсязі закупівлі вище 2 т за ціною на 0,5 тис. гр. од. меншою, то питомий прибуток (коефіцієнт цільової функції при x_1) дорівнюватиме 3 тис. гр. од. при $x_1 < 2$ т і 2,5 тис. гр. од. при $x_1 \geq 2$. Пропорційність між прибутком підприємства та величиною x_1 у цьому випадку порушиться.

2. *Адитивність* полягає в тому, що цільова функція являє собою суму внесків від різних змінних. Аналогічно ліва частина кожного обмеження – це сума витрат, в якій кожна складова є пропорційною величині відповідної змінної. Якщо, наприклад, фірма виготовляє два конкуруючих товари, і збільшення збуту одного з них сприяє зниженню обсягів реалізації другого, то модель не матиме властивості адитивності.

2.4. Питання для самоперевірки

1. Що таке математична модель?
2. Наведіть види класифікацій математичних моделей, дайте їх коротку характеристику.
3. Які етапи побудови математичної моделі?
4. Скільки прийнято форм представлення математичної моделі задачі лінійного програмування? Чим вони відрізняються?
5. Що називається цільовою функцією і що вона виражає економічно?
6. Що називають розв’язком, оптимальним розв’язком ЗЛП?

7. Навіщо потрібні математичні моделі економічних задач, хто їх розробляє?
8. Яка суть задач математичного програмування?

2.5. Ключові поняття

Екстремальне значення
Задача лінійного програмування (ЗЛП)
Критерій ефективності
Оптимальний розв'язок ЗЛП
Математичне моделювання
Математична модель
Критерій оптимальності
Цільова функція ЗЛП

2.5. Навчальні завдання

В задачах №№ 2.1 – 2.4 скласти економіко-математичні моделі.

№ 2.1. Для виробництва двох видів виробів А та В підприємство використовує три види сировини. Інші дані наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Вид сировини	Витрати на 1 ц		Загальна кількість сировини, кг
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одиниці виробу, г. о.	30	410	-

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальний при умові, що виробів В потрібно випустити не менше, ніж виробів А.

№ 2.2. Раціон для харчування тварин на фермі складається з двох видів кормів K_1 та K_2. Один кілограм корму K_1 коштує 80 грошових одиниць (гр. од.) і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму K_2 коштує 10 гр. од. і містить: 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів. Скласти найдешевший раціон харчування, що забезпечує жирів не менше 6 од., білків не менше 9 од., вуглеводів не менше 8 од., нітратів не більше 16 од.

№ 2.3. Необхідно розпиляти 20 колод довжиною по 5 м кожна на бруски 2 й 3 м; при цьому повинні отримати рівну кількість брусків кожного розміру. Скласти такий план розпилу, при якому буде отримане максимальне число комплектів і всі колоди будуть розпиляні (в один комплект входить по одному бруску кожного розміру).

№ 2.4. На двох автоматичних лініях випускають апарати трьох типів. Інші умови задачі наведені в таблиці 2.3. Скласти такий план завантаження верстатів, щоб витрати були мінімальними, а завдання виконане не більше як за 10 діб.

2.7. Завдання для перевірки знань

Скласти математичну модель задачі.

№ 2.5. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виробництво одного вала робітник витрачає 3 год., однієї втулки – 2 год. Від реалізації одного вала підприємство одержує прибуток 800 тис. ум. гр. од., однієї втулки – 600 тис. ум. гр. од. Цех має випускати не менше 100 валів і 200 втулок. Скільки валів і втулок треба випустити, щоб одержати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу цеху становить 900 людино-годин?

Таблиця 2.3.

Тип апарату	Продуктивність праці ліній, шт. / добу		Витрати на роботу ліній, гр. од. / добу		План, шт.
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	50
В	6	5	100	200	40
З	8	2	300	400	50

№ 2.6. Будівельна дільниця кар’єру має екскаватори чотирьох типів, які повинні виконувати чотири види земляних робіт.

Продуктивність машин різного типу за кожним видом роботи наведено в таблиці 2.4. Розподілити екскаватори за видами робіт, забезпечивши максимальну продуктивність будівельної дільниці.

№ 2.7. Для виготовлення столів і шаф на підприємстві використовують два види деревини. Витрати сировини кожного виду (в м^3) на виготовлення кожного виду продукції та інші дані наведено в таблиці 2.5. Скільки столів і скільки шаф має виготовити підприємство щоб забезпечити найвищу рентабельність?

Таблиця 2.4

Тип екскаватора	Види робіт			
	1	2	3	4
1	1,2	0,9	1,0	1,4
2	0,6	0,8	0,2	1,0
3	1,0	0,6	0,6	1,2
4	0,5	0,6	0,1	0,7

Таблиця 2. 5

Вид сировини	Витрати на 1 виріб		Загальна кількість сировини, м^3
	стіл	шафа	
I	0,3	0,12	84
II	0,1	0,2	88
Прибуток від реалізації одиниці виробу, г. о.	12	15	-

№ 2.8. Для відгодівлі тварин на фермі щоденний раціон кожної тварини включає не менше 6 одиниць поживної речовини А, 8 одиниць поживної речовини Б та 12 одиниць поживної речовини В. Для відгодівлі можна використовувати три види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі корму та вартість 1 кг корму наведені в таблиці 2.6:

Таблиця 2.6

Поживні речовини Корм	А	Б	В
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2
Вартість 1 кг корму, г. о.	2	3	2,5

Скласти оптимальний план раціону найменшої вартості.

№ 2.9. Для виготовлення виробів А та В заводу потрібно 1,5 т сталі. Витрати сталі (у кг та гр. од.) на один виріб указані в наступній табл. 2.7. Визначити план випуску продукції, при якому може бути досягнутий найбільший прибуток.

Таблиця 2.7

Виріб	А	В
Витрати	3	5
Прибуток	4	5

№ 2.10. Ательє шиє жіночі спідниці і плаття з тканини двох видів. На одну спідницю витрачається тканини першого виду 1,5 кв. м, другого – 0,5 кв. м, а на пошив одного плаття втрачається тканини першого виду 1,6 кв. м, другого – 0,8 кв. м. Скільки платтів і спідниць треба пошити, щоб добитися найбільшого прибутку, якщо на складі є тканини першого виду 141 кв. м, другого виду 63 кв. м? При цьому відомо, що прибуток від реалізації одного плаття складає 10 гр. од., а однієї спідниці – 6 гр. од.

№ 2.11. Бригаді виділено для вирощення кормових культур 100 га пашні. Цю пашню передбачається зайняти кукурудзою і буряком, причому буряком вирішено зайняти не менше 40 га. Як повинна бути розподілена площа пашні за культурами, щоб отримати найбільшу кількість кормових одиниць? При цьому потрібно врахувати, що 1 ц кукурудзяного силосу містить 0,2 ц кормових од., 1 ц буряка – 0,26 ц кормових од. Також на обробку 1 га кукурудзяного поля необхідно витратити 38 люд.-год. праці механізаторів і 15 люд.-год. ручної праці, а на 1 га поля, яке зайняте буряком, відповідно 43 та 185 люд.-год. Очікуваний урожай кукурудзи – 500 ц/га, а буряка – 200 ц/га. Всього на вирощення кормових культур можна витратити 4000 люд.-год. праці механізаторів і 15000 люд.-год. ручної праці.

ТЕМА 3

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДО АНАЛІЗУ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА „ВИТРАТИ - ВИПУСК”. МАТРИЧНА МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ ГОСПОДАРСТВА.

Застосування матричної алгебри в економічних розрахунках, ілюстрування на прикладі балансових розрахунків застосування понять лінійної алгебри.

3.1. Теоретичні відомості

Розглянемо найпростішу модель „витрати - випуск” – замкнену і статичну, тобто економічну систему, що складається з *n* взаємопов’язаних галузей господарства. Продукція кожної галузі частково йде на зовнішнє споживання (кінцевий продукт), а частково використовується як сировина, напівфабрикати або інших засобів виробництва в інших галузях, зокрема і в даній. Цю частину продукції називають *виробничим споживанням*. Тому кожна з розглядуваних галузей є одночасно і виробником продукції (1-й стовпчик таблиці 3.1), та її споживачем (1-й рядок таблиці 3.1).

Позначимо через x_i валовий випуск продукції *i*-ї галузі за запланований період, y_i - кінцевий продукт, що йде на зовнішнє для розглядуваної системи споживання (засоби виробництва інших економічних систем, споживання населення, створення запасів тощо). Тоді різниця $x_i - y_i$ складає частину продукції *i*-ї галузі, що призначена для внутрівиробничого споживання. Надалі будемо вважати, що баланс складається не у натуральному, а у вартісному розрізі.

Відомо, що у міжгалузевому балансі дотримуються важливого принципу – єдності матеріального балансу, який представлений як єдність матеріального і вартісного складу національного доходу За характером показників модель міжгалузевого балансу умовно можна поділити на 4 квадранти. Основним є квадрант I. В ньому містяться міжгалузеві потоки засобів виробництва. За формою це

Таблиця 3.1

№ галузей		Споживання						Всього на внутрівиробниче споживання ($\sum_i x_{ik}$)	Кінцевий продукт (y_i) (товарна продукція)	Валовий випуск (x_i)
		1	2	...	k	…	n			
Виробництво	1	x_{11}	x_{12}		x_{1k}		x_{1n}	$\sum x_{1k}$	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2k}		x_{2n}	$\sum x_{2k}$	y_2	x_2
	...	**...**	**...**	**...**	**I** квадрант	**..**	**...**	**II** квадрант	**...**	**...**
	i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ik}		x_{in}	$\sum x_{ik}$	y_i	x_i
	...	**...**	**...**	**..**	**...**	**.**	**...**	**...**	**...**	**...**
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nk}		x_{nn}	$\sum x_{in}$	y_n	x_n
Дохід		Q_1	Q_2	**...**	**III** квадрант	**..**	Q_n	**IY** квадрант		
Всього виробничих витрат у k-ту галузь		$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	**...**	$\sum x_{ik}$		$\sum x_{in}$			

квадратна матриця порядку n x n, сума елементів якої за рядками або стовпчиками дорівнює витратам засобів виробництва у матеріальній сфері. Отже, квадрант I – проміжна продукція, показує розподіл матеріальних затрат за всіма виробничими галузями.

Квадрант II (товарна продукція) характеризує кінцеву продукцію, що спрямовується зі сфери виробництва на кінцеве споживання і нагромадження. У розгорнутій схемі балансу вона може конкретизуватися на особисте споживання населення, на суспільні потреби (освіта, наука, комунальне господарство, медицина тощо), на інвестиції, відновлення ресурсів, експорт і т.п. Отже, квадрант II характеризує галузеву структуру національного доходу.

Квадрант III також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу, який можна поділити окремо на галузі матеріального виробництва, розглядати як суму оплати праці й чистого доходу всіх галузей матеріального виробництва. Дані цього квадранта необхідні для глибокого економічного аналізу.

IY квадрант відображає кінцевий розподіл і споживання національного доходу. Він знаходиться на перетині стовпчиків кінцевої продукції і рядків національного доходу.

В цілому модель відображає баланси галузей матеріального виробництва, баланс всього суспільного продукту, баланси національного доходу, фінансовий баланс, баланс доходів і витрат населення. У балансі відображена єдність матеріально-речового і вартісного складу національного доходу.

Позначимо через x_{ik} частину продукції *i*-тої галузі, яка споживається *k*-тою галуззю, для забезпечення випуску її продукції в розмірі x_k. Очевидно, що величини, які розташовані у рядках таблиці, пов’язані наступними балансовими рівностями (їх можна записати як у натуральному, так і у вартісному вигляді):

$$\begin{cases} x_1-(x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n})=y_1 \\ x_2-(x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n})=y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ .x_n-(x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn})=y_n \end{cases} \qquad (3.1).$$

Одна із задач балансових досліджень полягає в тому, щоб на базі даних про виконання балансу за попередній період визначити вихідні дані на плановий період.

Позначимо через x_{ik}', y_i' і т.д. дані, що відносяться до попереднього періоду, а x_{ik}, y_i - аналогічні дані для планового періоду. Балансові рівності (3.1) повинні виконуватися як у попередньому, пройденому, так і у плановому періоді.

Сукупність значень y_1, y_2, ..., y_n, яка характеризує випуск кінцевого продукту, назвемо асортиментним вектором

$$\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (3.2),$$

а сукупність значень x_1, x_2, ..., x_n, які визначають валовий випуск всіх галузей, - вектор-планом

$$\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3.3).$$

Залежність між векторами (3.2) і (3.3) визначається балансовими рівностями (3.1). Але вони не дають можливості визначити за даним, наприклад, вектором $\bar{Y}$ необхідний для його забезпечення вектор-план $\bar{X}$, бо, крім шуканих невідомих x_k, містять n^2 невідомих x_{ik}, які в свою чергу залежать від x_k. Тому перетворимо ці рівності.

Розрахуємо величини $a_{ik} = \dfrac{x_{ik}}{x_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ – коефіцієнти *прямих витрат*, або *технологічні коефіцієнти*, які визначають витрати продукції *i*-ї галузі, що безпосередньо витрачаються як засоби виробництва або використовуються k-ю галуззю на виготовлення одиниці її продукції, і залежать головне від технології виробництва в цій k-й галузі. Вони є основним елементом матричної моделі, що відображає технологічні зв’язки і матеріальні потреби між виробничими та споживчими галузями. Прямими матеріальними затратами називаються затрати, які обумовлені на останньому етапі виробництва:

$$Z_{\text{повн}} = Z_{\text{непрям}} + Z_{\text{прям.}}$$

Їх можна наближено вважати сталими в деякому проміжку часу, який охоплює як попередній, так і плановий період, тобто

$$\frac{x'_{ik}}{x'_k} = \frac{x_{ik}}{x_k} = a_{ik} = const \qquad (3.4).$$

Тоді маємо: $$x_{ik} = a_{ik} x_k \qquad (3.5),$$

тобто витрати *i*-тої галузі в *k*-ту галузь пропорційні її валовому випуску, або, інакше, залежать лінійно від валового випуску x_k. Тому рівність

(3.5) називають умовою лінійності прямих витрат.

Матрицю коефіцієнтів прямих витрат a_{ik} $(a_{ik} \geq 0)$, яка є невід'ємною ($A \geq 0$),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають *матрицею витрат* (або *структурною, технологічною* матрицею).

Заданням матриці А визначаються всі внутрішні взаємозв'язки між виробництвом і споживанням, що записані у вищенаведеній таблиці. Матриця А надає також інформацію про величину зміни у рівнях валового випуску, спричинених змінами рівнів кінцевої продукції. Деякі її елементи можуть бути нулями. У деяких випадках наявність нулів у матриці А дозволяє розбити економічну систему на підгрупи галузей, в яких виробництво може здійснюватися більш або менш незалежно.

Підставляючи значення $x_{ik} = a_{ik}x_k$ (3.5) в усі рівняння системи (3.1), отримаємо лінійну балансову модель, що характеризує баланс витрат-випуску продукції відповідно до таблиці:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_n) = y_1 \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ .x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = y_n \end{cases} \qquad (3.6).$$

Систему (3.6) можна записати як матричне рівняння $E \cdot \overline{X} - A \cdot \overline{X} = \overline{Y}$, або

$$(E - A) \cdot \overline{X} = \overline{Y} \qquad (3.6'),$$

або $\overline{X} = A\overline{X} + \overline{Y}$, (3.6''),

де Е – одинична матриця. Ці рівняння називають *статичними* *рівняннями Леонтьєва міжгалузевого балансу*.

Розв'язувати балансові рівняння можна і за допомогою обернених матриць.

Матриця А називається *продуктивною* (*цілком продуктивною*), якщо матриця $(E-A)^{-1}$ не має від'ємних елементів, де Е – одинична матриця. Для того щоб модель була продуктивною, необхідно і достатньо, щоб власне число $\lambda(A)<1$, де λ - невід'ємний корінь характеристичного рівняння $|A-\lambda E|=0$. На практиці використовують також просту достатню умову продуктивності моделі: $\sum a_{ij}<1$ для будь-якого i, j.

Дані моделі можуть застосовуватися як на рівні галузей, так і на рівні окремого підприємства. Вони являють:

1) матричну модель господарства в цілому (держави, республіки, області, району і т.п.);

2) матричну модель міжрегіонального балансу (наприклад, південний регіон країни);

3) балансові моделі на рівні окремих підприємств (матричні моделі тех-пром-фін-плану).

Модель (3.6) дозволяє за умов, виходячи з варіантів, визначити:

а) якщо задано рівень валової продукції (вектор), всі технологічні коефіцієнти для виробничих і споживчих галузей;

б) коли задано вектор Y кінцевої продукції, розміри відповідних значень вектора валового продукту Х=$(E-A)^{-1}Y=B^{-1}Y$ і всі технологічні коефіцієнти;

в) якщо відомі технологічні коефіцієнти, виробничу собівартість випуску кожного виду продукції $S_i=\dfrac{\sum B_{iij}}{\Delta B}$, де B_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів матриці $B^{-1}=(E-A)^{-1}$, $\Delta B=\det B$ - визначник (детермінант) матриці B^{-1}, г) матрицю повних сукупних (внутрівиробничих) витрат $B^{-1} = (E - A)^{-1}$; ця матриця надає інформацію про те, яким способом вектор зовнішнього кінцевого попиту $\bar{Y}$ перераховується на вектор валового випуску $\bar{X}$;

д) виробничу програму кожного із підприємств (галузей) за умовою

$$x_{ik} = a_{ik} x_k; \qquad (3.5)$$

е) коефіцієнти непрямих витрат як різницю (в матричній формі)

$$B^{-1} - A = (E - A)^{-1} - A;$$

є) матрицю $C = B - E$ повних внутрішніх витрат;

ж) матрицю $C' = C - A$ побічних витрат;

з) дослідити на продуктивність матрицю А.

3. 2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 3.1. Нехай виконання балансу за попередній період характеризується даними, що занесені в наступну таблицю 3.2. Розрахувати за даними цієї таблиці коефіцієнти прямих витрат.

Розв'язання. Розрахуємо за даними цієї таблиці коефіцієнти прямих витрат:

Таблиця 3.2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">№ галузей</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Всього витрат</td><td rowspan="2">Кінцевий продукт</td><td rowspan="2">Валовий випуск</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">виробництво</td><td>1</td><td>0,2
100</td><td>0,4
160</td><td>260</td><td>240</td><td>500</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,55
275</td><td>0,1
40</td><td>315</td><td>85</td><td>400</td></tr>
<tr><td colspan="2">Всього витрат в k-у галузь</td><td>375</td><td>200</td><td>575
575</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0{,}2; \; a_{12} = \frac{160}{400} = 0{,}4; \; a_{21} = \frac{275}{500} = 0{,}55; \; a_{22} = \frac{40}{400} = 0{,}1.$$

Ці коефіцієнти записані в правих верхніх кутах відповідних кліток. Тепер можна записати лінійну балансову модель (2.6), що відповідає таблиці-умові:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 = y_1 \\ x_2 - 0{,}55x_1 - 0{,}1x_2 = y_2 \end{cases}.$$

Ця система двох рівнянь може бути використана для знаходження x_1 та x_2 при даних значеннях y_1 та y_2, для дослідження впливу на валовий випуск будь-яких змін в асортименті кінцевого продукту і т.д.

Так, при $y_1 = 240$ та $y_2 = 85$ маємо $x_1 = 500$ та $x_2 = 400$; при $y_1 = 480$, $y_2 = 170$ отримаємо $x_1 = 1000$, $x_2 = 800$ і т.д.

Задача 3.2. Побудувати матричну модель тригалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю прямих матеріальних витрат А і кінцеву продукцію Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}; \ \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Додатково припустимо, що дохід поділяється на чистий прибуток *u* та оплату праці *v* у співвідношенні 3:2.

Розв'язання. Перевіримо модель на продуктивність, оскільки вихідний матеріал береться зі звітів, є наближеним або навіть має випадковий характер. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 0.1-\lambda & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2-\lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

, або $\lambda^3 - 0.4\lambda^2 - 0.04\lambda - 0.018 = 0$, $\lambda = 0.6.$

отже, модель є продуктивною.

Для заповнення таблиці міжгалузевого балансу послідовно виконуємо такі обчислення:

А) складемо систему рівнянь (3.6'') для визначення валових випусків x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.3x_3 + 120 = x_1, \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 180 = x_2, \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 50 = x_3. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 0.9x_1 - 0.3x_3 = 120, \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.1x_3 = 180, \\ -0.2x_1 - 0.3x_2 + 0.9x_3 = 50. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь за методом Жордана–Гаусса, отримаємо: $x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 200$.

Б) за формулою (3.5) $x_{ik} = a_{ik} x_k$ обчислюємо міжгалузеві потоки:

$$x_{11} = 0.1*200 = 20,\ x_{12} = 0*300 = 0,\quad x_{13} = 0.3*200 = 60,$$
$$x_{21} = 0.2*200 = 40,\ x_{22} = 0.2*300 = 60,\quad x_{23} = 0.1*200 = 20,$$
$$x_{31} = 0.2*200 = 40,\ x_{32} = 0.3*300 = 90,\quad x_{33} = 0.1*200 = 20.$$

Ці дані занесемо у квадрант І матричної моделі (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Виробничі галузі	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	20	0	60	120	200
2	40	60	20	180	300
3	40	90	20	50	200
Оплата праці	40	60	40	$\sum v_i = 140$	-
Чистий дохід	60	90	60	$\sum u_i = 210$	-
Валова продукція	200	300	200	-	700

В) обчислимо величини, що входять у ІІІ квадрант, для чого використаємо співвідношення між u та v. Так як $u_1 + v_1 = 200 - (20 + 40 + 40) = 100$ і $u : v = 3 : 2$,

то на одну частину доходу припадає 100 / 5 = 20 одиниць, отже,

$$u_1 = 3*20 = 60 \text{ од.},\ v_1 = 2*20 = 40 \text{ од.}$$

Аналогічно $u_2 + v_2 = 300 - (0 + 60 + 90) = 150$,

$u_2 = 3*30 = 90$ од., $v_1 = 2*30 = 60$ од., $u_3 + v_3 = 200 - (60 + 20 + 20) = 100$,

$u_3 = 3*20 = 60$ од., $v_3 = 2*20 = 40$ од.

Примітка. За допомогою моделі Леонтьєва можна розрахувати умовні ціни (вартості), які склалися в результаті міжгалузевих зв'язків. Формально система рівнянь має вигляд

$$EZ - A^* \cdot Z = W, \qquad (3.6^*)$$

де A^* - матриця, що транспонована до А. У розгорнутому вигляді система (3.6*) запишеться так: $z_i - \sum a_{ij} z_i = w_j, \quad j = 1,\dots,n.$ Величину $z_i - \sum a_{ij} z_i$ можна інтерпретувати як суму деяких витрат на одиницю продукції, а праву частину w_j - як чистий прибуток від випуску одиниці продукції j-ї галузі або добавлену вартість, що припадає на одиницю продукції j-ї галузі. Тому z_j можна інтерпретувати як ціну одиниці продукції j-ї галузі. Чистий прибуток w_j можна обчислити як результат ділення чистого прибутку галузі на її обсяг: $w_j = \dfrac{Q_j}{X_j}$.

У даній задачі $w_1 = \dfrac{40+60}{200} = 0.5$, $w_2 = \dfrac{60+90}{300} = 0.5$, $w_3 = \dfrac{40+60}{200} = 0.5$.

Система рівнянь для розрахунків міжгалузевих цін матиме вигляд:

$$\begin{cases} z_1 - (0.1z_1 + 0.1z_2 + 0.2z_3) = 0.5, \\ z_2 - (0.2z_1 + 0.3z_3) = 0.5, \\ z_3 - (0.3z_1 + 0.1z_2 + 0.1z_3) = 0.5, \end{cases}$$

звідки отримаємо міжгалузеві ціни: для I галузі – 0,36, для II – 0,4, для III – 0,4.

Відзначимо, що систему рівнянь можна розв'язати й за допомогою комп'ютера.

Задача 3.3. Нехай матриця А має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{вектор } Y = (17;7;5;12).$$

Знайти: а) матрицю повних витрат $(E-A)^{-1}$; б) вектор валового випуску X; в) виробничу собівартість S_1, S_2, S_3, S_4 кожного виду продукції.

Розв'язання. 1) Знайдемо матрицю

$$B^{-1}=(E-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix},$$

$$B=(E-A)=\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta B = 1\cdot B_{11} + (-0.2)\cdot B_{12} + (-0.3)\cdot B_{13} + (-0.1)\cdot B_{14}.$$

$$B_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix}=0.896;\quad B_{12}=-\begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix}=0.324;$$

$$B_{13}=\begin{vmatrix} -0.3 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}=0.276;\quad B_{14}=-\begin{vmatrix} -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 1 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 \end{vmatrix}=0.446;$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix}=0.304;\quad B_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix}=0.864;$$

$$B_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}=0.345;\quad B_{24}=\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 1 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 \end{vmatrix}=0.277;$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ 1 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix}=0.362;\quad B_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix}=0.288;$$

$$B_{33}=\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.1\\ -0.3 & 1 & 0\\ -0.4 & -0.1 & 1\end{vmatrix}=0.897;\quad B_{34}=-\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.3\\ -0.3 & 1 & -0.2\\ -0.4 & -0.1 & -0.2\end{vmatrix}=0.353;$$

$$B_{41}=-\begin{vmatrix}-0.2 & -0.3 & -0.1\\ 1 & -0.2 & 0\\ -0.3 & 1 & -0.21\end{vmatrix}=0.162;\quad B_{42}=\begin{vmatrix}1 & -0.3 & -0.1\\ -0.3 & -0.2 & 0\\ -0.1 & 1 & -0.2\end{vmatrix}=0.09;$$

$$B_{43}=-\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.1\\ -0.3 & 1 & 0\\ -0.1 & -0.3 & -0.2\end{vmatrix}=0.207;\quad B_{44}=\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.3\\ -0.3 & 1 & -0.2\\ -0.1 & -0.3 & 1\end{vmatrix}=0.819;$$

$$\Delta B=1\cdot 0.896-0.2\cdot 0.324-0.3\cdot 0.276-0.1\cdot 0.446=0.7038;$$

$$B^{-1}=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0.7038}\begin{pmatrix}0.896 & 0.304 & 0.362 & 0.162\\ 0.324 & 0.864 & 0.288 & 0.09\\ 0.276 & 0.345 & 0.897 & 0.207\\ 0.446 & 0.277 & 0.353 & 0.819\end{pmatrix}.$$

2) Вектор валового випуску

$$X=(E-A)^{-1}Y=\frac{1}{0.7038}\begin{pmatrix}0.896 & 0.304 & 0.362 & 0.162\\ 0.324 & 0.864 & 0.288 & 0.09\\ 0.276 & 0.345 & 0.897 & 0.207\\ 0.446 & 0.277 & 0.353 & 0.819\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\ 7\\ 5\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\ 20\\ 20\\ 30\end{pmatrix};$$

3) Знайдемо виробничу собівартість $S_i=\dfrac{\sum B_{ij}}{\Delta B}$:

$$S_1=\frac{B_{11}+B_{12}+B_{13}+B_{14}}{\Delta B}=2.76;\quad S_2=\frac{B_{21}+B_{22}+B_{23}+B_{24}}{\Delta B}=2.54;$$

$$S_3=\frac{B_{31}+B_{32}+B_{33}+B_{34}}{\Delta B}=2.70;\quad S_4=\frac{B_{41}+B_{42}+B_{43}+B_{44}}{\Delta B}=1.82.$$

3. 3. Питання для самоперевірки

1. Поясніть схему балансу витрат-випуску продукції.

2. Що таке прямі витрати, асортиментний вектор, вектор-план?

3. Чим визначається лінійність балансової моделі?

4. Запишіть систему рівнянь, яка характеризує лінійну балансову модель. В розгорнутій формі і у вигляді матричного рівняння.

5. В чому суть коефіцієнтів прямих, повних та непрямих витрат?

6. Як визначити необхідний валовий випуск кожної галузі за даним асортиментним вектором?

3. 4. Ключові поняття

Балансова модель
Валовий випуск продукції
Вартість
Вектор асортиментний
Вектор-план
Виробнича собівартість
Витрати
Власне число
Добавлена вартість
Коефіцієнти витрат
Матриця витрат
Матриця повних витрат
Матриця продуктивна
Матриця структурна, технологічна
Міжгалузеві ціни
Модель Леонтьєва
Модель продуктивна
Непрямі витрати
Прямі витрати
Технологічні коефіцієнти
Характеристичне рівняння
Чистий прибуток

3.5. Навчальні завдання

№ 3.1. Перевірити на продуктивність модель, якщо матриці прямих витрат задаються таблицями:

а) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.05 & 0.1 & 0.005 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а), б) продуктивна; в) непродуктивна.

№ 3.2. Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких випускає один вид продукції. В таблиці 3.4 вказані витратні коефіцієнти (прямі витрати) a_{ik} одиниць продукції *i*-го цеху, що використовуються як „сировина” (проміжний продукт) для випуску продукції *k*-го цеху, кількість одиниць y_i продукції *i*-го цеху, що призначена для реалізації (кінцевий продукт). Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) валовий випуск (план) для кожного цеху; 3) виробничу програму цехів; 4) коефіцієнти непрямих витрат.

Таблиця 3.4

Цехи	Прямі витрати a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1		0,2		200
2	0,2		0,1	100
3			0,2	300

№ 3.3. Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3.6. Завдання для перевірки знань

№ 3.4. Перевірити на продуктивність модель, якщо матриці прямих витрат задаються таблицями: а) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.01 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.01 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) продуктивна, б), в) не продуктивна.

№ 3.5. Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З КІЛЬКОМА ЗМІННИМИ

Розглядається теорія знаходження загального, частинного і базисного розв'язку системи лінійних рівнянь.

4.1. Теоретичні відомості

4.1.1.Сумісність системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі

Нехай задана система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими (змінними)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1).$$

Матриця, що складається з коефіцієнтів при невідомих, називається *основною матрицею* або *матрицею системи* (4.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & ,,, & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці А справа (або зліва) приписати стовпчик вільних членів, то отримаємо *розширену матрицю*

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & ,,, & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ранг розширеної матриці В або дорівнює рангу матриці системи А, або на одиницю більший за нього (*r* або *r+1*).

При розв'язуванні системи (4.1) можливі наступні випадки:

1. Система сумісна, має єдиний розв'язок.
2. Система невизначена, має безліч розв'язків.
3. Система несумісна, не має розв'язків.

Сумісність системи (4.1) встановлюється теоремою Кронекера – Капеллі:

Теорема Кронекера – Капеллі. Система лінійних рівнянь (4.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(B)$.

Очевидно, що $r(A) \le r(B)$.

Теорема Кронекера – Капеллі тільки встановлює загальну умову сумісності системи лінійних рівнянь (4.1) і стверджує існування розв'язку, але не надає способів знаходження всіх розв'язків цієї системи у разі її сумісності.

Теорема (критерій визначеності системи). Для того щоб сумісна система (4.1) була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих (змінних), що входять у цю систему.

4.1.2. Загальний, частинний, базисний розв'язок системи лінійних рівнянь

Нехай $r(A) = r(B) = r$. Тоді система (4.1) сумісна і містить r лінійно незалежних рівнянь. Нехай перші r рівнянь системи (4.1) є лінійно незалежними, а решта *m-r* рівнянь системи є лінійними комбінаціями перших r її рівнянь. Тоді розв'язок перших r рівнянь є і розв'язком решта *m-r* рівнянь. Тому для розв'язування системи залишають r лінійно незалежних рівнянь системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (4.2).$$

Залишимо у лівих частинах які-небудь r невідомих (наприклад, перших r невідомих), а решта перенесемо вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2,r+1}x_{r+0} + \ldots + a_{2n}x_n), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (4.3).$$

Невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_r$, що залишені зліва, називаються ***базисними*** змінними (невідомими), а перенесені вправо $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - ***вільними***. Зазначимо, що в число базисних невідомих потрібно вводити такі невідомі, коефіцієнти при яких утворюють відмінний від нуля визначник. Розв'язавши (4.3) будь-яким способом відносно базисних змінних, отримаємо систему

$$\begin{cases} x_1 = p_1 - q_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - p_{1n}x_n \\ x_2 = p_2 - q_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - p_{2n}x_n \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_r = p_r - q_{rr}x_{r+1} - \ldots - p_{rn}x_n \end{cases} \qquad (4.4).$$

Її розв'язок називають ***загальним розв'язком***. Він виражає базисні невідомі через вільні невідомі. Надаючи вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ довільних числових значень, отримаємо відповідні числові значення для базисних невідомих системи (4.4). Отримані таким чином числові значення всіх невідомих називаються ***частинними розв'язками*** системи (4.4), а, отже, і системи (4.1). Крім того, із загального розв'язку системи лінійних рівнянь можна отримати довільний розв'язок системи фіксацією значень вільних невідомих.

Якщо вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ прирівняти до нуля, то отримуємо частинний розв’язок $x_1 = p_1, x_2 = p_2, \ldots, x_{rr} = p_r, x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, який називається ***базисним розв’язком*** системи (4.1).

Зауваження. Якщо $r = n$, тобто ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих, то система (4.1) має єдиний розв’язок. Якщо $r < n$, тобто ранг менший кількості невідомих, то система (4.1) має безліч розв’язків.

4.1.3. Розв’язування системи лінійних рівнянь методом Жордана–Гаусса.

Суть методу: послідовне виключення невідомих зводить дану систему до еквівалентної їй трикутної системи (прямий хід виключень), а з утвореної трикутної системи невідомі знаходять послідовними підстановками (обернений хід). Часто в методі Гаусса замість того, щоб виконувати елементарні перетворення над рівняннями системи, виконують ці перетворення з рядками розширеної матриці системи, яка складається з коефіцієнтів і вільних членів системи.

Метод послідовного виключення невідомих з усіх рівнянь системи, крім одного, називають методом Жордана - Гаусса. Цей метод є деякою модифікацією методу Гаусса. Тоді усі обчислення зручніше виконувати, записуючи всі системи у вигляді матриць-таблиць. У таблиці вибирають ***розв’язувальний (ключовий, напрямний)*** елемент a_{ij}, який обводять. Відповідний *i*-тий рядок та *j*-тий стовпчик називають теж розв’язувальними. Якщо в якомусь рядку або стовпці таблиці вже було взято розв’язувальний елемент, більше в цьому рядку або стовпці його брати не можна. Не можна його брати й у стовпці вільних членів b_{ij}.

Алгоритм перетворень Жордана-Гаусса, тобто перехід від однієї таблиці до іншої, полягає у наступному:

1. Усі елементи ключового рядка першої таблиці ділимо на ключовий елемент $a_{ij} \neq 0$, і результат записуємо у відповідний *i*-тий

рядок нової таблиці.

2. Усі елементи ключового стовпчика, крім a_{ij}, замінюємо нулями.

3. Решту елементів обчислюємо за правилом „прямокутника”: в першій матриці мислено виділяється прямокутник, одна з вершин якого збігається із замінюваним елементом (a_{ij}), на місце якого обчислюється новий, а протилежна вершина – з ключовим елементом (a_{kl}); дві інші вершини містяться відповідно в ключовому рядку і ключовому стовпці.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{kj} & \cdots & \boxed{a_{kl}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{il} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Тоді відповідний замінюваному елемент другої матриці-таблиці знаходиться за формулою:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}},$$

або, у мнемонічному вигляді:

$$'\textit{відповідний елемент}' = '\textit{замінюваний елемент}' - \frac{'\textit{добуток елементів іншої діагоналі}'}{\boxed{'\textit{напрямний елемент}'}}.$$

При цьому розрахунок проводиться за рядками.

Правильність обчислень можна (і треба) контролювати. Для цього записують контрольний стовпчик К. Елементи кожного рядка підсумовуються і знайдена сума порівнюється з елементом контрольного стовпчика. Якщо ці величини збігаються, то елементи *i*-го рядка обчислені правильно.

4.2. *Методичні вказівки до розв'язування типових задач*

Задача 4.1. Розв'язати за методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язки):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 = . \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи має такий вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -3 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I\cdot 3 + II \\ I\cdot 1 + III \end{array} \sim$$

(домножуємо перший рядок на 3 і додаємо до другого рядка, домножуємо перший рядок на 1 і додаємо до третього рядка):

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II\cdot(-1) + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система зведена до трикутного вигляду. Рядок, який містить лише нулі, можна відкинути. Отримуємо систему трапецієподібного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ 11x_2 - 2x_3 = 46. \end{cases}$$

Оскільки ранги основної і розширеної матриць рівні (r=2), то система сумісна. Оскільки невідомих більше, ніж ранг основної матриці, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків. Знайдемо її загальний розв'язок. Покладемо x_2 вільною змінною, а x_1 та x_3 - залежними:

$$\begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 - x_3, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{74 - 17x_2}{2}, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв'язок системи ($\frac{74-17x_2}{2}$, x_2, $\frac{11x_2-46}{2}$), де $x_2 \in R$.

Зауваження. Якщо вільною змінною взяти x_3, то $x_1 = \frac{16-17x_3}{11}$, $x_2 = \frac{46+2x_3}{11}$, і загальний розв'язок системи буде ($\frac{16-17x_3}{11}$, $\frac{46+2x_3}{11}$, x_3), де $x_3 \in R$.

Задача 4.2. Знайти невід'ємний базисний розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо до базису, наприклад, x_1. Для цього перепишемо систему у вигляді системи нуль-рівнянь і знайдемо найменше відношення вільного члена до ***додатного*** коефіцієнта при x_1 у кожному рівнянні, щоб з того рівняння знайти x_1:

$$\begin{cases} 0 = 10 - (2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4), \\ 0 = 15 - (x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4), \end{cases}$$

$\min\left\{\frac{10}{2}; \frac{15}{1}\right\} = 5$, тому з першого рівняння знайдемо x_1: $x_1 = 5 - (-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)$ і підставимо отримане значення у друге рівняння (виключимо з другого рівняння x_1):

$$0 = 15 - (5 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_2 - x_3 + 4x_4), \quad 0 = 10 - (\frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4),$$

отже, отримуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - (\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4), \\ 0 = 10 - (\frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4). \end{cases}$$

Введемо до базису іншу змінну, наприклад, x_2: $\min\left\{\frac{5}{1/2};\frac{10}{5/2}\right\}=\{10;4\}=4$, тому x_2 знайдемо з другого рівняння і підставимо знайдене значення у перше рівняння, щоб виключити з нього x_2:

$$x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4);$$

$$x_1 = 5 - (-\frac{1}{2}(4 + 3x_3 - \frac{9}{5}x_4) + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4), \quad x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4).$$

Отримали систему: $\begin{cases} x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4), \\ x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4). \end{cases}$

Загальний розв'язок з додатними вільними членами $\begin{cases} x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4), \\ x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4). \end{cases}$

Невід'ємний базисний розв'язок: $x_1 = 7; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = 0$, або у вигляді точки: (7; 4; 0; 0).

4.3. Питання для самоперевірки

1. Як проводиться дослідження системи за допомогою таблиць Гаусса?
2. Скільки ітерацій потрібно зробити, щоб звести систему до одиничного базису?
3. Як визначити ранг матриці?
4. Які особливості методу Жордана-Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь (СЛР)?
5. Що називається рангом системи? Чи існує таке поняття для несумісної системи?
6. Коли система *m* рівнянь з *n* невідомими буде визначеною?

Невизначеною?

7. Що називається загальним розв’язком системи?
8. Що називається базисним розв’язком системи?
9. Скільки може бути базисних розв’язків у системи?
10. В чому суть поняття „вільні” невідомі?
11. Яке рівняння називається нуль-рівнянням?
12. Як знайти частинний розв’язок СЛР?

4. 4. Ключові поняття

Алгоритм методу Жордана-Гаусса	Правило прямокутника
Базисні та вільні змінні (невідомі)	Ранг матриці
Головна матриця системи рівнянь	Розв’язок СЛР базисний
Ітерація	Розв’язок СЛР загальний
Контрольний стовпчик	Розв’язок СЛР частинний
Критерій визначеності системи	Розв’язувальний (ключовий) елемент
Нуль-рівняння	Розв’язувальний рядок (стовпчик)
Одиничний базис	Розширена матриця
Однорідна СЛР	Теорема Кронекера-Капеллі

4.5. Навчальні завдання

№ 4.1. Розв’язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв’язок):

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2; \\ 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -3; \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв’язок

$(4 - 13x_4 + 36x_5;\ 1 - 3x_4 + 7x_5;\ 1 - 2x_4 + 3x_5;\ x_4; x_5)$.

№ 4.2. Розв’язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити розширену матрицю системи, знайти загальний, який-небудь частинний і базисний розв’язок):

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3; \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

Відповідь: загальний розв'язок

а) $(-\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4;\ \frac{1}{7} - \frac{13}{7}x_4;\ \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4; x_4)$.

б) $(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{16}x_4;\ -\frac{11}{8}x_4)$.

№ 4.3. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 28; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 20. \end{cases}$$

1) Знайти загальний розв'язок системи з базисними змінними $x_1; x_2; x_3$ при додатних вільних членах і відповідний невід'ємний базисний розв'язок.

2) Знайти інший невід'ємний базисний розв'язок системи, увівши попередньо в число базисних змінних x_4.

Відповідь: (2; 6; 10; 0; 0); (5; 0; 4; 3; 0).

№4.4. Знайти два різні невід'ємні базисні розв'язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 = 26; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 25. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 15. \end{cases}$

Відповідь: а) (8; 9; 0; 0; 0); (17; 0; 0; 9; 0);

б) $(\frac{65}{7}; \frac{20}{7}; 0; 0)$; (7; 0; 0; 4).

4.6. Завдання для перевірки знань

№ 4.5. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 1x_4 = -2; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5; \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки:

а) $(x_1; x_2; 6 - 15x_1 + 10x_2;\ -7 + 18x_1 - 12x_2)$,

б) $(2x_2 + x_4; x_{2;} 1; x_4)$.

№ 4.6. Перетворити розширену матрицю, знайти методом Гаусса загальний, частинний і базисний розв'язок систем рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2; \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки: а) $(6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4;\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4)$,

б) $(-16 + x_3 + x_4 + 5x_5;\ 23 - 2x_{3;} - 2x_4 - 6x_5;\ x_3; x_4; x_5)$.

№ 4.7. Дослідити на сумісність та визначеність систему лінійних рівнянь і знайти її загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

Відповідь: а) $(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5; -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4; x_3; x_4; x_5)$;

б) $(x_3 - 2x_4 + 1; 2x_3 + x_4 + 2; x_3; x_4)$.

№ 4.8. Знайти два різні невід'ємні базисні розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 18; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_5 = 24; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 26. \end{cases}$$

Відповідь: (4; 6; 8; 0; 0); (0; 2; 4; 2; 0).

ТЕМА 5

ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

Застосування геометричного способу розв'язування систем лінійних нерівностей.

5.1. Теоретичні відомості

Попередньо розглянемо деякі поняття, що важливі для геометричного способу розв'язування задач лінійного програмування.

Множина точок називається ***опуклою***, якщо вона разом з будь-якими двома точками містить відрізок, що з'єднує ці точки. Найпростішими прикладами випуклих множин можуть служити: відрізок, трикутник, квадрат, деякі геометричні тіла, наприклад, піраміда, куб і т.д. Відзначимо, що опуклий многокутник має ту властивість, що весь розташований по один бік кожної з прямих, що беруть участь у її утворенні.

Очевидно, що всяка точка опуклого многокутника, що лежить всередині нього або на одній із сторін, за виключенням вершин, може бути представлена як опукла лінійна комбінація інших точок цього многокутника. Навпаки, вершини многокутника не можна представити у вигляді опуклої комбінації двох яких-небудь інших точок. В цьому розумінні вершини многокутника називають ***екстремальними*** точками.

Опуклий многокутник можна задати аналітично, за допомогою системи лінійних нерівностей.

Лінійне рівняння з трьома змінними $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ визначає в просторі деяку площину, яка розсікає весь простір на два півпростори. Тому нерівність $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$ визначає один із півпросторів, до якого належить також і сама гранична площина. В загальному випадку, коли система нерівностей сумісна, простір розв'язків утворює деякий опуклий многогранник - многогранник розв’язків. Частинним випадком його можуть бути: окрема грань, ребро або точка. Останнє має місце, коли система нерівностей має один-єдиний розв’язок. Подальші узагальнення приводять до розгляду *m* лінійних нерівностей з *n* невідомими. Кожне рівняння $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ ... +a_{in}x_n=b_i$ є рівнянням деякої гіперплощини в *n*-вимірному просторі, яка якби розсікає весь простір на два півпростори.

Розглянемо детальніше системи лінійних нерівностей і покажемо, що розв’язування їх тісно пов’язане з поняттями опуклого многокутника.

5.2. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача 5.1. Розглянемо нерівність з однією змінною x_1, наприклад $x_1 \le 5$. Якщо на площині провести пряму $x_1 = 5$, то вона розділить всю площину на дві частини - півплощини: в одній із них, а саме зліва від прямої $x_1 = 5$, лежать точки, абсциси яких менше від 5, а справа від прямої - точки, абсциси яких більше від 5.

Отже, обмеження-нерівність $x_1 \le 5$ геометрично визначає півплощину (Рис.5.1), яка розташована зліва від межі - прямої $x_1 = 5$.

Задача 5.2. Розглянемо нерівність з двома змінними: $3x_1 + 5x_2 \le 15$. Побудуємо прямую лінію $3x_1 + 5x_2 = 15$. Нерівність $3x_1 + 5x_2 < 15$ являє собою сукупність всіх точок площини, що лежать нижче від прямої, тобто в заштрихованій частині **(**Рис. 5.2).

Щоб легше було визначити, яку саме півплощину визначає нерівність, потрібно в ліву частину нерівності підставити координати довільної точки, наприклад, початку координат, тобто $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

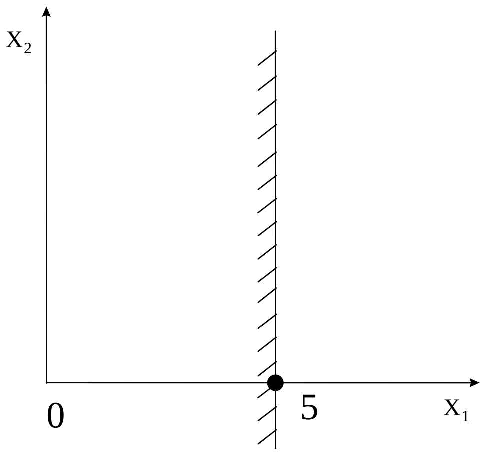


Рис. 5.1

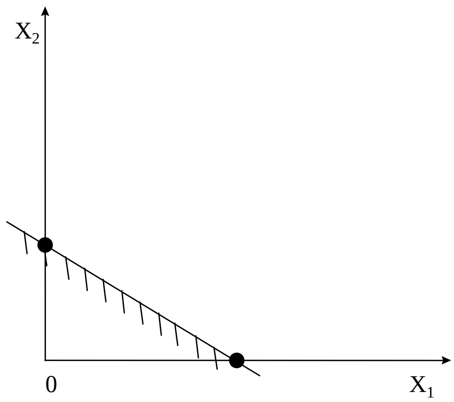


Рис. 5.2

Якщо нерівність задовольняється, то вона визначає ту півплощину, в якій лежить початок координат, в противному випадку - іншу півплощину (її позначають штрихуванням або стрілками).

Користуючись геометричними міркуваннями, можна знайти можливі розв’язки системи нерівностей.

Задача 5.3. Знайти область допустимих розв’язків (ОДР) системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

***Розв’язання*.** Кожна з нерівностей системи визначає півплощину, відмічену на рис. 5.3 штрихами.

Отже, перший крок при використанні графічного методу для розв’язування систем нерівностей полягає в геометричному представленні допустимих розв’язків, тобто побудові області (допустимих) розв’язків (ОДР), в якій одночасно задовольняються всі обмеження моделі. Шукана область показана на рис. 4.3. Умови невід’ємності змінних $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$ обмежують область їхніх допустимих значень першим квадрантом.

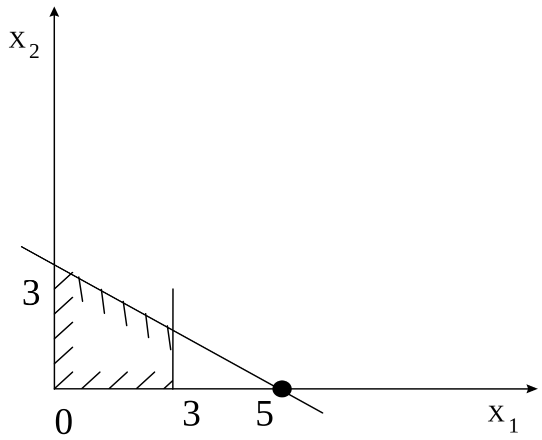


Рис. 5.3

Області, в яких виконуються відповідні обмеження у вигляді нерівностей, указуються стрілками, що направлені у бік допустимих значень змінних. Отримана множина розв'язків – многокутник - показаний на рис. 5.3. Отриманий многокутник є опуклим, бо разом з будь-якими двома точками містить весь відрізок, що з'єднує їх.

5.3. Питання для самоперевірки

1. Яка множина називається опуклою?
2. Що таке простір обмежень?
3. Що таке замкнена множина?
4. Які можуть зустрітися області розв'язків системи нерівностей? Наведіть геометричну ілюстрацію цих випадків.
5. Дайте геометричну інтерпретацію області розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей.
6. Як означити опуклий многогранник і опуклу многогранну область n-вимірного простору (гіперплощину)?
7. Суть алгоритму графічного методу розв'язування систем лінійних нерівностей.

5. 4. Ключові поняття

Геометрична інтерпретація	Обмеження-нерівність
Гіперплощина	Опуклі множини
Графічний метод	Півплощина (півпростір)

Екстремальні точки | Простір n - вимірний
Кутові точки | Пряма гранична
Многокутник розв'язків

5.5. Навчальні завдання

№ 5.1. Побудувати площини, координати точок яких задовольняють нерівність:

а) $3x_1 - 2x_2 \geq 6;$ б) $x_1 + 2x_2 \geq 0;$ в) $x_2 \leq 3.$

№ 5.2. Побудувати многокутник розв'язків системи нерівностей і знайти координати однієї з вершин:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6 \geq 0; \\ 6x_1 + 5x_2 - 30 \leq 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3 \geq 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \leq 20; \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 19; \\ x_1 - 4x_2 \geq -7 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 11 \geq 0; \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 0; \\ 6x_1 - 5x_2 + 24 \geq 0; \\ x_1 - 1 \geq 0; \\ x_1 - 6 \leq 0; \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 38 \leq 0; \\ x_1 - 2x_2 + 7 \geq 0; \\ 3x_1 + x_2 \geq 0; \\ \quad x_2 - 6 \leq 0; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$.

5.6. Завдання для перевірки знань

№ 5.3 Побудувати многокутник розв'язків системи лінійних нерівностей і знайти координати однієї з його вершин:

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 13 \leq 0; \\ 7x_1 - x_2 - 4 \geq 0; \\ x_1 - 3x_2 + 1 \leq 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6 \geq 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 35 \leq 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24 \geq 0; \\ x_1 - 6 \leq 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ 2x_1 - x_2 \leq 6; \\ x_1 + 3x_2 \geq 3; \\ x_1 \leq 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0; \\ -x_1 + 3x_2 - 10 \leq 0; \\ x_1 + 4x_2 \geq 4; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

е) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - 30 \geq 0; \\ x_1 - x_2 - 4 \geq 0; \\ -x_1 + x_2 - 3 \geq 0; \\ x_1 + x_2 - 10 \leq 0; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

є) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ -4x_1 + x_2 \geq -8; \\ x_1 - 2x_2 \leq 0; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 + 3x_2 \leq 3. \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 \geq 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0; \\ x_1 - x_2 - 1 \leq 0; \\ -2x_1 - x_2 - 3 \leq 0. \end{cases}$

ТЕМА 6

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЇХ ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Серед різних математичних моделей економічних процесів особливе місце займають так звані ***лінійні моделі***, тобто моделі, в яких математичні залежності (рівняння, нерівності) є лінійними відносно всіх змінних величин, які включені у модель. Основою для розробки лінійних математичних методів служить математичне програмування. Після глибоких розробок, практичної реалізації і критичного аналізу результатів застосування методів лінійного програмування це привело до значних успіхів у розв'язуванні широкого кола задач, які відносяться до таких сфер, як промислове виробництво, військова справа, сільське господарство, економічні дослідження, транспорт та ін.

6.1. Теоретичні відомості

6.1.1. Приклади практичних задач, що зводяться до задач лінійного програмування

Задача 6.1. *Задача оптимального використання сировини.*

Цех випускає продукцію двох видів P_1, P_2 використовуючи сировину 3 видів S_1, S_2, S_3. Запаси сировини, норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці кожного виду продукції і прибуток від реалізації кожного виду продукції задані в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		Запаси сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	2	1	19
S_2	1	2	13
S_3	1	3	18
Прибуток від реалізації одиниці продукції, гр.	5	7	

Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації усієї продукції.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1 і x_2 відповідно планову кількість випуску продукції видів P_1 і P_2. Обмеження по витратам сировини видів S_1, S_2, S_3 задаємо у вигляді нерівностей відповідно: $2x_1 + x_2 \le 19$, $x_1 + 2x_2 \le 13$ і $x_1 + 3x_2 \le 18$. Також треба ввести додаткові обмеження невід'ємності $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$. У якості показника ефективності вибираємо прибуток від реалізації усієї продукції і складаємо цільову функцію: $f = 5x_1 + 7x_2 \to \max$.

Таким чином задача оптимального використання сировини приводить до моделі лінійного програмування:

$$f = 5x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0.$$

Структура цільової функції f відбиває внесок кожного виду виробничої діяльності у загальний результат, У випадку максимізації величина Cj являє собою прибуток від j-го виду виробничої діяльності на одиницю відповідної продукції, а у випадку мінімізації Cj характеризує питомі витрати. Зауважимо, що «корисність» деякого виду виробничої діяльності не можна встановити тільки за значенням відповідного коефіцієнта цільової функції, оскільки обсяг споживання обмежених ресурсів також є важливим чинником. Оскільки усі види виробничої діяльності, що подані в моделі, претендують на використання обмежених ресурсів, відносна корисність деякого виду виробництва (у порівнянні з іншими видами виробничої діяльності) залежить як від величини коефіцієнта цільової функції c_j, так і від інтенсивності споживання ресурсів a_{ij}. Тому можлива ситуація, коли через занадто великі витрати обмежених ресурсів деякий j-й вид виробничої діяльності, що характеризується високим прибутком, використовувати недоцільно (тобто в оптимальному розв'язку відповідна змінна виявиться небазисною).

Задача 6.2. *Задача про раціон*.

Для годівлі тварин використовують два види кормів K_1 і K_2. Мінімально необхідна добова норма поживних речовин S_1, S_2, S_3, їх кількість у 1 кг кожного виду корму і собівартість одного кілограма корма наведені у таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

Поживні речовини	Кількість поживних речовин у 1 кг корму		Мінімальна добова норма
	K_1	K_2	
S_1	2	1	7
S_2	1	2	8
S_3	1	3	9
Собівартість 1 кг корму	5	6	–

Скласти добовий раціон мінімальної собівартості.

Складемо математичну модель задачі. Введемо у раціон x_1 кг корму виду K_1 і x_2 кг корму виду K_2. Обмеження по дотриманню нормативів одержання поживних речовин видів S_1, S_2, S_3 матимуть вигляд відповідно: $2x_1 + x_2 \geq 7$, $x_1 + 2x_2 \geq 8$ і $x_1 + 3x_2 \geq 9$. Додаткові обмеження невід'ємності: $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$. Цільова функція – собівартість раціону: $f = 5x_1 + 6x_2 \to \min$.

Тобто задача складення оптимального раціону годівлі тварин також приводить до моделі лінійного програмування:

$$f = 5x_1 + 6x_2 \to \min, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases} \quad x_{1,2} \geq 0.$$

6.1.2. Загальна і канонічна форми запису задачі лінійного програмування (ЗЛП)

ЗЛП називають задачу, яка полягає в знаходженні максимального або мінімального значення лінійної цільової функції:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\,(\min) \qquad (6.1)$$

при заданій системі обмежень у вигляді лінійних нерівностей і (або) рівностей:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{smallmatrix}\le\\=\\\ge\end{smallmatrix} b_i, \qquad i = \overline{1,m} \qquad (6.2)$$

та при виконанні додаткової умови невід'ємності змінних (параметрів розв'язку):

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (6.3)$$

Вільні члени b_i без обмеження загальності можна також вважати невід'ємними ($b_i \ge 0$).

Задачу (6.1)-(6.3) називають *загальною формою* ЗЛП. Якщо цільова функція (6.1) наближується до максимуму, а система обмежень (6.2) складається виключно з рівностей, то задачу (6.1)-(6.3) називають *канонічною формою* ЗЛП. Перейти від загальної форми до канонічної можна наступним чином.

1. Якщо цільова функція наближується до мінімуму ($f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$), то необхідно ввести допоміжну цільову функцію з протилежним знаком ($z = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \to \max$).

2. У ліві частини нерівностей ввести додаткові невід'ємні змінні x_{n+1}, x_{n+2}, … зі знаком "+", якщо знак у нерівності "≤", та зі знаком "-", якщо знак у нерівності "≥". У цільову функцію додаткові змінні вводять з нульовими коефіцієнтами ($f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots$).

Зведемо до канонічного виду задачі з прикладів 6.1 і 6.2:

1) $f = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 18 \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5}$.

2) $z = -f = -5x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 9 \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5}$.

Додаткові змінні мають визначений *економічний зміст*. У першому прикладі змінні x_3, x_4, x_5 мають зміст залишків сировини відповідно видів

S_1, S_2, S_3. У другому прикладі змінні x_3, x_4, x_5 мають зміст надлишків поживних речовин відповідно видів S_1, S_2, S_3.

6.1.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

ЗЛП (6.1) – (6.3) витлумачують за допомогою геометричних понять. Особливо наочною є така інтерпретація при кількості змінних задачі $n = 2$ у двовимірному просторі (координатній площині).

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max\ (\min) \tag{6.1}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \begin{smallmatrix}\le\\=\\\ge\end{smallmatrix} b_i, \qquad i = \overline{1,m} \tag{6.2}$$

$$x_{1,2} \ge 0 \tag{6.3}$$

Тут графіками цільової функції (6.1) при різних значеннях f будуть паралельні прямі лінії (Рис. 6.1). Причому значення f зростає у напрямку нормального вектора $\vec{n}(c_1, c_2)$ цих прямих. ОДР системи обмежень (6.2) – (6.3), якщо система сумісна, задається опуклим многокутником (обмеженим або необмеженим).

Рухаючи пряму l, яка відповідає значенню $f = 0$, у напрямку вектора $\vec{n}$, знаходимо опорні (дотичні) прямі l' і l'', положення яких відповідають найменшому (A) та найбільшому (C і (або) D?) значенню цільової функції.

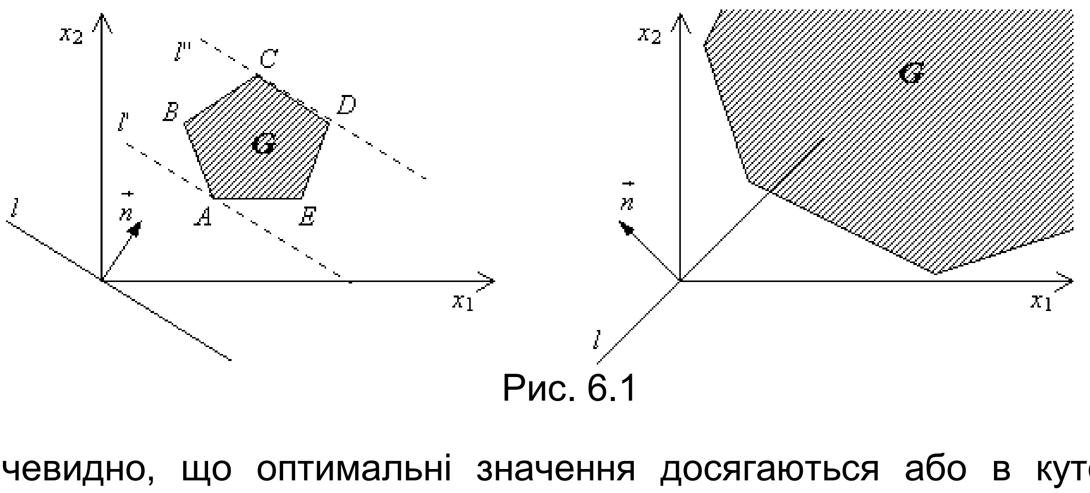


Рис. 6.1

Очевидно, що оптимальні значення досягаються або в кутових точках (вершинах) многокутника розв’язків або зовсім не досягаються.

Аналогічно, для задачі з трьома змінними у тривимірному просторі графіками цільової функції при різних значеннях *f* будуть паралельні площини. Розв'язком нерівності з трьома змінними буде півпростір, а системи лінійних обмежень - опуклий многогранник (обмежений або необмежений).

Ці геометричні поняття можна поширити і на загальний випадок ЗЛП (6.1)-(6.3), розглядаючи у *n*-вимірному просторі гіперплощини і гипермногогранники.

6.1.4. Графічне розв'язування задачі лінійного програмування

Задача 6.3. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max \qquad (6.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{array}\right\} \qquad (6.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad (6.3)$$

Розв'язання. Кожне з обмежень (6.2), (6.3) задає на площині x_1Ox_2 деяку півплощину. Півплощина — опукла множина. Але перетин будь-якого числа опуклих множин є опуклою множиною. Тому область допустимих розв'язків задачі (6.1) — (6.3) є опукла множина.

Пряма лінія називається ***опорною***, якщо вона має з опуклим многокутником, принаймні, одну спільну точку і весь многокутник розташований по один бік від цієї прямої. Через кожну з вершин многокутника можна провести нескінчену множину опорних ліній.

У тривимірному просторі, по аналогії з поняттям опорної прямої вводиться поняття опорної площини. ***Опорною площиною*** називається всяка площина, що має з опуклим многогранником, принаймні, одну спільну точку, причому таку, що весь многогранник розташований по один бік від неї. Опорна площина може мати з опуклим многогранником спільну точку (вершину многогранника), прямую (ребро), і, нарешті, спільну грань.

Геометрична інтерпретація цільової функції. Нехай область допустимих розв’язків ЗЛП — непуста множина, наприклад многокутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 6.2).

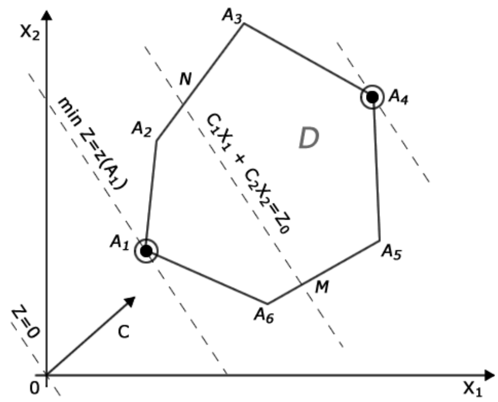


Рис. 6.2 – Область допустимих розв’язків ЗЛП

Виберемо довільне значення цільової функції $Z = Z_0$, найчастіше $Z = 0$. Отримаємо $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Це рівняння прямої лінії, яка при паралельному перенесенні в напрямку нормального вектора $\bar{c}$ стає опорною прямою. В точках прямої NM цільова функція зберігає одне і те ж стале значення Z_0. Вважаючи в рівності (6.1) Z параметром, отримаємо рівняння сімейства паралельних прямих, які називаються лініями рівня цільової функції (лініями сталого значення).

Знайдемо частинні похідні цільової функції по x_1 і x_2

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1 \qquad (6.4)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1 \qquad (6.5)$$

Частинні похідні (6.4) - (6.5) функції показують швидкість її зростання вздовж даної осі. Отже, c_1 та c_2— швидкості зростання Z відповідно вздовж осей Ox_1 та Ox_2. Вектор $\bar{c}=(c_1,c_2)$ називається градієнтом функції. Він показує напрям найшвидшого зростання цільової функції:

$$\bar{c}=(\partial Z/\partial x_1, \partial Z/\partial x_2)$$

Вектор $-\bar{c}$ указує напрям найшвидшого спадання цільової функції. Його називають антиградієнтом.

Вектор $\bar{c}=(c_1,c_2)$ перпендикулярний до прямих $Z=const$ сімейства $c_1x_1+c_2x_2=Z$.

Геометрична інтерпретація економічних задач дає можливість наочно представити їх структуру, виявити особливості та відкриває шляхи для дослідження більш складних властивостей. ЗЛП з двома змінними можна завжди розв'язати графічно. Але уже в тривимірному просторі таке розв'язування ускладнюється, а в просторах, розмірність яких більша від трьох, графічне розв'язування, взагалі кажучи, неможливе без застосування комп'ютерних технологій. Випадок двох змінних прояснює властивості ЗЛП, приводить до ідеї її розв'язання, робить геометрично наочними способи розв'язування та шляхи їх практичної реалізації.

Із геометричної інтерпретації елементів ЗЛП випливає наступний порядок ***(алгоритм)*** її **графічного розв'язання**.

1. З урахуванням системи обмежень будуємо область допустимих розв'язків (ОДР**) G.**
2. Будуємо вектор $\bar{c}=(c_1,c_2)$ найшвидшого зростання цільової функції — вектор *градієнтного* напрямку.
3. Проводимо довільну лінію рівня $Z=0$ цільової функції.
4. При розв'язуванні задачі на максимум переміщуємо лінію рівня $Z=0$ у напрямку вектора $\bar{c}=(c_1,c_2)$ так, щоб вона дотикалась області допустимих розв'язків в її крайньому положенні (крайній, кутовій точці).

У випадку розв’язування задачі на мінімум лінію рівня $Z = Z_0$ переміщають в антиградієнтному напрямку.

5. Визначаємо оптимальний план $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ та екстремальне значення цільової функції $Z^* = z(x^*)$.

6.2. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Розглянемо алгоритм графічного розв’язання ЗЛП з двома змінними на конкретному прикладі задачі про складання раціону тварини.

Скласти добовий раціон для корів із мінімальною собівартістю за вихідними даними табл. 6.3.

Таблиця 6.3

Поживні речовини	Поживність кормів		Добова норма
	Комбікорм	Силос	
Кормові одиниці, кг	0,8	0,4	Не менше 12 кг
Перетравний протеїн, г	120	20	Не менше 1400 г
Суха речовина, кг	0,8	0,3	Не більше 18 кг
Максимальна кількість корму в раціоні	16	30	
Собівартість 1 кг, коп	12	4	

Розв’язання.

Позначимо змінні (параметри розв’язку): x_1 – кількість кг комбікорму в раціоні, x_2 – кількість кг силосу в раціоні.

За умовою задачі складаємо систему обмежень.

а) обмеження по вмісту кормових одиниць у раціоні: $0,8x_1 + 0,4x_2 \geq 12$;

б) обмеження по вмісту перетравного протеїну в раціоні: $120x_1 + 20x_2 \geq 1400$;

в) обмеження по вмісту сухої речовини в раціоні: $0,8x_1 + 0,3x_2 \leq 18$;

г) верхнє обмеження по вмісту комбікорму в раціоні: $x_1 \leq 16$;

д) верхнє обмеження по вмісту силосу в раціоні: $x_2 \leq 30$;

е) додаткові обмеження на невід’ємність змінних: $x_{1,2} \geq 0$.

Складаємо цільову функцію задачі - собівартість раціону: $F = 12x_1 + 4x_2 \to \min$

Складаємо математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,4x_2 \ge 12 \\ 120x_1 + 20x_2 \ge 1400 \\ 0,8x_1 + 0,3x_2 \le 18 \qquad x_{1,2} \ge 0 \quad F = 12x_1 + 4x_2 \to \min \\ x_1 \le 16 \\ x_2 \le 30 \end{cases}$$

Усі обмеження і цільова функція лінійні, отже, це задача лінійного програмування.

Будуємо область допустимих розв'язків G системи обмежень (рис. 6.3). Графічним розв'язком кожної нерівності буде півплощина на координатній площині. Рівняння границі кожної такої півплощини можна одержати, замінивши знак нерівності знаком рівності і побудувавши відповідну пряму за двома точками (звичайно на осях координат).

L_1: $0,8x_1 + 0,4x_2 = 12$,

x_1	0	15
x_2	30	0

Напрямок півплощини показуємо стрілками. Щоб визначити напрямок, необхідно підставити координати довільної точки (зазвичай початок координат O(0;0)), що не лежить на границі, у нерівність. Підставивши координати точки O(0;0) у першу нерівність: $0,8 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0 \ge 12$, бачимо, що вони її не задовольняють. Отже, вибираємо півплощину з границею L_1, що не містить точку O, і показуємо її напрямок стрілками.

Аналогічно визначаємо напрямок і в інших випадках.

L_2 : $120x_1 + 20x_2 = 1400$,

x_1	0	10
x_2	70	10

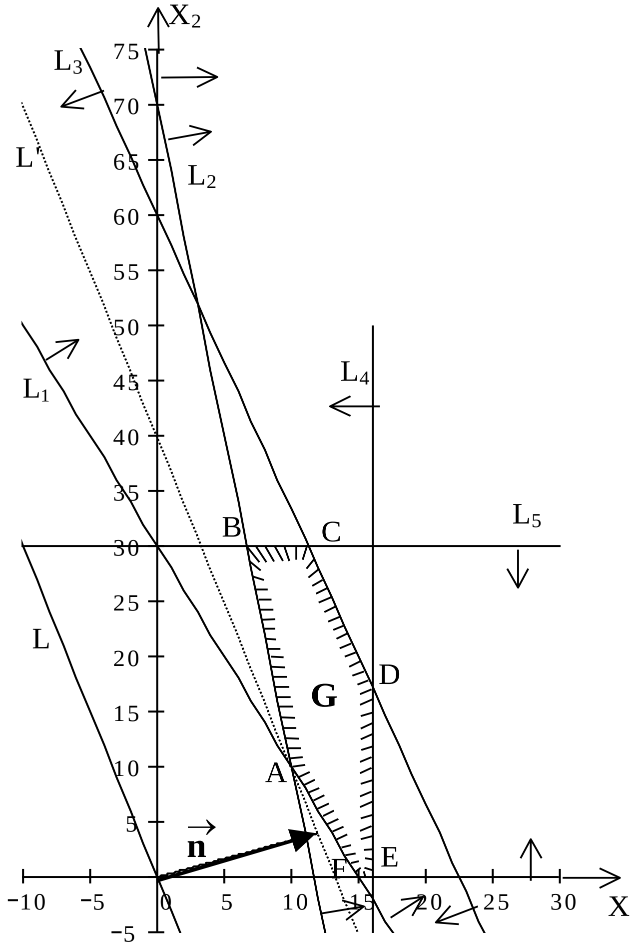


Рис. 6.3

$L_3:\ 0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 = 18$,

x_1	0	22,5
x_2	60	0

$L_4: x_1 = 16;\quad L_5:\ x_2 = 30$,

З огляду на додаткові обмеження, область G розташовується в першій координатній чверті. Одержимо шестикутник розв'язків ABCDEF.

Будуємо графік цільової функції при *F* = 0.

L: $12x_1 + 4x_2 = 0$

x_1	0	-5
x_2	0	15

Будуємо нормальний вектор прямої *L*: $\vec{n}(12; 4)$.

Рухаємо пряму *L* у напрямку вектора $\vec{n}$, доки вона не стане опорною (дотичною) до многокутника розв'язків (*L´*). Таким чином цільова функція досягає мінімуму в точці A (максимуму в точці D).

Знаходимо координати точки A, розв’язавши систему рівнянь прямих L_1 і L_2, на перетині яких знаходиться ця точка.

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,4x_2 = 12 \\ 120x_1 + 20x_2 = 1400 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 30 \\ 6x_1 + x_2 = 70 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 = 40 \\ -2x_2 = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 10 \end{cases} \quad A(10;10).$$

Знаходимо мінімальне значення цільової функції у точці A:

$$F_{\min} = F(A) = F(10;10) = 12 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 160.$$

Отже, оптимальний раціон повинен містити 10 кг комбікорму і 10 кг силосу. При цьому його собівартість буде мінімальною і складе 1 грн. 60 коп.

Проведемо аналіз розв’язку.

$$\begin{cases} 0,8 \cdot 10 + 0,4 \cdot 10 = 12 \geq 12 \\ 120 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 1400 \geq 1400 \\ 0,8 \cdot 10 + 0,3 \cdot 10 = 11 \leq 18 \\ 10 \leq 16 \\ 10 \leq 30 \end{cases}$$

Отже, добовий раціон забезпечує мінімальні вимоги по вмісту кормових одиниць та перетравного протеїну та містить на 18 – 11 = 7 кг сухої речовини менше максимально можливої кількості. Також не досягнуті вимоги максимальної кількості кормів у раціоні: на 16 – 10 = 6 кг для комбікорму і на 30 – 10 = 20 кг для силосу.

6.3. Питання для самоперевірки

1. Яка множина називається опуклою?
2. Що таке простір обмежень?
3. Що таке замкнена множина?
4. Що таке лінії рівня цільової функції?
5. Що таке градієнт? антиградієнт?
6. Що таке область допустимих розв’язків (ОДР)?
7. Яка пряма називається опорною (дотичною) до многокутника розв’язків?

8. Що називається допустимим і оптимальним розв’язком?

9. Які можуть зустрітися області допустимих розв’язків ЗЛП? Наведіть геометричну ілюстрацію цих випадків.

10. В яких випадках задача може не мати оптимального розв’язку? Проілюструйте ці випадки графічно.

6.4. Ключові поняття

Антиградієнт
Геометрична інтерпретація ЗЛП
Гіперпростір
Гіперплощина
Градієнт
Гранична точка площини
Допустимий розв’язок (план) ЗЛП
Дотична (опорна) пряма
Задача про оптимальне використання сировини
Задача про раціон
Замкнена множина
Загальна форма запису ЗЛП
Канонічна форми запису ЗЛП
Лінії рівня
Множина опукла
Многокутник розв’язків
Область допустимих розв’язків
Оптимальний розв’язок
Пряма гранична
Простір обмежень
Точки кутові (крайні)
Розв’язок опорний
Цільова функція

6.5. Навчальні завдання

Розв’язати графічно задачі лінійного програмування.

№ 6.1. Знайти найменше і найбільше значення цільової функції $Z = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 25; \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8; \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = 7\frac{4}{7}$ в точці $(-\frac{23}{7}; \frac{99}{7})$;
$z_{\max} = 31\frac{8}{11}$ в точці $(\frac{141}{11}; \frac{67}{11})$.

№ 6.2. Знайти мінімальне і максимальне значення лінійної функції $Z = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4; \\ 2x_1 + x_2 \geq 4; \\ -x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = 2\frac{2}{3}; z_{\max} = 6$.

№ 6.3. Знайти максимальне і мінімальне значення цільової функції $Z = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 \leq 3; \\ x \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min}(\frac{2}{3};\frac{10}{3}) = 7\frac{1}{73}$; $z_{\max}(1;0) = 1$.

№ 6.4. У відділенні господарства необхідно організувати виробництво картоплі і ячменю. Наявність ресурсів і витрати на виробництво 1 ц продукції наведені в таблиці 6.4. Скласти план виробництва продукції і вказати площі посівів кожної культури при оптимальному плані.

Таблиця 6.4

№	Виробничі ресурси	Картопля	Ячмінь	Об'єми ресурсів
1	Пашня, га	0,01	0,05	1000
2	Затрати ручної праці, люд.-дн.	0,2	0,1	8000
3	Затрати ручної праці, тр. – зм.	0,021	0,03	900
4	Ціна реалізації	60	10	-

Відповідь: $z_{\max} = 280$ млн. гр. од.; 200 га; 800 га.

№ 6.5 Скласти денний раціон мінімальної собівартості для відгодівлі тварин із двох видів кормів K_1 та K_2. Усі необхідні дані містяться в таблиці 6.5.

Таблиця 6.5

Харчові речовини	Кількість харчових речовин на 1 кг корму		Мінімальна норма харчової речовини в раціоні
	K_1	K_2	
S_1	2	1	7
S_2	1	2	8
S_3	1	3	9
Собівартість 1 кг кормів, гр.од.	5	6	-

Відповідь: 2 кг; 3 кг; $z_{\min} = 28$ гр. од.

6.6. Завдання для перевірки знань

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

№ 6.6.

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min}\left(\frac{7}{5};\frac{3}{5}\right) = \frac{23}{5}$.

№ 6.7.

$$z = 5x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\max}\left(\frac{20}{19};\frac{45}{19}\right) = \frac{235}{19}$.

№ 6.8.

$$z = x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 5, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\max}(12;8) = 44$.

№ 6.9

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min(\max),$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_{1-2} \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min}\left(\frac{8}{7};\frac{4}{7}\right) = 2$; $z_{\max}(1;3) = 11$.

№ 6.10. Для виготовлення столів і шаф у меблевому цеху використовуються два види деревини. Витрати деревини кожного виду (в кв. м) на кожний виріб, прибуток цеху від виробництва кожного виду меблів (в гр. од.), запаси деревини кожного виду (в кв. м) задані таблицею 6.6:

Таблиця 6.6

Вироби	Сировина		Прибуток від виробництва одного виробу
	S_1	S_2	
Стіл	0,3	1	12
Шафа	0,12	2	15
Запаси деревини	84	88	-

Скільки столів і шаф має виготовити меблевий цех, щоб його рентабельність була найвищою? Скласти математичну модель задачі та розв’язати її графічно.

Відповідь: 6335 гр. од., 130 столів, 375 шаф.

ТЕМА 7

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ

Застосовування аналітичного способу розв'язування систем лінійних рівнянь для знаходження базисних розв'язків. Вивчення симплексного методу розв'язування ЗЛП.

7.1. Теоретичні відомості

7.1.1. Теоретичні основи симплексного методу розв'язування ЗЛП

Класичним методом розв'язування ЗЛП став симплекс-метод, який отримав також в літературі назву методу послідовного покращення плану, розроблений у 1947 році американським математиком Р.Данцигом.

Симплексний метод є одним з основних методів розв'язування ЗЛП. Назву симплексний метод бере від слова «симплекс», яким автор методу Р.Данциг позначив накладені на змінні $x_1, x_2 \ldots x_n$ обмеження $x_1+x_2+ \ldots +x_n=1$. В математиці ***симплексом*** в k-вимірному просторі називається сукупність $k+1$ вершин. Так, для площини при $k=2$ симплексом буде трикутник; в просторі при $k=3$ симплексом буде тетраедр, який має *4* вершини.

Враховуючи ці поняття, аналітичний метод розв'язування ЗЛП називають симплекс-методом. Він заснований на алгоритмі цілеспрямованого перебору вершин (кутових точок). Цей алгоритм забезпечує перехід від однієї вершини до іншої в такому напрямку, при якому значення цільової функції від вершини до вершини покращується.

Знаходження значення цільової функції та змінних в одній вершині називається ***ітерацією***. Число ітерацій в реальних задачах може вимірюватися сотнями. Вручну, за допомогою симплекс-методу, можуть бути розв'язані задачі, що містять не більше 10 ітерацій. Тому в реальних задачах застосовують ЕОМ (ПК) та пакети прикладних програм (ППП).

Критерій оптимальності опорного плану

Невід'ємний базисний розв'язок системи обмежень канонічної ЗЛП називають опорним планом. Перехід від одного опорного плану ЗЛП до іншого проводять за правилом "прямокутника". Кожний опорний план відповідає певній вершині многогранника розв'язків і може бути оптимальним для цільової функції. Знайти оптимальний опорний план можна звичайним перебором, підставивши усі можливі опорні плани у цільову функцію. Але раціональніше застосовувати метод цілеспрямованого перебору, який лежить в основі аналітичного симплекс-методу розв'язку ЗЛП.

Розглянемо ЗЛП у канонічній формі:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Нехай система обмежень сумісна і знайдено її якийсь загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 - \left(q_{1,l+1}x_{l+1} + q_{1,l+2}x_{l+1} + \ldots + q_{1,n}x_n\right) \\ x_2 = p_2 - \left(q_{2,l+1}x_{l+1} + q_{2,l+2}x_{l+1} + \ldots + q_{2,n}x_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l = p_l - \left(q_{l,l+1}x_{l+1} + q_{l,l+2}x_{l+1} + \ldots + q_{l,n}x_n\right) \end{cases}$$

Відповідний опорний план має вигляд: (p_1, p_2, …, p_l, 0, 0, …,0).

Щоб з'ясувати, чи є цей план оптимальним, для кожної змінної знаходимо індекс:

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij}\right) - c_j .$$

Індекс базисної змінної дорівнює нулю:

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij} \right) - c_j = c_1 \cdot q_{1j} + c_2 \cdot q_{2j} + \ldots + c_j \cdot q_{jj} + \ldots c_n \cdot q_{nj} - c_j = c_j - c_j = 0 .$$

Сформулюємо *критерій оптимальності* ЗЛП:

1) якщо індекси всіх вільних змінних невід'ємні: $\Delta_j \geq 0$, то отриманий опорний план є оптимальним;
2) якщо серед індексів є від'ємні, то план не оптимальний і його можна покращити, увівши до базису змінну з найменшим від'ємним індексом.

7.1.3. Алгоритм симплекс-методу

1. Переглядаємо знаки всіх коефіцієнтів Δ_j m+1-го рядка. Якщо всі індекси $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то задача розв'язана: допустимий план є оптимальним, max $f = f_0$. Якщо ж не всі $\Delta_j \geq 0$, то переходимо до наступного кроку.

2. Серед значень $\Delta_j < 0$ знаходимо найбільше за абсолютною величиною, і відповідний йому стовпчик виберемо за провідний (ключовий, розв'язувальний, напрямний). Нехай це буде стовпчик з номером *s*. Якщо у цьому стовпчику всі елементи $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то це означає, що цільова функція *f* необмежена, тобто max $f = \infty$. Розв'язування закінчено. Якщо ж не всі $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то переходимо до кроку 3.

3. Для кожного елемента $a_{is} > 0$ провідного стовпчика знаходимо відношення $\frac{b_i}{a_{is}}$, вибираємо найменше $\Theta_{Os} = \min_i \frac{b_i}{a_{is}}$, і беремо рядок, де цей мінімум досягається, за провідний. Нехай це буде рядок з номером *r*. Елемент a_{rs}, який стоїть на перетині провідного рядка і провідного стовпчика, є провідним (ключовим, розв'язувальним, напрямним).

4. Виконуємо жорданове перетворення (див. тему 3) симплексної таблиці з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

Послідовність операцій 1-4 називається **ітерацією** симплексного методу.

Зауваження.

1. Індексні рядки також можна заповнювати за правилом прямокутника (крім першої таблиці).

2. Якщо при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом виявиться, що для усіх змінних з від'ємними індексами (Δ_j <0) усі відповідні коефіцієнти $q_{ij} \le 0$, то ЗЛП не має розв'язку, тобто цільова функція не обмежена зверху на ОДР.

3. При розв'язуванні ЗЛП симплексним методом теоретично може з'явитися таблиця, яка раніше вже зустрічалася. Такий випадок називають зацикленням. У реальних задачах зациклення практично неймовірне.

7.1.4. Можливі випадки при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом

1) Якщо в індексному (m+1)-у рядку останньої симплексної таблиці серед Δj є більше, ніж m нульових (тобто оцінка Δj=0 відповідає вільній, небазисній змінній), то це означає, що знайдений оптимальний план не єдиний, тобто існує альтернативний оптимальний план. Знайти його можна, якщо вибрати ключовий елемент у зазначеному стовпчику симплекс-таблиці та здійснити один крок симплекс-методу.

2) Якщо в індексному рядку є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δj, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\max_j c_j$. Точнішим є таке правило: якщо не всі $\Delta j \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\min \Delta_j$ (беруть ті j, для яких $\Delta j < 0$); якщо ж мінімальних оцінок декілька, то до базису вводять вектор, якому відповідає $\max_j c_j$.

3) При розв'язуванні задач на мінімум цільової функції рекомендується замість f_{min} знаходити $(-f)_{max}$.

4) У випадку, коли $f \to \min$, умовою оптимальності плану є $\Delta j \le 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо вона не виконується, то до базису вводять вектор, якому відповідає найбільше Δj. Якщо таких значень є декілька, то включають той вектор, якому відповідає $\min_j c_j$.

5) При побудові симплекс-методу передбачалося, що всі опорні плани ЗЛП невироджені, що забезпечувало досягнення оптимального плану за скінчену кількість кроків. Якщо опорний план вироджений, тобто серед його компонентів a_{ij} одна або декілька базисних змінних дорівнюють нулю, то $\frac{b_j}{a_{ij}} = 0$, і значення лінійної функції при переході до нового опорного плану не зміниться, тобто характер збіжності її такий, що буде кілька ділянок сталості. Тоді може не змінюватися й значення плану деяких базисних змінних. Але й тоді можна підібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення лінійної форми знову почне зростати. У разі виродженого опорного плану обчислення проводять аналогічно, як і у випадку невиродженого плану.

6) Виродження базису практично не впливає на кількість ітерацій *k*, що потрібні для визначення оптимального плану. Як правило, їх є в межах $1{,}5m \le k \le 3m$, де *m* – число обмежень задачі.

7) Якщо в опорному плані нульових компонент більше однієї, то лінійна функція може зберігати своє значення протягом декількох наступних ітерацій і можливе повернення до старого базису, що приведе до так званого *зациклення*. Щоб уникнути зациклення, треба вибрати інший опорний план на деякій ітерації. На практиці зациклення зустрічається надзвичайно рідко (в літературі описано тільки два випадки таких задач).

7) Якщо на якому-небудь етапі виникає невизначеність у виборі ключового рядка (кілька однакових відношень $\frac{b_j}{q_{ij}}$), то необхідно вибрати ключовим той рядок, для якого відношення елементів наступного стовпчика, що не входить до базису, до ключового стовпчика є мінімальним, і т.д. доти, доки ключовий рядок не визначиться однозначно.

8) Якщо у симплекс-методі при переході від одного плану до іншого в ключовому стовпчику немає додатних елементів a_{ij}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція ЗЛП є необмеженою, отже, оптимальних планів не існує.

7.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Метод розв'язування ЗЛП за допомогою симплексних таблиць розглянемо на конкретному прикладі.

Задача 7.1. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \le 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases} \tag{7.1}$$

якщо цільова функція (лінійна форма) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$.

Розв'язання. Спочатку перейдемо від системи нерівностей (7.1) до системи рівнянь, додавши до лівих частин нерівностей невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5 (*зведемо до канонічного виду задачу ЛП*). Ми отримаємо:

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 56, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 37, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2. \end{cases} \tag{7.2}$$

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max \tag{7.3}$$

Перепишемо тепер систему (7.2) у вигляді системи нуль - рівнянь (0-рівнянь):

$$\begin{cases} 0 = 56 - (4x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5), \\ 0 = 37 - (5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5), \\ 0 = 2 - (-x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5). \end{cases} \quad (7.4)$$

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max \quad (7.5)$$

Введемо в базис x_3, x_4, x_5. Це означає, що, присвоївши $x_1 = 0,\ x_2 = 0,$ отримуємо з (7.2) перший базисний розв'язок: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 56,\ x_4 = 37,\ x_5 = 2$.

При цьому значення цільової функції f=0. На основі (7.4) будуємо першу симплексну таблицю (табл. 7.1).

Алгоритм побудови симплексної таблиці:

В першому рядку пишемо послідовно вільний член та змінні $b,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$. Зліва добавляємо колонку „Базисні змінні", поряд з нею колонку „C_j", в якій поставлені коефіцієнти при базисних змінних в цільовій функції, в даному випадку величини $C_3,\ C_4,\ C_5$.

В результаті маємо таблицю 7.1:

Таблиця 7.1

C_i	C_j Базисні змінні Б 1	0	3	4	0	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	56	4	9	1	0	0
0	X_4	37	5	3	0	1	0
0	X_6	2	-1	**2**	0	0	1
Індексний рядок $\Delta_j = f_j - C_j$		0	-3	-4	0	0	0

В останньому рядку, який називається *індексним*, і позначається через $\Delta_j = f_j - C_j$, проставляються числа, що дорівнюють протилежному значенню лінійної функції, у відповідності до рівняння *(j=1, 2, 3, 4, 5)*. Взагалі, індекси розраховуються за формулою (7.6):

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij}\right) - c_j . \qquad (7.6)$$

Індекс базисної змінної дорівнює нулю:

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij}\right) - c_j = c_1 \cdot q_{1j} + c_2 \cdot q_{2j} + \ldots + c_j \cdot q_{jj} + \ldots c_n \cdot q_{nj} - c_j = c_j - c_j = 0 .$$

Це перша симплексна таблиця, що відповідає першому базисному розв'язку: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 56, x_4 = 37, x_5 = 2$. Значення лінійної функції, яке дорівнює нулю, записуємо в першій клітці індексного рядка.

Оскільки ми розв'язуємо задачу на максимум, то з виразу цільової функції (лінійної форми) видно, що потрібно збільшити x_1 або x_2. Дійсно, коефіцієнти при цих змінних в дужках від'ємні (а насправді додатні), і якщо ми покладемо $x_1 \geq 0$ або $x_2 \geq 0$, то значення *f* збільшиться. Але ці ж коефіцієнти з їхніми знаками стоять в індексному рядку.

Отже, ми приходимо до наступного висновку: наявність в індексному рядку від'ємних чисел при розв'язуванні задачі на максимум свідчить про те, що оптимальний розв'язок не отримано (**критерій оптимальності опорного плану**), і тому від першої таблиці потрібно перейти до наступної.

Перехід до нової таблиці, тобто до нової кращої програми, здійснюється наступним чином: в індексному рядку знаходимо *найбільше за модулем від'ємне* (а в задачі на мінімум - найбільше додатне) число. В даному прикладі таким числом буде - 4. Знайдене число визначає провідний (або ключовий або розв'язувальний) стовпчик, який позначають стрілкою ↑. Далі будемо діяти за таким алгоритмом:

1) Ділимо вільні члени на *додатні* елементи провідного стовпчика і вибираємо з отриманих відношень *найменше*. Найменше відношення

визначає *провідний рядок* (позначають стрілкою ←). У даному випадку маємо (ці числа можна внести в останній стовпчик таблиці):

$$\min\left\{\frac{56}{9};\frac{37}{3};\frac{2}{2}\right\}=\frac{2}{2}=1.$$

Таким чином, провідним рядком буде рядок x_5. На перетині провідного стовпчика і провідного рядка стоїть *розв'язувальний (ключовий, провідний, напрямний) елемент* (його обводять рамкою, кружечком, або виділяють жирним шрифтом тощо). Тут - це число 2 (клітинка з адресою (x_5; x_2) виділена).

Тепер приступаємо до складання другої таблиці або другого опорного плану. Замість одиничного вектора x_5 ми в базис вводимо вектор x_2. Перехід до нового базису еквівалентний до елементарного перетворення матриці, елементами якої є числа таблиці 7.1. А саме:

2) В новій таблиці елементи рядка, які відповідають елементам провідного рядка попередньої таблиці, діляться на провідний елемент.

3) Щоб отримати будь-який інший елемент нової симплексної таблиці, потрібно від відповідного елемента попередньої таблиці відняти добуток елемента провідного рядка на елемент провідного стовпчика, що поділений на провідний елемент. Наприклад, елементу 4 (таблиця 7.1, клітинка з адресою (x_3;x_2)) буде відповідати елемент таблиці 7.2: $4-\frac{(-1)\cdot 9}{2}=\frac{17}{2}$.

Відповідний замінюваному елемент другої таблиці можна знаходити також за формулою (правило „прямокутника”):

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{kj}\cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}},$$

або, у мнемонічному вигляді:

$$'\text{відповідний елемент}'='\text{замінюваний елемент}'-\frac{'\text{добуток елементів іншої діагоналі}'}{\boxed{'\text{напрямний елемент}'}}.$$

При цьому розрахунок проводиться за рядками. За цим же правилом можна розраховувати індекси (крім початкового плану).

Таким чином, ми переходимо до другої таблиці (табл. 7.2). Указані вище перетворення відносяться до стовпчиків *b*, x_1, x_2, x_3, x_4 , x_5 (стовпчики базисних змінних можна заповнити як одиничні вектори). З табл. 7.2 видно, що значення лінійної функції збільшилось і тепер дорівнює 4. Але наявність в індексному рядку від'ємних чисел свідчить про те, що це значення ще можна збільшити.

Таблиця 7.2

	C_j	0	3	4	0	0	0	
C_i	Б 2	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	X_3	47	17/2	0	1	0	-9/2	
0	X_4	34	**13/2**	0	0	1	-3/2	←
4	X_2	1	-1/2	1	0	0	1/2	
$\Delta_j = f\,j\text{-}C_j$		4	-5	0	0	0	2	
			↑					

Переходимо до наступної симплексної таблиці, використовуючи пункти 1) – 3) алгоритму. Число-індекс -5 визначає провідний стовпчик (x_1), який ми позначаємо стрілкою ↑. Знаходимо провідний рядок. Для цього визначимо: $\min\left\{\frac{47}{17/2};\frac{34}{13/2};-\right\}=\frac{34\cdot 2}{13}=\frac{68}{13}$, що відповідає другому рядку таблиці, отже, він буде провідним, ми позначимо його стрілкою ← **.**

Отже, провідним елементом буде 13/2. Змінну x_4 виводимо з базису і уводимо замість нього змінну x_1. Перерахунок коефіцієнтів проводиться за указаним вище правилом, тоді маємо таблицю 7.3.

В індексному рядку нема від'ємних елементів. Отже, ми отримали оптимальну програму (оптимальний план). Оптимальний розв'язок: (68/13; 47/13; 33/13; 0; 0), лінійна (цільова) функція набуває максимального значення: $f = 392/13$.

Таблиця 7.3.

C_i	C_j	0	3	4	0	0	0
	Б З	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	33/13	0	0	1	-7/13	-3/13
3	X_1	68/13	1	0	0	2/13	-3/13
4	X_2	47/13	0	1	0	1/13	5/13
$\Delta_j = f\,j - C_j$		392/13	0	0	0	10/13	11/13

7.3. Питання для самоперевірки

1. Як звести загальну форму ЗЛП до канонічного виду?
2. Яка змінна називається додатковою змінною? Який її економічний зміст?
3. Наведіть умову оптимальності опорного плану при відшуканні мінімуму цільової (лінійної) функції; максимуму цільової (лінійної) функції.
4. Опишіть алгоритм симплексного методу для ЗЛП.
5. Яка змінна виводиться з базису?
6. Яка змінна уводиться до нового базису?
7. Який рядок (стовпчик, елемент) симплексної таблиці називається ключовим рядком (стовпчиком, елементом)?
8. Сформулюйте правило, за яким будується друга симплексна таблиця за елементами першої симплексної таблиці.
9. Яким чином обмеження-рівності перетворюються до обмежень - нерівностей і навпаки?
10. Як переходити від задачі на відшукання мінімуму цільової функції до задачі на відшукання максимуму і навпаки?
11. Охарактеризуйте сутність проблеми виродження (поняття виродженого розв’язку, геометрична інтерпретація, явище зациклення і додаткове правило для його усунення).

12. Вкажіть особливі випадки симплексного методу (неєдиність оптимального розв'язку (альтернативний оптимум), відсутність скінченого оптимуму).

7.4. *Ключові поняття*

Алгоритм розв'язування ЗЛП
Алгоритм симплекс-методу розв'язування ЗЛП
Альтернативний оптимум
Аналітична модель ЗЛП
Базис
Базисна змінна
Вершина циклу
Вимоги до критеріїв
Виродження ЗЛП
Вільна змінна
Геометрична інтерпретація
Додаткова змінна
Допустимий план
Економічний зміст
Екстремальне значення
Індекси
Ітерації
Загальна форма ЗЛП
Задача на максимум (мінімум)
Зациклення
Канонічна форма ЗЛП
Ключовий елемент
Ключовий рядок
Ключовий стовпчик
Критерій оптимальності
Обмеження нерівність
Обмеження-рівність
Оптимальний план
Оптимальний розв'язок
Особливі випадки симплекс-методу
Розв'язувальний елемент
Симплексний метод
Симплексна таблиця
Скінчений оптимум
Умови оптимальності плану
Функція цільова

7.5. *Навчальні завдання*

№ 7.1. Знайти максимум лінійної функції $Z = -x_4 + x_5$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7; \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2; \\ x_j \ge 0, \end{cases} \text{ де } x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,3,4,5).$$

Відповідь: 2.

№ 7.2. Максимізувати лінійну функцію $Z = 8x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ 4x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \end{cases} \text{ де } x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2).$$

Відповідь: 22,4.

№ 7.3. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1 - 3x_2 + x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7; \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12; \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \end{cases} \quad \text{ де } x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,3).$$

Відповідь: -11.

№ 7.4. Знайти максимум цільової функції $Z = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_2 \le 5; \\ 3x_1 \le 21, \end{cases} \text{ де } x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2).$$

Відповідь: 24.

7.6. Завдання для перевірки знань

№ 7.5. Знайти максимум цільової функції $Z = 6x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10; \text{ де } x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2) \\ 2x_1 + x_2 \le 18, \end{cases}$$

Відповідь: 23,2.

№ 7.6. Розв'язати задачу ЛП симплексним методом:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

при обмеженнях: $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 - 2x_2 \le 0; \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

Відповідь: 2,75.

№ 7.7. Максимізувати лінійну функцію $Z = x_1 + 3x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_2 \le 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2; \\ x_{1-3} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 36,5.

№ 7.8. Розв'язати задачу ЛП симплексним методом і, якщо можливо, дати геометричну інтерпретацію процесу розв'язання:

а) $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

при обмеженнях: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 1; \\ x_1 - x_2 \ge -1; \\ 2x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

Відповідь: (0,6; 1,6); $Z_{\max} = 3{,}8$.

б) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 = 2 \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 0; 2; 0; 0); $Z_{\max} = 8$.

ТЕМА 8

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ШТУЧНОГО БАЗИСУ (М-МЕТОД)

Розв’язування розширених задачі ЛП за допомогою штучного базису (М-методу).

8.1. Теоретичні відомості

У попередніх ЗЛП, що розв’язувались симплекс-методом, усі обмеження мали знак „≤”, завдяки чому після зведення до канонічного виду у кожному рівнянні виявилася базисна змінна. Таким чином одразу ж знайдено початковий опорний план. У загальному випадку частина або навіть усі рівняння можуть не мати базисних змінних і їх можна відокремити за допомогою тотожних перетворень. Але, якщо система обмежень ЗЛП не містить одиничної матриці, з якої був би складений початковий базис (а таких задач більшість), доцільно застосувати інші методи розв’язування ЗЛП. Один із них є так званий ***метод штучного базису або М-метод***.

При розв’язуванні ЗЛП методом штучного базису в ті рівнянняобмеження, які не містять базисних змінних („природних” чи додаткових), вводять по одній ***штучній*** (невід’ємній) змінній $x_{n+i} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$. Для того, щоб виключити штучні змінні з базису, їх вводять у цільову функцію з достатньо великими від’ємними коефіцієнтами (–M) (при розв’язуванні задач на максимум). Тому ЗЛП зі штучними базисними змінними називають М-задачею.

Після виключення штучних змінних з базису при застосуванні симплекс-методу, у наступних таблицях відповідні стовпці також виключають. Штучні змінні назад у базис не вводяться. На відміну від додаткових змінних, штучні змінні потрібні тільки для створення початкового базису і не мають практичного економічного змісту. Якщо ж у оптимальному плані М-задачі залишиться штучна змінна, то відповідна вихідна задача не має розв’язку. Якщо в оптимальному плані М-задачі всі штучні змінні дорівнюють нулю ($x_{n+i}=0$ для всіх *i*), то відповідний розв’язок $\overline{X}=(x_1*;...;x_n*)$ є оптимальним розв’язком вихідної задачі.

У таблицях замість одного оцінкового (індексного) рядка можна вводити два: (*m+1)*-ший - для цільової функції *f*, (*m+2)*–гий – для $M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}$, і оцінка оптимальності перевіряється за двома рядками. Якщо штучні змінні з базису вже виведені, то відшукання оптимального плану продовжується з використанням лише першого рядка.

У випадку задачі на мінімізацію в цільовій функції штучні змінні мають коефіцієнти (+М).

8.2. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача 8.1. Знайти мінімум цільової функції $Z=5x_1+2x_2-3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5; \\ x_1+x_2-x_3=2; \\ 5x_1-8x_2+2x_3\geq 3, \quad \text{де} \quad x_j\geq 0 \quad (j=1,2,3). \end{cases}$$

Розв’язання. Зведемо задачу до канонічного виду:

$$f=-Z=-5x_1-2x_2+3x_3\rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5; \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2; \\ 5x_1-8x_2+2x_3-x_5=3, \\ x_j\geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5). \end{cases}$$

В базис можна ввести змінну x_4, тому що коефіцієнти при цій змінній утворюють одиничний вектор. Введемо штучні змінні x_6, x_7 в систему та цільову функцію:

$$f=-5x_1-2x_2+3x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7\rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 3, \\ x_j \geq 0 \ \left(j = 1,2,3,4,5,6,7\right) \end{cases}$$

Отже, отримали М-задачу. Перша ітерація записана в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Б1	***C_j***	0	-5	-2	3	0	0	-M	-M
	C_i	***b***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***	***x_7***
x_6	-M	5	2	-1	1	0	0	1	0
x_4	0	2	1	1	-1	1	0	0	0
x_7	-M	3	**5**	-8	2	0	-1	0	1
m+1 *m+2*		 -8M	5 -7M	2 +9M	-3 -3M	0	 M	0	0

В цій таблиці для визначення ключового рядка знаходимо найменше відношення вільних членів до відповідних елементів ключового рядка: $\min\left\{\frac{5}{2};\frac{2}{1};\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}$. Це число відповідає третьому рядку. Штучна змінна x_7 виводиться з базису і з таблиці (таблиці 8.2, 8.3).

Таблиця 8.2

Б2	***C_j***	0	-5	-2	3	0	0	-M
	C_i	***b***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***
x_6	-M	3,8	0	2,2	0,2	0	0,4	1
x_4	0	1,4	0	**2,6**	-1,4	1	0,2	0
X_1	-5	0,6	1	-1,6	0,4	0	-0,2	0
m+1 *m+2*		-3 -3,8M	0	10 -2,2M	-5 -0,2M	0	1 -0,4M	0

Таблиця 8.3

Б3	***C_j***	0	-5	-2	3	0	0	-M
	C_i	***b***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***
x_6	-M	2,62	0	0	**1,38**	-0,85	0,23	1
X_2	-2	0,54	0	1	-0,54	0,38	0,08	0
X_1	-5	1,46	1	0	-0,46	0,62	-0,08	0
m+1 *m+2*		-8,38 -2,62M	0	0	0,38 -1,38M	-3,86 0,85M	0,24 -0,29M	0

Штучна змінна x_6 виводиться з базису і з таблиці. Отримуємо таблицю 8.4.

Таблиця 8.4

Б4	C_i / C_i	0 / b	-5 / x_1	-2 / x_2	3 / x_3	0 / x_4	0 / x_5
X_3	3	1,90	0	0	1	-0,62	0,17
X_2	-2	1,57	0	1	0	0,05	0,17
X_1	-5	2,33	1	0	0	**0,34**	0
$m+1$		-9,09	0	0	0	-3,66	0,17

Таблиця 8.5

Б	C_i / C_i	0 / b	-5 / x_1	-2 / x_2	3 / x_3	0 / x_4	0 / x_5
X_3	3	6,15	1,52	0	1	0	0,17
X_2	-2	1,23	-0,15	1	0	0	0,17
X_4	0	6,85	2,94	0	0	1	0
$m+1$		15,99	10,76	0	0	0	0,17

Отриманий план (0; 1,23; 6,15; 6,85; 0) є оптимальним, причому $f_{\max} \approx 16$ або $Z_{\min} \approx -16$.

8.3. Питання для самоперевірки

1. Методика зведення загальної ЗЛП до канонічної форми.
2. Яка задача ЛП називається розширеною задачею? Поняття М-задачі.
3. Які змінні називаються штучними змінними? Який їхній економічний зміст?
4. Який базис називають штучним базисом?
5. Як побудувати першу симплексну таблицю для М-задачі?
6. Алгоритм розв’язування ЗЛП методом штучного базису.
7. Якими мають бути штучні невідомі в оптимальному плані М-задачі, щоб відповідний йому план вихідної задачі був оптимальним?
8. Необхідна умова оптимальності опорного плану при розв’язуванні М-задачі.

8.4. Ключові поняття

Алгоритм розв'язування ЗЛП	
Алгоритм симплексного методу розв'язування ЗЛП	
Базис штучний	План вихідний
Базисні змінні	План опорний
Допоміжні змінні	План припустимий
М-задача	Розширена задача ЗЛП
М-метод	Функція цільова
Метод штучного базису	Штучні змінні

8.5. Навчальні завдання

№ 8.1. Знайти мінімум цільової функції $Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 \geq 3, \end{cases} \quad \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3).$$

Відповідь: -16,1(6)≈-16,17.

№ 8.2. Розв'язати ЗЛП симплексним методом за допомогою штучного базису:

а) $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

б) $Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3) \end{cases}$$

в) $Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ x_2 \leq 2{,}5; \\ x_1 - 2x_2 \leq 2; \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

г) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 2; \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

Відповідь: а) (0,6; 1,6); $z_{\max} = 3{,}8$; в) (1,5; 2,5), $z_{\max} = 13{,}5$;

г) (1; 0; 2; 0; 1); $z_{\max} = 9$.

№ 8.3. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на 100 електроплит. Конструкторам запропоновано до випуску три моделі плит А, Б, В за ціною відповідно 100, 60 і 50 ум. гр. од. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей, запас сировини на фірмі наведено в табл. 8.6:

Таблиця 8.6

Сировина	Витрати сировини на одиницю виробу			Запас сировини
	А	Б	В	
І	10	4	5	700
ІІ	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей за критерієм максимуму прибутку фірми. Записати економіко-математичну модель задачі та розв'язати її.

Відповідь: (50; 50; 0; 0; 150); 8000 гр. од.

№ 8.4. Їдальня готує дієтичний салат, використовуючи для цього варений буряк, моркву і квашену капусту. Салат повинен містити не менш 710 одиниць речовини А, не менш 73 одиниці речовини В, не менш 3550 одиниць речовини С. Дані про вміст цих речовин в продуктах наведені в таблиці 8.7. Визначити складові частини салату при загальній мінімальній вартості.

Таблиця 8.7

Харчові речовини	Вміст речовин (г) у 1 кг овочів			Норми споживання речовин (кг)
	буряк	морква	капуста	
А	3	2	4	710
В	0,3	0,4	0,2	73
С	20	15	10	3550
Вартість овочів (грн)	0,4	0,5	0,4	

Відповідь:1 кг салату коштує 97 грн. Щоб вартість салату
була мінімальною його склад має бути таким:
буряк - 230 г, морква - 10 г, використовувати
капусту для приготування салату не рекомендується.

8.6. Завдання для перевірки знань

№ 8.5. а) Знайти максимум цільової функції $Z = 3x_1 - x_2 + x_3$ при

обмеженнях: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 18, \end{cases}$ де $x_j \ge 0$ $(j = 1,2,3)$.

Відповідь: 7,2.

б) Мінімізувати лінійну функцію $Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_6 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 510, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = -15$ в точці $(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2};0)$.

№ 8.6. Знайти мінімальне значення лінійної функції $Z = 2x_1 - 3x_2 + \frac{5}{2}x_3$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + x_4 + 3x_6 \ge 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge 12, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3). \end{cases}$

Відповідь: $z_{\min} = \frac{110}{9}$ в точці $(0;-\frac{10}{3};-\frac{8}{9})$.

№ 8.7. Розв'язати з допомогою штучного базису ЗЛП:

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ \quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Відповідь: X*=(0; 4/3; 0; 2); $f_{\max} = \frac{14}{3}$.

№ 8.8. Скласти добовий раціон мінімальної собівартості для корови масою 550 кг, добовим надоєм 15 літрів. Маса раціону не повинна перевищувати 70 кг. Набір кормів, їхня поживність, мінімальна норма поживних речовин у раціоні і собівартість кормів дано в табл. 8.8.

Таблиця 8.8

Харчові речовини	Кількість поживних речовин на 1 кг			Мінімальна норма харчових речовин в раціоні
	Озимого ячменю	Зеленого корму озимої пшениці	Люцерни	
Кормові одиниці, кг.	1,2	0,2	0,2	14,2
Перетравний протеїн, г.	80	18	35	1650
Собівартість 1 кг корму, грн.	10	1	1,05	

Відповідь: $x_1 = 0{,}202$; $x_2 = 47{,}595$; $x_3 = 22.203$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $Z_{\min} = 72{,}95$ грн.

№ 8.9. Для дійної корови скласти добовий раціон мінімальної собівартості. Всі необхідні показники дано в табл. 8.9.

Таблиця 8.9

Харчові речовини	Кількість поживних речовин на 1 кг		Мінімальна норма харчових речовин у раціоні
	Дерть кукурудзи	Сіно люцерни	
Кормові одиниці, кг	1,2	0,5	10
Перетравний протеїн, г	78	40	1020
Каротин, мг	4	50	400
Собівартість 1 кг корма, гр.	3,1	1,5	-

Відповідь: $x_1 = 9.35$; $x_2 = 7.26$; $x_3 = 4.86$ $x_5 = 0$; $x_6 = 0$ і $Z_{\min} = 39.88$ грн.

ТЕМА 9. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ ЗАДАЧ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ**

Дослідження залежностей між величинами, які фігурують у прикладних галузевих задачах, за допомогою методів лінійного програмування.

9.1. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 9.1. Максимальна площа, яку господарство може використати під посадку плодових дерев, складає 1000 га. На цій площі планується посадити три види дерев P_1, P_2, P_3. Господарство має три типи обмежених ресурсів: S_1 – орна земля; S_2 – трудові ресурси; S_3 – гроші та матеріали. Запаси ресурсів, витрати їх на 1 га посадок та ціна продукції з одного гектара відповідної культури задані таблицею 9.1:

Таблиця 9.1

Типи ресурсів	Види дерев			Запаси ресурсів
	P_1	P_2	P_3	
S_1	1	1	1	1 тис. га
S_2	100	60	200	200 тис. люд.-днів
S_3	400	200	800	600 тис. грн..
Ціна продукції з 1 га (тис. грн.)	3	2	5	

Треба знайти такі площі насаджень дерев кожного виду, які б забезпечували максимальний прибуток від реалізації одержаної продукції.

Розв'язання. 1. *Побудова математичної моделі.* Позначимо через x_1, x_2 і x_3 площі посадок дерев відповідно видів P_1, P_2, P_3. Оскільки загальна площа посадок не може перевищувати 1 тис. га, то

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1.$$

Обмеженість ресурсів дає такі нерівності:

$$100x_1 + 60x_2 + 200x_3 \le 200,$$
$$400x_1 + 200x_2 + 800x_3 \le 600.$$

Сумарна вартість виробленої продукції $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

2. Розв'яжемо ЗЛП симплексним методом. Спочатку запишемо задачу в канонічній формі, увівши додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, ..., 6\}.$$

Складемо симплексні таблиці 9.2.

Таблиця 9.2

C_i	**Б**	C_j	$\frac{0}{b}$	$\frac{3}{X_1}$	$\frac{2}{X_2}$	$\frac{5}{X_3}$	$\frac{0}{X_4}$	$\frac{0}{X_5}$	$\frac{0}{X_6}$	$\frac{bj}{q_{ij}}$
1 2 3	X_4 X_5 X_6	0 0 0	1 10 3	1 5 2	1 3 1	1 10 **4**	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 1 3/4
m+1 (Δ_j)			0	-3	-2	-5	0	0	0	
1 2 3	X_4 X_5 X_3	0 0 5	1/4 5/2 3/4	1/2 0 1/2	**3/4** 1/2 1/4	0 0 1	1 0 0	0 1 0	-1/4 -5/2 ¼	1/3 5 3
m+1 (Δ_j)			15/4	-1/2	-3/4	0	0	0	5/4	
1 2 3	X_2 X_5 X_3	2 0 5	1/3 7/3 2/3	2/3 -1/3 1/3	1 0 0	0 0 1	4/3 -2/3 -1/3	0 1 0	-1/3 -7/3 1/3	
m+1 (Δ_j)			4	0	0	0	1	0	1	

Оскільки у першій симплексній таблиці серед Δ_j є від'ємні, то початковий опорний план не є оптимальним. Максимальне за абсолютною величиною $\Delta_3 = -5$ (найменший від'ємний індекс), а тому треба ввести до базису вектор X_3. Вивести з базису треба вектор X_6, бо $\min \frac{b_j}{q_{ij}}$ = min (1/1, 10/10, 3/4)=3/4, *i*=3. Ці дані можна записати в останній стовпчик табл. 9.2. Далі робимо перерахунок за правилом „прямокутника", взявши за провідний елемент $(x_6;x_3)=4$.

У другій симплексній таблиці найбільшим за абсолютною величиною серед від'ємних Δ_j є $\Delta_3 = -\frac{3}{4}$. Це означає, що провідним є другий стовпчик, а провідним рядком є перший, бо $\min \frac{b_j}{q_{ij}}$ = min (1/3, 5, 3) = 1/3, *i*=1. Отже, до базису треба включити вектор X_2, а вивести X_4. Переходимо до нової таблиці, зробивши перерахунок за правилом „прямокутника", взявши за провідний елемент $(x_4;x_2)=3/4$.

У третій симплексній таблиці всі $\Delta_j \geq 0$, а це означає, що план оптимальний.

Таким чином, оптимальний план $X^*=(0, 1/3, 2/3)$, а $f_{max}=4$. Звідси випливає, що для одержання максимального прибутку від реалізації продукції, одержаної від багаторічних насаджень, треба під дерева виду P_2 відвести 1/3 тис. га, під дерева виду P_3 – 2/3 тис. га. Тоді сумарна вартість одержаної продукції досягне максимального значення

$f_{max}=4$ тис. грн.

Задача 9.2. Підприємство виготовляє верстати двох типів і двигуни до них. Скласти оптимальний план виготовлення продукції по критерію максимуму прибутку від реалізації усіх верстатів, якщо їх загальна кількість не може бути менше п'яти. Вихідні дані наведені у табл. 9.3.

Розв'язання. Математична модель задачі у загальній формі має вигляд:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Таблиця 9.3

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	Верстат №1	Верстат №2	Двигуни	
Сировина №1	4	2	1	25
Сировина №2	2	1	3	30
Прибуток від реалізації одиниці продукції	4	3	–	–

Зведемо до канонічного вигляду:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + \boxed{x_4} = 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \boxed{x_5} = 30 \\ x_1 + x_2 - x_6 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Обведемо базисні змінні у перших двох рівняннях. У ліві частини третього і четвертого рівнянь вводимо штучні базисні змінні і складаємо М-задачу:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 - Mx_8 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + \boxed{x_4} = 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \boxed{x_5} = 30 \\ x_1 + x_2 - x_6 + \boxed{x_7} = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \boxed{x_8} = 0 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,8}.$$

Далі розв'язуємо задачу симплексним методом (Таблиця 9.4).

Таблиця 9.4

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	-M	-M	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		Б$_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
	0	x_4	25	4	2	1	1	0	0	0	0	6,25
	0	x_5	30	2	1	3	0	1	0	0	0	15
	-M	x_7	5	1	1	0	0	0	-1	1	0	5
←	-M	x_8	0	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	0	0	1	0
	Δ_j		-5M	-2M-4	-2M-3	M	0	0	M	0	0	–
				↑								

Доки в опорному плані залишаються штучні змінні, він не має практичного змісту.

Штучну змінну x_8 виключаємо з базису і відповідний стовпчик з наступної таблиці 9.5.

Таблиця 9.5

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	-M	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_2$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	0	x_4	25	0	-2	5	1	0	0	0	5
	0	x_5	30	0	-1	5	0	1	0	0	6
←	-M	x_7	5	0	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	5
	4	x_1	0	1	1	-1	0	0	0	0	–
	Δ_j		-5M	0	1	-M-4	0	0	M	0	–
						↑					

Штучну змінну x_7 виключаємо з базису і відповідний стовпець з наступної таблиці 9.6.

Таблиця 9.6

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_3$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
←	0	x_4	0	0	-2	0	1	0	$\boxed{5}$	0
	0	x_5	5	0	-1	0	0	1	5	1
	0	x_3	5	0	0	1	0	0	-1	–
	4	x_1	5	1	1	0	0	0	-1	–
	Δ_j		20	0	1	0	0	0	-4	–
									↑	

$$X^3 = (5;\ 0;\ 5;\ 0;\ 5;\ 0),\ \ f_3 = 20.$$

Далі задачу розв’язуємо звичайним чином.

Таблиця 9.7

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_4$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	x_6	0	0	-0,4	0	0,2	0	1	-
←	0	x_5	5	0	$\boxed{1}$	0	-1	1	0	5
	0	x_3	5	0	-0,4	1	0,2	0	0	–
	4	x_1	5	1	0,6	0	0,2	0	0	$8\frac{1}{3}$
	Δ_j		20	0	-0,6	0	0,8	0	0	0
					↑					

$$X^4 = (5; 0; 5; 0; 5; 0), \ f_4 = 20.$$

Таблиця 9.8

C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0
	$Б_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_6	2	0	0	0	-0,2	0,4	1
3	x_2	5	0	1	0	-1	1	0
0	x_3	7	0	0	1	-0,2	0,4	0
4	x_1	2	1	0	0	0,8	-0,6	0
Δ_j		23	0	0	0	0,2	0,6	0

$$X^{опт} = X^5 = (2; 5; 7; 0; 0; 2), \ f_{max} = f_5 = 23.$$

Таким чином необхідно виготовити 2 верстати першого і 5 верстатів другого типу, а також 7 двигунів до них. При такому плані прибуток від їх реалізації буде максимальним і складе 23 грошових одиниці.

При цьому сировина обох видів буде використана без залишків ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$), а перевиконання плану виготовлення верстатів складе $x_6 = 2$. Детальнішій аналіз наведено у табл. 9.9.

Таблиця 9.9

Види сировини	Витрати сировини на виготовлення продукції			Всього	Вид обмеження	Обсяг обмеження	Залишки і надлишки
	Верстат №1	Верстат №2	Двигуни				
Сировина №1	8	10	7	25	≤	25	0
Сировина №2	4	5	21	25	≤	30	0
Планова кількість верстатів	2	5	–	7	≥	5	2
Відповідність кількості двигунів і верстатів	2	5	-7	0	=	0	0
Прибуток від реалізації всієї продукції	8	15	–	23	–	–	–

9.2. Навчальні завдання

№ 9.1. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на електроплити. Конструкторам запропоновано до випуску три моделі плит А, Б, В за ціною відповідно 100, 60 і 50 ум.

гр. од. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей, запас сировини на фірмі наведено в табл. 9.10.

Таблиця 9.10

Сировина	Витрати сировини на одиницю виробу			Запас сировини
	А	Б	В	
I	10	4	5	700
II	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей за критерієм максимуму прибутку фірми. Записати економіко-математичну модель задачі та розв'язати її.

Відповідь: (0; 175; 0); 10500 гр. од.

№ 9.2. Знайти оптимальне поєднання посівів пшениці і картоплі, що максимізують дохід, на площі 8000 га, якщо економічні показники їх виробництва задано в табл. 9.11:

Таблиця 9.11.

Види ресурсів	Затрати на 1 га посівів		Об'єм ресурсів
	пшениці	картоплі	
Механізована праця, тр.-зм.	0,6	4,6	1000
Конно-ручна праця, люд,-дн.	2	22	50000
Урожайність, ц/га	20	100	-
Прибуток, тис. гр.од./ц	0,3	0,1	-

Відповідь: 6696,65 га, 1303,348 га, 53213.39 гр. од.

№ 9.3. Скласти план посівів пшениці та кукурудзи, який забезпечує максимальний збір зерна за вихідними даними в табл. 9.12.

Таблиця 9.12

Ресурси	Затрати ресурсів на 1 га посівів		Обсяги ресурсів
	пшениця	кукурудза	
Пашня, га	1	1	800
Витрати праці, люд. /дні	2	34	2300
Добрива, ц / га	2,2	1,2	1420
Урожайність, ц / га	36	45	

9.3. Завдання для перевірки знань

№ 9.4. Знайти оптимальне поєднання посівів кукурудзи і гороху з максимальною вартістю валової продукції, якщо економічні показники їхнього виробництва наведені в табл. 9.13.

Таблиця 9.13

Виробничі ресурси	Витрати на 1 ц		Об'єм ресурсів
	кукурудзи	гороху	
Пашня, га.	0,025	0,05	1200
Ручна праця, люд./дн., тр./зм.	0,16	0,074	6000
Механізована праця, тр./зм.	0,064	0,037	2500
Ціна реалізації 1ц, тис. гр. од.	5,5	10	-

Відповідь: 34341,463 ц, 6829.27 ц, 257170,73 тис. гр. од.

№ 9.5. Для виготовлення чотирьох видів продукції (А, Б, В, Г) використовується три види сировини (I, II, III). Інші умови задачі задано в табл. 9.14. Визначити план випуску продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальною.

Таблиця 9.14

Ресурси	Запас ресурсів, од.	Норми витрат сировини на одиницю продукції, од.			
		А	Б	В	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	1	0	6	1
Прибуток від реалізації продукції, гр. од.		7,5	3	6	12

№ 9.6. Відомо, що 1 кг вишні містить 150 мг, а 1 кг абрикос – 75 мг вітаміну С. Скільки вишні і скільки абрикос потрібно включити в денний раціон, щоб при мінімальних витратах у ньому виявилось 75 мг вітаміну С і не менше 0,25 кг вишні, якщо 1 кг вишень коштує 3 гр. од., а 1 кг абрикос - 4 гр. од.?

ТЕМА 10

ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Формулювання двоїстих задач ЛП з умов вихідної задачі, яка представлена в канонічній формі, й отримання оптимального розв'язку двоїстої пари задач за допомогою графічного та симплекс – методу. Післяоптимізаційний аналіз розв'язку ЗЛП.

10.1. Теоретичні відомості

10.1.1. Математичні моделі двоїстих задач

Безпосереднє застосування теорії двоїстості до обчислювальних алгоритмів лінійного програмування позволило розробити ще один метод розв'язування ЗЛП, який отримав назву двоїстого симплекс-метода, або метода послідовного уточнення оцінок. Вперше він був запропонований Лемке у 1954 році. Поняття двоїстості є виключно важливим не лише в теоретичному відношенні, але являє також великий практичний інтерес, тому що використовується при розробці ефективних методів аналізу на чутливість. Спільний розгляд пар двоїстих задач дозволяє досліджувати вплив керованих і некерованих змінних на значення цільової функції, проводити економічний аналіз результатів розрахунку ЗЛП Двоїста задача - це допоміжна задача лінійного програмування, яка формулюється за допомогою певних правил безпосередньо з умов вихідної (або прямої) задачі.

Нехай пряма задача задана в *канонічній* формі:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{m} A_{ij} X_j = B_j, \quad X_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$.

Тоді двоїста до неї матиме вигляд:

$$\min\ f = \sum_{i=1}^{n} B_i Y_i$$

при обмеженнях $\sum_{i=1}^{m} A_{ji} Y_i \ge C_i, \quad j = \overline{1,n}$; Y_i - довільні.

Умови двоїстої задачі формуються відповідно до табл. 10.1:

Таблиця 10.1

Пряма задача в канонічній формі	Двоїста задача		
	Цільова функція	Обмеження	Змінні
Максимізація Мінімізація	Мінімізація Максимізація	$\ge$ $\le$	не обмежені в знакові

Якщо вихідна задача задана в *загальній* формі, то умови двоїстої задачі формуються відповідно до табл. 10.2:

Таблиця 10.2

Пряма задача в загальній формі	Двоїста задача
$\max z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$;	$\min\ f = \sum_{i=1}^{n} B_i Y_i$;
$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} X_j \le B_j,\ i = \overline{1,m}$	$Y_i \ge 0$;
$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} X_j = B_j,\ i = \overline{1,m}$;	Y_i - довільні;
$X_j \ge 0$;	$\sum_{i=1}^{m} A_{ji} Y_i \ge C_i, \quad j = \overline{1,n}$;
X_j - довільні;	$\sum_{i=1}^{m} A_{ji} Y_i = C_i, \quad j = \overline{1,n}$.

Дві задачі двоїстості є парою взаємно двоїстих задач. Двоїсті задачі ЛП бувають симетричні та несиметричні. Пару двоїстих задач називають ***симетричною***, якщо усі обмеження в них є нерівностями, а усі змінні невід’ємні У *несиметричних* задачах обмеження вихідної задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої – лише нерівностями, причому змінні двоїстої задачі будуть не обмежені в знакові.

Узагальнюючи, запишемо математичні моделі всіх двоїстих задач (табл. 10.3):

Таблиця 10.3

	Вихідна задача	**Двоїста задача**
	Несиметричні задачі	
1.	$f_{\min} = \Sigma c_{ji} x_j,$ $\Sigma a_{ij} x_j = b_j,$ $x_j \geq 0.$	$z_{\max} = \sum b_{ji} y_j,$ $\sum a_{ij} y_j \leq c_i,$ $y_i \in R.$
2.	$f_{\max} = \Sigma c_{ji} x_j,$ $\Sigma a_{ij} x_j = b_j,$ $x_j \geq 0.$	$z_{\min} = \sum b_{ji} y_j,$ $\sum a_{ij} y_j \geq c_i,$ $y_i \in R.$
	Симетричні задачі	
3.	$f_{\min} = \sum c_{ji} x_j,$ $\sum a_{ij} x_j \geq b_j,$ $x_j \geq 0.$	$z_{\max} = \Sigma b_{ji} y_j,$ $\Sigma a_{ij} y_j \leq c_i,$ $y_j \geq 0.$
4.	$f_{\max} = \Sigma c_{ji} x_j,$ $\Sigma a_{ij} x_j \leq b_j,$ $x_j \geq 0.$	$z_{\min} = \Sigma b_{ji} y_j,$ $\Sigma a_{ij} y_j \geq c_i,$ $y_j \geq 0.$

Симетричні двоїсті задачі мають такі *властивості*:

1. В одній задачі відшукують максимум цільової функції, в іншій – мінімум.

2. Коефіцієнти при змінних в цільовій функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень в іншій.

3. Кожна із задач задана у стандартній формі, а саме: в задачах на максимум всі нерівності виду „≤”, а в задачі на мінімум – всі нерівності виду „≥”.

4. Матриці коефіцієнтів при змінних у системах обмежень є транспонованими одна до одної.

5. Число нерівностей у системі обмежень однієї задачі дорівнює числу змінних у іншій задачі.

6. Умова невід'ємності змінних є в обох задачах.

7. Якщо на *j*-ту змінну прямої задачі накладена умова невід'ємності, то *j*-те обмеження двоїстої задачі буде нерівністю; якщо *j*-та змінна прямої задачі не обмежена умовою невід'ємності, то *j*-те обмеження двоїстої задачі буде рівнянням.

10.1.2. Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Теореми двоїстості

1. Якщо одна із двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має й інша задача. Оптимальні значення їхніх цільових функцій рівні: $\max Z = \min F$ і навпаки (***перша*** (основна) ***теорема двоїстості***). Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то умови іншої задачі суперечливі (друга задача не має розв'язків).

Економічний зміст першої теореми двоїстості полягає у наступному: якщо задача визначення оптимального плану, який максимізує випуск продукції, має розв'язок, то має розв'язок і задача визначення оцінок ресурсів. Причому ціна продукту, що отриманий у результаті реалізації оптимального плану, співпадає із сумарною оцінкою ресурсів.

2. Рівності цільових функцій для відповідних розв'язків пари двоїстих задач достатньо, щоб ці розв'язки були оптимальними. Це означає, що план виробництва і вектор оцінок ресурсів будуть оптимальними тоді і лише тоді, коли ціна виготовленої продукції і сумарна оцінка ресурсів співпадають. Отже, двоїсті оцінки виступають як інструмент збалансованості витрат і результатів.

3. Двоїсті оцінки гарантують рентабельність оптимального плану , тобто рівність загальної оцінки продукції та ресурсів зумовлює збитковість будь-якого іншого плану, що відрізняється від

оптимального. Двоїсті оцінки дозволяють порівнювати та балансувати витрати та результати системи.

4. Відповідність між початковими змінними однієї із задач і додатковими змінними іншої задачі можна задати таблицею 10.4.

Таблиця 10.4

Змінні вихідної задачі							
Початкові				Додаткові			
x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+n}	y_1	y_2	...	y_m
$\Delta_1 *$	$\Delta_2 *$	...	$\Delta_n *$	$\Delta_{n+1} *$	$\Delta_{n+2} *$	...	$\Delta_{n+m} *$
Додаткові				Початкові			
Змінні двоїстої задачі							

Отже, розв'язуючи симплексним методом одну із двоїстих задач, ми автоматично отримуємо розв'язок іншої. Для цього достатньо скористатися табл. 10.4 для останньої симплекс-таблиці.

Звідси отримуємо оптимальний план двоїстої задачі. Якщо пряма задача розв'язується на максимум, то

$$y_1 * = \Delta_{n+1} *;\ \ y_2 * = \Delta_{n+2} *;\ \ldots;\ y_m = \Delta_{n+m} *;$$
$$y_{m+1} * = \Delta_1 *;\ \ y_{m+2} * = \Delta_2 *;\ \ldots;\ y_{m+n} * = \Delta_n *.$$

Якщо пряма задача розв'язується на мінімум, то

$$y_i * = -\Delta_{n+i} *\ (i = \overline{1,m});\ \ y_{m+j} * = -\Delta_j * (j = \overline{1,n})$$

3. Якщо пряма ЗЛП має оптимальний план X*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y* визначається зі співвідношення $\mathrm{Y}^* = \bar{c}_{баз} D^{-1}$, де $\bar{c}_{баз}$ - вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані. При цьому порядок слідування його координат визначається порядком запису базисних змінних у останній симплекс-таблиці (табл. 10.4);

D^{-1} - матриця, обернена до матриці D, що складена з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих ЗЛП знаходять розв'язок іншої.

4. Д***руга теорема двоїстості***. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$, то відповідний *i*-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю, тобто для будь-якого *i* виконується рівність: $\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{опт} \right) \cdot y_i^{опт} = 0$.

Економічна інтерпретація цієї умови така: якщо в оптимальному плані задачі розподілу ресурсів частина ресурсу b_i залишається невикористаною, то його ефективність (двоїста оцінка, тіньова ціна) стає нульовою.

Якщо *i*-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j$, то відповідне *i*-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння: $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^{опт} - c_j \right) \cdot x_j^{опт} = 0$. Економічний зміст цієї умови такий. Якщо *j*-тий технологічний процес виявляється невигідним, то в оптимальному плані прямої задачі його треба виключити.

Умови другої теореми двоїстості називають умовами доповнюючої нежорсткості.

5. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження (***третя теорема двоїстості***).

Економічний зміст третьої теореми двоїстості: відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Таким чином, за допомогою теорем двоїстості можна, розв'язавши симплекс-методом пряму задачу, знайти оптимальний розв'язок двоїстої, і, навпаки. Метод, при якому спочатку симплексним методом розв'язується двоїста задача, а потім оптимальний розв'язок прямої задачі відшукується за теоремами двоїстості, називається *двоїстим симплексним методом*.

Отже, якщо вихідна задача полягає у визначенні оптимального плану випуску продукції за даними обмеженнями ресурсів сировини, що забезпечує максимум товарної продукції, то двоїста задача полягає у визначенні оцінок одиниці кожного з ресурсів за умови мінімальної їх сумарної вартості.

10.1.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі

Теореми двоїстості дають можливість дати економічне тлумачення двоїстої задачі.

1. В прямій задачі кожен коефіцієнт цільової функції c_j являє собою величину прибутку, який з'явиться від реалізації *j*-го виду продукції ($j = \overline{1,n}$);

b_i $(i = \overline{1,m})$ – запаси сировини *i*-го виду, що використовується для виготовлення одиниці *j*-го виду продукції;

x_{ij} - кількість одиниць *j*-го виду продукції, яку потрібно виготовити;

цільова функція *f* характеризує прибуток, загальну вартість усіх ресурсів, і має розмірністю гроші.

З того, що $f_{\max} = z_{\min}$ випливає, що розмірністю y_i $(i = \overline{1,m})$ є $\frac{гроші}{об'єми\ ресурсів}$, тобто *цінність* *i*-го ресурсу. Тому двоїсті оцінки називають ще *тіньовими цінами*.

2. За допомогою двоїстих оцінок можна визначити *статус* кожного ресурсу прямої задачі.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, умовно поділяють на *дефіцитні* та *недефіцитні* в залежності від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі.

Якщо $y_i > 0$, то *i*-тий ресурс *використовується повністю* і є *дефіцитним*. Якщо $y_i = 0$, то *i*-тий ресурс *використовується не повністю* і є *недефіцитним*.

3. Двоїсті змінні показують *міру* дефіцитності ресурсів, вони чисельно дорівнюють зміні цільової функції при зміні відповідного ресурсу на одиницю.

4. Додаткові двоїсті змінні є мірою збитковості продукції, яку, відповідно до оптимального плану, недоцільно випускати.

5. За допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі можна визначити *рентабельність* продукції, що виготовляється.

Ліва частина *j*-го обмеження являє собою вартість усіх ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці *j*-го виду продукції. Якщо вона більша за c_j, то виробництво *нерентабельне*, і тому в прямій задачі ЛП $x_j = 0$. Якщо ж вона дорівнює c_j, то виробництво *рентабельне*, і в оптимальному плані $x_j > 0$.

10.1.4. Післяоптимізаційний аналіз ЗЛП

Актуальність теорії двоїстості полягає в тому, що вона складає основу методів аналізу лінійних моделей на чутливість. Після отримання оптимального розв'язку ЗЛП виникають задачі дослідження чутливості цього розв'язку на певні зміни параметрів вихідної моделі.

У рамках аналізу на чутливість розв'язуються такі три задачі: 1) аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень; 2) аналіз ступеня дефіцитності ресурсів; 3) аналіз розв'язку ЗЛП на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції (ЦФ).

1. Перша задача на чутливість: до зміни правих частин обмежень. Вона дає відповіді на запитання: на скільки доцільно збільшити або скоротити запаси ресурсів? На яку величину можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення отриманого оптимального значення ЦФ? На яку величину можна зменшити запас деякого ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення ЦФ?

Оскільки величина запасу кожного з ресурсів фіксується в правих частинах обмежень, то цей вид аналізу називають ще аналізом на чутливість до правих частин (обмежень).

Обмеження лінійної моделі поділяються на *активні (зв'язні)* та *неактивні (незв'язні)*.

Якщо деякі обмеження є *зв'язними*, то ресурс, який йому відповідає, відноситься до *дефіцитних* ресурсів, оскільки він витрачається повністю.

Ресурс, з яким асоціюється *незв'язне* обмеження, відноситься до розряду *недефіцитних* ресурсів, тобто наявних у деякому надлишку.

Отже, аналіз на чутливість розв'язку до правих частин обмежень дає можливість визначити такі величини: 1) гранично допустиме *збільшення* запасу *дефіцитного* ресурсу, що дозволяє *поліпшити* раніше знайдений оптимальний розв'язок; 2) гранично допустиме *зниження* запасу *недефіцитного* ресурсу, що *не змінює* знайденого раніше значення ЦФ. Тоді надлишки недефіцитного ресурсу можуть бути використані для інших цілей (Задача 9.3 п. 9.2; п. 9.3).

2. Друга задача на чутливість: оцінка дефіцитності ресурсів. Вона дає відповіді на запитання: збільшення якого з ресурсів є найбільш вигідним?

Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення ЦФ. Таку характеристику можна одержати безпосередньо за результатами першої задачі на чутливість.

Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу *i*-го виду через y_i, її визначають із співвідношення тіньової ціни: $y_i = \frac{\Delta f_i}{\Delta b_i}$, де Δb_i - приріст запасу *i*-го виду ресурсу, Δf_i - приріст ЦФ, що зумовлений збільшенням *i*-го ресурсу на величину Δb_i.

3. Третя задача на чутливість: до зміни коефіцієнтів ЦФ. Визначає, в яких межах є допустимі зміни коефіцієнтів ЦФ, при яких оптимальний план не зміниться.

Зміна коефіцієнтів ЦФ впливає на нахил прямої ЦФ. Тому варіація коефіцієнтів ЦФ може призвести до зміни сукупності зв’язних обмежень, статусу якогось ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки). Отже, можуть виникнути такі питання: а) Яким є діапазон зміни (збільшення або зменшення) якогось коефіцієнта ЦФ, при якому не зміниться оптимальний розв’язок? Б) На скільки варто змінити той чи інший коефіцієнт ЦФ, щоб зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки?

Аналіз на чутливість розв'язку, що отриманий симплекс-методом, описано вище (п. 10.1.3) та в п. 10.2 (задача 10.3). Геометричне тлумачення післяоптимізаційного аналізу розв'язку наведено в п. 10.3.

10.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 10.1. Побудувати модель двоїстої ЗЛП.

Пряма задача: $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max$

при обмеженнях:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Зводимо до канонічної форми: $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max$

при обмеженнях:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8,$$
$$x_1.x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Двоїста задача: $f = 10y_1 + 8y_2 \to \min$

при обмеженнях:
$$y_1 + 2y_2 \ge 5,$$
$$2y_1 - y_2 \ge 12,$$
$$y_1. + 3y_2 \ge 4,$$
$$y_1 + 0y_2 \ge 0.$$

y_1, y_2 - не обмежені в знаках.

Задача 10.2. Побудувати двоїсту задачу до даної:

$$\min z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \end{cases}$$
$$.x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Розв'язання. Упорядкуємо спочатку запис задачі – нерівності мають бути смислу „≥", оскільки цільова функція мінімізується. Для цього другу нерівність помножимо на -1 і запишемо двоїсту задачу:

$$\max f = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1, \\ -2y_1 - 3y_2 = -2, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 = -1, \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \le 1, \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0.$$

Друге і четверте обмеження виражені у вигляді рівнянь, тому що відповідні їм змінні x_2, x_4 не мають умови невід'ємності. Умови невід'ємності у двоїстій задачі стосуються лише змінних y_2, y_3, оскільки у прямій задачі їм відповідають обмеження у вигляді нерівностей.

Задача 10.3. Для виготовлення чотирьох видів продукції використовують три види сировини. Запаси сировини, норми її витрат і прибуток від реалізації кожного продукту наведені в табл. 10.5.

Таблиця 10.5

Тип сировини	Норми витрат				Запаси сировини
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Ціна виробу	9	6	4	7	

Потрібно:

1. Сформулювати пряму оптимізаційну задачу на максимум загальної собівартості, указати оптимальну виробничу програму.

2. Сформулювати двоїсту задачу і знайти її оптимальний план.

3. Проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані.

4. Визначити, як зміниться загальна вартість продукції й план випуску при збільшенні запасів сировини II й III видів на 120 та 160

одиниць відповідно й одночасному зменшенні запасів сировини І виду на 60 одиниць.

5. Визначити доцільність включення у план виробництва продукції виду «Д» ціною 12 грошових одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду сировини.

Розв'язання.

1. Нехай $x_1; x_2; x_3; x_4$ - планові обсяги виробництва продукції кожного виду. Тоді математична модель ЗЛП така:

Цільова функція: $\max f(\overline{x}) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$.

Функціональні обмеження:
$$\begin{aligned} &x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ &0x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ &4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 \le 800. \end{aligned}$$

Додаткові (прямі) обмеження: $x_{1,2,3,4} \ge 0$.

При розв'язуванні задачі на максимум загальної собівартості отримали такі результати: $x_1 = 95$; $x_2 = 210$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$.

Оптимальна виробнича програма передбачає випуск 95 одиниць першої продукції, 210 одиниць другої продукції, 0 одиниць третьої продукції та 0 одиниць четвертої продукції.

Третій і четвертий вид продукції випускати не вигідно, тому що затрати перевищують ціну.

2. Сформулюємо двоїсту задачу і знайдемо її оптимальний план. Нехай $y_1; y_2; y_3$ - двоїсті оцінки типів ресурсів відповідно.

Цільова функція: $\min z(\overline{y}) = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3$

Функціональні обмеження:
$$\begin{aligned} &y_1 + 0y_2 + 4y_3 \ge 9, \\ &0y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 6, \\ &2y_1 + 3y_2 + 0y_3 \ge 4, \\ &y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 7. \end{aligned}$$

Додаткові (прямі) обмеження: $y_{1,2,3} \ge 0$.

Знайдемо оптимальний план цієї задачі, використовуючи теорему двоїстості:

$$\max f(\overline{x}) = 95 \cdot 9 + 210 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 2115.$$

Перш за все, перевіримо, чи є вказаний в умові задачі план допустимим розв'язком:

по ресурсу I: $1 \cdot 95 + 0 \cdot 210 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 180$,

по ресурсу II: $0 \cdot 95 + 1 \cdot 210 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 210$,

по ресурсу III: $4 \cdot 95 + 2 \cdot 210 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 800$.

Отже, план оптимальний. Ресурс I залишається в надлишку, а ресурси II й III витрачаються повністю.

Скористаємося співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0, \qquad y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0.$$

Оскільки $x_1 > 0$ та $x_2 > 0$, то

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_3 &= 9, \\ y_2 + 2y_3 &= 6, \\ y_1 &= 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= \frac{3}{2}, \\ y_3 &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Обчислимо значення цільової функції двоїстої задачі:

$$z(\overline{y}) = 180 \cdot 0 + 210 \cdot \frac{3}{2} + 800 \cdot \frac{9}{4} = 2115,$$

тобто наведений в умові план є оптимальним.

3. Проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані. Ресурс I є недефіцитним ($y_1 = 0$). Ресурси II й III є дефіцитними, причому ресурс III більш дефіцитний, ніж ресурс II ($y_3 = \frac{9}{4},\ y_2 = \frac{3}{2},\ y_3 > y_2$).

Знайдемо норму замінюваності для дефіцитних ресурсів: $y_3 : y_2 = \frac{9}{4} : \frac{3}{2} = 3 : 2$, отже, ресурс III в 1,5 рази ефективніший, ніж ресурс II з точки зору впливу на максимум продукції.

4. Визначимо, як зміниться загальна вартість продукції та план випуску при збільшенні запасів сировини II й III видів на 120 та 160 одиниць відповідно й одночасному зменшенні запасів сировини I виду на 60 одиниць Будемо вважати, що дані зміни об'ємів ресурсів знаходяться в межах стійкості оптимального розв'язку (в межах стійкості двоїстих оцінок), тоді за третьою теоремою двоїстості маємо:

$$\Delta f(\bar{x}) = (\Delta b_i) y_i,$$

$$\Delta f(\bar{x}) = (+120)\cdot\frac{3}{2} + (+160)\cdot\frac{9}{4} + (-60)\cdot 0 = 540,$$

$$f(\bar{x}) = 2655.$$

Запишемо вихідну й двоїсту ЗЛП зі зміненими обсягами ресурсів.

Вихідна:

$$\max f(\bar{x}) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 120, \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\le 330, \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 &\le 960, \end{aligned}$$

$$x_{1,2,3,4} \ge 0.$$

Двоїста:

$$\min z(\bar{y}) = 120y_1 + 330y_2 + 960y_3,$$

$$\begin{aligned} y_1 + 0y_2 + 4x_3 &\ge 9, \\ 0y_1 + y_2 + 2x_3 &\ge 6, \\ 2y_1 + 3y_2 + 0x_3 &\ge 4, \\ y_1 + 2y_2 + 4x_3 &\ge 7, \end{aligned}$$

$$y_{1,2,3} \ge 0.$$

Скористаємося співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0, \qquad y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0.$$

Розглянемо перші співвідношення (їх два):

$0 + 4\cdot\frac{9}{4} = 9$, отже, про x_1 нічого сказати не можна.

$\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\cdot 2 = 6$, отже, про x_2 нічого сказати не можна.

$2\cdot 0 + \frac{3\cdot 3}{2} \ne 4$, $x_3 = 0$ (витрати більші від ціни),

$0\cdot 2 + \frac{3}{2} + 4\cdot\frac{9}{4} \ne 7$, $x_4 = 0$ (витрати більші від ціни).

Розглянемо другі співвідношення:

$y_1 = 0$, - нічого сказати не можна,

$y_2 = \frac{3}{2}$, - друге обмеження перетворюється у рівність.

$x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 330$,

$y_3 = \frac{9}{4}$, - третє обмеження перетворюється у рівність.

$4x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 960$.

Запишемо систему рівнянь та розв'яжемо її:

$$\begin{array}{lcl} x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 330, & & x_{14} = 75, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 960, & \Rightarrow & x_2 = 330, \\ x_3 = 0, & & x_3 = 0, \\ x_4 = 0, & & x_4 = 0, \end{array}$$

ЦФ: $f(x) = 9 \cdot 75 + 6 \cdot 330 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 2655$.

Це співпадає з висновком, який було зроблено раніше на основі теореми про оцінки.

5. Визначимо доцільність включення у план виробництва продукції виду «Д». Це завдання виконується на основі третьої властивості двоїстих оцінок, тобто оцінки як означення ефективності.

Розрахуємо показник ефективності для цієї продукції:

$$\Delta_4 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{9}{4} - 12 = -4{,}5 < 0,$$

отже, дану продукцію випускати доцільно (витрати менші від ціни).

Задача 10.4. Чи є для даної задачі ЛП

$$z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1{,}3}.$$

оптимальним запропонований план x = (0; 1/5; 8/5)?

Розв'язання. Розв'язання задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Потрібно побудувати двоїсту задачу, і в припущенні, що даний план X є оптимальним, знайти оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Якщо при цьому оптимуми обох цільових функцій співпадуть, то припущення правильне. В протилежних випадках може бути наступне: а) даний план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі; б) визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі; в) визначений план двоїстої задачі допустимий, але при цьому $f_{опт} \neq z_{опт}$, отже, не виконується перша теорема двоїстості.

Складемо двоїсту задачу до даної ЗЛП: $\max f = y_1 + 2y_2$,

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4, \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$
$$y_1 \in \mathrm{R}, \quad y_2 \ge 0.$$

Перевіримо даний план на оптимальність. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі: 2·0-3·1/5+8/5=1; 0+2·1/5+8/5=2.

Обидва обмеження виконуються і тому план x = (0; 1/5; 8/5) є допустимим. Припустимо тепер, що він є оптимальним, тоді для нього $z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot {}^1\!/_5 + 2 \cdot {}^8\!/_5 = {}^{12}\!/_5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_2 та x_3 додатні, то друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4, \\ y_1 + y_2 = 2, \end{cases} \text{, звідки } \begin{cases} y_1 = {}^8\!/_5, \\ y_2 = {}^2\!/_5. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в перше обмеження системи двоїстої задачі: 2·8/5+2/5=18/5<12.

Оскільки це обмеження виконується, то план Y=(8/5; 2/5) є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього $f = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5$.

Отже, екстремальні значення цільових функцій прямої та двоїстої задач збіглися, тому наше припущення оптимальності відносно даного плану виявилося правильним.

Задача 10.5. Знайти розв'язок наступної задачі шляхом графічного аналізу двоїстої задачі:

$$f = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 \to \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Двоїста задача запишеться у вигляді:

$$z = 16y_1 + 4y_2 - 16 \to \min,$$
$$\begin{cases} 4y_1 + 6y_2 \geq 5, \\ y_1 - y_2 \geq 1, \\ -4y_2 \geq 1, \\ y_1 + y_2 \geq 1. \end{cases}$$

Графічний аналіз цієї задачі показано на рис. 10.1.

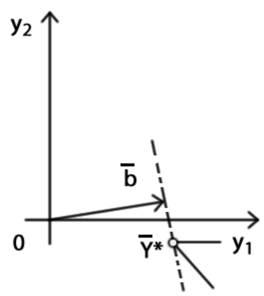


Рис. 10.1

Область допустимих розв'язків є необмеженою і розташована у четвертому квадранті (оскільки умови невід'ємності на y_1 та y_2 немає). Оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y^* = \left(\frac{13}{8}; -\frac{1}{4}\right)$, $z_{\min} = 9$.

Користуючись теоремами двоїстості, знайдемо розв'язок початкової задачі. Підставимо знайдені значення y_1 та y_2 в обмеження двоїстої задачі. Третє й четверте обмеження задовольняються як строгі нерівності: $\frac{13}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}>1$ та $\frac{13}{8}+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{8}>1$, отже, відповідні їм змінні початкової задачі x_3 та x_4 повинні дорівнювати нулю. Тоді з початкової системи отримаємо: $4x_1=16$, звідки $x_1^*=4$, та $6x_1^*-4x_2^*=4$, звідки $x_2^*=5$. Отже, оптимальний розв'язок початкової задачі $X^*=(4;5;0;0)$, $f_{\max}=5\cdot4+5-16=9=z_{\min}$. Правильність обчислень підтверджується графічною ілюстрацією початкової задачі (рис. 10.2):

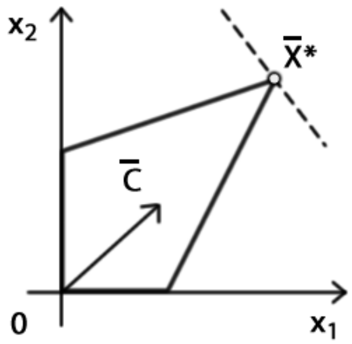


Рис. 10.2

10.3. Геометрична інтерпретація основних задач післяоптимізаційного аналізу розв'язку ЗЛП

Якщо ЗЛП розв'язана графічно, то у рамках аналізу на чутливість розв'язуються такі три задачі: 1) аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень; 2) аналіз ступеня дефіцитності ресурсів; 3) аналіз розв'язку ЗЛП на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції (ЦФ).

Розглянемо ці задачі на прикладі задачі розподілу ресурсів.

Задача 10.5. Цех випускає продукцію двох видів P_1, P_2 використовуючи сировину трьох видів S_1, S_2, S_3. Запаси сировини, норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці кожного виду продукції і прибуток від реалізації кожного виду продукції задані в табл. 10.6.

Таблиця 10.6

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		Запаси сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	2	1	19
S_2	1	2	13
S_3	1	3	18
Прибуток від реалізації одиниці продукції, гр.	5	7	

Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації усієї продукції.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1 і x_2 відповідно планову кількість випуску продукції видів P_1 і P_2. Обмеження за витратами сировини видів S_1, S_2, S_3 задаємо у вигляді нерівностей відповідно: $2x_1 + x_2 \le 19$, $x_1 + 2x_2 \le 13$ і $x_1 + 3x_2 \le 18$. Також треба ввести додаткові обмеження невід'ємності $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$. У якості показника ефективності вибираємо прибуток від реалізації усієї продукції і складаємо цільову функцію: $f = 5x_1 + 7x_2 \to \max$.

Запишемо математичну модель задачі у загальному вигляді:

$$f = 5x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0$$

Покажемо графічний розв'язок задачі (рис. 10.3).

Область допустимих розв'язків G: п'ятикутник з вершинами O(0; 0), A(0; 6), B(3; 5), C($8\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$), D(9,5; 0).

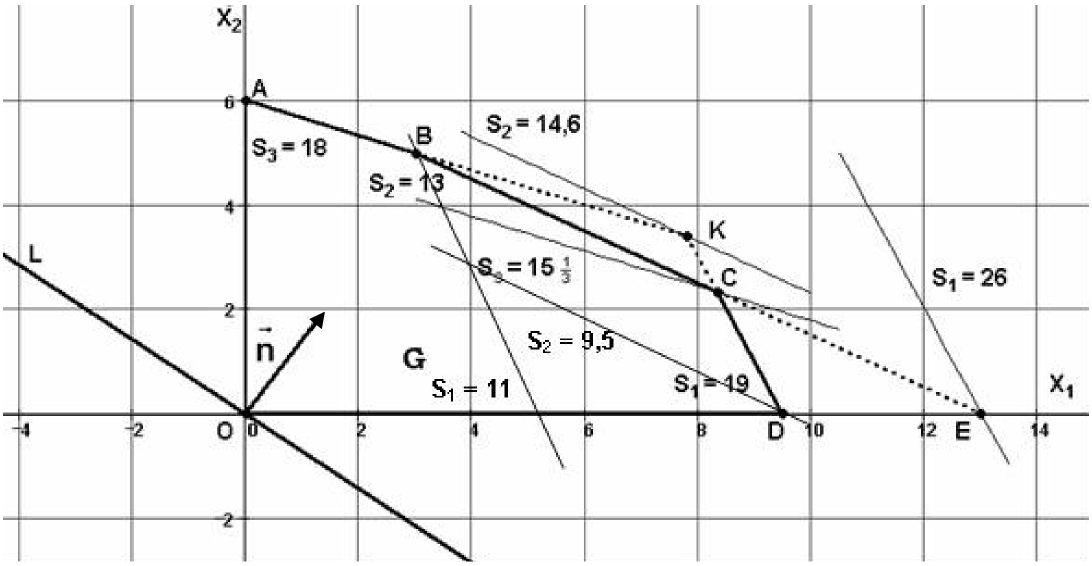


Рис. 10.3

Пряма *L* нульових значень цільової функції проходить через точки (0; 0), (-7; 5). Рухаючи пряму *L* у напрямку нормального вектора $\vec{n}$, знаходимо точку максимуму C($8\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$). Максимальне значення цільової функції $f_{max} = f(C) = 58$.

Однією із задач післяоптимізаційного аналізу є визначення границь зміни коефіцієнтів цільової функції, при яких оптимальний опорний план не зміниться. Враховуючи пропорції коефіцієнтів рівнянь прямих BC ($x_1 + 2x_2 = 13$) і CD ($2x_1 + x_2 = 19$), на перетині яких знаходиться точка C, отримаємо: $C_{1min} = 3{,}5$ і $C_{1max} = 14$ при $C_2 = 7$; $C_{2min} = 2{,}5$ і $C_{2max} = 10$ при $C_1 = 5$.

Але цільова функція при цьому змінюється (табл. 10.7):

Таблиця 10.7

	Опт	C_1, C_2	f	C_{1min}, C_2	f	C_{1max}, C_2	f	C_1, C_{2min}	f	C_1, C_{2max}	f
X_1	$8\frac{1}{3}$	5	$41\frac{2}{3}$	3,5	$29\frac{1}{6}$	14	$116\frac{2}{3}$	5	$41\frac{2}{3}$	5	$41\frac{2}{3}$
X_2	$2\frac{1}{3}$	7	$16\frac{1}{3}$	7	$16\frac{1}{3}$	7	$16\frac{1}{3}$	2,5	$5\frac{5}{6}$	10	$23\frac{1}{3}$
Цільова функція			58		45,5		133		47,5		65

Друга задача післяоптимізаційного аналізу полягає у визначенні допустимих змін обсягів обмежень, при яких не змінюється структура розв’язку. При цьому треба розрізняти активні обмеження, які виконуються з точністю до знаку „=”, і неактивні. Прямі *BC* і *CD*, які відповідають активним обмеженням, перетинаються в оптимальній точці. Відповідні ресурси S_1 і S_2 називають дефіцитними.

При збільшенні запасу дефіцитного ресурсу S_1 пряму *CD* переносимо паралельно до точки *E*(13; 0) перетину прямої *BC* з віссю Ox_1. Подальше збільшення ресурсу S_1 буде надмірним. Точка *E* буде новою оптимально точкою. При цьому $S_1 = 2{\cdot}13 + 0 = 26$, $f_{max} = 5{\cdot}13 + 7{\cdot}0 = 65$. Рух прямої *CD* у протилежному напрямі до перетину з точкою *B* буде зменшувати значення цього ресурсу до $S_1 = 2{\cdot}3 + 5 = 11$, не змінюючи структури розв’язку. Але оптимальне значення цільової функції при цьому зменшиться до $f_{max} = 5{\cdot}3 + 7{\cdot}5 = 50$.

Аналогічно знаходимо максимальне збільшення ресурсу S_2 у новій точці максимуму

$$K = AB \cap CD: \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 19 \\ x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} -5x_1 = -39 \\ -5x_2 = -17 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 7,8 \\ x_2 = 3,4 \end{cases} \quad K(7,8; 3,4)$$

$$S_2 = 7,8 + 2{\cdot}3,4 = 14,6, \quad f_{max} = 5{\cdot}7,8 + 7{\cdot}3,4 = 62,8.$$

Максимальне зменшення відбудеться при паралельному перенесенні прямої *BC* до перетину з точкою *D:* $S_2 = 9,5 + 2{\cdot}0 = 9,5$, $f_{max} = 5{\cdot}9,5 + 7{\cdot}0 = 47,5$.

Недефіцитний ресурс $S_3 = 18$ можна зменшувати до значення: $S_3 = 8\frac{1}{3} + 3{\cdot}2\frac{1}{3} = 15\frac{1}{3}$, доки це обмеження не стане активним, тобто пряма не перетне оптимальну точку *C*. При цьому значення цільової функції не зміниться. Збільшення цього ресурсу необмежене.

Результати аналізу зміни обсягів обмежень зведемо у табл. 10.8.

Третя задача післяоптимізаційного аналізу відповідає на питання: збільшення якого саме ресурсу найбільш вигідно? Для цього вводять

Таблиця 10.8

Ресур с	Тип ресурсу	Максимальн е зменшення ресурсу	Максимальн е зменшення прибутку	Максимальн е збільшення ресурсу	Максимальн е збільшення прибутку
S_1	Дефіцитний	11 – 19 = -8	50 – 58 = -8	26 – 19 = +7	65 – 58 = +7

S_2	Дефіцитний	9,5 – 13 = -3,5	47,5 – 58 = -11,5	14,6 – 13 = +1,6	62,8 – 58 = +4,8
S_3	Недефіцитний	$15\frac{1}{3}$ – 18 = $-2\frac{2}{3}$	58 – 58 = 0	∞ – 18 = +∞	58 – 58 = 0

характеристику цінності кожної додаткової одиниці ресурсу, як відношення максимального приросту значення цільової функції до максимально допустимого приросту обсягу обмеження. Цю характеристику називають тіньовою ціною.

$$y_1 = \frac{-8}{-8} = \frac{+7}{+7} = 1, \qquad y_2 = \frac{-11,5}{-3,5} = \frac{4,8}{1,6} = 3, \qquad y_3 = \frac{0}{-2\frac{2}{3}} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Проаналізуємо теореми двоїстості:

$$f = 5x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0, \quad X^{опт} = (8\tfrac{1}{3}; 2\tfrac{1}{3}), \quad f_{\max} = 58 \qquad (*)$$

$$f^* = 19y_1 + 13y_2 + 18y_3 \to \min, \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 5 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 7 \end{cases}; \; y_{1,2,3} \ge 0, \; Y^{опт} = (1; 3; 0), \; f^*_{\min} = 58 \qquad (**)$$

$$\begin{aligned} i=1: &\quad \left(19 - 2\cdot 8\tfrac{1}{3} - 2\tfrac{1}{3}\right)\cdot 1 = 0, \quad 0\cdot 1 = 0, \quad x_4\cdot y_1 = 0 \\ i=2: &\quad \left(13 - 8\tfrac{1}{3} - 2\cdot 2\tfrac{1}{3}\right)\cdot 3 = 0, \quad 0\cdot 3 = 0, \quad x_5\cdot y_2 = 0 \\ i=3: &\quad \left(18 - 8\tfrac{1}{3} - 3\cdot 2\tfrac{1}{3}\right)\cdot 0 = 0, \quad 2\tfrac{2}{3}\cdot 0 = 0, \quad x_6\cdot y_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j=1: &\quad \left(2\cdot 1 + 3 + 0 - 5\right)\cdot 8\tfrac{1}{3} = 0, \quad 0\cdot 8\tfrac{1}{3} = 0, \quad y_4\cdot x_1 = 0 \\ j=2: &\quad \left(1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 - 7\right)\cdot 2\tfrac{1}{3} = 0, \quad 0\cdot 2\tfrac{1}{3} = 0, \quad y_5\cdot x_2 = 0 \end{aligned}$$

10.4. Питання для самоперевірки

1. У чому суть двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Які задачі ЛП називаються симетричними? Несиметричними? В чому їх відмінність?
3. Опишіть правило побудови двоїстої задачі до даної, якщо вони симетричні, несиметричні.
4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?
5. Чи правильно, що пряма задача є задачею максимізації?

6. Як за розв’язком прямої задачі знайти розв’язок двоїстої?

7. Чи правильно, що якщо для зведення обмеження прямої задачі до канонічної форми нема необхідності використовувати залишкову або надлишкову змінну, то відповідна двоїста змінна обов’язково немає обмеження в знакові?

8. Чи правильно, що коли кількість змінних прямої задачі набагато менше числа обмежень, то більш ефективно знаходження її розв’язку шляхом розв’язування двоїстої до неї задачі?

9. Чи правильно, що в будь-якій парі допустимих розв’язків прямої й двоїстої задач значення цільової функції двоїстої задачі незалежне від її напрямку оптимізації?

10. Який висновок можна зробити про двоїсту задачу, якщо обмеження прямої задачі виявились несумісними?

11. Як визначається оптимальний розв’язок двоїстої задачі за знайденим оптимальним розв’язком вихідної задачі для симетричних і несиметричних (канонічних) двоїстих задач? Який розв’язок двоїстої задачі можна отримати відразу з останньої симплексної таблиці?

12. Наведіть економічне тлумачення двоїстої задачі до вихідної, що являє собою задачу визначення оптимального виробничого плану при даних ресурсах сировини.

13. В чому суть двоїстого симплекс-методу і чому він називається ще методом уточнення оцінок?

14. Наведіть економічне тлумачення двоїстої задачі до вихідної, що являє собою задачу визначення оптимального виробничого плану при даних ресурсах сировини.

10.5. Ключові поняття

Активні (неактивні) обмеження
Аналіз моделі ЗЛП на чутливість
Двоїста задача
Двоїсті оцінки
Післяоптимізаційний аналіз
Пряма задача
Обмеження активні, неактивні
Ресурси дефіцитні

Допустимі межі зміни
Друга задача на чутливість

Друга теорема двоїстості
Економічний зміст
Задачі на чутливість
Зв'язні (незв'язні) обмеження
Несиметричні задачі
Пара взаємоспряжених задач
Перша задача на чутливість
Перша теорема двоїстості
Ресурси недефіцитні
Рентабельне (нерентабельне) виробництво
Симетричні задачі
Статус ресурсу
Теореми двоїстості
Тіньова ціна
Третя теорема двоїстості
Третя задача на чутливість
Умова існування розв'язку
Цінність ресурсу

10.6. Навчальні завдання

№ 10.1. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати одну із них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

а) $$z = -5x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}\quad x_1, x_2 \ge 0.$$

б) $$z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,\quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

в) $$z = 5x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}\quad x_1, x_2 \ge 0.$$

г) $$z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

д) $$z = x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}\quad x_1, x_2 \ge 0.$$

е) $$f = 10y_1 - 3y_2 \to \min,\quad \begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge 3, \end{cases}\quad y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

№ 10.2. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

а) $z = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \min,$
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j = 1,2,3,4.$

б) $z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j = 1,2,3,4.$

в) $z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max,$
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j = 1,2,3.$

г) $z = 2x_1 - 3x_2 \to \min,$
$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j = 1,2,3.$

№ 10.3. Дати геометричну інтерпретацію таких взаємно двоїстих задач:

Вихідна задача(1): знайти невід’ємні значення (x_1, x_2) з умов $x_1 + 2x_2 \ge 4,\ x_1 - x_2 \ge -1$ і мінімізації лінійної функції $L = 3x_1 + 2x_2$.

Двоїста задача (1`): знайти невід’ємні значення (y_1, y_2) з умов $y_1 + y_2 \le 3,\ 2y_1 - y_2 \le 2$ і максимізації лінійної функції $T = 4y_1 - y_2$.

№ 10.4. Підприємство може виготовляти чотири види продукції $П_j$, (j=1,…,4), використовуючи при цьому сировину трьох видів C_i (i=1,…,3). Загальні обсяги наявної сировини, норми її витрат на одиницю продукції та ціна реалізації наведені в табл. 10.9.

Таблиця 10.9

Вид сировини	Норми витрат				Запаси ресурсів
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
C_1	2	1	0,5	4	2400
C_2	1	5	3	0	1200
C_3	3	0	6	1	3000
Ціна реалізації	75	30	60	120	

Визначити оптимальний асортимент продукції, що забезпечує максимум прибутку від реалізації. Чи єдиний оптимальний план має задача? Якщо так, то написати вираз для всіх оптимальних планів. Скласти модель двоїстої задачі і, використовуючи відповідність між змінними прямої та двоїстої задач, записати оптимальний план двоїстої задачі.

№ 10.5. Для виготовлення чотирьох видів продукції А, Б, В, Г використовується три види ресурсів (I, II, III). Інші дані наведено в табл. 10.10.

Таблиця 10.10

Ресурси	Норми витрат				Запаси ресурсів
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибуток від одиниці продукції	7,5	3	6	12	

Необхідно:

1. Визначити план випуску продукції, при якому величина прибутку від її реалізації буде максимальною.

2. Сформулювати економічно, записати й розв'язати двоїсту задачу. Дати економічне тлумачення одержаних оцінок ресурсів. Знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок по відношенню до зміни запасів ресурсів кожного виду.

3. Визначити зміни максимального прибутку від реалізації продукції при збільшенні запасу ресурсу I на 40 од., ресурсу III – на 50 од., та зменшенні запасу ресурсу II на 90 од. Оцінити окремий вплив цих змін і сумарний вплив.

4. Визначити норми змінюваності ресурсів.

5. Порівняти оцінку витрат та прибутку за оптимальним планом та кожним видом продукції.

6. Оцінити доцільність введення в план п'ятого виду продукції Д, норми витрат сировини на одиницю якого відповідно дорівнюють 2, 4 і 2 од., а прибуток – 15 гр. од.

10.7. Завдання для перевірки знань

№ 10.6. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати одну із них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

а) $$f = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \geq 4, \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.$$

б) $$z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,3,4.$$

в) $$z = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$$

г) $$z = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

Відповідь: в) X*=(95; 210; 0; 0); Y*= (0; 3/2; 9/4); $z_{max}=f_{min}=2115$.

г) X*=(0; 6; 0; 0); Y*= (1; 0); $z_{max}=f_{min}=6$.

№ 10.7. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

а) $$z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,3,4.$$

б) $$z = x_2 - 2x_3 - 3x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$$

Відповідь: а) X*=(4; 5; 0; 0); Y*= (13/8; -1/4); $z_{max}=f_{min}=25$.

б) X*=(0; 7; 0; 10; 0); Y*= (1; 2); $z_{max}=f_{min}=7$.

№ 10.8. Чи є для даної задачі ЛП

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,2};$$

оптимальними запропоновані плани: а) x = (10; 10/3); б) x = (20; 10); в) x = (10/3; 10/3)?

№ 10.9. Скласти раціон, в який входять поживні речовини трьох видів $P_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$. Для раціону використовуються продукти трьох видів $M_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$, що містять вказані речовини у різних комбінаціях. Вміст поживних речовин у раціоні, продуктах і ціни на них дано в табл. 10.11.

Скласти пару двоїстих задач. Розв'язати одну з них і знайти розв'язок іншої.

Таблиця 10.11

Поживні речовини	Вміст поживних речовин у раціоні			Мінімальна кількість поживних речовин у раціоні
	M_1	M_2	M_3	
P_1	4	6	4	44
P_2	6	1	2	30
P_3	4	4	6	62
Ціна раціону	8	5	6	

Відповідь: $x^* = (0;0;400;550 \mid 0;0;50);\ f(x^*) = 90000$;

$y^* = (30;15;0 \mid 0;75;0;0)$; $z(y^*) = 90000$.

ТЕМА 11. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ НА ПК

Застосування інформаційних технологій при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом.

11.1. Теоретичні відомості

Загальне значення комп'ютерного моделювання для вирішення економічних, соціальних, технічних, екологічних та інших проблем полягає у прискореному пошуку найбільш вдалого його рішення. Комп'ютерне моделювання не замінює попередніх способів моделювання, які широко застосовуються і на яких базується планування людської діяльності. Воно доповнює інші види моделювання за тими параметрами, за якими комп'ютер переважає людину: за можливістю швидко і бездоганно порахувати велику кількість варіантів розвитку досліджуваної системи. ЕОМ в даний час застосовують для вибору оптимальних варіантів використання різних видів ресурсів, для передбачення наслідків діяльності людини і т.д.

На сучасному ринку прикладних програм створено цілий ряд математичних програмних процесорів, які дозволяють досліднику, не вдаючись у тонкощі математичних методів і програмування, проводити необхідні обчислення. Найбільш популярним з цих процесорів є пакет Mathcad фірми MathSoft, USA.

А) Комп'ютерний розділ на базі Mathcad

Mathcad – універсальний математичний пакет, призначений для виконання наукових та практичних розрахунків. Основна перевага пакета – природна математична мова, на якій формуються розв'язувані задачі. Об'єднання текстового редактора з можливістю використання звичайної математичної мови дозволяє користувачу одержати готовий підсумковий документ. Пакет має широкі графічні можливості. Практичне застосування пакета істотно підвищує ефективність інтелектуальної праці. Mathcad дозволяє провести необхідні розрахунки, оформити роботу за допомогою графіків, малюнків, таблиць, математичних формул.

По суті Mathcad є мовою програмування, яка максимально наближена до природної математичної мови. Всі формули вводяться за допомогою зручного інтерфейсу користувача у звичайному математичному вигляді. Програми (або документи), що написані в Mathcad, нагадують сторінки підручника або наукової статті з формулами і результатами обчислень за ними, графіками і пояснювальним текстом.

Оптимізаційні задачі в Mathcad розв'язуються за допомогою розв'язувального блока, який починається ключовим словом Given, а закінчується функцією Minimize та Maximize для визначення відповідно мінімуму або максимуму цільової функції. Деякі з цих задач Mathcad дозволяє розв'язувати не лише чисельними методами, але й аналітично, тобто у символьному вигляді. Mathcad є Windows-сумісною програмою, що дозволяє вбудовувати і використовувати у своїх документах об'єкти або дані з інших Windows-додатків (Word, Excel тощо).

Вбудована функція *Stack* ($A_1, A_2, ..., A_N$), аргументами $A_1, A_2, ..., A_N$ якої є матриці з однаковим числом стовпчиків, формує матрицю $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix}$ з тим же числом стовпчиків (матриці $A_1, A_2, ..., A_N$ розміщуються послідовно зверху вниз). Наприклад, якщо $A_1 = (1 \quad 2)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, то *stack* $(A_1, A_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Пошук мінімуму і максимуму в функціях *minimize* та *maximize* в Mathcad реалізований декількома алгоритмами. Який із алгоритмів вибрати – залежить від виду цільової функції. На практиці рекомендується перевірити пошук розв’язку кожним методом і результати порівняти. Альтернативні методи пошуку розв’язку потрібно використовувати і в тому випадку, коли який-небудь метод не дає розв’язку. Для вибору методів розв’язування необхідно клікнути лівою кнопкою миші на функцію *minimize* або *maximize*, і викликати контекстне меню (рис. 11.1), потім клікнути правою кнопкою миші на потрібну команду в ньому, і далі поставити прапорець поряд з відповідним методом пошуку розв’язку.

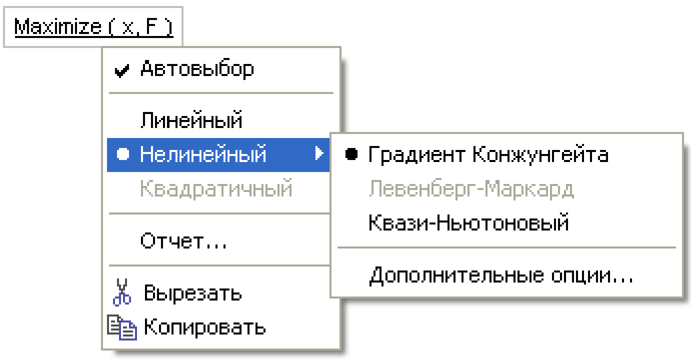


Рис. 11.1. Контекстне меню функції

Розглянемо приклад задачі оптимізації поєднання посівів сільськогосподарських культур.

Задача 11.1. Розробити числову економіко-математичну модель та розв’язати за допомогою комп’ютера задачу визначення плану оптимального поєднання посівів сільськогосподарських культур, який би забезпечив максимальний урожай. Дані наведені у табл. 11.1.

Таблиця 11.1

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Показники</td><td colspan="3">Культури</td><td rowspan="2">Максимальний об'єм</td></tr>
<tr><td>Пшениця</td><td>Кукурудза</td><td>Горох</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ресурси</td><td>Пашня (га)</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>900</td></tr>
<tr><td>Витрати праці $\left(\frac{\text{люд-дн}}{\text{га}}\right)$</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td><td>4200</td></tr>
<tr><td>Витрати добрив (ц/га)</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2040</td></tr>
<tr><td colspan="2">Мінімальна площа під культури (га)</td><td>-</td><td>-</td><td>240</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Урожайність (ц/га)</td><td>36</td><td>42</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Розв'язання.

Створимо математичну модель задачі.

1) Позначимо:

x_1 – кількість гектарів пашні для посівів пшениці,

x_2 – кількість гектарів пашні для посівів кукурудзи,

x_3 – кількість гектарів пашні для посівів гороху.

2) Максимальний валовий урожай задаємо цільовою функцією:

$Z = 36x_1 + 42x_2 + 28x_3$.

3) Складаємо обмеження.

За площею для посівів: $x_1 + x_2 + x_3 \le 900$.

За витратами праці: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 4200$.

За витратами добрив: $2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2040$.

За площею, що виділена для посівів гороху: $x_3 \ge 240$.

4) Отримуємо задачу лінійного програмування:

$Z = 36x_1 + 42x_2 + 28x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 900, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 4200, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2040, \\ \qquad\qquad\quad x_3 \ge 240, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

5) Розв’язуємо задачу в системі Mathcad.

Оптимізаційні задачі розв’язуються в Mathcad за допомогою розв’язувального блока, який починається ключовим словом Given, а закінчується функцією Maximize або Minimize для визначення віповідно максимуму або мінімуму цільової функції (рис. 11.2):

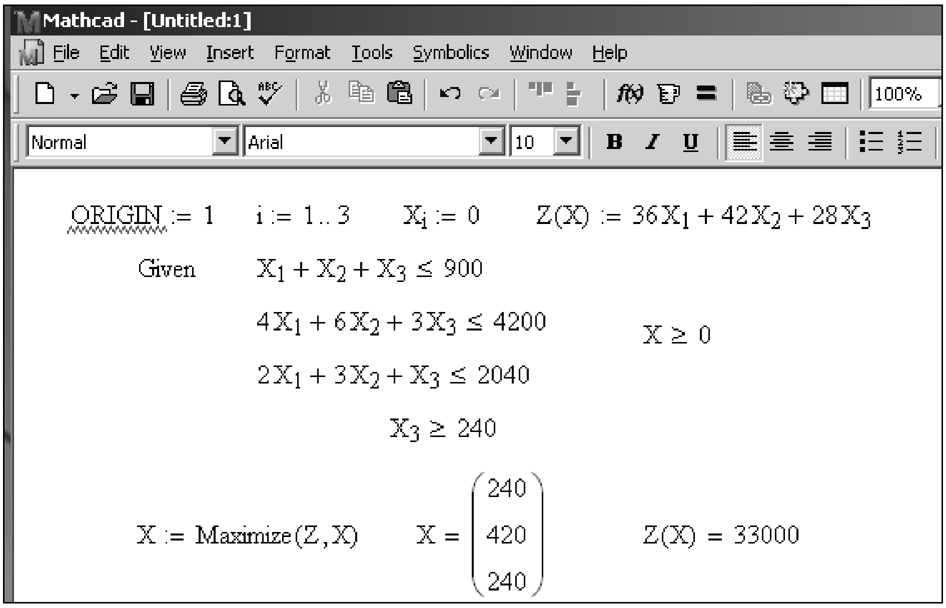


Рис. 11.2

6) Отримуємо розв’язок задачі:

x_1 = 240 кількість гектарів пашні для посівів пшениці,

x_2 = 420 кількість гектарів пашні для посівів кукурудзи,

x_3 = 240 кількість гектарів пашні для посівів гороху.

При такому плані поєднання посівів валовий урожай буде максимальний і становитиме: Z = 33000 ц.

Попередній спосіб розв’язання задач математичного програмування в системі Mathcad є достатньо наочним і може бути використаним також для задач нелінійного програмування. Але цей спосіб потребує певних зусиль по вводу даних і може бути використаний тільки для конкретної задачі. Для задачі лінійного програмування можна запропонувати *загальний (уніфікований) спосіб*.

Розглянемо *загальну схему* розв'язання задач лінійного програмування в системі Mathcad на прикладі задачі оптимального використання сировини при виготовленні верстатів.

Задача 11.2. Підприємство виготовляє верстати двох типів і двигуни до них. Початкові дані задачі наведені у табл. 11.2.

Скласти оптимальний план виготовлення продукції за критерієм максимуму прибутку від реалізації усіх верстатів, якщо їх загальна кількість не може бути менше п'яти.

Таблиця 11.2

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	Верстат №1	Верстат №2	Двигуни	
Сировина №1	4	2	1	25
Сировина №2	2	1	3	30
Прибуток від реалізації одиниці продукції	4	3	–	–

Розв'язання. Математична модель задачі у загальній формі має вигляд:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

При розв'язуванні аналітичним симплекс-методом маємо задачу, що розв'язується за допомогою М-методу.

В системі Mathcad отримуємо розв'язок задачі (рис. 11.3):

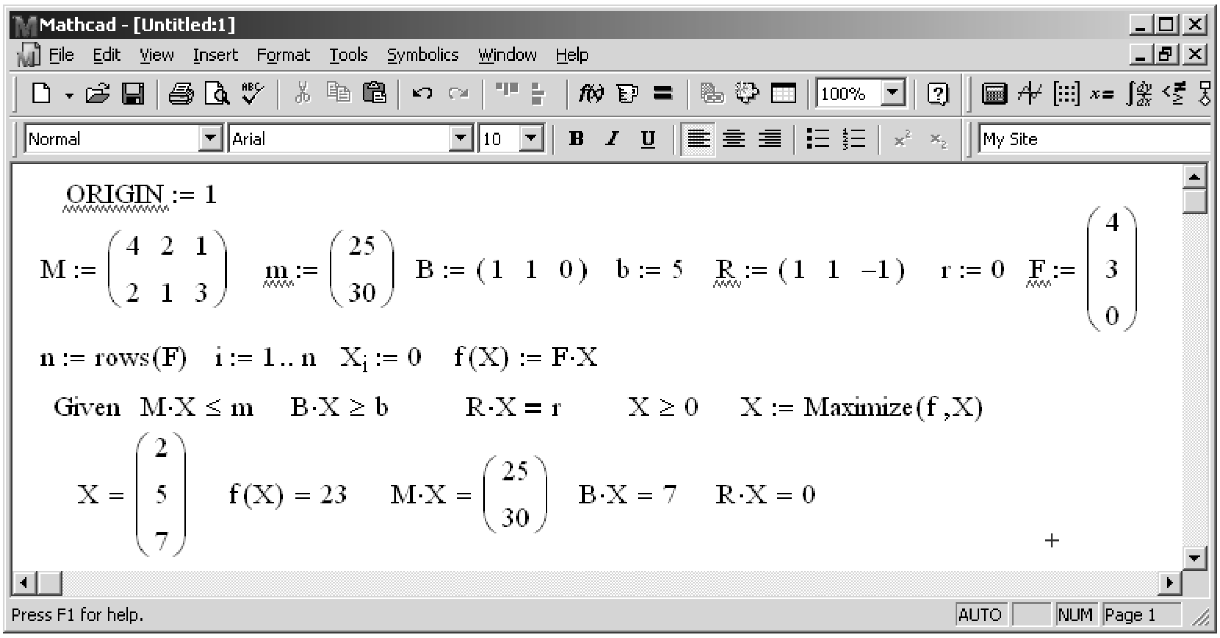


Рис. 11.3

Тут матриці M, m відносяться до обмежень із знаком "≤", матриці B, b відносяться до обмежень зі знаком "≥", матриці R, r відносяться до обмежень зі знаком "=".

Таким чином необхідно виготовити 2 верстати першого і 5 верстатів другого типу, а також 7 двигунів до них. При такому плані прибуток від їх реалізації буде максимальним і складе 23 грошових одиниці. При цьому сировина обох видів буде використана без залишків (матриця МХ).

Б) Комп’ютерний розділ на базі EXCEL

У складі Microsoft Excel у папці Приклади / Розв’язання знаходиться книга з прикладами використання процедури *Пошуку рішення (Solver.xls).* У цій книзі можна довідатися про процедури максимізації чи мінімізації цільової функції, а також про накладення обмежень і збереження моделі оптимізації. Листи з прикладами розрахунків із книги *Solvsamp.xls* можна використовувати як основу для постановки користувальницьких задач оптимізації. Якщо математична модель досліджуваного процесу та обмеження на значення її параметрів лінійні, то задача досягнення цілі є ЗЛП. Книга *Solverex.xls* містить велику кількість прикладів, які можна використовувати як зразки рішення варіантів задач оптимізації („Перевезення вантажів”, „Графік роботи”, „Оборотний капітал”).

Для розв’язування задач лінійного програмування в EXCEL існує надбудова Поиск Решения. Для використання її потрібно активізувати командою Сервис-Надстройки-Поиск Решения. Тоді в меню Сервис з’явиться команда Поиск Решения. Далі потрібно описати його параметри, вказавши в *Параметрах* на *Лінійність моделі*. Запустивши Пошук рішення, отримаємо оптимальний план.

Розглянемо детальний алгоритм розв’язання попередньої задачі 11.2 в Microsoft Excel.

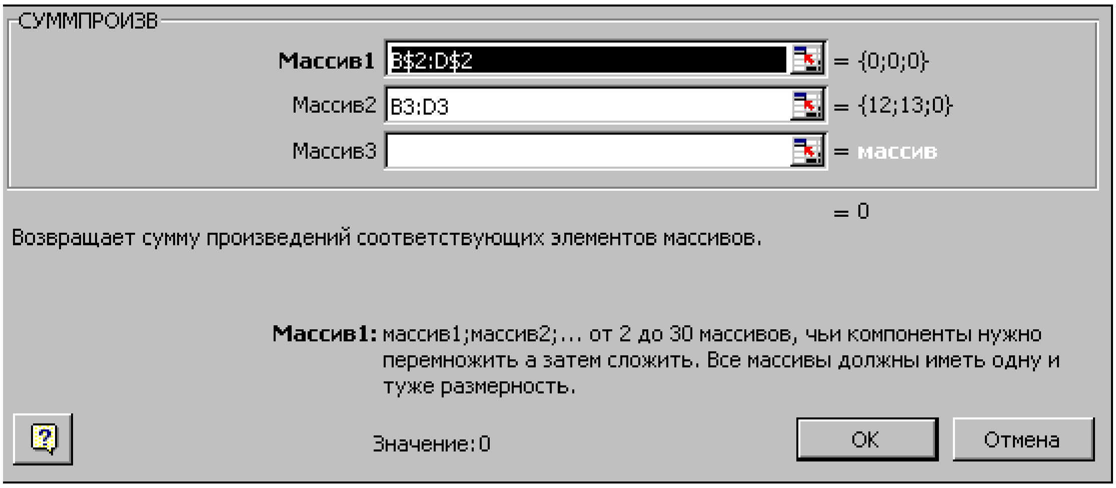
Вводимо вихідні дані для розв’язання ЗЛП до таблиці 11.3:

Таблиця 11.3

	A	B	C	D	E	F	G
1		X_1	X_2	X_3	ліва частина	знак	права частина
2	Параметри розв’язку	0	0	0			
3	Коефіцієнти ЦФ	4	3	0	0	→	max
4	Обмеження №1	4	2	1	0	<=	25
5	Обмеження №2	2	1	3	0	<=	30
6	Обмеження №3	1	1	0	0	>=	5
7	Обмеження №4	1	1	-1	0	=	0

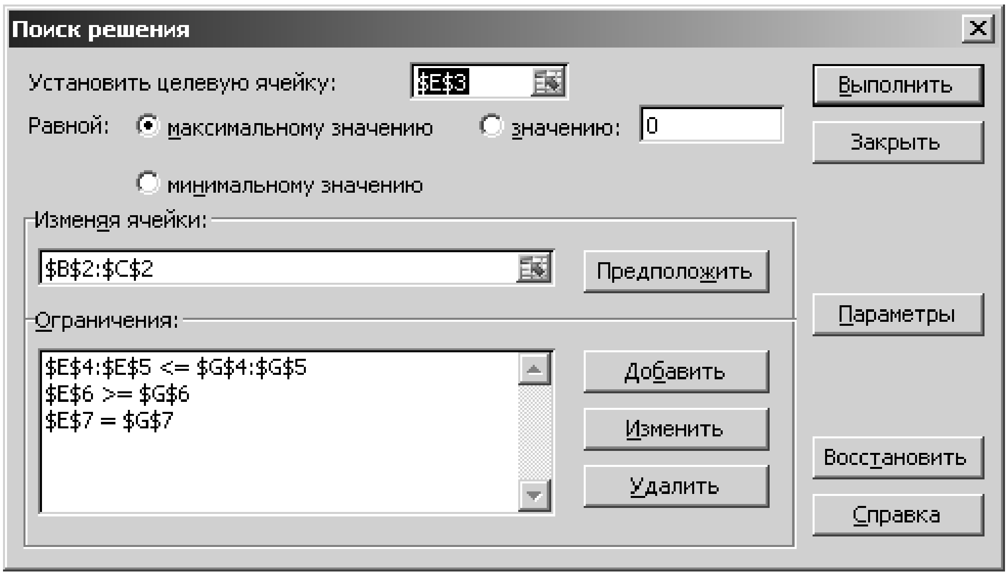
Вводимо залежність для цільової функції:

- Курсор у E3.
- Курсор на кнопку f_x “**Мастер функций**”.
- Курсор на категорію “**Математические**”.
- Курсор у вікно “**Функции**” на **СУММПРОИЗВ**.



- У масив 1 ввести B$2:D$2.
- У масив 2 ввести B3:D3.
- Натиснути **ОК**.
- Протягнути формулу до чарунку E7.

Після завдання вихідних даних необхідно вибрати команду "**Сервис. Поиск решения**".



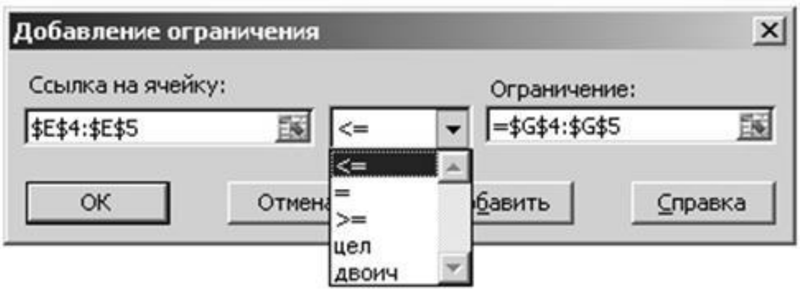
- Курсор у вікно "**Установить целевую ячейку**".
- Ввести адресу: E3.
- Ввести напрямок цільової функції: **Максимальному значению**.

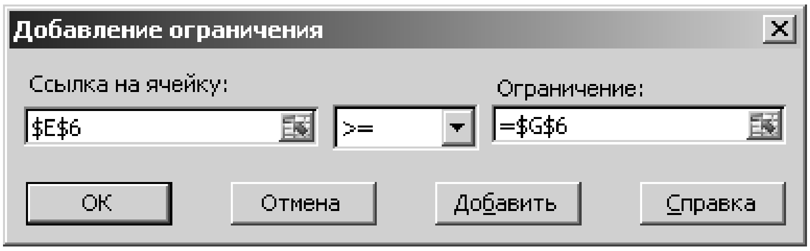
Вести адреси параметрів розв'язку:

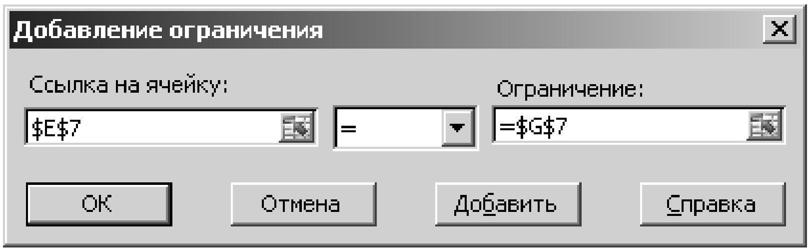
- Курсор у поле “**Изменяя ячейки**”.
- Ввести діапазон: B2:D2.

Щоб задати необхідні обмеження, потрібно у вікні “**Поиск решения**” натиснути кнопку “**Добавить**” і заповнити вікно діалогу “**Добавление ограничения**”, вказавши посилання на чарунки з лівою частиною обмеження, оператора і значення обмеження (правої частини). Кілька обмежень з однаковим оператором можна задавати як одне матричне обмеження.

Після задання обмеження необхідно натиснути кнопку “**Добавить**”, щоб задати наступне обмеження чи натиснути кнопку **ОК** для повернення у вікно діалогу “**Поиск решения**”.

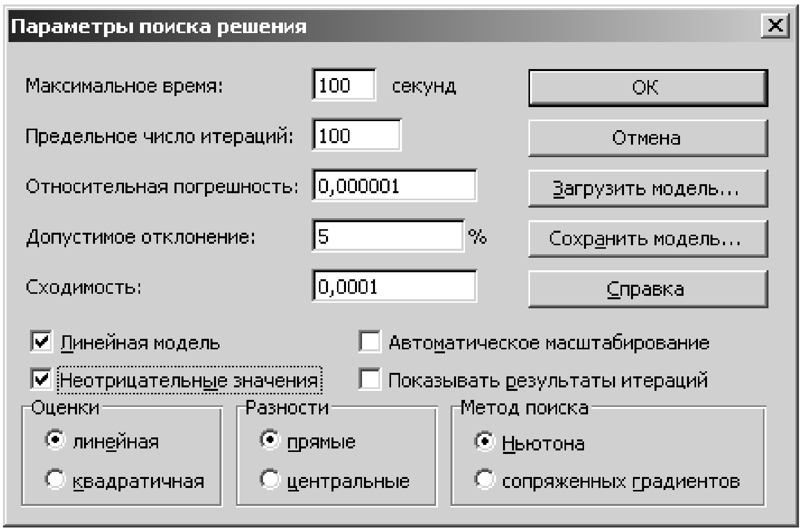






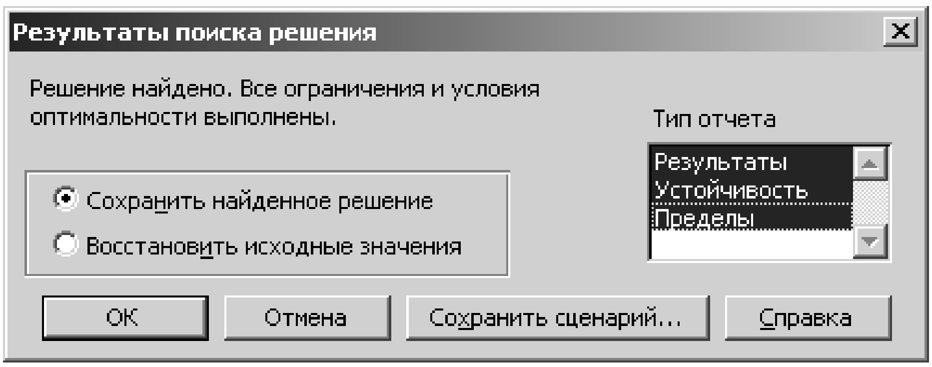
При необхідності можна також змінити або знищити обмеження за допомогою команд “**Изменить**”, “**Удалить**”.

Кнопка “**Параметры**” дозволяє одержати доступ до вікна “**Параметры поиска решения**”. За допомогою команд, що знаходяться в цьому діалоговому вікні, можна вводити умови для рішення задач оптимізації всіх класів. Можна установити такі параметри, як граничний час виконання задачі, максимальне число ітерацій, метод пошуку і т.д.



Встановити прапорець “**Линейная модель**” та "**Неотрицательные значения**". **ОК**.

Після заповнення вікна діалогу **“Поиск решения”** необхідно натиснути кнопку **“Выполнить”.**



Знайдений оптимальний розв’язок поставленої задачі наведений у таблиці 11.4:

Таблиця 11.4

	A	B	C	D	E	F	G
1		X_1	X_2	X_3	ліва частина	знак	права частина
2	Параметри розв'язку	2	5	7			
3	Коефіцієнти ЦФ	4	3	0	23	→	max
4	Обмеження №1	4	2	1	25	<=	25
5	Обмеження №2	2	1	3	30	<=	30
6	Обмеження №3	1	1	0	7	>=	30
7	Обмеження №4	1	1	-1	0	=	0

11.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 11.3. На основі інформації, що наведена у табл. 11.5, розв'язати задачу оптимального використання ресурсів на максимум прибутку від реалізації готової продукції.

Таблиця 11.5

Вид ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції			Запаси ресурсів
	A	B	C	
Праця	1	4	3	200
Сировина	1	1	2	80
Обладнання	1	1	2	140
Ціна виробів	40	60	80	

Потрібно:

1. Сформулювати пряму оптимізаційну задачу на максимум виручки від реалізації готової продукції, отримати оптимальний план випуску продукції.

2. Сформулювати двоїсту задачу й знайти її оптимальний план за допомогою теорем двоїстості.

3. Пояснити нульові значення змінних в оптимальному плані.

4. На основі властивостей двоїстих оцінок і теорем двоїстості:

- ✓ проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі;
- ✓ визначити, як змінюється виручка від реалізації продукції й план її випуску при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць;
- ✓ оцінити доцільність включення в план виробу четвертого виду ціною 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.

Розв'язання. **1)** *Сформулюємо пряму оптимізаційну задачу на максимум виручки від реалізації готової продукції*, щоб отримати оптимальний план випуску продукції.

X_1- норма витрат ресурсу першого виду,

X_2 - норма витрат ресурсу другого виду,

X_3 - норма витрат ресурсу третього виду.

Цільова функція має вид:

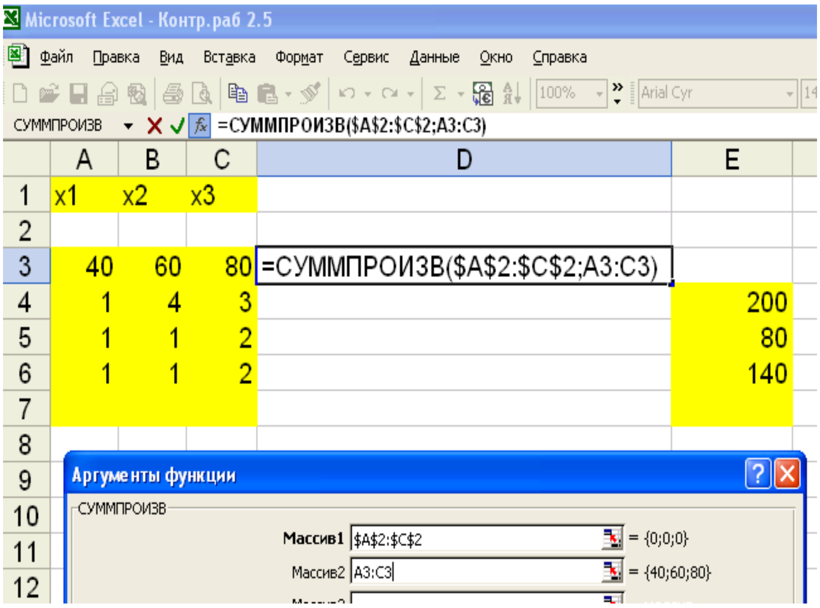
$f(\bar{x}) = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 \to \max$, де $x_{1,2,3} \ge 0$.

Обмеження:

1) за працею: $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200$,
2) за сировиною $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80$,
3) за обладнанням $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 140$, $x_{1,2,3} \ge 0$.

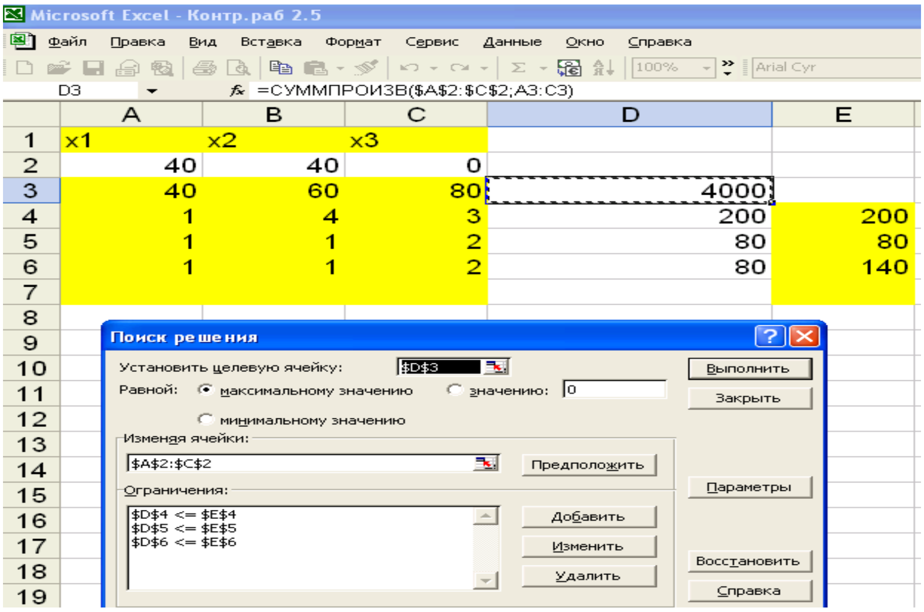
Оптимальний план знайдемо через Поиск Решения в надбудовах Excel (Сервис / Настройки / Поиск решения). Викличемо Пошук рішення та внесемо відповідні дані (табл. 11.6).

Таблиця 11.6



Тепер потрібно натиснути кнопку Выполнить і система повідомить про знайдений розв’язок (Таблиця 11. 7).

Таблиця 11. 7



Отриманий розв’язок означає, що максимальну виручку від реалізації готової продукції (4000 гр. од.) підприємство може

отримати при випуску 40 одиниць виробів першого виду та 40 одиниць виробів другого виду. При цьому ресурси „праці” та „сировини” будуть використані повністю, із 140 одиниць обладнання буде використано лише 80 одиниць.

Excel дозволяє надати результати пошуку рішення у формі звіту (табл. 11. 8**).**

Таблиця 11. 8

Microsoft Excel 10.0 Звіт за результатами
Робочий лист: [Задача 1.xls]
Звіт створений: 29.10.2013 14:42:36

Цільова чарунка (Максимум)

Чарунка	Ім'я	Вихідне значення	Результат
$D$3		4000	4000

Змінювані чарунки

Чарунка	Ім'я	Вихідне значення	Результат
$A$2	x1	40	40
$B$2	x2	40	40
$C$2	x3	0	0

Обмеження

Чарунка	Ім'я	Значення	Формула	Статус	Різниця
$D$4		200	$D$4<=$E$4	Зв'язана	0
$D$5		80	$D$5<=$E$5	Зв'язана	0
$D$6		80	$D$6<=$E$6	не зв'язана	60

У звіті за результатами містяться оптимальні значення змінних x_1, x_2, x_3, які відповідно дорівнюють 40; 40; 0; значення цільової функції – 4000, статус змінних, а також недовикористаний ресурс „обладнання” у розмірі 60 одиниць.

Оптимальний план $(x)^* = (40;40;0)$.

2) *Сформулюємо двоїсту задачу та знайдемо її оптимальний план за допомогою теорем двоїстості.*

Число невідомих у двоїстій задачі дорівнює числу функціональних обмежень у вихідній задачі. Вихідна задача містить три обмеження: праця, сировина й обладнання. Отже, у двоїстій задачі три невідомих:

y_1 – двоїста оцінка ресурсу праця,

y_2 – двоїста оцінка ресурсу сировина,

y_3 – двоїста оцінка ресурсу обладнання.

Цільова функція двоїстої задачі формулюється на мінімум. Коефіцієнтами при невідомих в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени в системі обмежень вихідної задачі:

$$g(\bar{y}) = 200y_1 + 80y_2 + 140y_3 \to \min$$

Необхідно знайти такі «ціни» на типи сировини (Y_i), щоб загальна вартість використаних типів сировини була мінімальною.

Обмеження. Число обмежень у системі двоїстої задачі рівне числу змінних у вихідній задачі. У вихідній задачі три змінних, отже, в двоїстій задачі три обмеження. В правих частинах обмежень двоїстої задачі стоять коефіцієнти при невідомих у цільовій функції вихідної задачі. Ліва частина визначає вартість типу сировини, яка витрачена на виробництво одиниці продукції.

Кожне обмеження відповідає певній нормі витрат сировини на одиницю продукції:

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 40$,

$4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60$,

$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 80$,

$y_{1,2,3,4} \geq 0$.

Знайдемо оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи теореми двоїстості.

Скористаємося першим співвідношенням другої теореми двоїстості: $y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0,$

тоді $y_1(x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 200) = 0$,
$y_2(x_1 + x_2 + 2x_3 - 80) = 0$,
$y_3(x_1 + x_2 + 2x_3 - 140) = 0$,
$(\bar{x})^* = (40;40;0)$.

Підставимо оптимальне значення вектора $\bar{x}$ в отримані вирази:

$y_1(40 + 40 \times 4 + 0 - 200) = 0$,
$y_2(40 + 40 - 80) = 0$,
$y_3(140 + 40 + 0 - 140) = 0$.

І отримаємо:

$y_1(200 - 200) = 0$,
$y_2(80 - 80) = 0$,
$y_3(80 - 140) = 0$,

оскільки 80 < 140, то $y_3 = 0$.

В задачі $x_1 = 40 > 0$ та $x_2 = 40 > 0$, тому перше і друге обмеження двоїстої задачі перетворюються в рівності:

$y_1 + y_2 + y_3 = 40$,
$4y_1 + y_2 + y_3 = 60$,
$y_3 = 0$.

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо: $y_1 = 6{,}67$, $y_2 = 33{,}33$, $y_3 = 0$.

Перевіряємо виконання першої теореми двоїстості:

$g(\bar{y}) = 200y_1 + 80y_2 + 140y_3 = 200 \times 6{,}67 + 80 \times 33{,}33 + 140 \times 0 = 4000,$
$f(\bar{x}) = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 = 40 \times 40 + 60 \times 40 + 80 \times 0 = 4000$.

Це означає, що оптимальний план двоїстої задачі визначений правильно.

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти, вибравши команду Поиск Решения – Звіт за стійкістю надано у табл. 11.9.

Таблиця 11.9

Microsoft Excel 10.0 Звіт за стійкістю

Робочий лист: Задача 1.xls

Звіт створений: 29.10.2013 12:04:27

Змінювані чарунки

Чарунка	Ім'я	Результ. значення	Нормована вартість	Цільовий коефіцієнт	Допустиме збільшення	Допустиме зменшення
$A$2	x1	40	0	40	20	4.000000003
$B$2	x2	40	0	60	100	20
$C$2	x3	0	-6.6666667	80	6.6666667	1E+30

Обмеження

Чарунка	Ім'я	Результ. значення	Тіньова ціна	Обмеження Права част.	Допустиме збільшення	Допустиме зменшення
$D$4		200	6.666666667	200	120	120
$D$5		80	33.33333333	80	60	30
$D$6		80	0	140	1E+30	60

3) *Пояснимо нулеві значення змінних у оптимальному плані.*

Підставимо в обмеження двоїстої задачі оптимальні значення вектора $\bar{y}$:

$$(\bar{y})^* = (6,67;33,33;0)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 40 \qquad 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60 \qquad 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 80$$

$$6,67 + 33,33 + 0 \geq 40 \qquad 4 \times 6,67 + 33,33 + 0 \geq 60 \qquad 3 \times 6,67 + 2 \times 33,33 + 0 \geq 80$$

$$40 = 40 \qquad 60 \geq 60 \qquad 86,67 \geq 80$$

Витрати на три вироби перевищують ціну ($86,67 > 80$). Це ж видно й у звіті зі стійкості: значення x_3 (нормована вартість) рівна -6,67. Тобто вартість норми витрат на одиницю виробу більша ніж ціна виробу. Ці вироби не ввійдуть в оптимальний план через їх збитковість.

4. *На основі властивостей двоїстих оцінок і теорем двоїстості:*

✓ *проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі;*

- ✓ *визначимо, як змінюється виручка від реалізації продукції та план її випуску при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць;*
- ✓ *оцінимо доцільність включення в план виробу четвертого виду ціною 70 од., на виготовлення якого витрачається по дві од. кожного виду ресурсів.*

Проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі: $200 \le 200$, $80 \le 80$, $80 \le 140$.

Запаси сировини за першим та другим видами були використані повністю, а за третім видом – обладнанням - було недовикористане на 60 одиниць.

Визначимо, як зміняться виручка й план випуску продукції при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць.

З теореми про оцінки відомо, що коливання величини b_i призводить до збільшення або зменшення $f(\overline{X})$. Воно визначається:

$\Delta f(\overline{X})^* = \Delta b_i y_i^*$; $\Delta b_1 = 18$, $\Delta f_1(X)^* = \Delta b_1 y_1^* = 18 \times 33{,}33 = 600$,

$\Delta f(\overline{X})^*_{нов.} = 4000 + 600 = 4600$ (од.)

З розрахунків видно, що якщо ми збільшимо запаси сировини на 18 одиниць, то виручка зросте на 600 одиниць, тобто загальна виручка складе після зміни запасів 4600 одиниць.

При цьому структура плану не змінилась – вироби, які були збиткові, не ввійшли і в новий план випуску, тому що ціни на них не змінились.

$y_1 = 6{,}67$ $\quad\quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200$

$y_2 = 33{,}33$ $\quad\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 + 18$

$y_3 = 0$ $\quad\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 140$

Розв’яжемо систему рівнянь:

$$x_1 + 4x_2 = 200,$$

$$x_1 + x_2 = 98,$$

і отримаємо: $x_1 = 64$, $x_2 = 34$.

Новий оптимальний план $(\overline{x})^*_{нов} = (64;34;0)$

Зміна загальної вартості продукції на 600 одиниць отримана за рахунок збільшення плану випуску першого виду продукції на 24 одиниці за ціною 40 одиниць (40*(64-40)=960 од.) і зменшення на 6 одиниць плану випуску продукції другого виду за ціною 60 одиниць (60*(34-40)=-360 од.)

Оцінимо доцільність включення в план виробу четвертого виду вартістю 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.

Для оцінки доцільності включення в план виробу четвертого виду скористуємося другою властивістю двоїстої оцінки.

$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 70$, підставимо $y_1 = 6{,}67$, $y_2 = 33{,}33$, $y_3 = 0$; $2 \times 6{,}67 + 2 \times 33{,}33 + 2 \times 0 = 70$.

Оскільки 80>70, то включення в план виробу четвертого виду невигідне.

Задача 11.4. У склад раціону годівлі на стійловий період дійних корів входить 9 видів кормів. У табл. 11.10 наводяться необхідні дані про корми. Для забезпечення наміченої продуктивності стада необхідно, щоб у раціоні годівлі містилось не менше 14,5 кг кормових одиниць, 1750 г перетравного протеїну, 110 г кальцію, 45 г фосфору, 660 мг каротину й 18 кг сухої речовини. В якості додаткових умов дано наступні співвідношення для окремих груп кормів у раціоні: концентратів (кукурудза, макуха та комбікорм) – 5-20%, грубих кормів (стебла кукурудзи, сіно люцернове, сіно суданки) – 15-35%, силосу – 35-60%, коренеплодів (буряк цукровий і кормовий) –10-20%. Визначити раціон годівлі тварин за критерієм мінімальної собівартості.

Таблиця 11.10

Вміст корисних речовин у 1 кг корму та його собівартість.

Харчові речовини	Кукуру-дза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбі-корм
Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	0,4	13
Каротин, мг	4	2	5	45	15	15	-	-	-
Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,13	0,87
Собівартість грн/кг	0,43	0,65	0,05	0,25	0,3	0,6	2,1	0,14	9,5

Розв'язання: Позначимо через x_j (j=1, ..., 9) кількість виробленої продукції. Задача зводиться до знаходження оптимального плану виробництва продукції кожного виду з метою отримання максимального прибутку. Економіко-математична модель складається з цільової функції та системи обмежень.

Цільова функція:

$$F = 0.43x_1 + 0.65x_2 + 0.05x_3 + 0.25x_4 + 0.3x_5 + 0.6x_6 + 0.21x_7 + 0.14x_8 + 9.5x_9 \to \min$$

при обмеженнях:

$$
\begin{cases}
1.34x_1 + 1.9x_2 + 0.37x_3 + 0.49x_4 + 0.52x_5 + 0.2x_6 + 0.26x_7 + 0.12x_8 + 0.9x_9 \ge 14.5 \\
78x_1 + 356x_2 + 14x_3 + 116x_4 + 65x_5 + 19x_6 + 12x_7 + 9x_8 + 112x_9 \ge 1750 \\
0.7x_1 + 5.9x_2 + 6.2x_3 + 17.7x_4 + 5.7x_5 + 1.5x_6 + 0.5x_7 + 0.4x_8 + 15x_9 \ge 110 \\
3.1x_1 + 9.1x_2 + x_3 + 2.2x_4 + 2.3x_5 + 0.5x_6 + 0.4x_7 + 0.4x_8 + 13x_9 \ge 45 \\
4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 45x_4 + 15x_5 + 15x_6 \ge 660 \\
0.87x_1 + 0.87x_2 + 0.8x_3 + 0.85x_4 + 0.85x_5 + 0.26x_6 + 0.24x_7 + 0.13x_8 + 0.87x_9 \ge 18 \\
x_1 + x_2 + x_9 \ge 0.5 \\
x_1 + x_2 + x_9 \le 0.2 \\
x_3 + x_4 + x_5 \ge 0.15 \\
x_3 + x_4 + x_5 \le 0.35 \\
x_6 \ge 0.35 \\
x_6 \le 0.6 \\
x_7 + x_8 \ge 0.1 \\
x_7 + x_8 \le 0.2 \\
x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,9}.
\end{cases}
$$

Введемо ці дані у табл. 11.11. У дев’ятому рядку будуть розміщатися шукані коефіцієнти. Початкове наближення повинне бути в даній задачі не рівним 0, оскільки у обмеженнях є ділення на суму коефіцієнтів і може виникнути помилка ділення на 0.

Таблиця 11.11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
2	Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
3	Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
4	Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
5	Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	0,4	13
6	Каротин, мг	4	2	5	45	15	15			
7	Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,13	0,87
8	Собівартість, грн/кг	0,43	0,65	0,05	0,25	0,3	0,6	2,1	0,14	9,5
9	xj	1	1	1	1	1	1	1	1	1

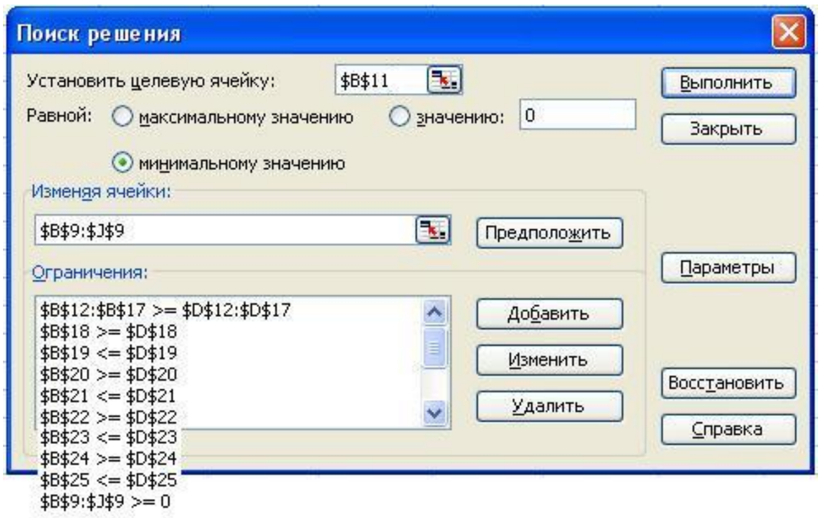
Побудуємо цільову функцію та систему обмежень (табл. 11.12).

Таблиця 11.12

	A	B	C	D
10				
11	ЦФ:	**=СУММПРОИЗВ(B8:J8;B9:J9)**	------>min	
12	Система обмежень:	=СУММПРОИЗВ(B2:J2;$B$9:$J$9)	<=	14,5
13		=СУММПРОИЗВ(B3:J3;$B$9:$J$9)	<=	1750
14		=СУММПРОИЗВ(B4:J4;$B$9:$J$9)	<=	110
15		=СУММПРОИЗВ(B5:J5;$B$9:$J$9)	<=	45
16		=СУММПРОИЗВ(B6:J6;$B$9:$J$9)	<=	660
17		=СУММПРОИЗВ(B7:J7;$B$9:$J$9)	<=	18
18		=СУММ(B9:C9;J9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,05
19		=СУММ(B9:C9;J9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,2
20		=СУММ(D9:F9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,15
21		=СУММ(D9:F9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,35
22		=G9/СУММ(B9:J9)	>=	0,35
23		=G9/СУММ(B9:J9)	<=	0,6
24		=СУММ(H9:I9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,1
25		=СУММ(H9:I9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,2

Викличемо пошук розв'язку та внесемо відповідні дані (табл. 11.13).

Таблиця 11.13



Тепер потрібно натиснути кнопку «Выполнить» і система повідомить про знайдений розв'язок (табл. 11.14).

З отриманого розв'язку виходить, що мінімальні витрати на складання раціону годівлі, що містить всі необхідні елементи, складають 12,34 грошових одиниць.

Отже, цільова функція:

$$F_{\min} = 0.43x_1 + 0.65x_2 + 0.05x_3 + 0.25x_4 + 0.3x_5 + 0.8x_6 + 0.15x_7 + 0.14x_8 + 0.75x_9 = 12{,}34.$$

Таблиця 11.14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
9	xj	6,2653785	0	0,573197	10,39124	0	10,96444	0	3,132712	0
10										
11	ЦФ:	12,337827	------>min							
12	Система обмежень:	16,268212	>=	14,5						
13		1938,6272	>=	1750						
14		209,56432	>=	110						
15		49,591909	>=	45						
16		660	>=	660						
17		18	>=	18						
18		0,1999995	>=	0,05						
19		0,1999995	<=	0,20						
20		0,35	>=	0,15						
21		0,35	<=	0,35						
22		0,35	>=	0,35						
23		0,35	<=	0,60						
24		0,1000005	>=	0,10						
25		0,1000005	<=	0,20						

Оптимальний раціон годівлі:

X = (6,2653785; 0; 0,573197; 10,39124; 0; 10,96444; 0; 3,132712; 0), тобто в раціон ввійдуть:

Кукурудза – 6,2653785 кг

Стебла кукурудзи – 0,573197 кг

Сіно люцерни – 10,39124 кг

Силос кукурудзи – 10,96444 кг

Буряк кормовий – 3,132712 кг

Решта кормів (макуха, сіно суданки, буряк цукровий та комбікорм) в раціон не ввійшли.

Двоїста задача

До даної задачі можна скласти двоїсту. Вона будується на основі прямої задачі шляхом транспортування матриці коефіцієнтів. При цьому коефіцієнти цільової функції прямої задачі стають вільними членами системи обмежень двоїстої задачі, і, навпаки. Отже, в даному прикладі цільова функція двоїстої задачі:

$$F = 14{,}5y_1 + 1750y_2 + 110y_3 + 45y_4 + 660y_5 + 18y_6 + 0.05y_7 - 0.2y_8 +$$
$$+ 0.15y_9 - 0.35y_{10} + 0.35y_{11} - 0.6y_{12} + 0.1y_{13} - 0.2y_{14} \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases}
1.34y_1 + 78y_2 + 0{,}7y_3 + 3{,}1y_4 + 4y_5 + 0{,}87y_6 + y_7 - y_8 \le 0.43 \\
1.9y_1 + 356y_2 + 5.9y_3 + 9.1y_4 + 2y_5 + 0.87y_6 + y_7 - y_8 \le 0.65 \\
0.37y_1 + 14_2 + 6.2y_3 + y_4 + 5y_5 + 0.8y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.05 \\
0{,}49y_1 + 116y_2 + 17.7y_3 + 2.2y_4 + 45y_5 + 0.85y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.25 \\
0.52y_1 + 65y_2 + 5.7y_3 + 2.3y_4 + 15y_5 + 0.85y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.3 \\
0.2y_1 + 19y_2 + 1.5y_3 + 0.5y_4 + 15y_5 + 0.26_6 + y_{11} - y_{12} \le 0.6 \\
0.26y_1 + 12y_2 + 0.5y_3 + 0.4y_4 + 0.24y_6 + y_{13} - y_{14} \le 0.21 \\
0.12y_1 + 9y_2 + 0.4y_3 + 0.4y_4 + 0.13y_6 + y_{13} - y_{14} \le 0.14 \\
0.9y_1 + 112y_2 + 15y_3 + 13y_4 + 0.87y_6 + y_7 - y_8 \le 9.5 \\
y_j \ge 0, \quad j = \overline{1{,}14}.
\end{cases}$$

Розв’язок прямої задачі дає оптимальний план мінімізації витрат на раціон годівлі, а розв’язок двоїстої задачі – оптимальну систему оцінок поживної цінності використаних кормів.

Розв’язавши цю задачу за допомогою команди Поиск Решения, отримаємо наступний висновок: значення цільових функцій двоїстих задач рівні:

Z(X)=F(Y)=12,34.

З отриманих даних видно, що всі ресурси використовуються оптимально, крім сіна суданки та комбікорму, які взагалі не ввійшли в раціон.

На основі розв’язку задачі можна зробити наступний висновок: отриманий розв’язок прямої задачі є оптимальним, тобто ферма, використовуючи даний раціон, мінімізує його собівартість, при цьому поживна цінність раціону знаходиться в межах норм.

11.3. Навчальні завдання і завдання для перевірки знань

Розв’язати задачу за допомогою ПК.

№ 11.1. У склад раціону годівлі на стійловий період дійних корів входить 9 видів кормів. В таблиці 10.15 наводяться необхідні дані про корми. Для забезпечення наміченої продуктивності стада необхідно, щоб у раціоні годівлі містилось не менше (14,5+0,1N) кг кормових одиниць, (1750+N) г перетравного протеїну, (110+N) г кальцію, (45+0,1N) г фосфору, (660+0,1N) мг каротину й (18+0,1N) кг сухої речовини. В якості додаткових умов дано наступні співвідношення для окремих груп кормів у раціоні: концентратів (кукурудза, макуха та комбікорм) – 5-20%, грубих кормів (стебла кукурудзи, сіно люцернове, сіно суданки) – 15-35%, силосу – 35-60%, коренеплодів (буряк цукровий і кормовий) –10-20%. Визначити раціон годівлі тварин за критерієм мінімальної собівартості.**(**N – остання цифра залікової книжки студента).

Таблиця 11.15

Вміст корисних речовин у 1 кг корму та його собівартість.

Харчові речовини	Кукуру-дза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбі-корм
Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	13	---
Каротин, мг	4	2	5	45	15	15	---	---	---
Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,12	0,87
Собівартість, грн/кг	0,43+ 0,01 N	0,65- 0,01N	0,05+ 0,01N	0,25+ 0,01N	0,3+ 0,01N	0,8- 0,01N	0,15+ 0,01N	0,14+ 0,01N	0,75- 0,01 N

№ 11.2. Розробити числову економіко-математичну модель та розв’язати за допомогою комп’ютера задачу визначення оптимального добового раціону годівлі сільськогосподарських тварин. Раціон повинен задовольняти добову фізіологічну потребу тварин у необхідних поживних речовинах і мати мінімальну вартість. Дані наведені у табл. 11.16.

Таблиця 11.16

Показники		Кількість поживних речовин у 1 кг корму				Мінімальна добова норма поживних речовин
		Концен-трати	Сіно	Солома	Силос	
Поживні речовини	Кормові одиниці	1	0,5	0,2	0,16	12,3
	Перетравлюваний протеїн (г)	100	45	8	15	1380
	Каротин (мг)	2	30	4	15	400
	Кальцій (г)	4	6	2	2	80
Мінімальна кількість корму в раціоні (кг)		2	4		30	
Вартість 1 кг корму (гр.од.)		6	2	0,4	0,6	

№ 11.3. Розробити числову економіко-математичну модель та розв'язати за допомогою комп'ютера задачу визначення плану оптимального поєднання посівів сільськогосподарських культур, який би забезпечив максимальний загальний урожай. Дані наведені у табл. 11.17.

Таблиця 11.17

Показники		Культури			Максимальний обсяг
		Пшениця	Ячмінь	Горох	
Ресурси	Пашня (га)				1200
	Витрати труда $\left(\frac{\text{люд-дн}}{\text{га}}\right)$	4	3	5	900
	Витрати добрив (ц/га)	2	1	1	2000
Мінімальна площа під культури (га)			200		
Урожайність (ц/га)		36	28	32	

ТЕМА 12
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Формулювання транспортної задачі ЛП, складання її математичної моделі; формування її початкового опорного плану різними методами; відшукування оптимального плану ТЗ методом потенціалів.

12.1.Теоретичні відомості

Нехай маємо *m* пунктів відправлення (постачальники) $A_1, A_2,...,A_m$, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях $a_1, a_2,..., a_m$ відповідно. Нехай є n пунктів призначення (споживачі) $B_1, B_2,..., B_n$, яким потрібна ця продукція відповідно в кількостях $b_1, b_2, …, b_n$ Нехай відомі c_{ij} витрати за перевезення одиниці продукції з *i*-го пункту відправлення в *j*-й пункт призначення. Нехай x_{ij} - кількість продукції, яка вивозиться з *i*-го пункту відправлення в *j*-й пункт призначення.

Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки продукції з кожного пункту відправлення треба вивезти в кожний пункт призначення, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Наведемо математичну модель транспортної задачі для будь-яких *m* постачальників і *n* споживачів: знайти такі значення змінних x_{ij} $i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$, які задовольняють обмеження

$$\begin{cases}
x_{11} & + & x_{12} & + & \dots & + & x_{1n} & = & a_1 \\
x_{21} & + & x_{22} & + & \dots & + & x_{2n} & = & a_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{m1} & + & x_{m1} & + & \dots & + & x_{mn} & = & a_m \\
x_{11} & + & x_{21} & + & \dots & + & x_{m1} & = & b_1 \\
x_{12} & + & x_{22} & + & \dots & + & x_{m2} & = & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{1n} & + & x_{2n} & + & \dots & + & x_{mn} & = & b_n
\end{cases}$$

(тобто з кожного пункту відправлення повністю вивозиться продукція і кожний пункт споживання одержує потрібну кількість цієї продукції) і перетворюють у мінімум цільову функцію

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{mn}x_{mn}$$

Ці співвідношення і цільову функцію можна зобразити в більш компактній формі. Математична модель транспортної задачі у канонічному вигляді має вигляд:

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot x_{ij}\rightarrow \min \tag{12.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{12.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\qquad i=\overline{1,m} \tag{12.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\qquad j=\overline{1,n} \tag{12.4}$$

$$x_{ij}\geq 0,\qquad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n} \tag{12.5}$$

де (12.1) – цільова функція (f – загальні транспортні витрати), (12.2) – обмеження балансу $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$, що є необхідною і достатньою умовою розв'язку транспортної задачі, тобто загальна кількість виробленої продукції дорівнює загальній кількості попиту споживачів, що доповнене загальною кількістю перевезеного вантажу, (12.3) – обмеження на вивезення усього вантажу від постачальників, (12.4) – обмеження на задоволення попиту усіх споживачів, (12.5) – обмеження невід'ємності параметрів розв'язку.

Цільова функція й усі обмеження лінійні, тобто транспортна задача є задачею лінійного програмування. Система обмежень (12.2)-(12.3)-(12.4) містить $m\times n$ невідомих та $m + n + 1$ рівнянь. Але, очевидно, що тільки $m + n - 1$ серед них будуть лінійно незалежними. Тобто ранг системи і число базисних змінних дорівнюють $m + n – 1$, а кількість ненульових параметрів розв'язку $k \leq m + n – 1$.

Транспортна задача, де виконується умова збалансованості $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, називається ***закритою*** *(збалансованою)*, у противному випадку – ***відкритою*** (*незбалансованою*). Кожна транспортна задача розв'язується за однією і тією ж схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування симплексним методом, а саме:

1) знаходимо спочатку будь-який базисний невід'ємний розв'язок;

2) перевіряємо, чи буде знайдений розв'язок оптимальним;

3) якщо знайдений розв'язок не оптимальний, то виконуємо кілька кроків заміни, які приводять до оптимального розв’язку.

Всі дані та шукані величини можна розмістити в табл. 12.1:

Таблиця 12.1

Пункти відправлення	Пункти призначення				
	B_1	B_2	…	B_n	Запаси
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	

12.2. Знаходження початкового опорного плану. Спосіб "північно-західного кута" (діагональний спосіб)

Цей спосіб полягає в тому, що ми розподіляємо продукцію постачальників і задовольняємо потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в таблиці: спочатку розподіляємо продукцію першого постачальника a_1, намагаючись повністю задовольнити за його рахунок перших записаних у таблиці споживачів B_1,.B_2,..., B_n, наскільки це можливо. Вичерпавши продукцію постачальника A_1, розподіляємо продукцію постачальника A_2 за тим самим принципом: задовольняємо потреби подальших споживачів, яких не вдалося задовольнити за рахунок постачальника A_1, і так доти, доки не буде розподілена вся продукція всіх постачальників. Таким чином, заповнення кліток таблиці починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітки, з "північно-західного кута", і продовжується в напрямі діагоналі таблиці до крайньої клітки в правому нижньому кутку. Застосування цього методу розглянемо на прикладі задачі 12.1 пункту 12.7.

12.3. Спосіб мінімальної вартості

Цей спосіб полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей вибираємо найменшу, і в клітці, яка їй відповідає, записуємо менше з чисел a_i і b_j. З розгляду виключаємо або рядок, відповідний постачальнику, запаси якого вичерпані; або стовпчик, відповідний споживачеві, потреби якого повністю задоволенні, або рядок і стовпчик, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволені потреби споживача. У частині таблиці, що залишилася, знову вибираємо найменшу вартість, і процес розподілу запасів продовжуємо, доки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені. При використанні способу мінімальної вартості клітки (мінімального тарифу) кількість ітерацій, як правило, є меншою, ніж при використанні способу "північно-західного кута".

12.4. Спосіб подвійної переваги

Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, що позначені двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, що позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімальної вартості.

12. 5. Поліпшення плану

Очевидно, поліпшувати треба той початковий опорний план, для якого транспортні витрати найменші. В нашому прикладі таким планом є план, знайдений способом "північно-західного кута".

Підрахуємо кількість заповнених кліток *k*. Якщо початковий опорний план транспортної задачі має *m+n-1* додатних перевезень ($k = m + n - 1$), то він називається ***невиродженим*** (або неособливим). Якщо початковий опорний план має менше, ніж *m+n-1* ($k < m + n - 1$) додатних перевезень, то він називається ***виродженим*** (особливим).

В прикладі 1 початковий опорний план невироджений, тому що кількість завантажених кліток дорівнює 7 ($k = m + n - 1$).

Теорема 12.1 (умова оптимальності опорного плану). Якщо план транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з *m+n* чисел U_i і V_j, які задовольняють умовам:

1) $U_i+V_j=\boxed{C_{ij}}$ для $X_{ij}>0$ (для завантажених кліток);

2) $U_i+V_j\leq C_{ij}$ для $X_{ij}=0$ (для не завантажених кліток),

$$(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}).$$

Числа U_i і V_j називаються ***потенціалами*** постачальників і споживачів відповідно.

Перша умова виконується автоматично. Якщо виявиться, що хоч для однієї вільної клітки друга умова оптимальності не виконується, тобто $\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}> 0$, то план *не оптимальний і його треба поліпшувати*. Поліпшення плану полягає в тому, що вільну клітку, для якої $\Delta_{ij} > 0$, заповнюємо, перемістивши в неї за певним правилом число навантажень з іншої клітки, щоб для цієї заповненої клітки $\Delta_{ij} = 0$. Якщо є декілька кліток, для яких $\Delta_{ij} > 0$, то заповнюємо ту клітку, для якої Δ_{ij} ***найбільше*** (ці числа записуємо у праві верхні кути відповідних кліток.). При цьому будуємо ланцюг (цикл) перерозподілу постачань. Це замкнена ламана лінія, ребра якої знаходяться у рядках і стовпчиках таблиці, перша вершина зі знаком „+” у клітці, яка потребує навантаження (A_3B_2), а інші вершини з почерговими знаками „-” і „+” у навантажених клітках.

Ланцюги можуть мати різноманітну форму (рис. 12.1):

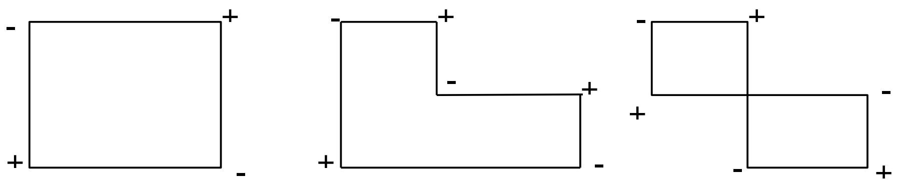


Рис. 12.1. Цикл перерозподілу

Точка самоперетину не є вершиною ланцюга, і в цій клітці знак не ставиться. Знак „-” означає, що клітку треба розвантажити (частково або повністю), а знак „+”, що клітку треба навантажити або довантажити. Щоб не порушити умову балансу, по ланцюгу треба перекинути одне й те ж число одиниць вантажу. У якості такого числа вибираємо найменше навантаження кліток зі знаком „-”.

Зауваження. Якщо в останній таблиці серед чисел $\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}$ крім додатних є нульові, то оптимальний план задачі не єдиний. Щоб знайти інший оптимальний план, потрібно для однієї з кліток, для якої $\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}=0$, побудувати цикл перерахунку і перевірити його на оптимальність. Оптимальний план при цьому не зміниться, але його структура буде іншою.

12.6. Випадок виродження транспортної задачі

Якщо початковий опорний план має менше m+n-1 ($k<m+n-1$) додатних перевезень (завантажених кліток), то він називається **виродженим** (особливим). Щоб **зняти виродження**, необхідно $m+n-1-k$ кліток навантажити нульовими постачаннями. При цьому ніяких перевезень не відбувається. Це необхідно тільки, щоб можна було знайти всі потенціали, і саме у процесі розташування потенціалів краще вводити нульові постачання. Ці навантаження можна робити

довільно, але таким чином, щоб через навантажені клітки не можна було б провести замкнений ланцюг.

Виродження у транспортній задачі може виявитися не тільки у початковому плані, а й якщо у ланцюгу серед кліток зі знаком „–” зустрічаються клітки з однаково найменшими постачаннями. При цьому, щоб позбутися виродження, треба одну з цих кліток розвантажити повністю, а в інших залишити нульові постачання

12.7. Відкрита модель транспортної задачі

Ми розглядали транспортну задачу, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто попит і пропозиція збалансовані. На практиці часто ця умова не виконується. Якщо під час перевірки умови збалансованості виявилося, що ТЗ є відкритою, то її потрібно звести до закритої. Можуть бути такі випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва більший від сумарних потреб споживачів, у цьому випадку вводять у задачу фіктивного споживача B_{n+1} з потребами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і з вартостями перевезень $C_{in+1}=0$;

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва менший від сумарних потреб споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного постачальника A^{ϕ}_{m+1} із запасом вантажу $a_{m+1}=\sum_{in1}^{n} b_j - \sum_{ji1}^{nm} a_i$, і з вартостями перевезень $C_{in+1}=0$ $(i=\overline{1,n})$.

Відповідні навантаження у цих клітках будуть мати зміст додаткових змінних, а саме: невивезеного вантажу від постачальників у першому випадку і незадоволеного попиту споживачів у другому випадку.

Після того, як задача збалансована, вона розв'язується звичайним способом.

12.8. Різновиди транспортних задач

Вищерозглянута математична модель ТЗ є класичною моделлю. У реальній практиці економіста і менеджера ТЗ зустрічається в дещо іншій постановці. Математична модель реальної ТЗ може відрізнятися від класичної або видом ЦФ, або видом обмежень, або характером змінних, або будь-яким поєднанням цих відмінностей одночасно. Розглянемо деякі модифікації ТЗ.

1. ТЗ про розподіл випуску продукції

При комплексному вирішенні проблеми виробництва і реалізації продукції виникає задача, що полягає у визначенні такого плану випуску й перевезень готової продукції, при якому досягаються мінімальні витрати на її виготовлення і доставку споживачам.

Для розв’язування цієї задачі розглядається повна собівартість виробництва одиниці продукції на кожному підприємстві (S_i) і транспортні витрати (S_{ij}), що залежать від типу застосовуваних транспортних засобів і районів розташування заводів-виробників та споживачів*. Математична модель* такої задачі матиме вигляд:

$$y_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(s_i + s_{ij})x_{ij} \to min. \qquad (12.6)$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, j = 1, \dots, n; \qquad (12.7)$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m; \qquad (12.8)$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; \qquad (12.9)$$

$$x_{ij} = int;\ i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \qquad (12.10)$$

Якщо за умовою задачі потрібні ще капіталовкладення в засоби транспорту, то показником ефективності служать зведені витрати, і (12.6) матиме вигляд:

$$y_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(s_i + s_{ij} + E_n k_i)x_{ij} \to min, \qquad (12.11)$$

де E_n - нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень, k_i - питомі капітальні вкладення, які приходяться на одиницю перевезень.

Виконуючи підстановку $c_{ij} = s_i + s_{ij}$ у ЦФ (12.6) та підстановку $s_i + s_{ij} + E_n k_i$ у ЦФ (12.11), задачі (12.6) – (12.10) і (12.11) зводяться до класичної ТЗ, яка може бути розв'язана методом потенціалів.

2. Розподільна ТЗ про вибір засобів доставки вантажу

Позначимо через $j = 1, \dots, n$ пункти, які мають вантажі для перевезень обсягами a_j відповідно. Є m засобів доставки вантажу (видів транспорту). Вантажопідйомність і-го засобу доставки складає p_i, а наявний його парк дорівнює $b_i, i = 1, \dots, m$. Вантажі підлягають доставці в один центральний пункт (склад). Витрати при здійсненні однією одиницею і-го засобу доставки від j-го пункту до складу дорівнюють c_{ij}. Скласти найекономніший план доставки.

Математична модель задачі. Нехай X_{ij} - кількість засобів доставки і-го типу, що відправляється з j-го пункт. Тоді розподільна транспортна задача про вибір транспортних засобів матиме математична модель:

$$y_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min. \qquad (12.12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \geq a_j, j = 1, \dots, n; \qquad (12.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq b_i, i = 1, \dots, m; \qquad (12.14)$$

$$x_{ij} \geq 0; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; \qquad (12.15)$$

$$x_{ij} = int; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \qquad (12.16)$$

ЦФ (12.12) визначає сумарні витрати на доставку вантажу на центральний склад. Вираз (12.13) вказує на необхідність вивезення всього вантажу з пунктів відправлення. Обмеження (12.14) вказує на те, що кількість використовуваних засобів доставки не повинна перевищувати їхній наявний парк. Параметр p_i у системі обмежень (12.13) перешкоджає зведенню математичної моделі до класичного виду. Тому розв'язувати її методом потенціалів неможливо. Оскільки параметри розв'язку x_{ij} – цілі, то доцільно застосувати методи для розв'язування цілочисельної ЗЛП (метод відсікання (Гоморі), метод «віток» і «меж»), за яких процедура розв'язування ускладнюється. Тому найбільш доцільно розв'язувати таку ЗЛП за допомогою ПК, зокрема через надбудову Пошук рішення (Solver) табличного процесора Microsoft Excel.

3. ТЗ з додатковими обмеженнями

В таких задачах кількість вантажу в пунктах призначення, взагалі кажучи, не фіксована. Вона залежить від запитів споживачів. Задачу можна в кількох випадках звести до розв'язування методом потенціалів (див. Тему 14).

4. ТЗ про двоетапне перевезення вантажу

Однорідний вантаж потрібно перевезти з m пунктів відправлення в n пунктів призначення, доставивши їх спочатку на проміжні бази (пункти). В деяких випадках модель можна звести до розв'язування методом потенціалів (див. Тему 15). Але, як і попередню задачу, найбільш доцільно розв'язувати таку ЗЛП за допомогою ПК, зокрема через надбудову Пошук рішення (Solver) табличного процесора Microsoft Excel.

5. ТЗ про двоетапне перевезення вантажу декількох видів

Математична модель цієї задачі відрізняється від попередньої лише тим, що враховує різновид вантажів.

6. ТЗ про двоетапне перевезення вантажу декількох видів з додатковими обмеженнями

7. ТЗ про закриття підприємства

Виробниче об'єднання складається з *n* заводів і *t* складів. Задано потреби складів у продукті й вартості на їх перевезення з кожного виду заводу на кожний склад. Задано фіксовані вартості функціонування заводів і можливості заводів з виробництва продукту. Виробниче об'єднання розглядає можливість закриття одного або кількох заводів., що дасть можливість зменшити витрати на перевезення. Які заводи, якщо це доцільно, повинні бути закриті?

Тут ЦФ визначає загальні витрати виробничого об’єднання на функціонування заводів і транспортування готової продукції на склади. Обмеження визначають можливості заводів з виробництва продукції і потреби складів у готовій продукції.

12.9. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача 12.1. З трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт в п'ять пунктів споживання. Транспортні виграти, об'єм виробництва і об'єм споживання подано в табл. 12.2. Початковий опорний план знайти методом північно-західного кута.

Таблиця 12.2

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Розв'язання. В цій задачі маємо три постачальники і п’ять споживачів. Кількість базисних невідомих дорівнює $m+n-1$, тобто 7. Будемо заповнювати нову табл. 12.3. Запишемо спочатку можливості постачальників і потреби споживачів.

Як бачимо, споживачеві B_1 потрібно 30 одиниць продукції, постачальник A_1 має 125 одиниць; отже, за рахунок постачальника A_1 можна повністю задовольнити потреби споживача B_1. Записуємо в клітку (1; 1) найменше з чисел 30 і 125: $x_{11} = min$ (30, 125) = 30. Перший стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпчика проставимо нулі (пусті клітки).

У постачальника A_1 залишається ще 125 – 30 = 95 одиниць. Тепер будемо заповнювати клітку (1; 2). Споживачеві B_2 необхідно 50 одиниць. Отже, за рахунок постачальника A_1, у якого залишалося ще 95 одиниць, можна повністю задовольнити потреби споживача B_2. В клітку (1; 2) записуємо найменше з чисел 50 і 95, тобто $x_{12} = min$ (50,95) = 50. Другий стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпчика проставимо пулі. У постачальника, A_1 залишається ще 95-50=45 одиниць.

Тепер будемо заповнювати клітку (2; 3). Споживачеві B_3 необхідно ще додати 55 одиниць, постачальник A_2 має 60 одиниць. В клітку (2; 3) записуємо найменше з чисел 55 і 60 , тобто $x_{23} = min$ (55, 60) = 55. Третій стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в останній клітці цього стовпчика поставимо нуль.

У постачальника A_2 залишається ще 60-55=5 одиниць. Тепер будемо заповнювати клітку (2;4). Споживачеві B_4 необхідно 40 одиниць. Записуємо в клітку (2; 4) найменше з чисел 5 і 40, тобто $x_{24} = min$ (5; 40) = 5. Потреби споживача B_4 задоволено частково, залишилась потреба в 40 – 5 = 35 одиницях. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду, тобто в останній клітці цього рядка ставимо 0.

Тепер будемо заповнювати клітку (3; 4). Споживачеві B_4 необхідно додати 35 одиниць, постачальник A_3 має 115 одиниць. В клітку (3; 4) записуємо найменше з чисел 35 і 115, тобто $x_{34} = min$ (35, 115) = 35. У постачальника A_3 залишається 115 – 35 = 80 одиниць.

Заповнюємо останню клітку (3; 5). Споживачеві B_5 необхідно 80 одиниць, тобто x_{35} = 80. На цьому процес побудови початкового опорного плану способом "північно-західного кута" закінчується.

Таблиця 12.3

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	30	50	45			125
A_2			55	5		60
A_3				35	80	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Таким чином, початковий опорний план, знайдений цим способом, буде таким: x_{11}=30, x_{12}=50, x_{13}=45, x_{23}=55, x_{24}=5, x_{34}=35, x_{35}=80, решта x_{ij}=0.

Значення цільової функції:

$$Z = 7\cdot 30 + 5\cdot 50 + 2\cdot 45 + 4\cdot 55 + 6\cdot 5 + 2\cdot 35 + 3\cdot 80 = 1110.$$

Задача 12.2. Розглянемо другий спосіб знаходження початкового опорного плану – методу мінімальної вартості.

Розв'язання. Розглянемо застосування цього методу на попередньому прикладі. Для цього випишемо таблицю вартостей, розмістивши їх в кутку кожної клітки (табл. 12.4). Шукаємо в таблиці вартостей найменший елемент. У нашому випадку він дорівнює 1 і розміщений у клітці (3; 2). В клітку (3; 2) поміщаємо найменше з чисел 50 і 115, тобто x_{12} = min (50, 115) = 50.

Таблиця 12.4

B_j / A_j	B_i	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7 / 25	5	2 / 100	8	7	125
A_2	8 / 5	9	4	6	9 / 55	60
A_3	5	1 / 50	9	2 / 40	3 / 25	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Другий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилося 115 - 50 = 65 одиниць. В частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом буде 2. Він знаходиться в клітці (1; 3). У цю клітку поміщаємо найменше з чисел 100 і 125, тобто

x_{13} = min (100, 124) = 100.

Третій стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 125 – 100 = 25 одиниць. В частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом буде 2. Він знаходиться в клітці (3; 4). Споживачеві B_4 треба 40 одиниць, а у постачальника A_3 залишилося 65 одиниць. В клітку (3; 4) поміщаємо найменше з чисел 40 і 65, тобто x_{34} = min (40, 65) = 40.

Четвертий стовпчик далі не розглядаємо. У споживача B_5 залишилась потреба 80 – 25 = 55 одиниць.

Аналогічно, продовжуючи заповнення таблиці, одержуємо такий опорний план: x_{11} = 25, x_{13} = 100, x_{21} = 5, x_{25} = 55, x_{32} = 50, x_{34} = 40, x_{35} = 25, решта x_{ij} = 0. Значення цільової функції

$$Z = 7\cdot 25 + 2\cdot 100 + 8\cdot 5 + 9\cdot 55 + 1\cdot 50 + 2\cdot 40 + 3\cdot 25 = 1115.$$

Перевіримо на **оптимальність** план, що знайдений способом "північно-західного кута". Складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, використовуючи таблицю 12.3. Для завантажених кліток маємо:

$$C_{11}=U_1+V_1=7, \qquad C_{23}=U_2+V3=4,$$
$$C_{24}=U_2+V_4=6, \qquad C_{12}=U_1+V_2=5,$$
$$C_{34}=U_3+V_4=2, \qquad C_{13}=U_1+V_3=2,$$
$$C_{35}=U_3+V_5=3.$$

Маємо систему 7 рівнянь з 8 невідомими. Така система має безліч розв'язків. Знайдемо один з них, надавши вільній невідомій U_1= 0, тоді з першого рівняння знаходимо $V_1=7-U_1=7-0=7.$

Аналогічно з останніх рівнянь знаходимо значення всіх інших змінних:

$$V_2=5-U_1=5, \qquad V_3=2-U_1=2, \qquad U_2=4-V_3=2,$$
$$V_4=6-U_2=4, \qquad U_3=2-V_4=-2, \qquad V_5=3-U_3=5.$$

Потенціали рядків і стовпців можна записувати в останньому стовпцеві та останньому рядку таблиці 12.3 відповідно, отримаємо табл. 12.5.

Таблиця 12.5

B_j / A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	U_i
A_1	30	50	45			125	0
A_2			55	5		60	2
A_3				35	80	115	-2
Потреби	30	50	100	40	80	300	
V_j	7	5	2	4	5		1115

Для визначення потенціалів U_i і V_j можна побудувати табл. 12.6. У тих клітках, де були постачання, записуємо транспортні витрати. Нехай U_1= 0. Тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13} , можна знайти V_1, V_2, V_3.

$$V_1=C_{11}-U_1 \qquad V_2=C_{12}-U_1, \qquad V_3=C_{13}-U_1.$$

$$V_1=7, \qquad V_2=5, \qquad V_3=2.$$

Знаючи V_3 і C_{23}, знаходимо U_2= 2. Знаючи U_2 і C_{24}, знаходимо V_4= 4. Знаючи V_4 і C_{34}, знаходимо U_3= - 2. Знаючи U_3 і C_{35}, знаходимо V_5 = 5.

Ті клітки, для яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, в нижній - суму U_i+V_j і порівнюємо її з транспортними витратами C_{ij} , тобто перевіримо умову $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\le 0$.

Таблиця 12.6

v_j / u_i	7	5	2	4	5
0	7	5	2	8 **4**	7 **5**
2	8 **9**	9 7	4	6	9 **7**
-2	5 **5**	1 **3**	9 **0**	2	3

Δ_{14}=4-8=-4, Δ_{15}=5-7=-2, Δ_{21}=9-8=1, Δ_{22}=7-9=-2,

Δ_{25}=7-9=-2, Δ_{31}=5-5=0, Δ_{32}=3-1=2, Δ_{33}=0-9=-9.

Оскільки Δ_{21}= 1 > 0 і Δ_{32}=2 >0, то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити, побудувавши ланцюг (цикл) перерозподілу постачань. Найбільша оцінка відповідає клітці (3, 2).

Запишемо план, що знайшли способом "північно-західного кута" (табл. 12.7).

В клітку (3, 2) треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через Θ. Тепер треба знайти замкнений цикл, який забезпечить баланс в задачі.

Таблиця 12.7

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	- Θ 50	+ Θ 45		
A_2			- Θ 55	+ Θ 5	
A_3		+ Θ		- Θ 35	80

Для цього потрібно відняти Θ з об'єму перевезення клітки (3, 4) (щоб сума перевезень у третьому рядку залишилася без зміни); далі треба додати Θ до об'єму перевезення клітки (2, 4) (щоб сума перевезень у четвертому стовпці залишилася без зміни); далі треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (2, 3), (щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни); далі треба додати Θ до об'єму-перевезення клітки (1, 3) (щоб сума перевезень у третьому стовпчику залишилася без зміни); нарешті, треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (1, 2) (щоб сума перевезень у першому рядку і у другому стовпці залишилася без зміни).

Величина Θ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом. Θ визначаємо як *найменшу* з усіх поставок, що стоять в клітках, де Θ віднімається (*найменша поставка зі знаком „мінус”*).

У даному прикладі Θ = min (50, 55, 35) = 35. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, поданий в табл. 12.8. Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів і перевірити виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Таблиця 12.8

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	$-\Theta$ 30	15	$+\Theta$ 80		
A_2	$+\Theta$		$-\Theta$ 20	40	
A_3		35			80

Щоб знайти U_i та V_j, складемо табл. 12.9.

Таблиця 12.9

U_i \ V_j	7	5	2	4	7
2	7	5	2	8 4	7 7
0	8 9	9 7	4	6	9 9
-4	5 3	1	9 -2	2 0	3

У тих клітках, де були постачання, записуємо транспортні витрати C_{ij}. Нехай U_i= 0, тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13},, можна знайти V_1, V_2, V_3,:

$$V_1=C_{11}-U_1=7-0=7,\ V_2=C_{12}-U_2=5-0=5,\ V_3=C_{13}-U3=2-0=2.$$

Знаючи C_{23} і V_3 , можна знайти U_2: $U_2=C_{23}-V_3=4-2=2$.

Знаючи C_{24} і U_2, знаходимо $V_4=C_{24}-U_3=6-2=4$.

Знаючи C_{32} і V_2, знаходимо $U_3=C_{32}-V_2=1-5=-4$.

Знаючи C_{35} і U_3 знаходимо $V_5=C_{35}-U_3=3-(-4)=7$.

Ті клітки, в яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, а у нижній - суму $U_i + V_j$ і порівняємо її з транспортними витратами C_{ij} , тобто перевіримо умову $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\le 0$. Бачимо, що для клітки (2, 1) Δ_{21} = 9 – 8 = 1 > 0, тобто друга умова оптимальності не виконується. Таким чином, план не є оптимальним, його можна поліпшити.

В клітку (2, 1) табл. 12.8 розміщуємо вантаж Θ. Знаходимо замкнений цикл, переміщуючись по клітках (2, 3), (1, 3), (1, 1). Вибираємо клітки, в яких Θ віднімається: Θ = min (20, 30) = 20. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, поданий у табл. 12.10.

Таблиця 12.10

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	15	100		
A_2	20			40	
A_3		35			80

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів і перевірити виконання другої умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Для знаходження U_i і V_j, складемо табл. 12.11, як це робили в табл. 12.6 і в табл. 12.9 (в наступних таблицях обчислення без пояснень).

Таблиця 12.11

V_j U_i	7	5	2	5	7
0	7	5	2	8 5	7 7
1	8	9 6	4 3	6	9 8
-4	5 3	1	9 -2	2 1	3

Усі ненавантажені клітки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} = 0$, тобто для них виконується друга умова оптимальності, отже, розв'язок

$$x_{11} = 10, x_{12} = 15, x_{13} = 100, x_{21} = 20, x_{24} = 40, x_{32} = 35, x_{35} = 80$$

і решта $x_{ij} = 0$, буде оптимальним.

Транспортні витрати на перевезення дорівнюють:

$$Z_{min} = 7 \cdot 10 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 20 + 6 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 3 \cdot 80 = 1020.$$

Примітка. Потенціали можна виставляти і в робочому плані: для рядків U_i у останньому правому стовпчику, і для стовпчиків V_j – останньому рядку таблиці. Так, для останнього плану таблиця матиме вигляд (табл. 12.12):

Таблиця 12.12

Потреби B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
A_i Запаси		30	80	100	40	80	
A_1	125	10	15	100			0
A_2	60	20			40		1
A_3	115		35			80	-4
V_j		7	5	2	5	7	1020

На рисунку 12.2 надана схема перевезень, яка відповідає оптимальному плану:

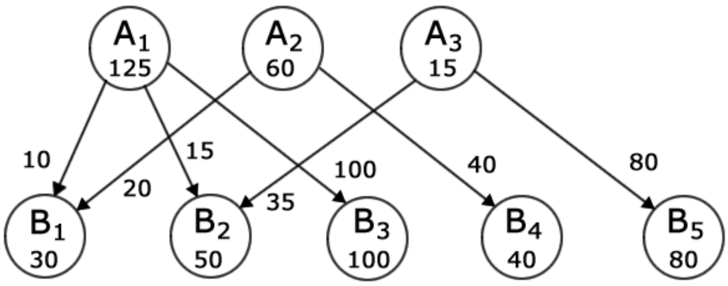


Рис. 12.2. Схема перевезень

Перевірка:

$Z_{min}=Z_{поч.}$-$\Theta \cdot \Delta_{ij} \cdot Z_{поч}$=1100$Z'_{нов.}$=1100-35•2=1030 (після першого перерозподілу).

$Z''_{нов}$ = 1030-20•1= 1010 (після другого перерозподілу).

Задача 12.3. Розв'язати транспортну задачу (табл. 12.13). Сформулювати економіко-математичну модель вихідної транспортної задачі, знайти оптимальний план закріплення постачальників за споживачами, встановити єдиність або неєдиність оптимального плану.

Розв'язання. Сформулюємо ЕММ цієї задачі:

Нехай x_{ij} - об'єми перевезень від i - го постачальника до j - го споживача.

Таблиця 12.13

Запаси постачаль-ника	Потреби споживача				
	25	10	20	30	15
40	5	3	4	6	4
20	3	4	10	5	7
40	4	6	9	3	4

Цільова функція:

$$\min\ f(\bar{x}) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 4x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} + \\ + 4x_{31} + 6x_{32} + 9x_{33} + 3x_{34} + 4x_{35}$$

Перевіримо, чи виконується умова балансу:

$\sum a_i = 40 + 20 + 40 = 100$, $\sum b_j = 25 + 10 + 20 + 30 + 15 = 100$,

тобто умова балансу виконується – транспортна задача закрита.

Функціональні обмеження:

за постачальниками:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 40,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 20,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 40;$$

за споживачами:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 25,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30,$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 15.$$

Складаємо початковий опорний план способом мінімального тарифу (табл. 12.14):

Таблиця 12.14

Запаси постачальника	Потреби споживача					u_i
	25	10	20	30	15	
40	5	3 **10**	4 **20**	6	4 **10**	0
20	3 **20**	4	10	5	7	-1
40	4 **5**	6	9	3 **30**	4 **5**	0
v_j	4	3	4	3	4	340

$$u_i + c_{ij} = v_j\,;\ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Оцінимо вартість перевезень:

$$f(\bar{x}) = 3\cdot 20 + 4\cdot 5 + 3\cdot 10 + 4\cdot 20 + 3\cdot 30 + 4\cdot 10 + 5\cdot 4 = 340,$$

тобто друга умова оптимальності виконується.

Відповідь: оптимальний план перевезень представлений у табл. 12.14. Вартість перевезень за цим планом складає 340 грошових одиниць. Оптимальний план є єдиним.

Задача 12.4. З трьох пунктів виробництва треба вивезти однорідний продукт в чотири пункти споживання. Транспортні витрати, об'єм виробництва і об'єм споживання подано в табл. 12.15.

Треба спланувати перевезення вантажу з пунктів виробництва до пунктів споживання при мінімальних транспортних витратах.

Таблиця 12.15.

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	2	400
A_2	2	4	5	1	180
A_3	3	2	4	3	250
Потреби	100	140	200	90	

Розв'язання. Підрахуємо сумарні запаси

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 400 + 180 + 250 = 830$$

та сумарні потреби $\sum_{j=1}^{4} b_i$ =100+140+200+90 = 530.

Запаси перевищують потреби на 300 одиниць. Необхідно ввести фіктивного споживача з потребою 300 одиниць і вартостями перевезень, що дорівнюють нулю. Після того, як задача збалансована, знаходимо початковий опорний план, наприклад, способом "північно-західного кута" (табл. 12.16).

Таблиця 12.16

A_i	B_j					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B^{Φ}_5	
A_1	100	140	160			400
A_2			40	90	50	180
A_3					250	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

Спочатку заповнюємо клітку (1, 1): X_{12} = min (100, 400) = 100. Перший стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (1, 2). X_{12} = min (140, 400) = 140. Другий стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (1, 3). X_{13} = min (160, 200) = 160. Перший рядок далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (2, 3). X_{23} = min (40, 180) = 40. Третій стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (2,4). X_{24} = min (90, 140) = 90. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо дві клітки X_{25} = 50, X_{35} = 250.

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до одержаного плану будуть такі:

$$Z = 4•100 + 5•140 + 3•160 + 5•40 + 1•90 + 0•50 + 0•250 =1870.$$

Знайдемо тепер початковий опорний план способом *мінімальної вартості*.

У табл. 12.17 відшукуємо найменшу вартість, не враховуючи поки що фіктивного споживача (клітки фіктивного постачальника чи споживача з нульовими тарифами заповнюються в останню чергу). Таким елементом є 1 в клітці (2, 4). Заповнюємо цю клітку, X_{24} = min (90, 180) = 90. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_2 залишилося 90 одиниць.

Таблиця 12.17

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	$B^{Ф}_{5}$	U_i
		100	140	200	90	300	
A_1	400	4	5	3 200	2	0 200	0
A_2	180	2 90	4	5	1 90	0	-1
A_3	250	3 10	2 140	4	3	0 100	0
V_j		3	2	3	2	0	1180

В частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 2, що знаходиться в клітці (2, 1) і (3, 2). Заповнюємо клітку (3,2) (сюди можна більше перевезти).

X_{32} = min (140, 250) = 140. Другий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилося 110 одиниць. Заповнюємо клітку (2, 1): X_{21} = min (100, 90) = 90. Другий рядок далі не розглядаємо. Споживачеві B_1 треба ще 10 одиниць.

В частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 3, що знаходиться в клітках (1, 3) і (3, 1). Заповнюємо клітку (1, 3). X_{13} = min (200, 400) = 200. Третій стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 200 одиниць. Далі заповнюємо клітку (3, 1). X_{31} = min (10, 110) = 10. Перший стовпчик далі не розглядаємо. Тепер заповнюємо останній стовпчик.

$$X_{15}=200, \qquad X_{35}=100.$$

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до отриманого плану такі:

$$Z = 3 \cdot 200 + 2 \cdot 90 + 1 \cdot 90 + 3 \cdot 10 + 2\text{-}140 = 1180.$$

Ці витрати менші, ніж при знаходженні способом "північно-західного кута", тому перевіряти на оптимальність будемо план, знайдений способом мінімальної вартості. Кількість заповнених кліток дорівнює 7, тобто план невироджений.

Для перевірки на оптимальність у табл. 12.17 запишемо потенціали рядків U_i та стовпчиків V_j .

Нехай U_1 = 0. Тоді знаходимо V_3 = 3 - 0 =3 і V_5 = 0 - 0 = 0. Тепер можна знайти U_3=0-0=0. Знаючи U3, заходимо V1=3-0=3 і V2=2-0 =2. Тепер можна знайти U_2=2-3=-1. Нарешті, V_4=1-(-1)=2. Для кліток, в яких не було поставок, друга умова оптимальності виконується. Усі клітки в таблиці 11.16 мають $\Delta_{ij} \leq 0$. Отже, розв'язок X_{13}=200, X_{21}=90, X_{24} = 90, X_{31} = 10, X_{32} = 140 буде оптимальним. При такому плані весь попит задоволений, але не всі запаси вивезені: у постачальника A_1 залишається 200 одиниць, а у A_3 залишається 100 одиниць вантажу. Транспортні витрати будуть мінімальними і становитимуть 1180 грошових одиниць.

12.10. Розв’язування транспортної задачі за допомогою ПК

А) Розв’язування транспортної задачі в системі Mathcad

Наведемо зразок розв’язання транспортної задачі в системі Mathcad (рис. 12.3).

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 80 & 65 & 90 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 & 9 \\ 11 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} := \mathbf{rows}(\mathbf{A}) \qquad \mathbf{m} = 3 \qquad \mathbf{i} := 1..\mathbf{m}$$

$$\mathbf{n} := \mathbf{cols}(\mathbf{B}) \qquad \mathbf{n} = 4 \qquad \mathbf{j} := 1..\mathbf{n}$$

$$\mathbf{X}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} := 0 \qquad \mathbf{F}(\mathbf{X}) := \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \left(\mathbf{C}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \cdot \mathbf{X}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\right)$$

Given

$$\sum_{\mathbf{j}} \mathbf{X}^{\langle \mathbf{j} \rangle} \le \mathbf{A} \qquad \left[\sum_{\mathbf{i}} \left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\right)^{\langle \mathbf{i} \rangle}\right]^{\mathbf{T}} \le \mathbf{B} \qquad \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{X}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \mathbf{min}\left(\sum \mathbf{A}, \sum \mathbf{B}\right) \qquad \mathbf{X} \ge 0$$

$$\mathbf{X} := \mathbf{Minimize}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 10 & 70 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{X})} = \begin{pmatrix} 0 & 260 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 560 & 0 \\ 320 & 0 & 120 & 560 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{X}) = 1820$$

Рис. 12.3

На рисунку сірим фоном виділені блоки з вихідними даними:

A – запаси вантажу у постачальників,

B – попит споживачів на цей вантаж,

C – матриця тарифів на перевезення вантажу.

Далі слідують:

m – кількість постачальників,

n – кількість споживачів,

i – номер постачальника,

j – номер споживача,

X – матриця перевезень,

F(X) – цільова функція транспортних витрат.

До розв'язувального блоку входять умови:

1 – кількість вивезеного від постачальників вантажу не може перевищити їхні запаси,

2 – кількість завезеного до споживачів вантажу не може перевищити їхній попит,

3 – загальна кількість перевезеного вантажу ∑∑x дорівнює найменшому з двох чисел ∑A (сумарні запаси вантажу у постачальників) і ∑B (сумарний попит споживачів),

4 – умова невід’ємності змінних.

Б) Розв’язування транспортної задачі в системі Microsoft Excel

Розв’язання транспортної задачі в системі Microsoft Excel проводиться аналогічно до пункту 11.1, б), використовуючи модель з пункту 12.9, а). Схема такого розв’язання представлена на рис. 12.4.

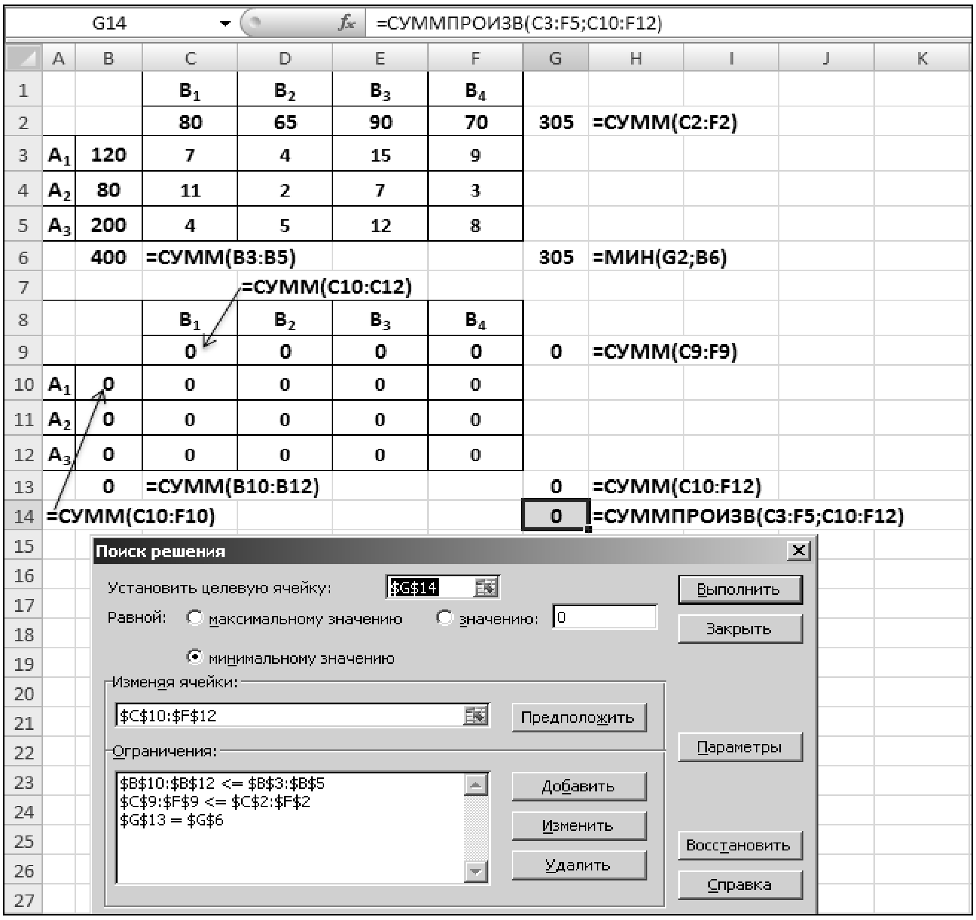


Рис. 12.4

На рисунку бачимо, що треба формулу балансу по рядках з комірки B10 протягнути до комірки B12, а формулу балансу по стовпчиках з комірки C9 протягнути до комірки F9. Також треба, як і в попередньому пункті, встановити параметри “Линейная модель” та "Неотрицательные значения".

12.11. Питання для самоперевірки

1. Постановка транспортної задачі (ТЗ) та її математична модель.
2. Що називають постачальниками та їхніми запасами (потужностями), споживачами та їхніми потребами (попитом)?
3. Сформулюйте умову збалансованості ТЗ. Яка модель ТЗ називається закритою?
4. Яка модель ТЗ називається відкритою? Як звести її до закритої моделі?
5. Чи завжди можна збалансувати транспортну задачу?
6. Що називається матрицею перевезень та матрицею витрат? Яку основну умову задовольняють елементи цих матриць?
7. Які клітинки таблиці ТЗ називається завантаженими, які не завантаженими? Яким невідомим відповідають завантажені клітинки; незавантажені клітинки?
8. Скільки ненульових елементів повинен містити невироджений базисний план транспортної задачі?
9. Який опорний план ТЗ називається невиродженим? Виродженим?
10. Коли може з’явитись виродження у ТЗ?
11. Що потрібно робити при виникненні ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?
12. Що називається ланцюгом (циклом) перерозподілу? Якого виду вони можуть бути? Як будується такий цикл?
13. Яка ціна циклу перевезень? Як змінюється ціна перевезень в результаті циклу перерозподілу?
14. Яка кількість вантажу перекидається по циклу?
15. Що таке система потенціалів рядків і стовпців, яким вона відповідає?
16. Сформулюйте умову оптимальності плану ТЗ.

17. Опишіть побудову початкового опорного плану ТЗ методом: а) північно-західного кута; б) мінімальної вартості; в) подвійної переваги; г) угорським.

18. Чи можливо застосувати метод “північно-східного” (“південно-західного”, “південно-східного”) кута для відшукання початкового допустимого опорного плану закритої ТЗ? Наведіть приклад.

19. Опишіть побудову нового опорного плану ТЗ за попереднім планом.

20. Для чого вводяться фіктивні пункти? Яку роль вони відіграють?

21. Запишіть математичну модель ТЗ за критерієм вартості перевезень.

22. Опишіть алгоритм розв’язання ТЗ у системі Mathcad та Microsoft Excel.

12.12. Ключові поняття

Баланс
Вироджений опорний план ТЗ
Відкрита ТЗ
Збалансована ТЗ
Закрита ТЗ
Критерій оптимальності
Ланцюг перерозподілу
Метод мінімального елемента
Метод північно-західного кута
Метод подвійної переваги
Цикл перерахування
Цикл перерозподілу
Фіктивні постачальники, споживачі
Невироджений опорний план ТЗ
Незбалансована ТЗ
Опорний план ТЗ
План перевезень
План ТЗ
Постачальники
Потенціали
Ребро
Споживачі
Транспортна задача
Умова існування розв’язку ТЗ

12.13. Навчальні завдання

№ 12.1. Зерно з 4-х районів повинне бути вивезене на 3 елеватори. Очікуваний збір зерна в районах: a_1 = 400 тис. ц; a_2 = 500 тис. ц; a_3 = 800 тис. ц; a_4 = 500 тис. ц. Потужність елеваторів: b_1 = 700 тис. це; b_2 = 800 тис. ц; b_3 = 700 тис. ц. Витрати на перевезення 1 ц зерна (у грош. од.) з районів до елеваторів наведені в табл. 12.18. Скласти план перевезень зерна з мінімальними транспортними витратами. Початковий розподіл перевезень скласти методом “північно-західного кута”.

Таблиця 12.18

Райони	Елеватори		
	1-й	2-й	3-й
А	10	40	30
Б	70	10	50
В	40	80	30
Г	40	20	80

Відповідь: z_{min} = 480 млн. гр. од.

№ 12.2. На чотирьох станціях A_1, A_2, A_3,A_4 є деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом замовникам B_1, B_2, B_3, B_4.

Потреби замовників (в умовних одиницях) і тарифи на перевезення одиниці вантажу (у гр. од.) зазначені в табл. 12.19. Потрібно спланувати перевезення так, щоб загальна сума вартостей перевезень була найменшою. Початковий план перевезення скласти методом найменшої вартості.

Таблиця 12.19

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	15	9	120
A_2	11	2	7	3	180
A_3	4	5	12	8	200
A_4	85	65	90	60	300
Потреби	180	200	190	230	800

Відповідь: z_{min} = 20980 гр. од.

№ 12.3. Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу з мінімальними транспортними витратами при вихідних даних, наведених у табл. 12.20.

Таблиця 12.20

Пункти відправлення	Пункти призначення						Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	8	6	4	7	5	550
A_2	8	5	4	7	6	3	700
A_3	12	6	10	4	8	5	450
A_4	14	7	5	4	10	6	800
Потреби	550	400	300	500	450	300	2500

Початковий опорний план скласти методом "північно-західного кута".

Відповідь: z_{min} = 14650 гр. од.

№ 12.4. Скласти план посівів кормових культур за трьома ділянками землі різної родючості так, щоб загальні витрати засобів були мінімальними. Необхідні дані наведені в табл. 12. 21.

Таблиця 12.21

Кормові культури	Витрати на 1 га за ділянками, тис. гр. од.			Посівні площі
	1	2	3	
Кукурудза на силос	11	14	15	600
Кормовий буряк	40	45	46	80
Однолітні трави	4	3,5	4,5	130
Картопля	38	36	40	100
Озимі на корм	4	5	4,5	50
Кормові бахчі	42	46	50	40
Розміри ділянок, га	500	200	300	1000

Відповідь: z_{min} = 16670 тис. гр. од.

№ 12.5. Скласти оптимальний план перевезень пального зі складів ремонтно-транспортного підприємства (РТП) району на склади господарств. Критерій оптимальності – мінімум тонно-кілометрів.

Запаси пального на складах, потреби господарств у пальному і відстані від складів до господарств дано в табл. 12. 22.

Таблиця 12.22

Склади	Пункти призначення					Запаси пального, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	22	28	30	18	1400
A_2	24	22	25	25	20	1200
A_3	23	20	24	26	25	1300
Потреби, т	1100	850	750	800	600	3900 / 4100

Відповідь: z_{min} = 83700 тонно-кілометрів.

№ 12.6. Знайти оптимальний розв'язок ТЗ за критерієм мінімальних сукупних витрат за перевезення, якщо вектор запасу вантажу в пунктах постачання $A = \{100;150;200;250\}$, вектор потреб $B = \{120;80;200\}$ та матриця тарифів перевезень

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 8 & 10 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \\ 11 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 12.7. Розв'язати ТЗ, вихідні дані якої наведені в табл. 12. 23.

Таблиця 12.23

A_i \ B_j	**20**	**45**	**30**
74	7	3	6
40	4	8	2
36	1	5	9

Відповідь: z_{min} = 215.

№12.7. Розподілити сільськогосподарські роботи за марками тракторів так, щоб загальні витрати на виконання робіт були мінімальними. Вихідні дані наведено в табл. 12.24.

Таблиця 12.24

Вид роботи	Собівартість 1 га робіт, тис. гр. од.				Об'єм робіт, ум. га
	С-80 (2 шт.)	ДТ-54 (10 шт.)	Херсонець (5 шт.)	КПД-35 (2шт.)	
Культивація	0,80	1,00	0,90	0,85	1500
Оранка	2,40	3,00	3,40	3,20	2000
Сіяння	-	-	1,00	0,95	800
Боронування	0,20	0,27	0,25	0,27	700
Сезонна норма робіт	1000	1600	1550	600	5000 4750

Відповідь: z_{min} = 6974 тис гр. од.

12.14. Завдання для перевірки знань

№ 12. 8. У трьох постачальників A_1, A_2, A_3 є деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом споживачам B_1, B_2, B_3, B_4. Попит споживачів (в умовних одиницях), запаси вантажів у постачальників (у тих же одиницях), і тарифи (у гр. од.) задано в табл. 12.25.

Таблиця 12.25

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	8	7	11	160
A_2	14	3	1	8	400
A_3	9	5	16	7	240
Потреби	180	200	190	230	800

Скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами. Початковий розподіл постачань скласти методом «північно-західного кута».

Відповідь: z_{min} = 3070 гр. од.

№ 12. 9. Скласти оптимальний план перевезень бензину з мінімальними транспортними витратами (у тис. гр.) за наступними вихідними даної таблиці (табл. 12.26):

Таблиця 12.26

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	5	2	3	100
A_2	1	4	2	3	3	40
A_3	3	5	2	1	2	30
A_4	2	6	3	5	4	30
Потреби, т	50	50	10	60	30	200

Початковий розподіл постачань скласти способом “північно-західного кута”.

Відповідь: z_{min} = 480 тис. гр. од.

№ 12. 10. Скласти оптимальний план перевезень вантажів від трьох постачальників з запасами 240, 40, 110 т до чотирьох споживачів з потребами 90, 190, 40 та 130 т відповідно. Тарифи на перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

Відповідь: z_{min} = 3120 гр. од.,

оптимальний розв’язок $\begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

№ 12.11. В області є три спеціалізовані майстерні з ремонту двигунів сільськогосподарських машин, що обслуговують 6 районів. Виробничі потужності майстерень, потреба районів у ремонті двигунів за рік і витрати (тис. гр. од.) на перевезення одного двигуна з районів до майстерень наведені в табл. 12.27.

Складти план прикріплення районів до ремонтних майстерень, що забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Таблиця 12.27

Райони	Майстерні			Потреби в ремонтах двигунів, шт.
	I	II	III	
1-й	4,5	2,7	8,3	110
2-й	2,1	4,3	2,4	200
3-й	7,5	3,1	4,2	170
4-й	5,3	1,9	6,2	140
5-й	4,1	6,7	3,1	100
6-й	3,5	4,8	5,1	120
Потужності майстерень, шт.	400	250	150	760 / 800

Відповідь: z_{min} = 2315 тис. гр. од.

№ 12.12. Скласти план розподілу робіт за марками тракторів T_1, T_2, T_3, T_4 так, щоб загальні витрати на виконання робіт були мінімальними. Знайти мінімальний об'єм усіх затрат. Дані наведені у таблиці 12.29.

Таблиця 12.29

Види робіт	Вартість 1га робіт трактором (грн.)				Об'єм робіт (га)
	T_1	T_2	T_3	T_4	
Підйом пару	0,6	0,7	0,8	0,5	5200
Боронування	0,2	0,4	0,1	0,3	3800
Дискування	0,4	0,6	0,5	0,3	3800
Сівба	1,0	0,9	1,2	1,1	6100
Культивація	0,8	1,0	0,9	0,7	5500
Сезонна норма виробітку трактора (га)	3200	5100	4500	2600	

ТЕМА 13. ЗАДАЧІ, ЩО РОЗВ'ЯЗУЮТЬСЯ ЗА СХЕМОЮ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ, АЛЕ ЗІ ЗНАХОДЖЕННЯМ МАКСИМУМУ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Розв'язування задач економічного змісту методом максимальної оцінки.

13.1. Теоретичні відомості

Існує ряд практичних економічних ЗЛП, які можна розв'язати за схемою транспортної задачі, хоча їх умова прямо не пов'язана з транспортними перевезеннями. У деяких з цих задач треба знайти максимум цільової функції. Початковий опорний план у таких задачах можна складати методом "північно-західного кута", але доцільніше застосувати метод *найбільшої оцінки* клітки, аналогічний до методу найменшого тарифу. Оцінками кліток у задачах, які розв'язуються за схемою ТЗ, будемо називати коефіцієнти цільової функції (аналогічні тарифам у ТЗ).

Критерій оптимальності транспортної задачі, при знаходженні максимуму цільової функції методом потенціалів, складається з двох умов:

1. Сума потенціалів рядка і стовпчика дорівнює оцінці *навантаженої* клітки: $u_i + v_j = \boxed{c_{ij}}$.

2. Сума потенціалів рядка і стовпчика не менша від оцінки *ненавантаженої* клітки: $u_i + v_j \geq c_{ij}$.

Якщо друга умова не виконується для якихось кліток таблиці, то план не є оптимальним і його можна покращити, вибравши серед цих кліток для навантаження клітку з найбільшою величиною $c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)$.

13.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 13.1. На трьох ділянках з різними попередниками потрібно скласти план посівів 3 сортів озимої пшениці: Престиж, Ювілейна, Августа з критерієм оптимальності – максимум валової продукції. Розміри ділянок попередників, посівні площі сортів пшениці та їх урожайність за ділянками наведені в таблиці 13.1.

Таблиця 13.1.

Попередники	Сорти пшениці / посівна площа, розміри ділянок	Престиж	Ювілейна	Августа
		1000	**600**	**400**
Чистий пар	**800**	30	28	25
Кукурудза на силос	**400**	28	26	24
Багаторічні трави	**600**	26	24	23
Бобові	**200**	28	30	22

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати за схемою ТЗ, але за критерієм максимуму ЦФ. При цьому у ролі постачальників будуть ділянки з різними попередниками, а споживачами – різні сорти пшениці. Оцінками кліток будуть урожайності різних сортів пшениці за різними попередниками.

Баланс між загальною площею ділянок і запланованою площею посівів пшениці виконується (табл. 13.2).

Початковий опорний план складаємо методом найбільшої оцінки клітки, починаючи з кліток $(A_1; B_1), (A_4; B_2)$ з найбільшою оцінкою 30. Відповідно до цього плану валовий збір зерна складе:

$$f_1 = 30 \cdot 800 + 28 \cdot 200 + 26 \cdot 200 + 24 \cdot 200 + 30 \cdot 200 + 23 \cdot 400 = 54800.$$

Далі знаходимо потенціали за першою умовою критерію оптимальності і перевіряємо другу умову. Друга умова виконується для усіх незавантажених кліток, отже, цей план є оптимальним.

Таблиця 13.2

Попередники	Сорти пшениці / посівна площа, розміри ділянок	B_1	B_2	B_3	U_i
		1000	**600**	**400**	

A_1	**800**	$\boxed{30}$ **800**	28	25	0
A_2	**400**	$\boxed{28}$ **200**	$\boxed{26}$ **200**	24	-2
A_3	**600**	26	$\boxed{24}$ **200**	$\boxed{23}$ **400**	-4
A_4	**200**	28	$\boxed{30}$ **200**	22	2
V_j		30	28	27	54800

13.3. Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте ТЗ за критерієм максимуму цільової функції.

2. Постановка задач економічного змісту, які розв'язуються за схемою транспортної задачі, але зі знаходженням максимуму цільової функції.

3. Сформулюйте критерій оптимальності плану при знаходженні максимуму цільової функції методом потенціалів.

4. Як складається початковий опорний план ТЗ за умови максимуму цільової функції?

5. Опишіть побудову початкового опорного плану ТЗ методом максимальної оцінки клітки.

6. Опишіть побудову нового опорного плану ТЗ за попереднім планом при знаходженні максимуму цільової функції.

13.4. Ключові поняття

Критерій максимуму ЦФ — Максимум цільової функції
Метод максимальної оцінки клітки — Оцінка клітки

13.5. Навчальні завдання

№ 13.1. Розподілити посіви кормових культур за ділянками землі різної родючості таким чином, щоб одержати максимальну кількість продукції в центнерах кормових одиниць.

Посівна площа за культурами, розміри ділянок та врожайність наведені в табл. 13.3.

Таблиця 13.3

Кормові культури	Урожайність за ділянками, ц корм. од. з 1 га.				Посівна площа, га
	1-й	2-й	3-й	4-й	
Кукурудза на силос	10	40	70	100	1400
Вико-вівсяна суміш	8	12	16	30	1300
Суданка	9	14	24	35	900
Картопля	10	24	36	50	150
Кормові баштанні	7	11	15	25	250
Площа ділянок	700	800	1500	1000	4000

Відповідь: z_{max} = 170750 ц корм. од.

№ 13.2. Скласти план посівів зернових культур за ділянками землі різної родючості, при якому загальний збір зерна виявиться максимальним.

Розміри ділянок, запланована посівна площа за культурами і прогнозовані врожайності дано в табл. 13.4.

Таблиця 13.4

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц/га				Площа посівів, га
	1-а	2-а	3-я	4-а	
Кукурудза на зерно	50	40	40	30	1000
Пшениця	35	30	25	20	6000
Ячмінь	25	21	18	16	1200
Просо	32	25	20	18	1800
Площа ділянок, га	2000	3000	3500	1500	10000

Відповідь: z_{max} = 281,6 тис. ц.

№13.3. Розподілити посіви п'яти культур на трьох ділянках землі різної родючості з метою одержання максимуму вартості валової продукції. Необхідні дані наведено в табл. 13.5.

Таблиця 13.5

Культури	Урожайність за ділянками, ц / га			Посівні площі, га	Ціна реалізації 1 ц, тис. гр. од.
	I	II	III		
Пшениця	25	24	30	500	6,5
Кукурудза на зерно	40	35	45	400	5,0
Картопля	140	150	160	200	3,0
Овочі	210	230	220	30	6,0
Озимі зернові	20	16	24	300	7,5
Розміри ділянок, га	630	500	300	1430	-

Відповідь: z_{max} = 345470 тис. гр. од.

13.6. Завдання для перевірки знань

№13.4. А) Скласти план посівів пшениці та ячменю, який забезпечує максимальний збір зерна за вихідними даними з табл. 13.6:

Таблиця 13.6

Ресурси	Затрати ресурсів на 1 га посівів		Обсяги ресурсів
	пшениця	ячмінь	
Пашня, га	1	1	700
Витрати праці, люд. /дн	4	3	2800
Добрива, ц / га	2	1	1150
Урожайність, ц / га	36	28	

Б) Скласти план посівів зернових культур на ділянках різної родючості, який забезпечує максимальний валовий збір зерна за вихідними даними з табл. 13.7:

Таблиця 13.7

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц/га			Обсяги ресурсів
	I	II	III	
Пшениця	34	28	32	800
Жито	24	34	26	430
Ячмінь	25	1,2	27	650
Кукурудза	40	45	30	320
Площа ділянок, га	600	850	750	

№13.5. Скласти план розміщення посівів зернових культур за ділянками землі різної родючості з метою одержання максимального прибутку.

Посівні площі за культурами, розміри ділянок, урожайність та ціни реалізації дано в табл. 13.8.

Витрати на 1 га за ділянками наведені в табл. 13.9.

Таблиця 13.8

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц / га				Посівна площа, га	Ціна реалізації, тис. гр. од.
	I	II	III	IY		
Пшениця	35	25	20	15	2400	6,5
Кукурудза	60	40	30	50	1700	5,0
Ячмінь	30	20	15	15	350	4,3
Жито	25	30	20	15	250	7,0
Просо	40	20	15	10	100	7,2
Розміри ділянок, га.	3000	1000	300	500	4800	-

Таблиця 13.9

Зернові культури	Витрати засобів на 1 га, тис. гр. од.			
	I	II	III	IY
Пшениця	50	40	40	40
Кукурудза	90	90	70	65
Ячмінь	50	40	40	45
Жито	50	50	45	40
Просо	60	50	50	50

Відповідь: z_{max} = 804450 тис. гр. од.

№ 13.6. Необхідно скласти план розміщення посівів зернових культур за ділянками різної родючості так, щоб загальний врожай був максимальним. Знайти максимальний об'єм загального врожаю. Дані наведені у табл. 13.10.

Таблиця 13.10

Культури	Врожайність за ділянками (ц/га)				Площа, що відводиться під культури (га)
	I	II	III	IV	
Пшениця	34	28	32	30	1300
Жито	24	20	26	22	830
Ячмінь	25	30	27	26	1150
Кукурудза	46	42	30	58	710
Просо	18	22	24	20	1050
Площі ділянок (га)	1100	850	750	800	

ТЕМА 14. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОДАТКОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

14.1. Теоретичні відомості

В умові практичних задач, які пов'язані з плануванням перевезень і розв'язуються за схемою ТЗ, іноді зустрічаються додаткові обмеження, які не вкладаються у рамки попередньо розглянутих ТЗ. Наприклад, транспортні сполучення, які з'єднують джерела продукції зі споживачами, мають обмежені пропускні можливості (або обмежений проміжок часу). Ці обмеження можуть не дозволити реалізувати знайдений оптимальний план перевезень. Тому в задачу потрібно включати обмеження, які пов'язані з пропускною спроможністю магістралей. У інших численних задачах транспортного типу можуть враховуватися максимально можливі обсяги перевезень продукції за всіма або окремими маршрутами, багатономенклатурність її асортименту, певні додаткові умови перевезень тощо.

Розглянемо чотири основних види таких обмежень, в яких вдається звести ТЗ до канонічного виду.

1) Перевезення від постачальника A_i до споживача B_j заборонені за якихось причин. В цьому випадку тариф (оцінку) відповідної клітки приймають рівним достатньо великому додатному числу: $c_{ij} = M$. Навантаження цієї клітки має зміст, аналогічний штучній змінній у симплексній моделі ЗЛП і у оптимальному плані, якщо такий план існує, повинно дорівнювати нулю.

2) Якщо від постачальника A_i до споживача B_j потрібно перевезти визначену кількість вантажу $x_{ij} = d$, то запас вантажу постачальника A_i та попит споживача B_j зменшують на величину d: $a_i' = a_i - d,\ b_j' = b_j - d,$ а тариф (оцінку) відповідної клітки приймають рівним достатньо великому

додатному числу: $c_{ij} = M$. При цьому треба пам’ятати, що цільова функція збільшується на величину $c_{ij} \cdot d$.

3) Якщо від постачальника A_i до споживача B_j потрібно перевезти не менше визначеної кількості вантажу $x_{ij} \geq d$, то запас вантажу постачальника A_i та попит споживача B_j зменшують на величину d: $a_i' = a_i - d$, $b_j' = b_j - d$, а цільова функція збільшується на величину $c_{ij} \cdot d$. При цьому відповідна клітка не блокується тарифом M, як у попередньому випадку, тому, що вона може й далі навантажуватись.

4) Якщо від постачальника A_i до споживача B_j потрібно перевезти не більше визначеної кількості вантажу $x_{ij} \leq d$, то у транспортній таблиці стовпець B_j розділяють на два стовпці B_j' з попитом $b_j' = d$ і B_j'' з попитом $b_j'' = b_j - d$. Тарифи цих стовпців співпадають з тарифами B_j: $c_{ij'} = c_{ij''} = c_{ij}$, крім тарифу у i-му рядку стовпця B_j'', який приймають рівним достатньо великому додатному числу: $c_{ij''} = M$.

14.2. Методичні рекомендації до розв’язування вправ

Задача 14.1. Умова ТЗ задана таблицею 14.1:

Таблиця 14.1

Поста-чальники	Споживачі	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	попит / запаси	**40**	**60**	**100**	**90**	**70**
A_1	**110**	7	3	2	8	4
A_2	**110**	6	7	5	1	3
A_3	**140**	2	5	4	2	5

Скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами при наявності додаткових обмежень:

1) перевезення від постачальника A_3 до споживача B_1 заборонені ($D_{31} = M$);

2) від постачальника A_2 до споживача B_3 треба перевезти рівно 20 одиниць вантажу ($D_{23} = 20$);

3) від постачальника A_3 до споживача B_4 треба перевезти не менше 60 одиниць вантажу ($D_{34} \geq 60$);

4) від постачальника A_2 до споживача B_5 треба перевезти не більше 40 одиниць вантажу ($D_{25} \leq 40$).

Розв'язання. Модель збалансована. Зважаючи на види додаткових обмежень, складаємо розрахункову транспортну таблицю 14.2. Початковий опорний план складаємо методом найменшого тарифу.

Таблиця 14.2

Поста-чальники	Споживачі / попит / запаси	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5'	B_5''	u_i
		40	**60**	**80** + 20	**30** + 60	**40**	**30**	
A_1	**110**	7 ***M*-9**	$\boxed{3}$ **30**	$\boxed{2}$ **80**	8 ***M*-15**	4 ***M*-9**	4	0
A_2	**90** + 20	$\boxed{6}$ **+** **20**	7	M5 20	$\boxed{1}$ **–** **30**	$\boxed{3}$ **40**	M	8 – *M*
A_3	**80** + 60	$\boxed{M}$ **–** **20**	$\boxed{5}$ **30**	4	2 ***M*-7** **+** 60	5 ***M*-8**	$\boxed{5}$ **30**	2
v_j		*M* – 2	3	2	*M* – 7	*M* – 5	3	1040 + 20*M*

Відповідні транспортні витрати складуть:

f_1 = 3·30 + 2·80 + 6·20 + 1·30 + 3·40 + 5·30 + 5·30 + M·20 + 5·20 + 2·60 = 1040 + 20*M*.

Модель першого опорного плану невироджена. План не оптимальний, друга умова оптимальності не виконується; довантажимо клітку A_3 B_4 (табл. 14.3).

Таблиця 14.3

	Споживачі	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5'	B_5''	u_i
Поста-чальники	попит / запаси	**40**	**60**	**80** + 20	**30** + 60	**40**	**30**	
A_1	**110**	7	$\boxed{3}$ **30**	$\boxed{2}$ **80**	8	4	4	0
A_2	**90** + 20	$\boxed{6}$ **40**	7	M5 20	$\boxed{1}$ **10**	$\boxed{3}$ **40**	M	1
A_3	**80** + 60	**1...1**	$\boxed{5}$ **30**	4	$\boxed{2}$ **20** + 60	5	$\boxed{5}$ **30**	2
v_j		5	3	2	0	2	3	1180

Друга умова критерію оптимальності виконана для усіх ненавантажених кліток, тобто план є оптимальним. Відповідно до цього плану треба перевезти з пункту A_1 до пункту B_2 30 одиниць вантажу, з $A_1 \to B_3$ – 80, $A_2 \to B_1$ – 40, $A_2 \to B_3$ – 20, $A_2 \to B_4$ – 10, $A_2 \to B_5$ – 40, $A_3 \to B_2$ – 30, $A_3 \to B_4$ – 80, $A_3 \to B_5$ – 30. При цьому плані увесь вантаж від постачальників буде вивезено і увесь попит споживачів задоволено. Усі додаткові обмеження також виконано, а транспортні витрати будуть мінімальні і складуть:

$f_{\min} = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 80 + 6 \cdot 40 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 40 + 5 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 60 =$ 1180 (грошових одиниць).

14.3. Питання для самоперевірки

1. Додаткові обмеження якого виду існують?
2. Як реалізується розв’язування ТЗ з додатковими обмеженнями?
3. Що називається блокуванням перевезень?
4. Як враховуються додаткові умови та яке практичне значення вони мають?

14.4. Ключові поняття

Блокування клітки — Додаткові обмеження

Обмежені пропускні можливості (спроможності)

Перевезення заборонені Тариф М

14.5. Навчальні завдання

Розв'язати ТЗ за наступними початковими умовами і з мінімальними транспортними витратами.

№ 14.1. $a_1 = 25; a_2 = 55; a_3 = 20; b_1 = 45; b_2 = 15; b_3 = 20; b_4 = 20;$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ D_{13} = 15;\ D_{21} = 15;\ D_{24} = 10.$$

№ 14.2. $a_1 = 180; a_2 = 220; a_3 = 100; b_1 = 120; b_2 = 80; b_3 = 160; b_4 = 90; b_5 = 50;$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix};$$

(A_1B_2) та (A_2B_5) – перевезення заборонено; (A_2B_1) = 60.

№ 14.3. $a_1 = 160; a_2 = 90; a_3 = 140; b_1 = 90; b_2 = 60; b_3 = 80; b_4 = 70; b_5 = 90;$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D_{12} \geq 50;\ D_{24} \leq 40.$$

№ 14.4. $a_1 = 110; a_2 = 110; a_3 = 140; b_1 = 40; b_2 = 60; b_3 = 100; b_4 = 90; b_5 = 70;$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix};\ D_{31} = M;\ D_{34} \geq 60;\ D_{35} \leq 40;\ D_{23} = 20.$$

№ 14.5.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		270	140	200	110
A_1	510	1	4	7	3
A_2	90	5	6	8	9
A_3	120	7	2	4	3

D_{23}=M, D_{14}=30, D_{22}≥50, D_{33}≤120, D_{34}≤80.

14.6. Завдання для перевірки знань

Розв'язати ТЗ за наступними початковими і додатковими умовами та з мінімальними транспортними витратами.

№ 14.6. $a_1 = 320; a_2 = 260; b_1 = 120; b_2 = 140; b_3 = 160; b_4 = 200$; $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$D_{14} \geq 100$; $D_{22} = 80$.

№ 14.7.

А) $a_1 = 60; a_2 = 40; a_3 = 70; a_4 = 30; b_1 = 40; b_2 = 60; b_3 = 100; b_4 = 90; b_5 = 70$.

$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $D_{31} = M$; $D_{34} \geq 60$; $D_{35} \leq 40$; $D_{23} = 20$.

Б)

$\alpha_1 = 120; \beta_2 = 65$

$\alpha_2 = 150; \beta_3 = 90$

$\alpha_3 = 100; \beta_4 = 60$

$\beta_1 = 80; \beta_5 = 80$

$C = \begin{pmatrix} 7, & 4, & 15, & 9, & 14 \\ 11, & 2, & 7, & 3, & 10 \\ 4, & 5, & 12, & 8, & 17 \end{pmatrix} D_{12} = 20; D_{32} = M; D_{24} \leq 30$.

В) $a_1 = 10; a_2 = 12; a_3 = 11; a_4 = 7; b_1 = 8; b_2 = 9; b_3 = 9; b_4 = 6; b_5 = 5$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Необхідно повністю звільнити першого постачальника.

№ 14.8.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		70	220	40	30	60
A_1	115	4	5	2	8	6
A_2	175	3	1	9	7	3
A_3	130	9	6	7	2	1

D11=M D14=20

D32≥50 D25≤40 D31≤50

ТЕМА 15. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ПРИ НАЯВНОСТІ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ (БАЗ)

15.1. Теоретичні відомості

Введення критерію максимуму ЦФ, додаткових обмежень у модель ТЗ є кроками узагальнення її до моделі транспортної мережі (мережевої моделі). Ще одним кроком у цьому напрямку є розв'язування ТЗ при наявності проміжних пунктів (баз), в яких може відбуватись обробка вантажів (наприклад, перевантаження на інший вид транспорту), або відсутні транспортні сполучення між окремими постачальниками та споживачами тощо.

Нехай необхідно перевезти однорідний вантаж від m постачальників A_1, A_2, ..., A_m із запасами цього вантажу відповідно a_1, a_2,..., a_m одиниць, до n споживачів B_1, B_2, ..., B_n, попит яких на цей вантаж складає відповідно b_1, b_2, ..., b_n одиниць через l проміжних баз D_1, D_2, ..., D_l, пропускна спроможність яких становить відповідно d_1, d_2, ..., d_l одиниць вантажу. Прямі перевезення від постачальників до споживачів заборонені. Скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами.

Модель ТЗ з проміжними базами можна задати за допомогою двох таблиць:

Таблиця 15.1

	Бази	D_1	D_2	...	D_l
Поста-чальники	пр.спром. запаси	d_1	d_2	...	d_l
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1l}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2l}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{ml}

	Споживачі	B_1	B_2	...	B_n
Бази	попит пр.спром.	b_1	b_2	...	b_n
D_1	d_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}
D_2	d_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}
...	...	...	...	...	...
D_l	d_l	f_{l1}	f_{l2}	...	f_{ln}

Якщо виконується умова $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{k=1}^{l} d_k$ (тобто пропускна спроможність баз використовується повністю), то задачу можна розв'язати у *два* *етапи* по кожній з цих таблиць окремо. Але якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{k=1}^{l} d_k$ (тобто пропускна спроможність баз використовується частково), то задачу не можна розв'язувати у два етапи. Треба скласти *єдину* модель ТЗ у канонічному вигляді, до якої проміжні бази входять як у якості постачальників, так і у якості споживачів. Тарифи на перевезення від постачальників до споживачів, а також з бази на іншу базу приймаємо рівними достатньо великому додатному числу *M*. Тарифи на перевезення з бази на ту ж саму базу приймаємо рівними нулю. Навантаження таких кліток буде мати зміст невикористаної пропускної спроможності баз. Тут є аналогія з додатковими змінними у симплексній моделі ЗЛП, які також входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

Задача може виявитися нерозв'язною, якщо сума всіх пропускних спроможностей баз, що ведуть до j-го споживача, менша за його потреби, тобто $\sum_{i=1}^{m} d_{ij} < b_j$.

15.2. Методичні рекомендації до розв'язування вправ

Задача 15.1. Умова ТЗ з проміжними пунктами задана табл. 15.2.

Таблиця 15.2

Поста-чальники	Бази / пр.спром. / запаси	D_1	D_2	D_3
		360	200	350
A_1	320	5	3	3
A_2	260	4	3	2

Бази	Споживачі / попит / пр.спром.	B_1	B_2	B_3	B_4
		120	140	160	200
D_1	360	6	3	4	1
D_2	200	4	5	2	5
D_3	350	3	2	3	3

*Розв'язання***.** Перевіримо баланс:

$\sum a_i = 580; \quad \sum d_k = 910; \quad \sum b_j = 620. \quad \sum a_i < \sum d_k,$ тобто не всі бази будуть заповнені (910 – 580 = 330 одиниць пропускної спроможності баз не буде використано) і задачу не можна розв'язати у два етапи. Треба складати єдину транспортну таблицю. Крім того $\sum a_i < \sum b_j$, тобто модель незбалансована і треба увести фіктивного постачальника $A_3^{\text{фікт}}$ із запасом вантажу $a_3 = 620 - 580 = 40$. Початковий опорний план складемо способом найменшого тарифу, заповнюючи таблицю у порядку, який зображено на схемі:

I	M
II	III

Одержимо таблицю 15.3.

Таблиця 15.3

Поста-чальники	Споживачі	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
	попит / запаси	360	200	350	120	140	160	200	
A_1	320	$\boxed{5}$ + **30**	$\boxed{3}$ – **200**	$\boxed{3}$ **90**		*M*	*M*	*M*	0
A_2	260	4	3	$\boxed{2}$ **260**	*M*	*M*	*M*	*M*	-1
$A_3^{\text{фікт}}$	40	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$ **40**	-6
D_1	360	$\boxed{0}$ – **330**			6	3	4	$\boxed{1}$ + **30**	-5
D_2	200		0 **2** +	*M*	4 **1**	5	$\boxed{2}$ **160**	$\boxed{5}$ – **40**	-1
D_3	350	*M*	*M*	0	$\boxed{3}$ **120**	$\boxed{2}$ **140**	3	$\boxed{3}$ **90**	-3
V_j		5	3	3	6	5	3	6	3000

Далі задача розв'язується звичайним чином (табл.15.4).

Таблиця 15.4

Поста-чальники	Споживачі / попит / запаси	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
		360	200	350	120	140	160	200	
A_1	320	$\boxed{5}$ **70**	$\boxed{3}$ **160**	$\boxed{3}$ **90**		M	M	M	0
A_2	260	4	3	$\boxed{2}$ **260**	M	M	M	M	-1
$A_3^{\text{фікт}}$	40	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$ **40**	-6
D_1	360	$\boxed{0}$ **290**			6	3	4	$\boxed{1}$ **70**	-5
D_2	200		$\boxed{0}$ **40**	M	4	5	$\boxed{2}$ **160**	5	-3
D_3	350	M	M	0	$\boxed{3}$ **120**	$\boxed{2}$ **140**	3	$\boxed{3}$ **90**	-3
V_j		5	3	3	6	5	5	6	2920

Друга умова критерію оптимальності виконана для усіх ненавантажених кліток, тобто план є оптимальним. Відповідно цьому плану треба перевезти від постачальника A_1 до бази D_1 – 70 одиниць вантажу, з $A_1 \to D_2$ – 160, $A_1 \to D_3$ – 90, $A_2 \to D_3$ – 260; потім з бази D_1 до споживача B_4 треба перевезти 70 одиниць вантажу, $D_2 \to B_3$ – 160, $D_3 \to B_1$ – 120, $D_3 \to B_2$ – 140, $D_3 \to B_4$ – 120. При цьому плані увесь вантаж від постачальників буде вивезено. Увесь попит споживачів B_1, B_2 та B_3 задоволено, а незадоволений попит споживача B_4 складе 40 одиниць.

Пропускна спроможність бази D_3 буде використана повністю, а залишки невикористаної пропускної спроможності баз D_1 і D_2 складуть відповідно 290 і 40 одиниць. Транспортні витрати при такому плані будуть мінімальні і складуть:

$f_{\min} = 5 \cdot 70 + 3 \cdot 160 + 3 \cdot 90 + 2 \cdot 260 + 1 \cdot 70 + 2 \cdot 160 + 3 \cdot 120 + 2 \cdot 140 + 3 \cdot 90 =$

$= 2920$ (грошових одиниць).

15.3. Контрольні запитання

1. Суть ТЗ при наявності проміжних пунктів.
2. Що називається блокуванням перевезень?
3. Коли ТЗ з наявністю проміжних пунктів розв'язують у два етапи? В один етап?
4. Коли задача може виявитися нерозв'язною?

15.4 Ключові поняття

Блокування клітки
Двоетапна модель ТЗ
Додаткові змінні
Мережева модель
Обмежені пропускні можливості (спроможності)
Одноетапна модель ТЗ
Пропускна спроможність баз
Тариф М
Транспортна мережа

15.5. Навчальні завдання

Розв'язати транспортну задачу при наявності проміжних баз.

№ 15.1.

Бази / Пост.		D_1	D_2	D_3
		250	100	400
A_1	180	3	5	4
A_2	220	6	3	4
A_3	210	4	2	5

Спож. / Бази		B_1	B_2	B_3
		230	120	200
D_1	250	8	10	3
D_2	100	7	8	3
D_3	400	3	2	1

№ 15.2.

$a_1 = 300; a_2 = 100; a_3 = 140; b_1 = 150; b_2 = 120; b_3 = 180; b_4 = 170; d_1 = 190; d_2 = 220; d_3 = 230$;

$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ - тарифи на перевезення від A до D;

$F = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ - тарифи на перевезення від D до B.

15.6. Завдання для перевірки знань

Розв’язати транспортну задачу при наявності проміжних баз.

№ 15.3.

Бази / Пост.		D_1	D_2	D_3
		250	300	200
A_1	150	2	5	3
A_2	250	5	4	1
A_3	240	4	1	2

Спож. / Бази		B_1	B_2	B_3
		130	220	210
D_1	250	5	6	3
D_2	300	7	5	2
D_3	200	8	3	1

№ 15.4.

Бази / Пост.		D_1	D_2	D_3
		150	200	300
A_1	50	1	3	4
A_2	350	3	5	1
A_3	250	2	41	2

Спож. / Бази		B_1	B_2	B_3
		200	150	210
D_1	250	6	4	3
D_2	200	4	5	1
D_3	300	1	4	5

ТЕМА 16. ЗАСТОСУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ. ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Застосування теорії про призначення для розв'язування задач лінійного програмування.

16.1. Теоретичні відомості

Алгоритм і методи розв'язування транспортної задачі можуть бути використані при розв'язуванні деяких економічних задач, які не мають відношення до транспортування вантажів. У загальному випадку транспортну модель можна застосовувати для опису ситуацій, пов'язаних з управлінням запасами та рухом капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу тощо. В цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний смисл у залежності від конкретної задачі (наприклад, відстань, вартість, час, продуктивність праці тощо). Економічні задачі можуть мати наступний зміст:

1. Оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. В них величина c_{ij} є продуктивністю. Задача дозволяє визначити, скільки часу та на якій операції потрібно використати кожен із верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Оскільки транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з від'ємним знаком.

2. Оптимальні призначення або проблема вибору. Є *m* механізмів, які можуть виконувати *n* різних робіт з продуктивністю c_{ij}. Задача позволяє визначити, який механізм та на яку роботу потрібно призначити, щоб добитися максимальної продуктивності.

3. Задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції.

4. Збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу, скорочення якого дозволить

зменшити кількість автомобілів для перевезення за рахунок збільшення їх продуктивності.

5. Розв'язання задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника з якихось причин не може бути направлений одному зі споживачів. Дане обмеження можна врахувати, присвоївши відповідній клітці достатньо велике значення вартості.

Перші з цих задач називаються розподільчими або задачами на закріплення (призначення). Величини c_{ij} можуть мати різний зміст. Їх можна розв'язати за схемою транспортної задачі, хоча їх умова прямо не пов'язана з транспортними перевезеннями.

Розглянемо ситуацію, коли потрібно розподілити m робіт (або виконавців) за n верстатами. Робота I (=1,2,3,...,*m*) виконується на верстаті J (=1,2,3, ...*n*), пов'язана з витратами c_{ij}. Задача полягає в такому розподілі робіт за верстатами (одна робота виконується одним верстатом), який відповідає мінімуму сумарних витрат. Така задача відома як задача про призначення.

Цю задачу можна розглядати як частинний випадок транспортної задачі. Тут „роботи" являють собою "вихідні пункти", а „верстати" - "пункти призначення". Пропозиція в кожному вихідному пункті дорівнює 1, тобто $a_i = 1$ для всіх *i* (тобто один працівник може працювати лише на одному верстаті). Аналогічно, попит у кожному пункті призначення дорівнює 1, тобто $b_j = 1$ для всіх j (тобто на кожен верстат може бути призначений лише один працівник). Вартість перевезень (закріплення роботи) I до верстата j дорівнює c_{ij}. Якщо яку-небудь роботу не можна виконати на деякому верстаті, то відповідна вартість c_{ij} береться рівною дуже великому числу M. У табл. 16.1 ілюструється загальна структура задачі про призначення.

Перш ніж розв'язувати задачу методами, які асоціюються з транспортною моделлю, необхідно "ліквідувати" дисбаланс, додавши

Таблиця 16.1.

Види робіт	Верстати				
	1	2.	j	. . .	n
1	0	0	1	0	0
. . . . .	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
. . . . .	0	0	0	1	0
m	0	0	0	0	1

фіктивні роботи або верстати в залежності від початкових умов ($m<n$ або $m>n$). Тому без утрати загальності можна покласти $m=n$.

Задачу про призначення можна уявити наступним чином. Нехай

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо j - та робота не виконується на i - му верстаті,}\\ 1, & \text{якщо j - та робота виконується на i - му верстаті.}\end{cases}$$

Тепер задача буде формулюватися так:

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\,x_{ij}\to\min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ \ I=1,2,\ \dots\ ,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ \ j=1,2,\ \dots\ ,n,$$

$x_{ij}=0$ або 1.

Початковий розв’язок буде виродженим. Ця особливість характерна для задачі про призначення незалежно від методу, що використовується для отримання початкового базису. Насправді розв’язок буде залишатися на всіх ітераціях.

Специфічна структура задачі про призначення дозволяє розробити ефективний метод її розв’язування. Покажемо, як реалізується цей метод.

Оптимальний розв’язок задачі про призначення не зміниться, якщо до будь-якого рядка або стовпчика матриці вартостей додати (або відняти) сталу величину. Цей факт можна довести наступним чином.

Якщо p_i та q_j віднімаються з *i*-го рядка та *j*-го стовпчика, то нові вартості мають вид $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$. Звідси отримується нова цільова функція $z' = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} - x_{ij} - \sum_i p_i \sum_j x_{ij} - \sum_j q_i \sum_i x_{ij}$.

Оскільки $\sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} = 1$, то $z' = z$ - const. Звідси випливає, що мінімізація початкової цільової функції *z* приводить до такого ж розв'язку, що і мінімізація *z'*.

Наведені міркування показують, що якщо побудувати нову c'_{ij} - матрицю з нульовими елементами, й ці нульові елементи або їхня підмножина відповідає допустимому розв'язку, то такий розв'язок буде оптимальним, оскільки вартість не може бути від'ємною.

Результатом розв'язування задачі про призначення є вектор $x^* = \{x^*_{ij}\}$, компоненти якого – цілі числа. Оптимальний план задачі про призначення можна представити у вигляді квадратної матриці призначень, в кожному рядку і в кожному стовпчику якої знаходиться рівно одна одиниця. Таку матрицю іноді називають *матрицею перестановок*. Значення цільової функції, що відповідає оптимальному плану, називають *ефективністю призначень*.

Інша інтерпретація задач про призначення наступна.

Економічна постановка задачі про призначення така:

Для виконання *n* різних робіт виділено *n* виконавців (робітників, станків, фірм,...). За кожною роботою можна закріпити лише одного виконавця. Кожен виконавець може виконувати лише одну роботу. Прибуток від виконання *i*-ої роботи *j*-тим виконавцем становить c_{ij}.

Потрібно розподілити виконавців за роботами так, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Для побудови відповідної *математичної моделі* введемо змінні x_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,n) так: $x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

залежно від того, чи *i*-ий виконавець виконує *j*-у роботу, чи не виконує її.

Отже, проблема полягає у тому, щоб у наступній таблиці (табл. 16.2) проставити нулі та одиниці найкращим способом. У кожному рядку, як і в кожному стовпці допускається рівно одна одиниця.

Таблиця 16.2.

Виконавці	Р о б о т и				
	1	. . .	j	. . .	n
1	0	0	1	0	0
. . .	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
. . .	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	1

Математична постановка задачі про призначення така:
знайти невідомі величини x_{ij} так, щоб надати максимум лінійній формі L з обмеженнями чотирьох типів:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \qquad (15.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad (15.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,\ldots,n) \qquad (15.3)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad (i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n) \qquad (15.4)$$

$$x_{ij} - цілі (i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n) \qquad (15.5)$$

Це типова *цілочисельна задача* лінійного програмування. Розв'язувати її симплексним методом неможливо, оскільки так будуть отримані різні дійсні значення між нулем та одиницею. Цілочисельні задачі розв'язуються спеціальними методами, зокрема методом Гоморі, які будуть розглянуті окремо.

16.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 16.1. На підприємстві є три групи верстатів, кожен з яких може виконувати п'ять операцій з обробки деталей (операції можуть виконуватися в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів дорівнює 100, 250 і 180 год. відповідно. Час виконання кожної операції становить 100, 120, 70, 110 та 130 год. відповідно. Визначити, скільки часу й на якій операції потрібно використати кожну групу верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожній операції задана матрицею

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом розв'язання закритої транспортної задачі, при цьому під тарифом будемо розуміти продуктивність станків за операціями. Оскільки в задачі потрібно знайти максимум, а відповідно до алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1).

Складемо таблицю 16.3 задачі.

Таблиця 16.3

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		100	120	70	110	130	
A_1	100	-3 40	-5	-11	-10	-5 60	0
A_2	250	-5 60	-10 120	-15 70	-3	-2	-2
A_3	180	-4	-8	-6	-12 110	-10 70	-5
V_j		-3	-8	-13	-7	-5	-4990

Знаходимо потенціали вільних кліток: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{14} = 3$, $\Delta_{24} = -6$, $\Delta_{25} = -5$, $\Delta_{31} = -4$, $\Delta_{32} = -5$, $\Delta_{33} = -12$. Оскільки $\Delta_{14} = 3 > 0$, то план не оптимальний, і необхідно провести перерозподіл вантажів, перекинувши по циклу 60 одиниць вантажу.

+	- 60
- 110	+70

60	
50	130

Отриманий перерозподіл операцій занесемо в нову таблицю 16.4.

Таблиця 16.4

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		100	120	70	110	130	
A_1	100	-3 40	-5	-11	-10 60	-5	0
A_2	250	-5 60	-10 120	-15 70	-3	-2	-2
A_3	180	-4	-8	-6	-12 50	-10 130	-2
V_j		-3	-8	-13	-10	-8	-5170

Оцінки вільних кліток складають: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{15} = -3$, $\Delta_{24} = -9$, $\Delta_{25} = -8$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{32} = -2$, $\Delta_{33} = -9$.

Знайдений розв'язок є оптимальним, тому що всі оцінки вільних кліток від'ємні; цей розв'язок має вид:

$$\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, на першій групі станків варто виконувати операції 1 та 4 тривалістю 40 та 60 год. відповідно, на другій групі — операції 1, 2 та 3 тривалістю 60, 120 та 70 год. відповідно, на третій групі - операції 4 та 5 тривалістю 50 та 130 год. відповідно. При цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 штук.

Задача 16.2. Фірма отримала замовлення на розробку п'яти програмних продуктів. Для виконання цього замовлення потрібно залучити п'ять досвідчених програмістів. Кожен із них повинен написати одну програму. В наступній табл. 16.5 наведені оцінки часу (у днях), який необхідний програмістам для виконання кожної з цих робіт. Розподілити роботи між програмістами так, щоб загальна кількість людино-днів на виконання всіх п'яти замовлень була мінімальною.

Таблиця 16. 5

	Програми				
Програмісти	1	2	3	4	5
А	46	59	24	62	67
Б	47	56	32	55	70
В	44	57	19	61	60
Г	47	59	17	64	73
Д	43	65	20	60	75

Розв'язання. Таблиця призначень задана в умові. Провівши розрахунки, а саме: вибравши в кожному рядку і в кожному стовпчику мінімальну „оцінку ", отримаємо наступну матрицю призначень (табл. 16.6):

Таблиця 16. 6

	Програми				
Програмісти	1	2	3	4	5
А	0	1	0	0	0
Б	0	0	0	1	0
В	0	0	0	0	1
Г	0	0	1	0	0
Д	1	0	0	0	0

Враховуючи умову, отримуємо результат (табл. 16.7).

Отже, на виконання замовлень потрібно 234 людино-днів. При цьому програміст А повинен розробити другу програму, Б – четверту, В – п'яту, Г – третю, Д – першу.

Таблиця 16. 7

Програмісти	Програми	Кількість людино-днів
А	2	59
Б	4	55
В	5	60
Г	3	17
Д	1	43
Всього		234

16.3. Питання для самоперевірки

1. Чи можна розв’язати задачу про призначення методом, який використовується для розв’язування транспортної задачі?

2. Чи правильне твердження, що вихідний розв’язок задачі про призначення буде виродженим?

3. Алгоритм розв’язування задачі про призначення та інтерпретація її розв’язку.

4. Порівняйте алгоритми симплексних перетворень та розподільного методу.

16.4. Ключові поняття

Ефективність призначень
Задача про призначення
Задача на закріплення
Цілочисельна задача
Матриця перестановок
Матриця призначень
Розподільний метод

16.5. Навчальні завдання

№16.1. Фірма отримала замовлення на 3 види продукції (А, Б, В), які необхідно виготовити протягом тижня. Об’єми замовлень: А — 4000 штук, Б — 2400 штук, В - 1000 штук.

Ділянка з виготовлення продукції має 3 верстати, на кожному з яких можна виготовляти будь-який із заказаних видів продукції з однаковою продуктивністю. Одиничні витрати з кожного виду продукції різні в залежності від верстата, що використовується, і задані таблицею 16.8.

Таблиця 16.8

Верстат / Продукція	А	Б	В
1	1,2	1,3	1,1
2	1,4	1,2	1,5
3	1,1	1,0	1,3

Крім того, відомо, що виробничі потужності 2-го та 3-го верстатів на цей тиждень складуть 3000 штук, а верстата 1 — 2000 штук. Використовуючи модель транспортної задачі, знайти оптимальний план виробництва, що забезпечує мінімум витрат при виготовленні заказаних видів продукції.

№ 16.2. Розв’язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в таблицях 16.9, 16.10. Знайти оптимальний розв’язок.

А) Таблиця 16.9

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	10	15	10	20
Б	5	50	21	10
В	17	30	18	34
Г	25	14	11	46

Б) Таблиця 16.10

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	10	25	12	24
Б	15	35	21	10
В	37	30	18	34
Г	25	4	11	50

Відповідь: А) 63; Б) 42.

16.6. Завдання для перевірки знань

№ 16.3. Потрібно спланувати перевезення будівельного матеріалу з трьох заводів до чотирьох будівельних майданчиків, використовуючи залізницю. Протягом кожного кварталу на чотирьох майданчиках потрібно, відповідно, 5, 10, 20, 15 вагонів будівельних матеріалів. Можливості заводів рівні 10, 15 та 25 вагонів у квартал відповідно. Умова задачі наведена в табл. 16. 11. Числа на перетині рядків та стовпців таблиці означають вартість перевезень одним вагоном (умовні гр. од.).

Таблиця 16. 11

Завод і його можливості		Потреба будівельних майданчиків			
		1	**2**	**3**	**4**
		5	10	20	15
A	10	8	3	5	2
B	15	4	1	6	4
C	25	1	9	4	3

№ 16.4. Розв’язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в таблицях 16.12, 16.13. Знайти оптимальний розв’язок.

А) Таблиця 16.12

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	11	40	25
Б	15	31	21	10
В	7	30	18	14
Г	22	24	16	5

Б) Таблиця 16.13

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	35	10	12	27
Б	15	20	2	10
В	31	30	18	34
Г	25	3	11	16

ТЕМА 17. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Застосовування теорії цілочислового програмування при аналізі дробового алгоритму розв'язання повністю цілочислової задачі.

17.1. Теоретичні відомості

Цілочислове програмування орієнтоване на розв'язування задач математичного програмування, в яких всі або деякі змінні повинні приймати тільки цілочислові значення. Задача називається ***повністю цілочисловою***, якщо умову цілочисельності накладено на всі її змінні; коли ця умова стосується лише деяких змінних, задача називається ***частково цілочисловою***. Задача є ***лінійною цілочисловою***, якщо цільова функція та функції, що входять у обмеження, – лінійні.

Методи розв'язування задач цілочислового програмування можна класифікувати як методи відсікань (відтинань) і комбінаторні методи. Розглянемо алгоритми, що реалізують метод відтинаючих прямих (площин).

17.1.1. Метод Гоморі. Дробовий алгоритм розв'язування повністю цілочислових задач

Необхідною умовою застосування даного алгоритму є цілочисельність всіх коефіцієнтів і правих частин обмежень вихідної задачі, тобто наявність у обмеженнях дробових коефіцієнтів призводить до порушення цілочисельності додаткових змінних.

При розв'язуванні цілочислової задачі лінійного програмування виконуються такі кроки:

✓ Розв'язується задача з послабленими обмеженнями (яка виникає в результаті виключення вимоги цілочисельності змінних). Якщо отриманий оптимальний розв'язок виявляється цілочисловим, то він є розв'язком вихідної задачі.

✓ У противному випадку потрібно ввести додаткові обмеження, які породжують (разом з вихідними обмеженнями) нову задачу лінійного програмування, розв'язок якої виявляється цілочисловим і співпадає з оптимальним розв'язком вихідної цілочислової задачі. Нехай отримана остання симплекс–таблиця задачі з послабленими обмеженнями має вигляд (табл. 17.1):

Таблиця 17.1.

	x_1 . . . x_i . . . x_m W_1 . . . W_j . . . W_n	B
x_1	1 . . . 0 . . . 0 α_1^1 . . . α_1^j . . . α_1^n	$\beta 1$
	. . . .	
x_i	0 . . . 1 . . . 0 α_i^1 . . . α_i^j . . . α_i^n	βi
x_m	0 . . . 0 . . . 1 αm^1 . . . αm^j . . . αm^n	βm
z	0 . . . 0 . . . 0 C1 . . . Cj . . . Cn	βo

Через x_i (i= 1, …, m) позначимо базисні змінні;

W_i (i= 1, …, n) позначимо небазисні змінні.

Розглянемо *i*-тий рядок симплекс-таблиці, якому відповідає неціле (дробове) значення базисної змінної x_i, і виразимо x_i через небазисні змінні:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j$$, де β_i - неціле.

Кожний рядок симплекс-таблиці, що породжується аналогічною нерівністю, будемо називати *твірним* рядком. Так як коефіцієнти цільової функції можна вважати цілими числами, змінна *Z* також повинна бути цілою і нижній рядок таблиці допустимо вибирати в якості твірного.

Нехай $\beta_i = [\beta_i] + f_i, \ a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij}$,

де $N = [a]$ – *ціла частина числа а*, тобто найбільше ціле число *N*, яке задовольняє умові $N \le a$, звідси слідує, що $0 < f_i < 1$ - додатний дріб, $0 < f_{ij} < 1$ - від'ємний дріб.

Наприклад,

a	[a]	f=a-[a]
1,5	1	0,5
-2,5	-3	0,5
-1	-1	0
-0,4	-1	0,6

Після підстановки, рівняння для x_i набуває виду:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j = x_i - [\beta_i] + \sum [a_{ij}] W_j \qquad (17.1)$$

Оскільки всі змінні x_i та W_i - цілі, то права частина повинна бути цілою, отже, ліва частина також повинна приймати цілі значення.

Так як $f_{ij} \geq 0$ і $W_j \geq 0$ для всіх *i* та *j*, то $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \geq 0$.

Отже, виконується нерівність $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \leq f_{ij}$. Тому що $f_i < 1$, то $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \leq 1$.

Оскільки ліва частина розглядуваної нерівності повинна приймати ціле значення, то запишемо цю умову цілочисельності у вигляді: $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_i \leq 0$.

Останнє обмеження перепишемо у вигляді рівності: $S_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_i - f_i$,

де S_i – невід'ємна додаткова змінна, яка повинна приймати цілі значення.

Таке обмеження-рівність визначає відсікання Гоморі для повністю цілочислової задачі.

Із симплекс-таблиці видно (так як W_i небазисна), що $W_i = 0$, і $S_i = -f_i$ - дана компонента розв'язку не є допустимою, отже, це означає, що отриманий раніше розв'язок задачі не задовольняє нове обмеження.

В такій ситуації потрібно використати двоїстий симплекс-метод, реалізація якого забезпечує відсікання деяких областей многогранника розв’язків, що не містить точок з цілочисловими координатами.

Перетворимо вихідну таблиці шляхом приписування до неї рядка і стовпчика, що відповідають побудованому відсіканню Гоморі для повністю цілочислової задачі.

Отримаємо нову таблицю (табл. 17.2):

Таблиця 17.2

	x_i ... x_i ... x_m W_l ... W_j ... W_n	S_i	B
x_1	1 ... 0 ... 0 a_1^1 ... a_1^j ... a_1^n	0	$\beta 1$
x_i	0 ... 1 ... 0 α_i^1 ... α_i^1 ... α_i^n	0	βi
x_m	0 ... 0 ... 1 αm^1 ... αm^j … αm^n	0	βm
S_i	0 ... 0 ... 0 $-fi^1$ ... -fij ... –fin	1	fi
Z	0 ... 0 ... 0 C1 ... Cj ... Cn	0	βo

Якщо отриманий розв’язок (в результаті застосування двоїстого симплекс-метода) є цілим, то процес розв’язання задачі завершено. В противному випадку необхідно ввести нове відсікання на базі отриманої таблиці і знову скористуватися двоїстим симплекс-методом. Загальне число обмежень не може перевищувати кількості змінних вихідної задачі (m+n).

Вигляд нерівності, що визначає деяке відсікання, залежить від вибору твірного рядка. Одна і та ж симплекс-таблиця породжує різні відсікання. Для визначення найбільш ефективного відсікання використовують емпіричні правила. Два таких правила приписують будувати відсікання на основі твірного рядка, якому відповідає:

- ✓ $\max_i \{f_i\}$,
- ✓ $\max_i \left\{ f_i / \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \right\}$,

де $\{f_i\}$ - дробова частина числа, що дорівнює різниці між даним числом та його цілою частиною: $\{f_i\} = f_i - [f_i]$.

Так, $\{7\} = 0;\ \left\{\frac{10}{4}\right\} = \frac{2}{4};\ \left\{\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5};\ \left\{-\frac{1}{5}\right\} = \frac{4}{5};\ \{-6{,}4\} = 0{,}6$ і т.д.

Друге правило більш ефективне.

Якщо на деякій ітерації симплекс-методу виявиться відсутність допустимого розв'язку, то розглядувана задача не має цілочислового оптимального розв'язку.

Назва «дробовий алгоритм» пов'язана з тим, що всі ненульові коефіцієнти введеного відсікання менші від одиниці.

17.1.2. Метод Гоморі. Алгоритм розв'язування частково цілочислових задач

Розглянемо відповідний базисній змінній рядок симплекс-таблиці, що містить розв'язок задачі з послабленими обмеженнями. Цей рядок породжує рівність

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j$$

Оскільки деякі зі змінних не є цілочисловими, для розв'язування поставленої задачі не можна використати процедуру відсікань, що розглянута вище. Можна побудувати відсікання іншого типу.

Для цілочислової змінної повинна виконуватися одна з двох нерівностей: $x_i \le [\beta_i]$ або $x_i \ge [\beta_i] + 1$. Провівши необхідні перетворення (17.1), отримаємо рівняння відсікання: $S_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj} W_i - f_i$, де

$$\lambda_j = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} \ge 0, \quad W_j - \text{неціле}, \\ \frac{\mathrm{f_i}}{(\mathrm{f_i} - 1)a_{ij}}, & a_{ij} \le 0, \quad W_j - \text{неціле}, \\ \mathrm{f_{ij}}, & f_{ij} \le f_i, \quad W_j - \text{ціле}, \\ \frac{f_i}{1 - f_i}(1 - f_{ij}) & f_{ij} > f_i \quad W_j - \text{ціле}. \end{cases}$$

Алгоритм розв'язання методом Гоморі ЗЦЧП.

1. За допомогою симплекс-методу розв'язується послаблена ЗЦЧП, тобто знаходиться умовно-оптимальний план ЗЦП. Якщо розв'язок задачі є цілочисельним, то розв'язування завершене. В протилежному випадку перейти до наступного пункту 2.
2. Вибрати в оптимальній таблиці симплекс-методу, яка містить нецілочисловий оптимальний розв'язок, нецілу змінну x_i з найбільшою дробовою частиною $\{x_i *\}$.
3. Записати, користуючись оптимальною таблицею, рівняння $x_i = x_i * = \sum_{j \in I_{НБ}} a_{ij} x_j$, де $x_i *$ - оптимальне неціле значення x_i, $I_{НБ}$ – множина індексів небазисних змінних у оптимальному не цілочисловому розв'язку.
4. Так як x_i повинне бути цілим, то маємо: $\sum_{j \in I_{НБ}} a_{ij} x_j = x_i *$.
5. Взяти дробові частини всіх коефіцієнтів a_{ij} та $x_i *$ та записати: $\sum_{j \in I_{НБ}} a_{ij} x_j = x_i *, \ 0 \le a_{ij} \le 1, \ 0 \le x_i * \le 1.$
6. Записати нове обмеження: $\sum_{j \in I_{НБ}} a_{ij} x_j \ge x_i *$ та звести його до канонічного виду: $\sum_{j \in I_{НБ}} a_{ij} x_j - x_k = x_i *$, де x_k - штучна змінна.
7. Розширити оптимальну таблицю на один рядок і один стовпчик, записавши в нього додаткове обмеження.

8. Вибрати за додаткову базисну змінну в новому обмеженні ту змінну із числа старих небазисних, якій відповідає найменша за модулем із недодатних оцінок (індексів) Δ_j, і перейти до пункту 2.

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування ЗЦП є метод „віток" і „меж".

17.1.3. Алгоритм розв'язання методом „віток" і „меж"

1. За допомогою симплекс-методу розв'язується послаблена ЗЦП, тобто знаходиться умовно-оптимальний план ЗЦП.

Якщо деяка компонента x_j^* опорного плану останньої симплекс-таблиці є дробовою, то, очевидно, можна стверджувати, що в інтервалі $([x_j^*];[x_j^*]+1)$ цілих значень взагалі немає.

2. Для однієї з дробових компонент x_j^* опорного плану останньої симплекс-таблиці формуються додаткові обмеження:

$$x_j \le \left[x_j^*\right] \text{ або } x_j \ge \left[x_j^*\right]+1 \qquad (17.2),$$

тобто відбувається «розгалуження» (рис. 17.1):

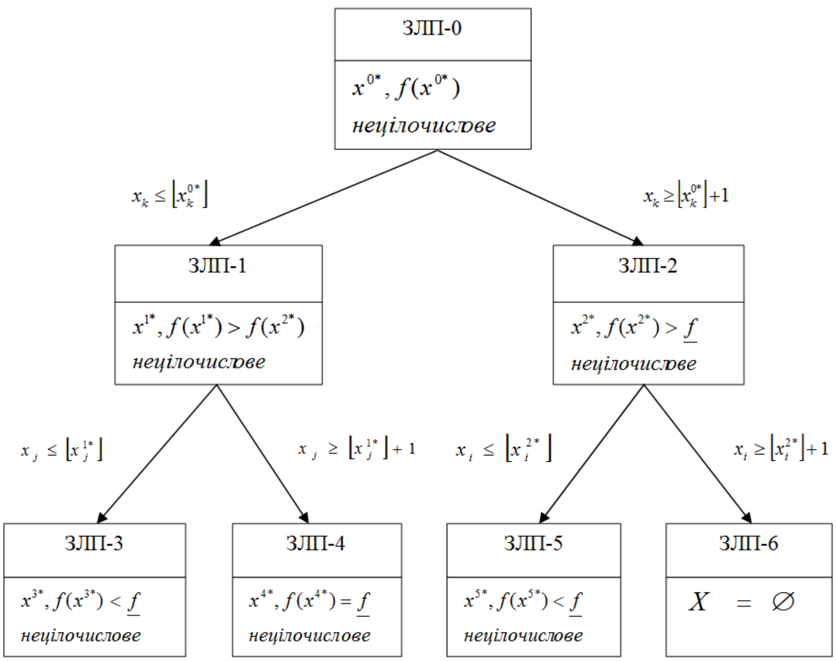


Рис. 17.1

В якості x_j^* може бути:

а) нецілочислова координата з найменшим або найбільшим індексом;

б) нецілочислова координата з найменшою або найбільшою дробовою частиною;

в) нецілочислова координата, якій відповідає найбільший коефіцієнт у цільовій функції;

г) нецілочислова координата, яка вибрана на основі пріоритетів, що визначаються прикладним змістом задачі.

3. Початкова задача ЦЧП розбивається на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних і додаткових обмежень (19.2). При цьому останні матимуть вигляд:

Перша задача: Знайти $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$ (17.3)

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le = \ge b_i \ \ (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}})$, (17.4)

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n}), \tag{17.5}$$

$$x_j \in Z, \tag{17.6}$$

$$x_j \le \left[x_j^* \right] \tag{17.7}$$

Друга задача: Знайти $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$ (17.8)

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le = \ge b_i \ \ (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}})$, (17.9)

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n}), \tag{17.10}$$

$$x_j \in Z, \tag{17.11}$$

$$x_j \ge \left[x_j^* \right] + 1 \tag{17.12}$$

4. Далі симплекс-методом розв’язуються послаблені задачі (17.3) -

(17.7) і (17.8) - (17.12), тобто відповідні ЗЛП без обмежень (17.6) і (17.11). Якщо знайдені оптимальні плани цих задач задовольняють умові цілочисельності, то ці плани визначають розв'язок початкової ЗЦЧП. Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження береться задача з *більшим* значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на max, і з *меншим* значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на min. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлена неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план – оптимальний.

Зауваження. 1) Розв'язування ЗЦЧП методом „віток" і „меж" можна значно прискорити, приєднуючи обмеження виду (17.7) і (17.12) не до початкової, а до останньої симплекс-таблиці відповідних задач.

2) Якщо дробових значень невідомих в умовно-оптимальному плані декілька, то додаткові обмеження складають для тієї з них, яка має *найбільшу дробову частину*.

Типові цілочисельні задачі економіко-математичного моделювання можна розв'язувати вищевказаними методами. Але іноді це неможливо, оскільки можуть бути отримані різні дійсні значення між нулем та одиницею. Тому цілочисельні задачі рекомендується розв'язувати з використанням інформаційних технологій. Обмеження в команді TOOLS.SOLVER в Пошуку Рішень системи EXCEL можуть мати вигляд: комірка =int (комірка = цел), і розв'язують цілочисельні задачі.

17.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 17.1. Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП):

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 \le 100, \\ 40x_1 + 20x_2 \le 190 \end{cases},$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 \text{ - цілі.}$$

Розв’язання. Розв’язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисельності. Остання симплекс-таблиця набере наступного вигляду (таблиця 17.3).

Таблиця 17.3

C_{ij}	Базисні змінні	0	350	150	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4
350	x_1	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
150	x_2	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
Δ_i		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка останньої симплекс-таблиці додаткове обмеження виду $\sum\limits_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \geq \{b_i\}$:

$\{0\}x_1 + \{1\}x_2 + \{-\frac{2}{5}\}x_3 + \{-\frac{1}{4}\}x_4 \geq \{7\frac{1}{2}\}$.

Враховуючи, що $\{1\}=0,\ \{0\}=0,\ \left\{-\frac{2}{5}\right\}=\frac{3}{5},\ \left\{-\frac{1}{4}\right\}=\frac{3}{4},\ \left\{7\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, додаткове обмеження набере вигляду: $\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}$. Зведемо його до канонічного виду та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \geq \frac{1}{2}.$$

Приєднавши отримане обмеження до останньої симплекс-таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо таку симплекс-таблицю 17.4.

Таблиця 17.4

C_{ij}	Базисні змінні	0	350	150	0	0	0	-M
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
350	x_1	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
150	x_2	$7\frac{1}{2}$	0	1	$7\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
-M	x_6	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
Δ_i		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв'язавши останню задачу, знайдемо, нарешті, оптимальний план:

$$Z_{\max} = 1450 \text{ при } x_1 = 2,\ x_2 = 5.$$

Задача 17.2. Методом „віток" і „меж" розв'язати попередню задачу 17.1 цілочислового програмування (ЗЦЧП).

Розв'язання. Відкинувши умову цілочисельності, дістанемо умовно-оптимальний план $x_1 = 2$, $x_2 = 7\frac{1}{2}$. Тому допустиме ціле значення x_2 повинне задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor = 7$ або $x_2 \ge \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 8$.

Приєднуючи до задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисельності, розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі. Для першого обмеження $x_2 \le 7$ умовно-оптимальним буде розв'язок $x_1' = 1{,}2;\ x_2' = 7$, при цьому $Z'_{\max} = 1470$. Для другого обмеження $x_2 \ge 8$ умовно-оптимальним буде розв'язок $x_1'' = \frac{3}{4};\ x_2'' = 8$, при цьому $Z''_{\max} = 1462{,}5$. Цілочислового розв'язку знову не отримали, тому процес відсікання треба продовжити, узявши для наступного розгалуження першу із задач, умовно-оптимальний план якої дає більше значення цільової функції. Далі розглядаємо дві задачі, приєднуючи умови $x_1 \le 1;\ x_2 \ge 2$, звідки й отримуємо оптимальний план $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $Z_{\max} = 1450$.

17.3. Питання для самоперевірки

1. Приклади задач цілочислового програмування.
2. Загальний вид ЗЦЧП.
3. Суть методу Гоморі розв'язування ЗЦП.
4. Поняття послабленої ЗЛП.
5. Поняття умовно-оптимального плану для ЗЦП.

6. Чи можна отримати допустимий цілочисловий розв’язок шляхом заокруглення розв’язку задачі з послабленими обмеженнями у вигляді рівностей?

7. Як скласти додаткове обмеження, якщо компоненти оптимального плану, обчисленого симплекс-методом, є дробовими?

8. Чи може значення цільової функції в оптимальному розв’язку цілочислової задачі максимізації бути більшим оптимального значення цільової функції відповідної задачі з послабленими обмеженнями?

9. В чому полягає розв’язування частково цілочислової задачі лінійного програмування?

10. Недоліки методу Гоморі.

11. Метод „віток” і „меж” розв’язування ЗЦЧП.

12. Недоліки методу „віток” і „меж”.

17.4. Ключові поняття

Допустимий цілочисловий розв’язок	Послаблені обмеження
Дробова частина числа	Умовно-оптимальний план для ЗЦЧП
Методи відсікань (відтинань)	Ціла частина числа
Метод „віток” і „меж”	Цілочислова ЗЛП
Метод Гоморі	Частково цілочислова ЗЛП

17.5. Навчальні завдання

№ 17.1. Методом Гоморі розв’язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП):

а) $$Z = x_1 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

б) $$Z = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

в) $$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36, \\ x_2 \le 13, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

г) $$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

д) $$Z = 6x_1 + 4x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

е) $$Z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -6, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

№ 17.2. Методом „віток” і „меж” розв’язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП).

а) $$Z = 2x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 6x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

б) $$Z = 3x_1 + 7x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

в) $$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

д) $$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

Відповідь: в) (9;4;0; 1;32); 35.

17.6. Завдання для перевірки знань

№ 17.3. Методом Гоморі та методом „віток” і „меж» розв’язати ЗЦЧП.

а)
$$Z = 8x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі.}$$

б)
$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі.}$$

в)
$$Z = 12x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі.}$$

г)
$$Z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі.}$$

№ 17.4. Розв'язати частково цілочислові задачі.

а)
$$Z = 5x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{2}, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі.}$$

б)
$$Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ -2x_1 + 6x_2 + \frac{5}{2}x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ x_{2,3} - \text{цілі.}$$

Відповідь: а) 15: (3; 0; ½; 5); б) ½; (1/2; 1; 0).

ТЕМА 18. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

18.1. Теоретичні відомості

18.1.1.Основні поняття теорії ігор

На практиці часто приходиться мати справу з ситуаціями, коли необхідно приймати рішення в умовах невизначеності (наприклад, при грі в шахи, шашки і т. п.). В економічній діяльності теж часто мають місце невизначеність та ризик щодо майбутніх результатів, наприклад, у взаємовідносинах між клієнтом і банком; постачальником і споживачем; покупцем і продавцем; декілька виробників на ринку, які впливають на ціну товару (олігополія); об'єднання або коаліції, що беруть участь у зіткненні інтересів тощо. Багато подібних прикладів зустрічається в біології, соціології, психології, воєнній справі, в різних іграх і т.п. Вони породжуються різницею інтересів партнерів і намаганням кожного з них приймати оптимальні рішення, які реалізують поставлені цілі якнайкраще. При цьому необхідно зважати не лише на свої цілі, а й на цілі партнера, і враховувати невідомі наперед рішення, які будуть прийняті партнерами. Щоб грамотно розв'язати задачу з конфліктною ситуацією, існують науково обґрунтовані методи, які називаються теорією ігор.

Математична теорія ігор бере свій початок від аналізу звичайних ігор — салонних, карточних, спортивних. Вперше теорія ігор була систематично викладена Дж. фон Нейманом та О. Моргенштерном у 1944 р. Їхня книга містила в основному економічні приклади, оскільки економічну ситуацію відносно легко описати в числовій формі. Уже під час другої світової війни теорія ігор була застосована у воєнній сраві для дослідження стратегічних рішень. У другій половині XX ст. основну увагу в теорії ігор стали приділяти економічним застосуванням.

Якщо в операції беруть участь кілька конфліктуючих сторін, кожна з яких приймає деяке рішення, обумовлене заданим набором правил, і кожній із сторін відомий можливий кінцевий стан конфліктної ситуації із заздалегідь визначеними для кожної сторони платежами, то говорять, що має місце гра. Задача теорії ігор полягає у виборі такої лінії поведінки даного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш. Ситуація називається *конфліктною*, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких цілком або частково протилежні.

Гра – це дійсний чи формальний конфлікт, у якому є, принаймні, два учасники (гравці), кожний з яких прагне досягнення власних цілей. Припустимі дії кожного гравця, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються *правилами гри*. Кількісна оцінка результатів гри називається *платежем*.

Гра називається *парною*, якщо в ній беруть участь тільки дві сторони. Парна гра називається *грою з нульовою сумою*, якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто якщо програш одного гравця дорівнює виграшу іншого. Далі розглядатимемо парні ігри з нульовою сумою.

Однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, при якій він повинний зробити особистий хід, називається *стратегією* гравця. Стратегія гравця називається *оптимальною*, якщо при багаторазовому повторенні гри вона забезпечує гравцю максимально можливий середній виграш або, що теж саме, мінімально можливий середній програш.

Нехай є два гравці, один із яких А (умовно „наша сторона”) може вибрати i-у стратегію з m своїх можливих стратегій, а другий В (умовно „протилежна сторона”), не знаючи вибору першого, вибирає j-у стратегію з n своїх можливих стратегій. У результаті перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий програє цю величину.

З чисел a_{ij} складемо матрицю

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \quad \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right) \qquad (18.1)$$

Рядки матриці *P* відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці — стратегіям другого. Ці стратегії називаються *чистими*. Матриця *P* називається *платіжною* (або матрицею гри). Гру, зумовлену матрицею *P*, що має *m* рядків і *n* стовпців, називають *скінченою* грою розмірності $m \times n$. Задача першого гравця – максимізувати свій виграш. Задача другого гравця – максимізувати свій виграш – зводиться до мінімізації програшу другого, що еквівалентно задачі мінімізації виграшу першого гравця.

Число $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$ називається нижньою ціною гри, або *максиміном,* або максимінним виграшем гравця А, а відповідна йому стратегія (рядок) – *максимінною*. Аналогічно, число $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$ називається верхньою ціною гри, або *мінімаксом*, або мінімаксним програшем гравця В, а відповідна йому стратегія гравця (стовпчик) — *мінімаксною*.

Принцип, за яким гравці вибирають ці стратегії, називається принципом максиміну (для А) або мінімаксу (для В).

Теорема 18.1. Нижня ціна гри завжди не перевищує верхньої ціни гри $\alpha \leq \beta$. Якщо $\alpha = \beta = v$, то число *v* називається *ціною* гри.

Гра, для якої α = β, називається грою із *сідловою* точкою. Для гри із сідловою точкою знаходження розв'язку полягає у виборі гравцями максимінної і мінімаксної стратегій, які є оптимальними, а сама гра має розв'язок у *чистих стратегіях*. Оптимальним розв'язком гри в чистих стратегіях для обох гравців є вибір максимінної (для А) та мінімаксної (для В) стратегій. Будь-яке відхилення для кожного гравця від цих стратегій не може бути вигідним.

У задачі 18.1 наведено гру з сідловою точкою α = β=4.

Задача 18.1.

Таблиця 18.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	1	8	3	3	1
A_2	10	3	2	7	2
A_3	6	7	4	5	$4 = \alpha$
$\max\limits_i a_{ij}$	10	8	$4 = \beta$	7	

Маємо гру з сідловою точкою α=β=4. Отже, для гравця А максимінною стратегією є A_3, при якій йому забезпечений виграш не менше 4. Для гравця В відповідна мінімаксна стратегія буде B_3, яка забезпечує йому програш не більше 4. Таким чином, це парна гра з нульовою сумою, оскільки сума платежів дорівнює нулю, тобто виграш одного гравця дорівнює програшу іншого.

Для розглядуваної гри співвідношення $\alpha = \beta = v$ виконується при $i^* = 3,\ j^* = 3$; при цьому ціна гри *v=4.* Якщо гравець A відступить від своєї оптимальної стратегії, що відповідає $i^* = 3$, а гравець *В* буде дотримуватись своєї оптимальної стратегії $j^* = 3$, то перший гравець виграє менше 4 одиниць. Аналогічно, якщо другий гравець *В* не дотримається своєї оптимальної стратегії, а гравець *А* буде дотримуватися своєї оптимальної стратегії, то другий гравець програє більше, ніж 4 одиниці.

Якщо матрична гра не має сідлової точки, то для знаходження її розв’язку використовуються *мішані стратегії*.

Вектор, кожен з компонентів якого показує відносну частоту (ймовірність) використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається *мішаною стратегією* даного гравця. З даного означення безпосередньо випливає, що сума компонентів зазначеного вектора дорівнює одиниці, а самі компоненти є невід’ємними.

Позначимо мішану стратегію першого гравця – $X = (x_1, x_2, \dots x_m)$, а другого гравця – $Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$, де $x_i, y_j \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$.

При цьому $\max\limits_{x_i}(\min\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i) \le \min\limits_{y_j}(\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j)$. (18.2)

Якщо X^* — оптимальна стратегія першого гравця, а Y^* — оптимальна стратегія другого гравця, то ціною гри є число:

$$v = \max_{x_i}(\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^*) = \min_{y_j}(\max_{i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^*) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^*y_j^* = X^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot Y, \qquad (18.3)$$

причому $\alpha \le v \le \beta$.

Визначення оптимальних стратегій та ціни гри і складає процес відшукання розв'язку гри. Задача 18.2 демонструє гру з мішаною стратегією.

Задача 18.2. Два гравці *A* та *B* одночасно показують 1, 2 або 3 пальці. Якщо сума пальців парна, то цю суму виграє гравець *A*, якщо непарна, то – *B.*

Таблиця 18.2

	B_1	B_2	B_3	$\min\limits_{j} a_{ij}$
A_1	2	-3	4	-3
A_2	-3	4	-5	-5
A_3	4	-5	6	-5
$\max\limits_{i} a_{ij}$	4	4	6	

Тобто α = -3 ≠ β = 4 ($\alpha<\beta$) і гра не має сідлової точки. Нижня ціна гри: $\alpha = \max\limits_{i}(\min\limits_{j} a_{ij}) = -3$; верхня ціна гри $\beta = \min\limits_{j}(\max\limits_{i} a_{ij}) = 4$. Отже, для гравця А максимінною стратегією є A_1, при якій йому забезпечений "виграш" не менше -3 (тобто програш не більше 3). Для гравця В відповідним мінімаксними стратегіями будуть B_1 та B_2, які забезпечують йому програш не більше 4.

Оптимальними стратегіями гравців (як буде показано нижче) є мішані стратегії: X^* = (0,25; 0,5; 0,25), Y^* = (0,25; 0,5; 0,25).

Як було відзначено у випадку для чистих стратегій, якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, а інший відступає від своєї оптимальної стратегії, то останній гравець, що відступає, або виграє менше, або програє більше. Аналогічні дії гравців у випадку мішаних стратегій мають результат, який сформульований у подальшій теоремі 18.4.

Має місце наступна основна теорема матричних ігор, доведення якої ґрунтується на взаємозв'язку прямої та двоїстої задач ЛП.

Теорема (Неймана) 18.2. Усяка скінчена матрична гра з нульовою сумою має розв'язок у чистих або мішаних стратегіях.

Теорема 18.3. Для того щоб число *v* було ціною гри, а *X** і *Y** – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо виконання нерівностей $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq v, \quad j = \overline{1, n}$ (*)

і $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq v \quad i = \overline{1, m}$ (**)

Якщо теорема 18.2 дає відповідь на питання про існування розв'язку гри, то наступна теорема дає відповідь на питання, як знайти цей розв'язок для ігор 2×2, 2×*n* і *n*×2.

Розглянемо оптимальну мішану стратегію гравця *A* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Назвемо *i*-ту стратегію гравця *активною* (*істотною*), якщо $x_i^* > 0$. Аналогічно означається активна стратегія гравця *B*.

Теорема 18.4 (про активні стратегії). Якщо один із гравців застосовує оптимальну мішану стратегію, то його середній виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри *v* незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати інший гравець стратегії, що ввійшли в оптимальну (зокрема й у чисті стратегії).

Очевидно, що при цьому один з гравців не повинен виходити за межі своїх активних стратегій, тобто повинен користуватись будь-якою з них у чистому вигляді або змішувати їх у будь-яких пропорціях. Теорему

18.4 можна інтерпретувати таким чином, що умови (*) і (**) повинні містити мінімум по дві строгих рівності.

Функцією виграшу, або *платіжною функцією* $f(\overline{X},\overline{Y})$ з матрицею $P=(a_{ij})$ при застосуванні гравцем А мішаної стратегії $\overline{X}$, а гравцем В – мішаної стратегії $\overline{Y}$, називається середня величина виграшу гравця А (програшу гравця В), що розрахована за формулою:

$$f(\overline{X},\overline{Y})=\sum_i\sum_j x_i y_j a_{ij}=\overline{X}P\overline{Y} \qquad (18.4)$$

Стратегії $\overline{X}*$ та $\overline{Y}*$ називаються оптимальними, якщо виконуються нерівності

$$f(\overline{X},\overline{Y}*)\le f(\overline{X}*,\overline{Y}*)\le f(\overline{X}*,\overline{Y}), \qquad (18.5)$$

тобто якщо їх застосування забезпечує гравцю А середній виграш, не менший, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{X}$, а гравцю В – середній програш, не більший, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{Y}$.

Сукупність оптимальних стратегій $(\overline{X}*,\overline{Y}*)$ називається *оптимальним розв’язком*.

18.1.2. Класифікація ігор

Класифікацію ігор можна провести за різними ознаками.

За кількістю гравців: парні (в яких стикаються інтереси двох супротивників-гравців); множинні (зі скінченою кількістю гравців, у яких стикаються інтереси більшої, ніж двох, кількості супротивників); з нескінченою кількістю гравців.

За видом невизначеностей: комбінаторні (правила в яких призводять до різноманітних результатів, передбачити які наперед неможливо, наприклад, гра в шахи, шашки тощо); азартні (результат яких є невизначеним завдяки випадковим факторам, наприклад, гра в кості, рулетку тощо); стратегічні (коли відсутні відомості про дії (стратегії) супротивника).

За кількістю стратегій: скінчені (у кожного гравця є скінчена кількість стратегій); нескінчені (принаймні один з гравців має нескінчену кількість стратегій).

За властивостями функції виграшів: гра з нульовою сумою (виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого, тобто сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю); гра з ненульовою сумою. Остання - для гри з двома учасниками – буває зі сталою сумою, що зводиться до гри з нульовою сумою, або біматричні, коли функції (матриці) виграшів гравців незалежні між собою.

Є й інші класифікації ігор [26, 233].

18.1.3. Гра порядку 2 × 2

Насамперед, необхідно перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо так, то гра має розв'язок у чистих стратегіях, причому оптимальними стратегіями гравців будуть чисті максимінна і мінімаксна стратегії.

Якщо ж гра не має сідлової точки, необхідно по можливості позбутися від дублюючих стратегій та від стратегій, що наперед невигідні, тобто для яких присутні домінуючі стратегії. Ймовірність застосування невигідних стратегій дорівнює нулю. Для гравця *A* стратегія i_1 дублює стратегію i_2, якщо $a_{i_1 j} = a_{i_2 j}, \quad j = \overline{1, n}$, а стратегія i_1 домінує над стратегією i_2, якщо $a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}, \quad j = \overline{1, n}$. Для гравця *B* стратегія j_1 дублює стратегію j_2, якщо $a_{ij_1} = a_{ij_2}, \quad i = \overline{1, m}$, а стратегія j_1 домінує над стратегією j_2, якщо $a_{ij_1} \leq a_{ij_2}, \quad i = \overline{1, m}$. (Задача 18.3).

Задача 18.3.

Таблиця 18.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min_j a_{ij}$
A_1	4	7	2	3	4	2
A_2	3	5	6	8	9	**3**
A_3	4	4	2	2	8	2
A_4	3	6	1	2	4	1
A_5	3	5	6	8	9	3
$\max_i a_{ij}$	**4**	7	6	8	9	

$\alpha = 3 \neq \beta = 4$ і гра не має сідлової точки. Ціна гри: $3 \le v \le 4$.

Стратегія A_5 дублює стратегію A_2, а стратегія A_1 домінує над стратегією A_4, отже, стратегії A_4 і A_5 можна відкинути.

Таблиця 18.4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	7	2	3	4
A_2	3	5	6	8	9
A_3	4	4	2	2	8

Далі зауважуємо, що для гравця B стратегія B_3 домінує над стратегіями B_4 і B_5, а стратегія B_1 над стратегією B_2. Відкидаючи стратегії B_2, B_4, і B_5, одержуємо:

Таблиця 18.5

	B_1	B_3
A_1	4	2
A_2	3	6
A_3	4	2

І, нарешті, відкидаючи стратегію A_3, що дублює A_1, одержуємо гру порядку 2×2 (табл. 18.6).

Таблиця 18.6

	B_1	B_3
A_1	**4**	**2**
A_2	**3**	**6**

Розглянемо алгоритм розв'язання гри порядку 2×2 на цьому прикладі.

Позначимо оптимальні мішані стратегії гравців $X^* = (x_1, x_2)$ і $Y^* = (y_1, y_2)$. Причому $x_1 + x_2 = 1, x_{1,2} \geq 0$ та $y_1 + y_2 = 1, y_{1,2} \geq 0$. На підставі теореми 18.3 маємо:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq v \\ 2x_1 + 6x_2 \geq v \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \leq v \\ 3y_1 + 6y_2 \leq v \end{cases}$$

Відповідно до теореми 18.4, якщо гравець приймає оптимальну стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри, незалежно від стратегії супротивника. Отже:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = v \\ 2x_1 + 6x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 = v \\ 3y_1 + 6y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи, одержимо: X^* = (0,6; 0,4), Y^* = (0,8; 0,2), v =3,6.

18.1.3. Графічний метод розв'язування ігор порядку 2 × n і m × 2

Задачу 18.3 можна розв'язати графічним способом. Замінимо:

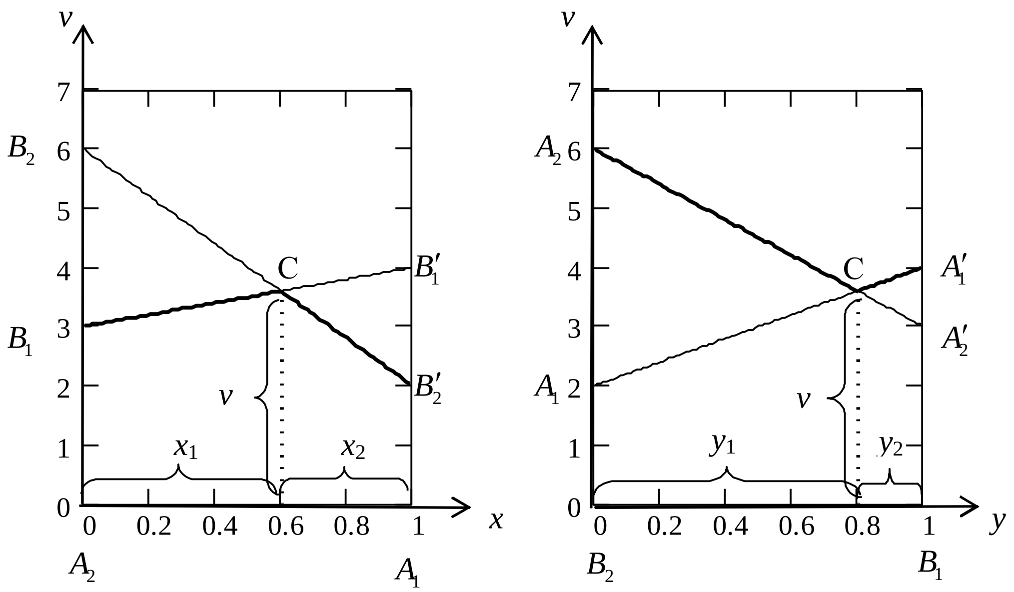
$$x_1 = x, \quad x_2 = 1 - x, \quad \begin{cases} 4x + 3(1-x) = v \\ 2x + 6(1-x) = v \end{cases} \begin{cases} x + 3 = v \\ 6 - 4x = v \end{cases} \qquad (18.6)$$

$$y_1 = y, \quad y_2 = 1 - y, \quad \begin{cases} 4y + 2(1-y) = v \\ 3x + 6(1-y) = v \end{cases} \begin{cases} 2y + 2 = v \\ 6 - 3y = v \end{cases} \qquad (18.7)$$

Для геометричного аналізу скористаємося наступною побудовою. У системі координат *XOY* відкладемо на осі *OX* відрізок $A_2 A_1$ одиничної довжини, кожній точці *X* якого буде відповідати деяка мішана стратегія $X^* = (x_1, x_2) = (x_1,\ 1 - x_1)$. Лівий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 0$) зображає стратегію A_2, правий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 1$) зображає стратегію A_1. Всі проміжні точки одиничного відрізка зображають мішані стратегії першого гравця А. При цьому відстань від абсциси точки С до лівого кінця відрізка рівна ймовірності x_1 стратегії A_2

, а відстань від абсциси точки С до правого кінця відрізка рівна ймовірності x_2 стратегії A_1 (рис. 18.1, а).

Через кінці відрізка A_2A_1 проведемо прямі, що перпендикулярні до осі *OX*. На них будемо відкладати виграш при відповідних чистих стратегіях. На лівій прямій (осі ординат), що проходить через точку з абсцисою $x=0$, відкладемо виграш гравця А при стратегії A_2, а на правій прямій, що проходить через точку з абсцисою $x=1$, - виграш при стратегії A_1. Отже, відрізок *OB₁* показує виграш a_{21} гравця А при застосуванні ним стратегії A_2, а гравцем В – стратегії B_1. Відрізок *OB₂*



а) б)

Рис. 18.1

показує виграш a_{22} гравця А при застосуванні ним стратегії A_2, а гравцем В – стратегії B_2. Отже, при застосуванні першим гравцем стратегії A_2 його виграші позначені точками B_1 та B_2.

Аналогічно, при застосуванні першим гравцем стратегії A_1, що відповідає прямій, яка паралельна осі ординат і проходить через точку з абсцисою $x=1$, виграшами будуть a_{11} та a_{12}. Вони зображені відповідними точками B_1' та B_2' (рис. 18.1, а).

Середній виграш *v* при будь-якій комбінації стратегій A_1 та A_2 (з частостями x_1 та x_2) і стратегії B_1 другого гравця обчислюється за формулою математичного сподівання $v = x_1 a_{21} + x_2 a_{11}$ і геометрично визначається ординатою точки С перетину прямої $B_1 B_1'$ та перпендикуляру, виставленого в точці *X**. Аналогічно, середній виграш при застосуванні стратегії B_2 буде визначатися ординатами точок, що лежать на відрізку $B_2 B_2'$. Отже, розв'язавши графічно систему (18.6), одержимо рис. 18.1, а).

Аналогічно можна розглянути задачу мінімізації верхньої межі програшу для гравця В (рис. 18.1, б).

Ординати точок, що лежать на ламаній $B_1 C B_2'$ (показано жирною лінією, рис. 18.1, а), характеризують мінімальний виграш гравця А при , використанні ним будь-якої мішаної стратегії X* (на ділянці $B_1 C$ проти стратегії B_1 і на ділянці CB_2' - проти стратегії B_2)

Таким чином, ламані $B_1 C B_2'$ і $A_2 C A_1'$ показують відповідно мінімальний виграш у грі гравця *A* і максимальний програш гравця *B* для їх різних мішаних стратегій. Точка *C* відповідає оптимальній стратегії обох гравців.

Виходячи з принципу максиміну, отримаємо, що оптимальне рішення гри визначає точка С, в якій цей мінімальний виграш досягає максимуму. Їй відповідає на осі абсцис оптимальна стратегія $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а її ордината дорівнює ціні гри *v*.

За ціною гри відразу можна знайти оптимальну стратегію для гравця В із системи двох рівнянь

$$\begin{cases} y_1^* a_{11} + y_2^* a_{21} = v, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Користуючись графічним зображенням, далі розв’язання можна провести аналітично. Знайдемо рівняння прямої B_1B_1', що проходить через точки (0; 3) та (1; 4): $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{4-3}$ або $y=x+3$.

Рівняння прямої B_2B_2', що проходить через точки (0;6) та (1;2): $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-6}{2-6}$ або $y=-4x+6$.

Координати точки перетину C прямих є розв’язок системи рівнянь $\begin{cases} y=x+3, \\ y=-4x+6, \end{cases}$ або $x=0{,}6; y=3{,}6$, тобто C(0,6; 3,6), де $x_1*=0{,}6;\ v=3{,}6$. Звідси $x_2*=1-0{,}6=0{,}4$. Тому оптимальні мішані стратегії *X** = (0,6; 0,4), *Y** = (0,8; 0,2), *v* =3,6.

На рис. 18.1, а можна показати нижню і верхню ціну гри. Геометрично можна також визначити оптимальну стратегію гравця B, якщо поміняти місцями гравців A та B і замість максимуму нижньої межі B_1CB_2' відповідно до принципу мінімаксу розглянути мінімум верхньої межі.

Аналогічно можна розв’язати будь-яку гру порядку $2\times n$ і $m\times 2$, тобто, якщо один із гравців має тільки дві стратегії.

Якщо платіжна матриця містить від’ємні числа, то для розв’язування, зокрема і графічного, доцільно перейти до нової матриці з невід’ємними елементами. Для цього до елементів вихідної матриці достатньо додати одне і те ж додатне число. Розв’язок гри при цьому не зміниться, а ціна гри збільшиться на це число.

Задача 18.4. Два гравці, в одного з яких є монети з парним номіналом (2 коп. і 10 коп.), а в іншого - з непарним (1 коп., 5 коп. і 25 коп.), одночасно показують по монеті. Якщо сума номіналів кратна трьом, то цю суму виграє перший гравець (з парними монетами), у противному випадку обидві монети забирає другий гравець.

Складемо платіжну матрицю гри і знайдемо нижню і верхню ціни гри (табл. 18.7):

Таблиця 18.7

	B_1 (1 коп.)	B_2 (5 коп.)	B_3 (25 коп.)	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1 (2 коп.)	3	-7	27	-7
A_2 (10 коп.)	-11	15	-35	-35
$\max\limits_i a_{ij}$	3	15	27	

α = -7 ≠ β = 3 і гра не має сідлової точки. Ціна гри: $-7 \le v \le 3$. Побудуємо графік (рис. 18.2).

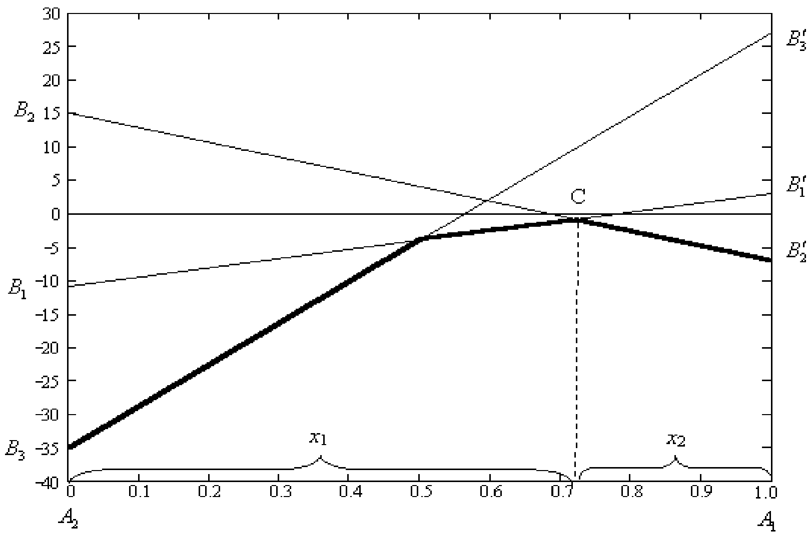


Рис. 18.2

Точка *C* відповідає оптимальній стратегії. Знайдемо її координати.

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1 - x, \quad \begin{cases} 3x - 11(1-x) = v \\ -7x + 15(1-x) = v \end{cases} \quad \begin{cases} 14x - 11 = v \\ 15 - 22x = v \end{cases} \quad 36x - 26 = 0 \quad x = \frac{13}{18},$$

звідки $$x_1 = \frac{13}{18}, \quad x_2 = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}, \quad v = 14 \cdot \frac{13}{18} - 11 = -\frac{16}{18} = -\frac{8}{9}.$$

Знайдемо оптимальну стратегію гравця *B.*

$$y_1 = y, \quad y_2 = 1 - y, \quad y_3 = 0, \qquad 3y - 7(1-y) = -\frac{8}{9}, \quad 10y = \frac{55}{9}, \quad y = \frac{11}{18} = y_1, \quad y_2 = 1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}.$$

Таким чином, оптимальні стратегії гравців: $X^* = \left(\frac{13}{18}; \frac{5}{18}\right), Y^* = \left(\frac{11}{18}; \frac{7}{18}; 0\right)$. Ціна гри $v = -\frac{8}{9}$. Тобто, перший гравець повинний випадковим чином за 18 ігор 13 разів застосовувати стратегію

A_1 (показувати 2 коп.) і 5 разів застосовувати стратегію A_2 (показувати 10 коп.). А другий гравець при цьому так само випадково за 18 ігор повинний 11 разів застосовувати стратегію B_1 (показувати 1 коп.) і 7 разів застосовувати стратегію B_2 (показувати 2 коп.). При цьому він не повинний застосовувати стратегію B_3, тобто зовсім не показувати 25-копійчані монети. При цьому перший гравець буде програвати другому в середньому 8 копійок за 9 ігор.

Як зміниться розв’язок задачі, якщо в другого гравця відібрати 1-копійчані монети? А якщо першому додати півгривневі монети?

18.2. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування

Припустимо, що ціна гри додатна ($v> 0$). Якщо це не так, то можна підібрати таке число c, додавання якого до всіх елементів матриці платежів дає матрицю з додатними елементами, а отже, і з додатним значенням ціни гри. При цьому оптимальні мішані стратегії обох гравців не змінюються.

Нехай задана гра з матрицею порядку $m \times n$. Оптимальні мішані стратегії гравців $X^* = (x_1, x_2, \dots x_m)$, $Y^*=(y_1,y_2,\dots y_n)$ і ціна гри v повинні задовольняти умовам.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i \ge v \quad (j=\overline{1,n}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}) \end{cases} \qquad (18.8) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \le v \quad (i=\overline{1,m}) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \end{cases} \qquad (18.9)$$

Розділимо всі рівняння і нерівності в (18.8) і (18.9) на v (це можна зробити, тому що за припущенням $v > 0$) і введемо позначення:

$$\frac{x_i}{v} = p_i \quad (i=\overline{1,m}), \qquad \frac{y_i}{v} = q_i \quad (j=\overline{1,n}),$$

Одержимо пари двоїстих задач лінійного програмування:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{v} \to \min, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i \ge 1, \qquad p_i \ge 0, \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (18.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{v} \to \max \;, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1, \quad q_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (18.11)$$

Розв'язавши ці задачі, одержимо значення $p_i \; (i = \overline{1,m})$, $q_j \; (j = \overline{1,n})$ і v. Тоді мішані стратегії, тобто x_i і y_j виходять за формулами: $x_i = v \cdot p_i \; (i = \overline{1,m}), \quad y_j = v \cdot q_j \; (j = \overline{1,n})$.

Отже, *алгоритм розв'язання матричної гри* наступний:

1. Перевірити, чи має гра розв'язок у чистих стратегіях. Встановити ціну гри або верхню і нижню межі ціни гри.
2. Спростити платіжну матрицю.
3. Якщо серед елементів платіжної матриці є від'ємні, то до всіх елементів матриці необхідно додати таке число $C > 0$, щоб усі елементи стали невід'ємними. При цьому ціна гри v теж збільшиться на С, а оптимальні мішані стратегії не зміняться.
4. Для ігор розміром $m \text{ x } n$ доцільно використати симплекс-метод, для ігор розміром $2 \text{ x } 2, m \text{ x } 2, \; n \text{ x } 2$ можна використати геометричний спосіб розв'язування.
5. Скласти пару взаємно двоїстих задач ЛП (18.8) – (18.9), які еквівалентні даній матричній грі.
6. Знайти оптимальні плани двоїстих задач.
7. Знайти розв'язок гри, використовуючи формули (18.10) – (18.11).

Примітки. 1. Для гри 2х2, яка не має сідлової точки, можна застосувати наступний спрощений прийом отримання оптимальної мішаної стратегії.

Віднімемо від елементів першого стовпчика елементи другого стовпчика. Отримаємо стовпчик $\begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} \\ a_{21} - a_{22} \end{pmatrix}$, елементи якого за абсолютною величиною пропорціональні частотам x_1 та x_2 оптимальної стратегії першого гравця. Аналогічно визначається мішана стратегія для другого гравця.

2. Аналогічно можна вказати просте правило для розв'язування гри 2x*m*, яка теж не має сідлової точки. Потрібно вибрати довільні дві стратегії для другого гравця (який має *m* стратегій) і розв'язати гру 2x2. Отриманий розв'язок для першого гравця оцінюється проти будь-якої з решти стратегій другого гравця. Якщо отриманий «виграш» не менше від знайденої ціни гри 2x2, то це і буде розв'язком початкової гри. Якщо ж буде отриманий менший «виграш», то випробовується таким способом інша гра 2x2.

Розв'яжемо таким способом задачу 18.2 гри з викиданням пальців.

Таблиця 18.8

	B_1	B_2	B_3
A_1	**2**	**-3**	**4**
A_2	**-3**	**4**	**-5**
A_3	**4**	**-5**	**6**

Додамо до всіх елементів платіжної матриці стале число c = 5.

Таблиця 18.9

	B_1	B_2	B_3
A_1	**7**	**2**	**9**
A_2	**2**	**9**	**0**
A_3	**9**	**0**	**11**

Складемо пряму та двоїсту задачі:

$$\frac{1}{v} = p_1 + p_2 + p_3 \to \min \qquad\qquad \frac{1}{v} = q_1 + q_2 + q_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 7p_1 + 2p_2 + 9p_3 \geq 1 \\ 2p_1 + 9p_2 \geq 1 \\ 9p_1 + 11p_3 \geq 1 \end{cases} \quad p_{1,2,3} \geq 0; \qquad \begin{cases} 7q_1 + 2q_2 + 9q_3 \leq 1 \\ 2q_1 + 9q_2 \leq 1 \\ 9q_1 + 11q_3 \leq 1 \end{cases} \quad q_{1,2,3} \geq 0.$$

Простіше розв'язувати двоїсту задачу. Зведемо її до канонічного виду:

$$\frac{1}{v} = q_1 + q_2 + q_3 + 0q_4 + 0q_5 + 0q_6 \to \max \quad \begin{cases} 7q_1 + 2q_2 + 9q_3 + \boxed{q_4} = 1 \\ 2q_1 + 9q_2 \qquad\quad + \boxed{q_5} = 1 \\ 9q_1 \qquad + 11q_3 + \boxed{q_6} = 1 \end{cases} \quad q_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

Розв’яжемо симплексним методом (табл. 18.10).

Таблиця 18.10

C_i	C_j	0	1	1	1	0	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	Б1	*b*	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	
0	q_4	1	7	2	9	1	0	0	1/7
0	q_5	1	2	9	0	0	1	0	1/2
0	q_6	1	$\boxed{9}$	0	11	0	0	1	1/9
Δ_j		0	-1	-1	-1	0	0	0	–
0	q_4	2/9	0	2	4/9	1	0	-7/9	9/81
0	q_5	7/9	0	$\boxed{9}$	-22/9	0	1	-2/9	7/81
1	q_1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9	–
Δ_j		1/9	0	-1	2/9	0	0	1/9	–
0	q_4	4/81	0	0	$\boxed{80/81}$	1	-2/9	-59/81	1/20
1	q_2	7/81	0	1	-	0	1/9	-2/81	–
1	q_1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9	1/11
Δ_j		16/81	0	0	-4/81	0	1/9	7/81	–
1	q_3	1/20	0	0	1	81/80	-9/40	-	–
1	q_2	1/10	0	1	0	11/40	1/20	-9/40	–
1	q_1	1/20	1	0	0	-	22/80	81/80	–
Δ_j		1/5	0	0	0	1/20	1/10	1/20	–

Одержуємо $\frac{1}{v} = \frac{1}{5}$. Звідки ціна гри $v = 5$. Ціна основної гри: $v_0 = v - c = 5 - 5 = 0$. Тобто, це справедлива гра. Знаходимо оптимальні стратегії.

$$q_1 = \frac{1}{20}, \quad q_2 = \frac{1}{10}, \quad q_3 = \frac{1}{20}, \quad p_1 = \frac{1}{20}, \quad p_2 = \frac{1}{10}, \quad p_3 = \frac{1}{20}.$$ Звідки

$$x_1 = p_1 \cdot v = \frac{1}{20} \cdot 5 = 0,25; \quad x_2 = p_2 \cdot v = \frac{1}{10} \cdot 5 = 0,5; \quad x_3 = p_3 \cdot v = \frac{1}{20} \cdot 5 = 0,25;$$

$$y_1 = q_1 \cdot v = \frac{1}{20} \cdot 5 = 0,25; \quad y_2 = q_2 \cdot v = \frac{1}{10} \cdot 5 = 0,5; \quad y_3 = q_3 \cdot v = \frac{1}{20} \cdot 5 = 0,25.$$

Оптимальні мішані стратегії гравців: *X** = (0,25; 0,5; 0,25), *Y** = (0,25; 0,5; 0,25).

18.3. Методичні вказівки до розв'язування вправ

Задача 18.5. Записати платіжну функцію для гри, що задана матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Визначити ціну гри та перевірити справедливість умови (18.5): $f(\overline{X},\overline{Y}^*) \le f(\overline{X}^*,\overline{Y}^*) \le f(\overline{X}^*,\overline{Y})$.

Розв'язання. Складемо платіжну матрицю гри. Перевіримо спочатку, чи має гра сідлову точку.

Таблиця 18.11

	B_1	B_2	B_3	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	2	1	3	1
A_2	4	2	5	**2**
$\max\limits_i a_{ij}$	4	**2**	5	

α = β =*v*= 2 і гра має сідлову точку. Ціна гри: $v = 2$. Отже, для гравця А $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i(\min\limits_j a_{ij}) = 2$ є нижньою ціною гри, або максимінним виграшем; аналогічно для гравця В $\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\limits_j(\max\limits_i a_{ij}) = 2$ є верхньою ціною гри, а відповідна стратегія - мінімаксною. Таким чином, оптимальною є стратегія (A_2B_2), тобто оптимальне рішення є $\overline{X}^* = (0;1),\ \overline{Y}^* = (0;1;0)$ і $v = f(\overline{X}^*,\ \overline{Y}^*) = 2$.

Функцією виграшу, або платіжною функцією $f(\overline{X},\overline{Y})$ з матрицею $P = (a_{ij})$ при застосуванні гравцем А стратегії $\overline{X}$, а гравцем В – стратегії $\overline{Y}$, називається середня величина виграшу гравця А (програшу гравця В), що розрахована за формулою (17.4): $f(\overline{X},\overline{Y}) = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i y_j a_{ij} = \overline{X} P \overline{Y}$.

Тоді $\sum\limits_i \sum\limits_j x_i y_j a_{ij} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3$.

Враховуючи $\overline{X}^* = (0;1),\ \overline{Y}^* = (0;1;0)$, маємо: $f(\overline{X},\overline{Y}*)=x_1+2x_2=2-x_1=2-0=2$;

$f(\overline{X}*,\overline{Y})=4y_1+2y_2+5y_3=2+2y_1+3y_3=2+0+0=2$,

тобто умова (18.5) $f(\overline{X},\overline{Y}*)\le f(\overline{X}*,\overline{Y}*)\le f(\overline{X}*,\overline{Y})$ виконується.

Звідси, стратегії $\overline{X}*$ та $\overline{Y}*$ є оптимальними, тому що виконується умова (18.5). Їхнє застосування забезпечує гравцю А середній виграш, не менший, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{X}$, а гравцю В – середній програш, не більший, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{Y}$.

Задача 18.6. Підприємство може випускати три види продукції A_1, A_2, A_3 , отримуючи при цьому прибуток, що залежить від попиту, який може бути в одному із чотирьох станів B_1, B_2, B_3, B_4. Елементи (a_{ij}) даної матриці характеризують прибуток, який отримає підприємство при випуску *i*-тої продукції з *j*-тим станом попиту:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальні пропорції для продукції, що випускається, які гарантують середню величину прибутку при будь-якому стані попиту, вважаючи його невизначеним.

Розв'язання. Задача зводиться до ігрової моделі, в якій гра підприємства А проти попиту В задана платіжною матрицею (табл. 18.12).

Таблиця 18.12

Попит Вид продукції	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	53	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Спростимо гру, провівши аналіз платіжної матриці і відкинувши дублюючі та домінуючі стратегії. Зокрема, стратегія B_1 є домінуючою над B_2 (мета гравця В – зменшити виграш гравця А), тому стовпчик B_2 можна відкинути, отримаємо гру 3х3 (табл. 18.13).

Таблиця 18.13

	B_1	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	**2**
A_3	7	5	4	4
$\max\limits_i a_{ij}$	9	6	8	$\alpha = 4$ $\beta = 6$

Оскільки $\alpha = 4 \neq \beta = 6$, то гра не має сідлової точки. Оптимальне рішення шукатимемо у мішаних стратегіях. Ціна гри $\alpha \le v \le \beta$.

Позначимо оптимальні мішані стратегії гравців $X^* = (x_1, x_2, x_3)$ і $Y^* = (y_1, y_2, y_3)$. Причому $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_{1,2,3} \ge 0$ та $y_1 + y_2 + y_3 = 1,\ y_{1,2,3} \ge 0$. На підставі теореми 18.3 маємо:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge v, \\ &6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge v, \\ &8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge v, \\ &x_{1,2,3} \ge 0, \end{aligned} \quad \text{і} \quad \begin{aligned} &3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le v, \\ &9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le v, \\ &7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \le v, \\ &y_{1,2,3} \ge 0. \end{aligned}$$

Відповідно до теореми 18.4, якщо гравець приймає оптимальну стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри, незалежно від стратегії супротивника. Отже:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 9x_2 + 7x_3 = v, \\ &6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = v, \\ &8x_1 + 2x_2 + 4x_3 = v, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &x_{1,2,3} \ge 0, \end{aligned} \quad \text{і} \quad \begin{aligned} &3y_1 + 6y_2 + 8y_3 = v, \\ &9y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v, \\ &7y_1 + 5y_2 + 4y_3 = v, \\ &y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ &y_{1,2,3} \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши ці системи, одержимо: *X** = (0,4; 0; 0,6), *Y** = (0,2; 0; 0,8; 0) (тут враховано, що другий стовпчик був відкинутий як невигідний), v =5,4. Отже, підприємство повинне виготовити 40% продукції A_1 та 60% продукції A_3, а продукцію виду A_2 не випускати зовсім. Оптимальний попит у 20% знаходиться у стані B_1 та 80% - у стані B_3.

18.4. Питання для самоперевірки

1. Поняття про ігрові моделі, основна задача теорії ігор.
2. Основні поняття теорії ігор.
3. Платіжна матриця. Нижня та верхня ціна гри.
4. Матрична гра двох гравців з нульовою сумою.
5. Класифікація ігор.
6. Метод розв'язування скінченої гри з сідловою точкою.
7. Метод розв'язування скінченої гри без сідлової точки.
8. Спрощення гри.
9. Геометрична інтерпретація гри 2х2.
10. Зведення скінченої гри без сідлової точки до ЗЛП.
11. Алгоритм розв'язання матричної гри.

18.5. Ключові поняття

Активна стратегія	Верхня ціна гри
Виграш	Геометрична інтерпретація гри
Гра	Гра без сідлової точки
Гра з нульовою сумою	Гра з сідловою точкою
Гравці	Графічний метод
Домінуюча стратегія	Дублююча стратегія
Істотна стратегія	Класифікація ігор
Конфліктна ситуація	Максиміна
Максимінна стратегія	Матриця гри
Мінімакса	Мінімаксна стратегія
Мішана стратегія	Нижня ціна гри
Оптимальна стратегія	Основна задача теорії ігор
Основна теорема теорії ігор	
Парні ігри	Платіж

Платіжна матриця	Правила гри
Сідлова точка	Стратегія
Ціна гри	Чиста стратегія

18.6. Навчальні завдання

№18.1. Гра задана платіжною матрицею. Визначити нижню та верхню ціни ігор, мінімаксні та максимінні стратегії, наявність сідлових точок.

а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Відповідь. а) $\alpha = \beta = 4$; б) $\alpha = 0,4; \beta = 0,6$; в) $\alpha = 3, \beta = 4$;
г) $\alpha = \beta = 2$;д) $\alpha = \beta = 5$; е) $\alpha = 4, \beta = 6$.

№ 18.2. Записати платіжну функцію для гри, що задана матрицею $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Визначити ціну гри та перевірити справедливість умови (17.5): $f(\overline{X}, \overline{Y}^*) \le f(\overline{X}^*, \overline{Y}^*) \le f(\overline{X}^*, \overline{Y})$.

Відповідь. $x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3$;
$\alpha = -1 \ne \beta = 2$.

№ 18.3. Гра гравців А та В задана платіжною матрицею. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А та В, виконавши наступні дії:

а) показати існування або відсутність чистих оптимальних стратегій;

б) виконати домінування;

в) звести початкову матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Відповідь: а) $\alpha = \beta = 2; A_2B_3$; б) $\alpha = -1 \neq \beta = 1; A_2B_1; A_2B_2; A_3B_1; A_3B_2$.

№ 18. 4. Розв'язати гру графічним способом, спростивши попередньо платіжну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ -3 & 6 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

18.6. Завдання для перевірки знань

№ 18.5. Дослідити гру та знайти її розв'язок, якщо платіжна матриця $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 18.6. Гра гравців А та В задана платіжною матрицею. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А та В, виконавши наступні дії:

а) показати існування або відсутність чистих оптимальних стратегій;

б) виконати домінування;

в) звести початкову матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування.

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

№ 18.7. Два банки А та В здійснюють капітальні вкладення в п’ять будівельних об’єктів. З урахуванням особливостей вкладів і місцевих умов прибуток банку А в залежності від об’єктів фінансування виражається елементами матриці А. Вважається, що збиток банка В дорівнює прибутку банка А. Знайти рішення матричної гри в чистих стратегіях, якщо воно існує, або у мішаних стратегіях у противному випадку.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $\alpha = -1, \beta = 1$

№ 18.8. Розв’язати гру графічним способом, спростивши попередньо платіжну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 19. ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Для розв'язування задач нелінійного програмування (ЗНЛП) не існує універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів та обчислювальних алгоритмів, які в основному ґрунтуються на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Наведемо властивості ЗНЛП, які істотно ускладнюють процес їхнього розв'язування порівняно із задачами лінійного програмування:

1. Множина допустимих розв'язків G може мати дуже складну структуру (наприклад, бути неопуклою або незв'язною).
2. Глобальний максимум (мінімум) може досягатися як всередині множини G, так і на її межі (де він, взагалі кажучи, буде не співпадати ні з одним із локальних екстремумів).
3. Цільова функція f може бути недиференційовною, що ускладнює застосування класичних методів математичного аналізу.

В силу названих факторів задачі нелінійного програмування настільки різноманітні, що для них не існує загального методу розв'язування.

Методи нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. Прямими методами оптимальні розв'язки шукають у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є градієнтні. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимального розв'язку якої вдається спростити. Найпоширенішими методами цього класу є методи квадратичного програмування. Оптимізаційні задачі, на змінні яких накладаються обмеження, розв'язуються методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами зведеного градієнта, методом множників Лагранжа. Ідея методу Лагранжа полягає в заміні окресленої задачі простішою – знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму Куна-Таккера.

19.1. Графічне розв’язування задачі нелінійного програмування

У загальному випадку задача математичного програмування є задачею нелінійного програмування (ЗНЛП), тобто, якщо ЦФ і (або) хоча б одна з функцій системи обмежень є нелінійною. Якщо ЗНЛП зводиться до двох невідомих, то її можна розв’язати графічним способом подібно до ЗЛП.

Задача 19.1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f = x_1 \cdot x_2$ при заданій системі обмежень $\begin{cases} x_1^2 - 9x_1 + x_2 + 15 \le 0; \\ x_1 \ge 3; \quad x_2 \ge 1. \end{cases}$

Цільова функція і перше обмеження нелінійні, тобто це ЗНП. Спочатку будуємо область допустимих розв’язків *G* (рис. 19.1). Далі треба побудувати опорні лінії рівню ЦФ.

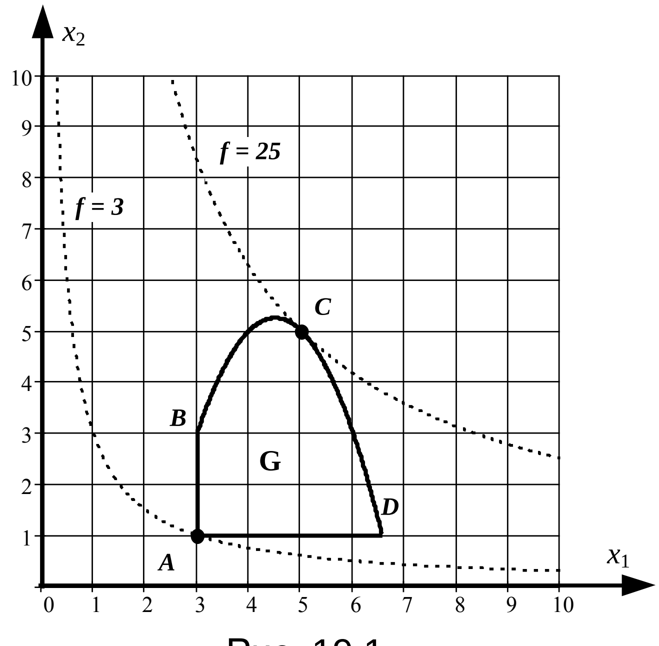


Рис. 19.1

Очевидно, що опорна лінія, яка пройде через точку *A*(3; 1), відповідає мінімальному значенню цільової функції $f_{\min} = f(A) = f(3;1) = 3 \cdot 1 = 3.$ У точці максимуму *C* опорна лінія рівня

$x_2 = \frac{f_{\max}}{x_1}$ та парабола $x_2 = -x_1^2 + 9x_1 - 15$ повинні мати одну дотичну, тобто однакові похідні: $-2x_1 + 9 = -\frac{f_{\max}}{x_1^2}$. Розв'язавши систему цих трьох рівнянь, знаходимо координати точки максимуму *C*(5; 5) та найбільше значення ЦФ $f_{\max} = f(C) = f(5;5) = 5 \cdot 5 = 25.$

Але найбільше або найменше значення ЦФ ЗНЛП, на відміну від ЗЛП, може досягатися і у внутрішній точці ОДР.

Задача 19.2. $f = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \min (\max), \qquad x_1 + x_2 \le 8, \quad x_{1,2} \ge 0.$

Якщо у ЗНЛП цільова функція квадратична, а усі обмеження лінійні то її називають задачею *квадратичного програмування* (ЗКП). ОДР буде трикутник з вершинами у точках *O*(0; 0), *A*(0; 8), *B*(8; 0) (рис. 19.2).

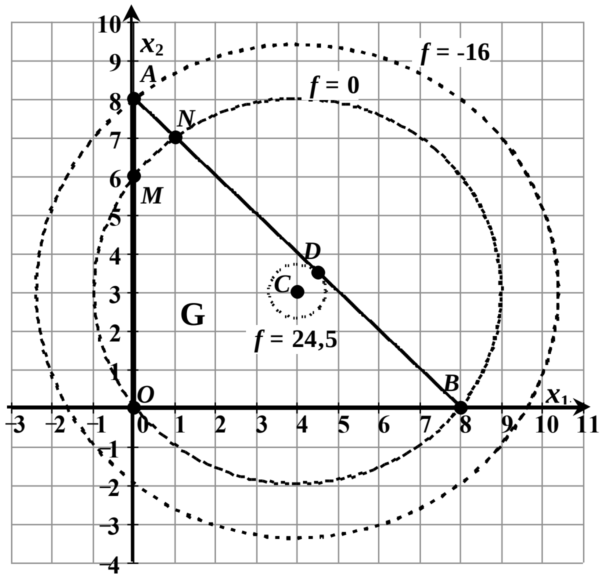


Рис. 19.2

Зведемо цільову функцію до канонічного виду.

$$f = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 = -\left(x_1^2 - 8x_1\right) - \left(x_2^2 - 6x_2\right) = -\left(x_1^2 - 8x_1 + 16\right) - \left(x_2^2 - 6x_2 + 9\right) + 25,$$

або $$f = 25 - \left(x_1 - 4\right)^2 - \left(x_2 - 3\right)^2.$$

Тобто лінії рівня будуть концентричними колами з центром у точці *C*(4; 3). Очевидно, що у цій точці буде досягатися найбільше значення функції: $f_{\max} = f(C) = f(4;3) = 25$. У даному випадку точка умовного екстремуму ЦФ співпадає з точкою її безумовного екстремуму, тому і є внутрішньою точкою ОДР. Цю точку можна б було знайти звичайним методом математичного аналізу для пошуку безумовного екстремуму функції кількох змінних.

Далі будуємо лінії рівня через точки *D*(4,5; 3,5), *O*(0; 0), *M*(0; 6), *N*(1; 7), *B*(8; 0), *A*(0; 8).

$$f(D) = f(4{,}5;3{,}5) = 24{,}5; \quad f(O) = f(M) = f(N) = f(B) = 0; \quad f_{\min} = f(A) = f(0;8) = -16.$$

В цьому прикладі ми бачимо, що точка мінімуму є граничною, а точка максимуму – внутрішньою точкою многокутника розв’язків.

19.2. Безумовний та умовний екстремуми функції кількох змінних. Метод множників Лагранжа

Розглянемо класичну задачу математичного аналізу пошуку безумовного екстремуму функції кількох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$. Взагалі, треба відрізняти задачу пошуку локальних (відносних) максимумів і мінімумів від задачі пошуку найбільшого і найменшого значення функції, тобто глобальних (абсолютних) максимуму і мінімуму. Нагадаємо деякі теоретичні положення з теми 1.

1) Необхідна умова існування екстремуму. Якщо точка $X^0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ є точкою екстремуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то це критична точка, тобто частинні похідні у цій точці $\dfrac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_j}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$ або дорівнюють нулю (стаціонарна точка) або не існують.

2) Достатня умова існування екстремуму. Позначимо.

$$f_{ij}'' = \frac{\partial^2 f\left(X^0\right)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \Delta_1 = f_{11}'', \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_j = \begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' & \cdots & f_{1n}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' & \cdots & f_{2n}'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}'' & f_{n2}'' & \ldots & f_{nn}'' \end{vmatrix}.$$

а) Якщо знаки визначників чергуються $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots$, то функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є опуклою вгору у деякому околі точки X^0, а якщо ця точка критична, то вона - точка максимуму.

b) Якщо знаки усіх визначників додатні $\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \ldots$, то функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є опуклою вниз у деякому околі точки X^0, а якщо ця точка критична, то це точка мінімуму.

Загальна задача нелінійного програмування (ЗЗНЛП) визначається як задача знаходження максимуму (мінімуму) цільової функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множині D, що задається системою обмежень

$$D = \begin{cases} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \; i = \overline{1, r}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; i = \overline{r+1, m}, \\ x \in R^n \end{cases} \qquad (19.1)$$

де хоча б одна з функцій f_i або g_i є нелінійною.

За аналогією з лінійним програмуванням, ЗНЛП однозначно визначається парою (D, f) і коротко може бути записана в наступному вигляді:

$$f(x) \to \max, \; D = \begin{cases} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \; i = \overline{1, r}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; i = \overline{r+1, m}, \\ x \in R^n \end{cases} \qquad (19.2)$$

Очевидно, що питання про тип оптимізації не є принциповим. Тому, для визначеності, в подальшому будемо розглядати задачі максимізації.

Як і ЗЛП, вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ $\in$ D називається допустимим планом, а якщо для будь-якого x $\in$ D виконується нерівність $f(x^*) \ge f(x)$, то x^* називають оптимальним планом. У цьому випадку x^* є точкою глобального максимуму.

Економічна інтерпретація $f(x)$ може розглядатися як дохід, який отримує фірма (підприємство) при плані випуску x, а $g_i(x) \le 0$ як технологічні обмеження на можливості випуску продукції. У даному випадку вони є узагальненням ресурсних обмежень у ЗЛП ($a_i x - b_i \le 0$).

Задача 19.3. Знайти безумовний екстремум ЦФ для задачі 19.2 $f = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2$ (тобто без урахування обмежень).

Спочатку знаходимо частинні похідні та прирівнюємо їх до нуля:

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 8 - 2x_1 = 0; \quad f_2' = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6 - 2x_2 = 0.$$

Отримуємо стаціонарну точку *C*(4; 3). Далі знаходимо частинні похідні другого порядку та визначники:

$$\Delta_1 = f_{11}'' = -2 < 0, \quad f_{12}'' = f_{21}'' = 0, \quad f_{22}'' = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Знаки визначників чергуються з “–“ на “+”, тобто функція є опуклою вгору і точка *C*(4; 3) є точкою її безумовного максимуму. $f_{\max}^{\text{безумов}} = f\left(C\right) = f\left(4;3\right) = 25$.

Якщо у ЗНЛП усі обмеження є рівностями і жодна змінна не обмежена умовою невід’ємності

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max\left(\min\right),$$
$$g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

то у математичному аналізі таку задачу називають класичною задачею на умовний (локальний) екстремум і зводять її до задачі на безумовний екстремум за допомогою так званої функції Лагранжа

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m}\left[b_i - g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right] \cdot y_i, \qquad (19.3)$$

де змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – називають множниками Лагранжа.

Спочатку знаходять стаціонарні точки $\left(X^0; Y^0\right)$ функції Лагранжа з необхідної умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (19.4)$$

Потім ЦФ $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ перевіряється на опуклість та існування екстремуму в точках $X^0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ за достатньою умовою.

Метод пошуку умовного екстремуму отримав назву методу множників Лагранжа, або просто методу Лагранжа. Він реалізується у наступних кроках.

1. Скласти функції Лагранжа $L(x,y)$.

2. Знайти частинні похідні

$\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial x_j}$ $(j=\overline{1;n})$ та $\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial y_i}$ $(i=\overline{1;m})$

3. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i}=0, \quad i=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{19.4}$$

відносно змінних x та y.

4. Дослідити точки, що задовольняють системі (19.4), на максимум (мінімум) за допомогою достатньої ознаки екстремуму.

Наявність останнього (четвертого) етапу пояснюється тим, що формули (19.4) дають необхідну, але не достатню умову екстремуму. Стан справ з достатніми ознаками умовного екстремуму є набагато складнішим. Взагалі, вони існують, але справедливі для більш частинних випадків відносно функцій f та g_i і, як правило, важко застосовні на практиці.

Отже, основне практичне значення методу Лагранжа полягає в тому, що він позволяє перейти від умовної оптимізації до безумовної й, відповідно, розширити кількість доступних засобів розв’язання проблеми.

Задача 19.4. Знайти умовний екстремуми функції $f=8x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2$ при умові $x_1+x_2=8$.

Розв’язання. Перед тим, як будувати функцію Лагранжа, запишемо обмеження у такому вигляді, щоб у правій частині був нуль:Складаємо функцію Лагранжа $L=8x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2+y\cdot(8-x_1-x_2)$. Далі знаходимо частинні похідні і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 8 - 2x_1 - y = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 6 - 2x_2 - y = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 8 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = 9; \\ 2x_2 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4,5; \\ x_2 = 3,5. \end{cases}$$

Отже, одержуємо стаціонарну точку *D*(4,5; 3,5). Тепер знаходимо частинні похідні другого порядку функції $f = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2$ та визначники (див. у попередній задачі):

$$\Delta_1 = f''_{11} = -2 < 0, \quad f''_{12} = f''_{21} = 0, \quad f''_{22} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Знаки визначників чергуються з “–“ на “+”, тобто функція є опуклою вгору і точка *D*(4,5; 3,5) є точкою її умовного максимуму. $f_{\max}^{\text{умов}} = f(D) = f(4,5;3,5) = 24,5$ (див. рис. 19.2).

Дослідження умовного екстремуму можна проводити ще методом *безпосереднього виключення*. Суть його полягає в тому, що з даних рівнянь визначається деяка кількість *s* змінних (максимально *s*=*m*, якщо всі рівняння зв’язку незалежні) через решта *n*-*s* змінних. Знайдені значення підставляються у цільову функцію $z = f(x_1; x_2; ...; x_k; ...; x_n)$. В результаті отримується функція від *n*-*s* змінних, яка досліджується на безумовний екстремум.

Задача 19.5. Дослідити умовний екстремум функції $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$, яка задана в області $0 \le x_1 \le 5,\ 0 \le x_2 \le 10$ при умові $x_1 + x_2 = 7$.

Розв’язання. Область визначення (рис. 19.3) – замкнена обмежена (прямокутник OABC), тому глобальні екстремуми, зокрема й умовні, існують.

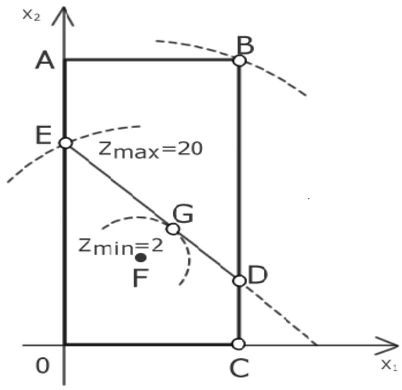


Рис. 19.3

Рівняння зв'язку є пряма, відрізок якої DE знаходиться всередині області. Отже, значення цільової функції будуть зрівнюватися не у всій області OABC, а лише уздовж цього відрізка DE. Лінії рівня являють собою концентричні кола з центром в точці F(2;3). З рисунка видно, що безумовні екстремуми досягаються в точках F (де $f_{\min} = 0$) і B (де $f_{\max} = 58$). Точка F є одночасно точкою локального і глобального мінімуму, а точка B – лише точкою глобального максимуму. Якщо ж розглядати лише точки, що лежать на відрізку DE, то умовний глобальний максимум досягається в точці E (0;7), де $f_{\max} = 20$, а умовний глобальний і локальний мінімум досягається у точці G, в якій коло дотикається до відрізка DE. Визначивши координати цієї точки з рівності кутових коефіцієнтів, маємо: $x_{1(G)} = 3; x_{2(G)} = 4; f_G = f_{\min} = 2$.

Далі застосуємо метод безпосереднього виключення. З рівняння зв'язку маємо $x_2 = 7 - x_1$, тому $f = (x_1 - 2)^2 + (4 - x_1)^2 = 2x_1^2 - 12x_1 + 20$. Отримаємо функції однієї змінної x_1, для якої стаціонарна точка знаходиться з рівняння $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x - 12 = 0$, звідки $x_1 = 3; x_2 = 2; f_G = 2$. На кінцях відрізка, тобто в точках D(5;2) та E(0;7), маємо: $f_D = 10;\ f_E = 20$. Порівнюючи знайдені три значення функції, отримуємо, що $f_{\min} = 2;\ f_{\max} = 20$, а це співпадає з результатами графічного розв'язку.

19.3. Задача опуклого програмування. Теорема Куна-Таккера

Розглянемо ЗНЛП у загальному вигляді

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min),$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Найбільше (найменше) значення ЦФ знаходиться або у критичних (у т.ч. стаціонарних) точках, або на границі ОДР. Але повний математичний аналіз такої задачі застосовують тільки у найпростіших випадках. Тому для окремих класів ЗНЛП розроблені спеціальні методи математичного програмування пошуку оптимального розв'язку.

Найбільш визначеним є клас задач опуклого програмування (ЗОП), у яких ОДР є опуклою множиною і ЦФ також є опуклою. Якщо ЦФ опукла вгору, то задача на максимум, якщо вниз, то на мінімум. У ЗОП локальний умовний екстремум співпадає з абсолютним умовним екстремумом. Необхідні і достатні умови існування розв'язку ЗОП дає наступна теорема Куна-Таккера.

Теорема 19.1 (Куна-Таккера). Нехай задана ЗОП:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max;$$
$$g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le b_i, \quad i = \overline{1, m};$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо усі функції *f* (опуклі вгору) і g_i (опуклі вниз) неперервно-диференційовні, то для того, щоб точка $X\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ була оптимальним розв'язком цієї задачі необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} \le 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} \ge 0, \quad i = \overline{1, m}; \end{cases} \qquad (19.5)$$

при виконанні так званих умов доповнюючої нежорсткості

$$\begin{cases} x_j \cdot \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ y_i \cdot \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}; \end{cases} \qquad (19.6)$$

і умов невід'ємності усіх змінних

$$\begin{cases} x_j \ge 0, & j=\overline{1,n}; \\ y_i \ge 0, & i=\overline{1,m}; \end{cases} \tag{19.7}$$

де L і y_i відповідно функція і множники Лагранжа

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\left[b_i-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right]\cdot y_i\,.$$

Відповідну точку називають точкою Куна-Таккера.

За допомогою останнього твердження будується скінчений алгоритм для розв'язання задач опуклого квадратичного програмування (ЗОКП). Крім того, його можна використовувати для перевірки, чи є дана точка оптимальним розв'язком ЗОП.

Зведемо систему (19.5) до канонічного виду, увівши додаткові змінні:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}+v_j=0, & j=\overline{1,n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i}-w_i=0, & i=\overline{1,m}; \end{cases} \tag{19.5'}$$

звідки значення $v_j=-\dfrac{\partial L}{\partial x_j},\quad \left(j=\overline{1,n}\right);\quad w_i=\dfrac{\partial L}{\partial y_i},\quad \left(i=\overline{1,m}\right)$ підставимо у (19.6)

$$\begin{cases} x_j\cdot v_j=0, & j=\overline{1,n}; \\ y_i\cdot w_i=0, & i=\overline{1,m}; \end{cases} \tag{19.6'}$$

Відповідно система (19.7) набуде вигляду

$$\begin{cases} x_j \ge 0, & v_j \ge 0, & j=\overline{1,n}; \\ y_i \ge 0, & w_i \ge 0, & i=\overline{1,m}; \end{cases} \tag{19.7'}$$

19.4. Задача квадратичного програмування

Найпростішим частинним випадком ЗОП є задача квадратичного програмування (ЗКП). У цій задачі ЦФ квадратична, а система обмежень лінійна.

$$\begin{gathered} f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{k,j}x_kx_j \to \max; \\ \sum_{i=1}^{m}a_{i,j}x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. \end{gathered} \tag{19.8}$$

Для ЗКП виконуються усі умови теореми Куна-Таккера. Алгоритм аналітичного розв'язання ЗКП за допомогою теореми Куна-Таккера і симплекс-метода розглянемо на конкретному прикладі задачі оптимального розподілу сировини.

Задача 19.6. Розглянемо задачу ОП:

$$f = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 9x_1^2 + 6x_3^2 - 15 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$ і точку $M_0(1;1;1)$.

Перевірити, чи буде точка M_0 оптимальним розв'язком наведеної ЗОП.

Розв'язання. Функція Лагранжа для даної задачі матиме вигляд:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \lambda_1(9x_1^2 + 6x_3^2 - 15) - \lambda_2(x_1 + 2x_2 + x_3 - 5).$$

Запишемо умови Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} &5 - 2x_1 - 18\lambda_1 x_1 - \lambda_2 \le 0, \\ &2 - 2x_2 - 2\lambda_2 = 0, \\ &4 - 2x_3 - 12\lambda_1 x_3 - \lambda_2 \le 0, \\ &(5 - 2x_1 - 18\lambda_1 x_1 - \lambda_2)x_1 = 0, \\ &(4 - 2x_3 - 12\lambda_1 x_3 - \lambda_2)x_3 = 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &9x_1^2 + 6x_3^2 - 15 \le 0, \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 \le 0) \\ &(9x_1^2 + 6x_3^2 - 15)\lambda_1 = 0, \\ &(x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Покладаючи в цій системі $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$, знайдемо $\lambda_1 = \dfrac{1}{6}, \lambda_2 = 0$. Тому точка $M_0(1;1;1)$ є точкою Куна-Таккера для вихідної задачі. Отже, $M_0(1;1;1)$ - оптимальний розв'язок даної задачі.

Задача 19.7. Цех випускає продукцію двох видів *P*$_1$*,* *P*$_2$ використовуючи сировину двох видів *S*$_1$*,* *S*$_2$*.* Запаси сировини, норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці кожного виду продукції та вартість одиниці кожного виду продукції задані у табл. 19.1. Витрати на виробництво кожного виду продукції пропорційні квадрату кількості одиниць виробленої продукції. Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації усієї продукції.

Таблиця 19.1

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		Запаси сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	2	2	10
S_2	1	2	8
Вартість одиниці продукції, гр.	8	6	

Розв'язання. 1) Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1 і x_2 відповідно планову кількість випуску продукції видів P_1 і P_2. Обмеження за витратами сировини видів S_1 і S_2 задаємо у вигляді нерівностей відповідно: $2x_1 + 2x_2 \le 10$ і $x_1 + 2x_2 \le 8$. Також треба ввести додаткові обмеження невід'ємності $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$. У якості показника ефективності вибираємо прибуток від реалізації усієї продукції, який являє собою різницю між вартістю продукції та витратами на її реалізацію: $f = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$.

Таким чином одержуємо ЗКП:

$$f = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 + 2x_2 \le 8; \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0.$$

2) Досліджуємо функцію на опуклість і безумовний екстремум ЦФ (див. задача 19.3). ЦФ опукла вгору і має безумовний максимум $f_{\max}^{\text{безумов}} = f(4;3) = 25, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 3.$ При підстановці вже у перше обмеження одержуємо $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14 > 10$, тобто точка безумовного максимуму (4; 3) не входить до ОДР. Якщо б ця точка задовольняла усім обмеженням системи, включаючи обмеження невід'ємності, то точка безумовного максимуму була б одночасно і точкою умовного максимуму. І на цьому б розв'язання задачі закінчилося (див. задача 19.2).

3) Складаємо функцію Лагранжа

$$L = 8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 + y_1 \cdot (10 - 2x_1 - 2x_2) + y_2 \cdot (8 - x_1 - 2x_2).$$

Застосувавши теорему Куна-Таккера, одержимо систему умов для оптимального розв'язку, включаючи умови доповнюючої нежорсткості і невід'ємності змінних.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 8 - 2x_1 - 2y_1 - y_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 6 - 2x_2 - 2y_1 - 2y_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 10 - 2x_1 - 2x_2 \ge 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \cdot \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \\ x_2 \cdot \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \\ y_1 \cdot \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 0; \\ y_2 \cdot \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0; \\ y_1 \ge 0; \\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вводимо додаткові невід'ємні змінні

$$v_1 = -\frac{\partial L}{\partial x_1}, \quad v_2 = -\frac{\partial L}{\partial x_2}, \quad w_1 = \frac{\partial L}{\partial y_1}, \quad w_2 = \frac{\partial L}{\partial y_2}.$$

Одержимо

$$\begin{cases} 8 - 2x_1 - 2y_1 - y_2 + v_1 = 0; \\ 6 - 2x_2 - 2y_1 - 2y_2 + v_2 = 0; \\ 10 - 2x_1 - 2x_2 - w_1 = 0; \\ 8 - x_1 - 2x_2 - w_2 = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 + y_2 - v_1 = 8; \\ 2x_2 + 2y_1 + 2y_2 - v_2 = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 + w_1 = 10; \\ x_1 + 2x_2 + w_2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot v_1 = 0; \\ x_2 \cdot v_2 = 0; \\ y_1 \cdot w_1 = 0; \\ y_2 \cdot w_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} \ge 0; \\ v_{1,2} \ge 0; \\ y_{1,2} \ge 0; \\ w_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Щоб одержати невід'ємний базисний розв'язок основної системи, можна застосувати симплексний метод. Для цього у перші два рівняння вводимо штучні базисні змінні, а ЦФ виберемо так, щоб ці змінні вийшли з базису.

$$F = -Mz_1 - Mz_2 \to \max; \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 + y_2 - v_1 + \boxed{z_1} = 8; \\ 2x_2 + 2y_1 + 2y_2 - v_2 + \boxed{z_2} = 6; \\ 2x_1 + 2x_2 + \boxed{w_1} = 10; \\ x_1 + 2x_2 + \boxed{w_2} = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} \ge 0; \\ v_{1,2} \ge 0; \\ y_{1,2} \ge 0; \\ w_{1,2} \ge 0; \\ z_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Але ця ЗЛП взагалі не рівносильна вихідній ЗКП, тому що не враховує умов додаткової нежорсткості. Розв'яжемо її (таблиці19.2, 19.3).

Таблиця19.2

C_i	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	$\frac{b_i}{}$
	$Б_1$	b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	a_{ij}
$-M$	z_1	8	2	0	2	1	-1	0	0	0	1	1	4
← $-M$	z_2	6	0	2	$\boxed{2}$	2	0	-1	0	0	0	0	3
0	w_1	10	2	2	0	0	0	0	1	0	0	0	–
0	w_2	8	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	–
Δ_j		$-14M$	$-2M$	$-2M$	$-4M$ ↑	$-3M$	**1...2 M**	**1...3 M**	0	0	0	0	

Таблиця19.3

C_i	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$\frac{b_i}{}$
	$Б_2$	b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	a_{ij}
← $-M$	z_1	2	$\boxed{2}$	-2	0	-1	-1	1	0	0	1	1
0	y_1	3	0	1	1	1	0	-1/2	0	0	0	–
0	w_1	10	2	2	0	0	0	0	1	0	0	5
0	w_2	8	1	2	0	0	0	0	0	1	0	8
Δ_j		$-2M$	$-2M$ ↑	$2M$	0	M	**1...4 M**	**1...5 - M**	0	0	0	

У наступній таблиці штучних змінних не буде, тобто розв’язок ЗЛП буде оптимальним, тому перший рядок (C_j) і перший стовпець (C_i) не заповнюємо.

Таблиця19.4

C_i	C_j	0	0	0	-8	-7	-1	0	-3	0	$\frac{b_i}{}$
	$Б_3$	b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	w_1	w_2	a_{ij}
0	x_1	1	1	-1	0	-1/2	-1/2	1/2	0	0	–
-8	y_1	3	0	1	1	1	0	-1/2	0	0	3
← -3	w_1	8	0	$\boxed{4}$	0	1	1	-1	1	0	2
0	w_2	7	0	3	0	1/2	1/2	-1/2	0	1	$2\frac{1}{3}$
Δ_j		-48	0	-20 ↑	0	-4	**1...6 -** 2	**1...7 7**	0	0	

Розв’язок ЗЛП $\tilde{x}_1 = 1;\ \tilde{x}_2 = 0;\ \tilde{y}_1 = 3;\ \tilde{y}_2 = 0;\ \tilde{v}_1 = 0;\ \tilde{v}_2 = 0;\ \tilde{w}_1 = 8;\ \tilde{w}_2 = 7;$

не задовольняє умові доповнюючої нежорсткості $y_1 \cdot w_1 = 0$. На цьому етапі вводимо нову допоміжну ЦФ

$$F = -\tilde{v}_1 x_1 - \tilde{v}_2 x_2 - \tilde{w}_1 y_1 - \tilde{w}_2 y_2 - \tilde{x}_1 v_1 - \tilde{x}_2 v_2 - \tilde{y}_1 w_1 - \tilde{y}_2 w_2 \to \max .$$

Зважаючи на невід'ємність усіх змінних, її максимально можливе значення буде нуль, а при цьому будуть виконуватися усі умови доповнюючої нежорсткості. Але на кожній ітерації її коефіцієнти змінюються. Зараз $F = 0x_1 + 0x_2 - 8y_1 - 7y_2 - 1v_1 + 0v_2 - 3w_1 + 0w_2 \to \max$. Тепер заповнюємо перший рядок (C_j) і перший стовпець (C_i). Визначаємо, що змінна x_2 увійде до базису, а змінна w_1 вийде. Очевидно, що наступна таблиця буде останньою, тому будуємо її у скороченому вигляді.

$Б_4$	b_i
x_1	3
y_1	1
x_2	2
w_2	1

Розв'язок ЗКП: [redacted] $x_2 = 2$; [redacted] $\tilde{y}_2 = 0$;

[redacted] $\tilde{v}_2 = 0$; $w_1 = 0$; $w_2 = 1$;

f = 23. Задача розв'язана.

Функцію Лагранжа *економічно* можна трактувати як загальний прибуток від виробництва, який містить прибуток від реалізації виготовленої продукції $f(x)$ та прибуток від продажу залишків сировини (або витрати на придбання потрібної кількості сировини).

19.5. Градієнтні методи розв'язування задач нелінійного програмування та їх класифікація

Градієнтні методи (ГМ) або методи можливих напрямків належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, де цільова функція і обмеження є диференційовними хоча б один раз.

Тому ГМ виявляються більш ефективними при розв'язуванні задач опуклого програмування, де будь-який локальний екстремум є одночасно і глобальний.

В основі ГМ лежить основна властивість градієнта диференційовної функції - визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з наперед заданим кроком.

ГМ поділяються на дві групи: 1) методи, при використанні яких досліджувані точки не виходять за межі області допустимих розв'язків задачі; 2) методи, при використанні яких досліджувані точки можуть як належати, так і не належати області допустимих розв'язків. Однак у результаті реалізації ітераційного процесу знаходиться точка області допустимих розв'язків, яка визначає прийнятний розв'язок.

Починають розрахунок з будь-якого допустимого розв'язку.

Нехай задано функцію $z = f(\overline{X})$, де $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$.

Градієнтом $\nabla f(\overline{X^0})$ цієї функції в точці $\overline{X^0}$ називається вектор, координатами якого є значення у цій точці частинних похідних першого порядку за відповідною змінною, тобто

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f^0 = \nabla f(\overline{X^0}) = \left(\frac{\partial f(\overline{X^0})}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(\overline{X^0})}{\partial x_k}, ..., \frac{\partial f(\overline{X^0})}{\partial x_n} \right). \qquad (1)$$

Антиградієнтом називається вектор $-\nabla f(\overline{X^0})$.

Диференціал функції, що наближено дорівнює її повному приросту, знаходиться зі скалярного добутку

$$dz = \nabla f \cdot \Delta\overline{X} \approx \Delta z, \qquad (2)$$

де $\Delta\overline{X} = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$.

Градієнт функції задає в даній точці найшвидше зростання функції, антиградієнт, відповідно, - найшвидше спадання функції. Переміщення з точки $\overline{X^0}$ вздовж градієнта означає переміщення на величину $\Delta\overline{X} = \lambda \cdot \Delta f^0$, де λ – числовий параметр, що означає величину «кроку». Вибравши λ та обчисливши $\nabla f(\overline{X^0})$, визначаються координати наступної точки $\overline{X_1}$. У ній знову обчислюється градієнт $\nabla f(\overline{X_1})$ та робиться наступний крок у його напрямі і т.д. до тих пір, поки $\nabla f(\overline{X_{k+1}}) > f(\overline{X}_k)$. За протилежного відношення в останній нерівності величину λ зменшують удвічі і знову роблять крок з останньої точки, тобто з точки $\overline{X}_k$. Іноді величину λ_k вибирають пропорційно модулю градієнта у вихідній точці $\overline{X}_k$.

19.6. Метод Франка-Вульфа. Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування

Метод Франка-Вульфа - один із градієнтних методів розв'язування задач нелінійного програмування, процедура якого передбачає визначення оптимального плану задачі шляхом перебору розв'язків, які є допустимими планами задачі.

Нехай необхідно відшукати $\max f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за лінійних обмежень: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},\ x_{ij} \ge 0\ \ (j = \overline{1,n})$.

Допустимо, що X_0 - початкова точка, що належить множині допустимих планів даної задачі. У деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють лінійною, і потім розв'язують задачу лінійного програмування. Нехай розв'язок лінійної задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 в напрямку F_0 необхідно рухатись доти, доки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у зазначеному напрямку вибирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну, і знову розв'язується задача лінійного програмування. Знаходимо послідовність точок X_0, X_1,…, які поступово наближаються до оптимального плану початкової задачі. Ітераційний процес повторюється до того моменту, поки значення градієнта цільової функції не стане рівним 0 або виконуватися умова $\left| f(X_{k+1}) - f(X_k) \right| < \varepsilon$, де ε - досить мале число, яке означає потрібну точність обчислень.

19.7. Питання для самоперевірки

1. Дати означення локального екстремуму.
2. Сформулювати теорему про необхідні і достатні умови локального екстремуму функції кількох змінних.
3. Сформулювати теорему про необхідні і достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
4. Дати означення і описати спосіб знаходження умовного екстремуму.
5. У якому випадку задачу на умовний екстремуму можна звести до задачі на звичайний екстремум?
6. Постановка задачі нелінійного програмування (ЗНЛП).
7. Алгоритм графічного методу розв’язання ЗНЛП.
8. Суть методів множників Лагранжа.
9. Поняття опуклих, вгнутих, строго опуклих і строго вгнутих функцій.
10. Сформулювати теорему Куна-Таккера. Яке значення вона має для розв’язування задач нелінійного програмування?
11. Запишіть загальну математичну модель задачі нелінійного програмування (ЗНЛП).
12. Які труднощі виникають при розв’язуванні ЗНЛП?
13. Які методи нелінійного програмування ви знаєте?
14. В чому полягає ідея методу Лагранжа розв’язування ЗНЛП?
15. Який вигляд має функція Лагранжа?
16. Яка функція називається опуклою (вгнутою)?
17. Запишіть математичну модель задачі квадратичного програмування (КП) і охарактеризуйте особливості її розв’язування.
18. Поясніть економічний зміст множників Лагранжа.
19. При яких умовах оптимізаційна задача може бути віднесена до класу нелінійних?
20. Наведіть приклад економічної моделі, яка зводиться до задачі нелінійного програмування.
21. Перечисліть основні труднощі, що виникають у процесі розв’язання задачі нелінійного програмування.
22. Який смисл вкладається в поняття «умовна оптимізація»?
23. Яка точка називається стаціонарною?

24. Дайте означення опуклої (вгнутої) функції.
25. Сформулюйте достатню умову опуклості (вгнутості) функції.
26. У чому полягає специфіка задач опуклого програмування?
27. Опишіть суть градієнтного методу розв’язування ЗНЛП.
28. Алгоритм розв’язування задачі нелінійного програмування методом Франка-Вульфа.
29. Які принципіальні етапи входять до градієнтних методів?

19.6. Ключові поняття

Безумовна оптимізація
Графічний метод розв’язування ЗНП
Вгнуті функції
Від’ємно визначена квадратична форма
Глобальний максимум (мінімум)
Градієнт, градієнтний метод розв’язування ЗНЛП
Гранична точка множини
Додатно визначена квадратична форма
Достатня умова опуклості (вгнутості)
Загальна задача нелінійного програмування
Задача опуклого програмування
Задачі на умовний екстремум
Квадратична функція
Лінії рівня
Локальний максимум (мінімум)
Множники Лагранжа
Опукла множина точок
Постановка ЗКП
Стаціонарна точка
Теорема Куна-Таккера
Умовна оптимізація
Квадратична форма
Класична задача оптимізації
Локальний екстремум
Матриця Гессе
Метод Франка-Вульфа
Опуклі функції
Постановка ЗНП
Строго опуклі функції
Умовний екстремум функції
Функція Лагранжа

19.7. Навчальні завдання

№19.1. Графічним методом знайти максимальне (мінімальне) значення функції при даних обмеженнях:

а) $f = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$,

$$2x_1 + x_2 - 8 \le 0,$$
$$2x_1 + x_2 - 2 \ge 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: $f_{\max}(0{,}8;0{,}4) = -0{,}8$.

б) $f = -2x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 5 \to \max(\min)$,

$$x_1 + x_2 - 10 \le 0,$$
$$2x_1 + x_2 - 8 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: $f_{\max}(4;0) = 13;\ f_{\min}(1;2) = 0$.

в) $f = -2x_1 - 8x_2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 5 \to \max(\min)$,

$$x_1 + 2x_2 - 8 \le 0,$$
$$2x_1 + x_2 - 10 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: $f_{\min}(1;1) = 0$.

г) $f = 10(x_1 - 2)^2 + 20(x_2 - 3)^2 \to \min$,

$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 6,$$
$$x_1 - 2x_2 \ge -8.$$

Відповідь: $f_{\min}(2;3) = 0$.

№19.2. За допомогою методу множників Лагранжа знайти умовний екстремум функції при даних обмеженнях:

а) $f = x_1^2 + x_2^2$, $\qquad 3x_1 + 2x_2 = 6$.

б) $f = 5(x_1 - 3)^2 + 10(x_2 - 4)^2 \to \min$,

$$x_1 + 2x_2 - 8 \le 0,$$
$$x_1 + 3x_2 - 15 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: а) $f_{\min}(\frac{18}{13};\frac{12}{13}) = \frac{36}{13}$; б) $f_{\min}(3;4) = 0$.

№19.3. Використовуючи симплексний метод, розв'язати задачу квадратичного програмування.

а) $f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \to \min$,

$$x_1 + 2x_2 - 2 \ge 0,$$
$$x_1 + x_2 - 10 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

б) $f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$

$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідь: а) $f_{\min}(0;1)=0$; б) $f_{\min}(\frac{5}{4};2)=\frac{89}{8}$.

19.8. Завдання для перевірки знань

№19.4. Графічним методом знайти максимальне (мінімальне) значення функції при даних обмеженнях:

а) $f = 6x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max(\min)$,

$2x_1 + 3x_2 - 24 \le 0,$
$3x_1 + 2x_2 - 24 \ge 0,$
$x_1 + 2x_2 - 15 \le 0,$
$x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Відповідь: $f_{\max}(3;4)=13$.

б) $f = 9(x_1-5)^2 + 4(x_2-6)^2 \to \min$

$x_1 - x_2 - 6 \le 0,$
$3x_1 + 2x_2 - 12 \ge 0,$
$x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Відповідь: $f_{\min}(5;4)=16$.

в) $f = x_1 + x_2 \to \max$,

$x_1^2 + x_2^2 \le 16,$
$x_1 x_2 \ge 2.$

Відповідь: $f_{\max}(2\sqrt{2};2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

№19.5. За допомогою методу множників Лагранжа знайти умовні екстремуми функції при даних обмеженнях:

а) $f = 2x_1 + x_2$, $\qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$.

б) $f = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 13$, $x_1 + x_2 = 7,\ 0 \le x_1 \le 5,\ 0 \le x_2 \le 10$.

Відповідь: а) $f_{\min}(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5};\ f_{\max}(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$,

б) $f_{\min}(3;2)=2;\ f_{\max}(0;7)=20$.

ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

У всіх задачах номер свого варіанту (скласти двозначне число з двох останніх цифр номеру залікової книжки та додати одиницю) підставити замість N.

<u>Задача №1</u>

Тема І. ТРАНСПОРТНІ МЕРЕЖІ

Розв'язати транспортну задачу з проміжними базами.

	Бази	D_1	D_2	D_3	D_4
Поста-чальники	пр.спром. запаси	$120 + 5N$	$240 – N$	$260 + 3N$	$300 – 2N$
A_1	$100 + 5N$	5	4	3	1
A_2	$250 + 3N$	4	3	2	2
A_3	$300 + N$	7	4	2	3

	Споживачі	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4
Бази	попит пр.спром.	$150 + 3N$	$140 – 2N$	$160 + 2N$	$165 + N$	$100 – N$
D_1	$120 + 5N$	1	3	4	1	3
D_2	$240 – N$	2	5	3	2	1
D_3	$260 + 3N$	3	5	3	3	4
D_4	$300 – 2N$	5	4	6	4	7

Скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами при наявності додаткових обмежень:

1) перевезення з бази D_3 до споживача B_2 заборонені;
2) від постачальника A_1 до бази D_1 треба перевезти рівно $20 + N$ одиниць вантажу;
3) від постачальника A_2 до бази D_3 треба перевезти не менше $100 – N$ одиниць вантажу;
4) з бази D_2 до споживача B_5 треба перевезти не більше $100 – 2N$ одиниць вантажу.

<u>Задача №2</u>

Тема II. ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Тема III. ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Цех випускає продукцію двох видів P_1, P_2 використовуючи сировину 3 видів S_1, S_2, S_3. Запаси сировини, норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці кожного виду продукції і вартість одиниці кожного виду продукції задані у таблиці.

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		Запаси сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	3	1	$10 + 0{,}2N$
S_2	2	3	$9 + 0{,}1N$
S_3	1	5	$15 – 0{,}2N$
Вартість одиниці продукції, гр.	$4 + 0{,}4N$	$18 – 0{,}4N$	

1) Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальну вартість реалізації усієї продукції. Зробити післяоптимізаційний аналіз.
2) Скласти двоїсту задачу, подати її економічну інтерпретацію та розв’язати методом штучного базису. Порівняти розв’язки пари двоїстих задач.
3) Витрати на виробництво кожного виду продукції пропорційні квадрату кількості одиниць виробленої продукції з коефіцієнтами $k_1 = 0{,}1$, $k_2 = 10$ для варіантів № 1-12, та з коефіцієнтами $k_1 = 10$, $k_2 = 0{,}1$ для варіантів № 13-30. Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації усієї продукції. Розв’язати аналітичним (теорема Куна-Такера) методом.
4) Побудувати графік до задач лінійного та квадратичного програмування.

Приклад розв’язання варіанту з N = 1

Задача № 1

$D_3B_2 = M$

$A_1D_1 = 21$

$A_2D_3 \geq 99$

$D_2B_5 \leq 98$

$\Sigma a_i = 659$

$\Sigma d_k = 925$

$\Sigma b_j = 718$

постач \ бази		D_1	D_2	D_3	D_4
		125	239	263	298
A_1	105	5	4	3	1
A_2	253	4	3	2	2
A_3	301	7	4	2	3

постач \ бази		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		153	138	162	166	99
D_1	125	1	3	4	2	3
D_2	239	2	5	3	2	1
D_3	263	3	5	3	3	4
D_4	298	5	4	6	5	7

Таблиця 1

Поста-чальники \ Споживачі	попит / запаси	D_1	D_2	D_3	D_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B'_5	B''_5	u_i
		104	**239**	**164**	**298**	**153**	**138**	**162**	**166**	**98**	**1**	
A_1	**84**	M	4	3	**1** 84	M	M	M	M	M	M	0
A_2	**154**	4 2	3 2	2 1	**2** 154	M	M	M	M	M	M	1
A_3	**301**	7	**4** 137	**2** 164	3	M	M	M	M	M	M	0
A^{Φ}_4	**59**	0	0	0	0	0	0	0	**0** 58	0	**0** 1	-6
D_1	**125**	**0** 104	M	M	M	**1** 21	3	4	2	3	3	-5
D_2	**239**	M	**0** 102	M	M	**2** 39	5	3	2	**1** 98	M	-4
D_3	**263**	M	M	0	M	**3** 93	M	**3** 162	**3** 8	4	4	-3
D_4	**298**	M	M	M	**0** 60	5	**4** 138	6	**5** 100	7	7	-1
v_j		5	4	2	1	6	5	6	6	5	6	**3609**

Таблиця 2

Поста-чальники \ Споживачі	попит / запаси	D_1	D_2	D_3	D_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B'_5	B''_5	u_i
		104	**239**	**164**	**298**	**153**	**138**	**162**	**166**	**98**	**1**	
A_1	**84**	M	4	3	**1** 84	M	M	M	M	M	M	0
A_2	**154**	**4** 93	3	2	**2** 61	M	M	M	M	M	M	1
A_3	**301**	7	**4** 137	**2** 164	3	M	M	M	M	M	M	2
A^{Φ}_4	**59**	0	0	0	0	0	0	0	**0** 58	0	**0** 1	-6
D_1	**125**	**0** 11	M	M	M	**1** 114	3	4	2 1	3	3	-3
D_2	**239**	M	**0** 102	M	M	**2** 39	5	3 1	2 2	**1** 98	M	-2
D_3	**263**	M	M	0	M	3	M	**3** 162	**3** 101	4	4	-3
D_4	**298**	M	M	M	**0** 153	5	**4** 138	6	**5** 7	7	7	-1
v_j		3	2	0	1	4	5	6	6	3	6	**3423**

Таблиця 3

Поста-чальники \ Споживачі	запаси \ попит	D_1	D_2	D_3	D_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B'_5	B''_5	u_i
		104	**239**	**164**	**298**	**153**	**138**	**162**	**166**	**98**	**1**	
A_1	**84**	M	4	3	**1** **84**	M	M	M	M	M	M	0
A_2	**154**	**4** **100**	3	2	**2** **54**	M	M	M	M	M	M	1
A_3	**301**	7	**4** **137**	**2** **164**	3	M	M	M	M	M	M	2
A^{Φ}_4	**59**	0	0	0	0	0	0 (1)	0	**0** **58**	0	**0** **1**	-4
D_1	**125**	**0** **4**	M	M	M	**1** **121**	3	4	2	3	3	-3
D_2	**239**	M	**0** **102**	M	M	**2** **32**	5	3	**2** **7**	**1** **98**	M	-2
D_3	**263**	M	M	0	M	3	M	**3** **162**	**3** **101**	4	4	-1
D_4	**298**	M	M	M	**0** **160**	5	**4** **138**	6	5	7	7	-1
v_j		3	2	0	1	4	5	4	4	3	4	**3409**

Таблиця 4

Поста-чальники \ Споживачі	запаси \ попит	D_1	D_2	D_3	D_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B'_5	B''_5	u_i
		104	**239**	**164**	**298**	**153**	**138**	**162**	**166**	**98**	**1**	
A_1	**84**	M	4	3	**1** **84**	M	M	M	M	M	M	0
A_2	**154**	**4** **104**	3 (1)	2	**2** **50**	M	M	M	M	M	M	1
A_3	**301**	7	**4** **137**	**2** **164**	3	M	M	M	M	M	M	1
A^{Φ}_4	**59**	0	0	0	0	0	**0** **4**	0	**0** **54**	0	**0** **1**	-5
D_1	**125**	0	M	M	M	**1** **125**	3	4	2	3	3	-4
D_2	**239**	M	**0** **102**	M	M	**2** **28**	5	3	**2** **11**	**1** **98**	M	-3
D_3	**263**	M	M	0	M	3	M	**3** **162**	**3** **101**	4	4	-2
D_4	**298**	M	M	M	**0** **164**	5	**4** **134**	6	5	7	7	-1
v_j		3	3	1	1	5	5	5	5	4	5	**3405**

Таблиця 5

Поста-чальники \ Споживачі	запаси \ попит	D_1	D_2	D_3	D_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B'_5	B''_5	u_i
		104	**239**	**164**	**298**	**153**	**138**	**162**	**166**	**98**	**1**	
A_1	**84**	M	4	3	**1** **84**	M	M	M	M	M	M	0
A_2	**154**	**4** **104**	**3** **50**	2	2	M	M	M	M	M	M	0
A_3	**301**	7	**4** **137**	**2** **164**	3	M	M	M	M	M	M	1
A^{Φ}_4	**59**	0	0	0	0	0	**0** **54**	0	**0** **4**	0	**0** **1**	-5
D_1	**125**	0	M	M	M	**1** **125**	3	4	2	3	3	-4
D_2	**239**	M	**0** **52**	M	M	**2** **28**	5	3	**2** **61**	**1** **98**	M	-3
D_3	**263**	M	M	0	M	3	M	**3** **162**	**3** **101**	4	4	-2
D_4	**298**	M	M	M	**0** **214**	5	**4** **84**	6	5	7	7	-1
v_j		4	3	1	1	5	5	5	5	4	5	**3355**

Задача №2

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		Запаси сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	3	1	10,2
S_2	2	3	9,1
S_3	1	5	14,8
Вартість одиниці продукції, гр.	4,4	17,6	

$$f = 4,4x_1 + 17,6x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10,2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9,1 \quad x_{1,2} \ge 0 \\ x_1 + 5x_2 \le 14,8 \end{cases}$$

$$f = 4,4x_1 + 17,6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + \boxed{x_3} = 10,2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \boxed{x_4} = 9,1 \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \\ x_1 + 5x_2 + \boxed{x_5} = 14,8 \end{cases}$$

	C_i	C_j	0	4,4	17,6	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		Б$_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	x_3	10,2	3	1	1	0	0	10,2
	0	x_4	9,1	2	3	0	1	0	3,03
←	0	x_5	14,8	1	$\boxed{5}$	0	0	1	2,96
	Δ_j		0	-4,4	-17,6	0	0	0	–
					↑				

	C_i	C_j	0	4,4	17,6	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		Б$_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	x_3	7,24	2,8	0	1	0	-0,2	2,59
←	0	x_4	0,22	$\boxed{1,4}$	0	0	1	-0,6	0,16
	17,6	x_2	2,96	0,2	1	0	0	0,2	14,8
	Δ_j		52,096	-0,88	0	0	0	3,52	–
				↑					

C_i	C_j	0	4,4	17,6	0	0	0
	Б$_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6,8	0	0	1	-2	1
4,4	x_1	0,157	1	0	0	0,714	-0,429
17,6	x_2	2,929	0	1	0	-0,143	0,286
Δ_j		52,234	0	0	0	0,629	3,143

Знайдемо допустимі границі зміни коефіцієнтів цільової функції

$$\begin{cases} 0,629 + 0,714\delta_1 \ge 0 \\ 3,143 - 0,429\delta_1 \ge 0 \end{cases} \quad -0,88 \le \delta_1 \le 7,333; \quad C_{1\min} = 4,4 - 0,88 = 3,52; \quad C_{1\max} = 4,4 + 7,333 = 11,733.$$

Аналогічно:

$$\begin{cases} 0,629 - 0,143\delta_2 \ge 0 \\ 3,143 + 0,286\delta_2 \ge 0 \end{cases} \quad -11 \le \delta_1 \le 4,4; \quad C_{2\min} = 17,6 - 11 = 6,6; \quad C_{1\max} = 17,6 + 4,4 = 22.$$

	Опт	C_1, C_2	f	ΔC_{min}	ΔC_{max}	C_{1min},C_2	f	C_{1max},C_2	f	C_1,C_{2min}	f	C_1,C_{2min}	f
X_1	0,157	4,4	0,691	-0,88	7,333	3,52	0,553	11,733	1,844	4,4	0,691	4,4	0,691
X_2	2,929	17,6	51,543	-11	4,4	17,6	51,543	17,6	51,543	6,6	19,329	22	64,429
Цільова функція			52,234				52,096		53,387		20,02		65,12

Знайдемо допустимі границі зміни величини ресурсу S_1:

$$\begin{cases} 6,8 + \beta_1 \ge 0 \\ 0,157 + 0\beta_1 \ge 0 \\ 2,929 + 0\beta_1 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 \ge -6,8 \\ \beta_1 \le \infty \\ \beta_1 \le \infty \end{cases} \quad -8 \le \beta_1 \le \infty; \quad S_{1\min} = 10,2 - 6,8 = 3,4; \quad S_{1\max} = 10,2 + \infty = \infty.$$

Аналогічно для ресурсів S_2 і S_3:

$$\begin{cases} 6,8 - 2\beta_1 \ge 0 \\ 0,157 + 0,714\beta_1 \ge 0 \\ 2,929 - 0,143\beta_1 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 \le 3,4 \\ \beta_1 \ge -0,22 \\ \beta_1 \le 20,5 \end{cases} \quad -0,22 \le \beta_1 \le 3,4; \quad S_{1\min} = 9,1 - 0,22 = 8,88; \quad S_{1\max} = 9,1 + 3,4 = 12,5.$$

$$\begin{cases} 6,8 + \beta_1 \ge 0 \\ 0,157 - 0,429\beta_1 \ge 0 \\ 2,929 + 0,286\beta_1 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 \ge -6,8 \\ \beta_1 \le 0,367 \\ \beta_1 \ge -10,25 \end{cases} \quad -6,8 \le \beta_1 \le 0,367; \quad S_{1\min} = 14,8 - 6,8 = 8; \quad S_{1\max} = 14,8 + 0,367 = 15,167.$$

Сировина		ΔS_{min}	ΔS_{max}	Δf_{min}	Δf_{max}	S_{min}	f_{min}	S_{max}	f_{max}	Тін.ціна
S_1	10,2	-6,8	∞	0	0	3,4	52,234	∞	52,234	0
S_2	9,1	-0,22	3,4	-0,1383	2,137	8,88	52,096	12,5	54,371	0,629
S_3	14,8	-6,8	0,3667	-21,371	1,152	8	30,863	15,167	53,387	3,143

Складемо і розв'яжемо двоїсту задачу:

$$f^* = 10,2y_1 + 9,1y_2 + 14,8y_3 \to \min, \quad \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 4,4 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 17,6 \end{cases} \quad y_{1,2,3} \ge 0$$

$$z = -f^* = -10,2y_1 - 9,1y_2 - 14,8y_3 + 0y_4 + 0y_5 \to \max, \quad \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 = 4,4 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 - y_5 = 17,6 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$z = -10,2y_1 - 9,1y_2 - 14,8y_3 + 0y_4 + 0y_5 - My_6 - My_7 \to \max, \quad \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 + \boxed{y_6} = 4,4 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 - y_5 + \boxed{y_7} = 17,6 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \; j = \overline{1,7}$$

	C_j	0	-10,2	-9,1	-14,8	0	0	-M	-M	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
C_i	Б$_1$	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
-M	y_6	4,4	3	2	1	-1	0	1	0	4,4
← -M	y_7	17,6	1	3	$\boxed{5}$	0	-1	0	1	3,52
Δ_j		-22M	-4M +10,2	-5M +9,1	-6M +14,8	M	M	0	0	–
					↑					

	C_j	0	-10,2	-9,1	-14,8	0	0	-M	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
C_i	Б$_1$	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
-M	y_6	0,88	$\boxed{2,8}$	1,4	0	-1	0,2	1	0,314
← -14,8	y_3	3,52	0,2	0,6	1	0	-0,2	0	17,6
Δ_j		-0,88M -52,1	-2,8M 7,24	-1,4M 0,22	0	M	-0,2M +2,96	0	–

↑

	C_j	0	-10,2	-9,1	-14,8	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
C_i	Б$_1$	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
← -10,2	y_1	0,314	1	0,5	0	-0,357	0,071	0,629
-14,8	y_3	3,457	0	0,5	1	0,071	-0,21	6,914
Δ_j		-54,37	0	-3,4	0	2,586	2,443	–
				↑				

	C_j	0	-10,2	-9,1	-14,8	0	0
C_i	Б$_1$	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-9,1	y_2	0,629	2	1	0	-0,714	0,143
-14,8	y_3	3,143	-1	0	1	0,429	-0,29
Δ_j		-52,234	6,8	0	0	0,157	2,929

Складемо задачу квадратичного програмування за критерієм прибутку

$$f = 4,4x_1 + 17,6x_2 - 0,1x_1^2 - 10x_2^2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10,2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9,1 \\ x_1 + 5x_2 \le 14,8 \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0.$$

Знаходимо частинні похідні і прирівнюємо їх до нуля: $f_1' = 4,4 - 0,2x_1 = 0$; $f_2' = 17,6 - 20x_2 = 0.$ Отримуємо стаціонарну точку C(22; 0,88). Далі знаходимо частинні похідні другого порядку та визначники:

$$\Delta_1 = f_{11}'' = -0,2 < 0, \quad f_{12}'' = f_{21}'' = 0, \quad f_{22}'' = -20, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,2 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Знаки визначників чергуються з "–" на "+", тобто функція є опуклою уверх і точка $C(2{,}2;\,0{,}88)$ є точкою її безумовного максимуму. $f_{\max}^{\text{безумов}}=f(C)=f(22;0{,}88)=56{,}144$.

При підстановці вже у перше обмеження одержуємо $3\cdot 22+0{,}88=66{,}88>10{,}2$, тобто точка безумовного максимуму $C(22;\,0{,}88)$ не входить до ОДР.

Складаємо функцію Лагранжа

$$L=4{,}4x_1+17{,}6x_2-0{,}1x_1^2-10x_2^2+y_1\cdot(10{,}2-3x_1-x_2)+y_2\cdot(9{,}1-2x_1-3x_2)+y_3\cdot(14{,}8-x_1-5x_2).$$

Застосувавши теорему Куна-Такера, одержимо систему умов для оптимального розв'язку, включаючи умови доповнюючої нежорсткості і невід'ємності змінних.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=4{,}4-0{,}2x_1-3y_1-2y_2-y_3\le 0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=17{,}6-20x_2-y_1-3y_2-5y_3\le 0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y_1}=10{,}2-3x_1-x_2\ge 0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2}=9{,}1-2x_1-3x_2\ge 0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y_3}=14{,}8-x_1-5x_2\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1\cdot\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0;\\ x_2\cdot\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0;\\ y_1\cdot\dfrac{\partial L}{\partial y_1}=0;\\ y_2\cdot\dfrac{\partial L}{\partial y_2}=0;\\ y_3\cdot\dfrac{\partial L}{\partial y_3}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1\ge 0;\\ x_2\ge 0;\\ y_1\ge 0;\\ y_2\ge 0;\\ y_3\ge 0.\end{cases}$$

Вводимо додаткові невід'ємні змінні

$$v_1=-\frac{\partial L}{\partial x_1},\quad v_2=-\frac{\partial L}{\partial x_2},\quad w_1=\frac{\partial L}{\partial y_1},\quad w_2=\frac{\partial L}{\partial y_2},\quad w_3=\frac{\partial L}{\partial y_3}.$$

Одержимо

$$\begin{cases}4{,}4-0{,}2x_1-3y_1-2y_2-y_3+v_1=0;\\ 17{,}6-20x_2-y_1-3y_2-5y_3+v_2=0;\\ 10{,}2-3x_1-x_2-w_1=0;\\ 9{,}1-2x_1-3x_2-w_2=0;\\ 14{,}8-x_1-5x_2-w_3=0;\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}0{,}2x_1+3y_1+2y_2+y_3-v_1=4{,}4;\\ 20x_2+y_1+3y_2+5y_3-v_2=17{,}6;\\ 3x_1+x_2+w_1=10{,}2;\\ 2x_1+3x_2+w_2=9{,}1;\\ x_1+5x_2+w_3=14{,}8;\end{cases}\ \begin{cases}x_1\cdot v_1=0;\\ x_2\cdot v_2=0;\\ y_1\cdot w_1=0;\\ y_2\cdot w_2=0;\\ y_3\cdot w_3=0;\end{cases}\ \begin{cases}x_{1,2}\ge 0;\\ v_{1,2}\ge 0;\\ y_{1,2,3}\ge 0;\\ w_{1,2,3}\ge 0.\end{cases}$$

Вводимо штучні базисні змінні, а ЦФ виберемо так, щоби ці змінні вийшли з базису.

$$F=-Mz_1-Mz_2\to\max;\qquad \begin{cases}0{,}2x_1+3y_1+2y_2+y_3-v_1+\boxed{z_1}=4{,}4;\\ 20x_2+y_1+3y_2+5y_3-v_2+\boxed{z_2}=17{,}6;\\ 3x_1+x_2+\boxed{w_1}=10{,}2;\\ 2x_1+3x_2+\boxed{w_2}=9{,}1;\\ x_1+5x_2+\boxed{w_3}=14{,}8;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_{1,2}\ge 0;\\ v_{1,2}\ge 0;\\ y_{1,2,3}\ge 0;\\ w_{1,2,3}\ge 0;\\ z_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

C_i	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	Б$_1$	b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	
$-M$	z_1	4,4	0,2	0	3	2	1	-1	0	0	0	0	1	0	–
$-M$	z_2	17,6	0	20	1	3	5	0	-1	0	0	0	0	1	0,88
0	w_1	10,2	3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	10,2
0	w_2	9,1	2	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3,03
0	w_3	14,8	1	5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2,96
Δ_j		-22M	-0,2M	-20M	-4M	-5M	**1...8** -6M	**1...9** M	**1...10** M	0	0	0	0	0	

↑

C_i	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	Б$_1$	b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	z_1	
$-M$	z_1	4,4	0,2	0	3	2	1	-1	0	0	0	0	1	1,47
0	x_2	0,88	0	1	0,05	0,15	0,25	0	-0,05	0	0	0	0	17,6
0	w_1	9,32	3	0	-0,05	-0,15	-0,25	0	0,05	1	0	0	0	–
0	w_2	6,46	2	0	-0,15	-0,45	-0,75	0	0,15	0	1	0	0	–
0	w_3	10,4	1	0	-0,25	-0,75	-1,25	0	0,25	0	0	1	0	–
Δ_j		-4,4M	-0,2M	0	-3M	-2M	-M	M	0	0	0	0	-M	–

↑

У наступній таблиці штучних змінних не буде, тобто розв'язок ЗЛП буде оптимальним, тому перший рядок (C_j) і перший стовпець (C_i) не заповнюємо.

C_i	C_j	0	0	0	-9,393	-6,68	-10,77	0	-0,807	-1,467	0	0	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	Б$_1$	b_i	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	w_1	w_2	w_3	
-9,393	y_1	1,467	0,067	0	1	0,667	0,333	-0,33	0	0	0	0	22
0	x_2	0,807	-0,003	1	0	0,117	0,233	0,017	-0,05	0	0	0	–
-1,467	w_1	9,393	$\boxed{3{,}003}$	0	0	-0,12	-0,23	-0,02	0,05	1	0	0	3,13
0	w_2	6,68	2,01	0	0	-0,35	-0,7	-0,05	0,15	0	1	0	3,32
0	w_3	10,77	1,017	0	0	-0,58	-1,17	-0,08	0,25	0	0	1	10,59
Δ_j		-27,6	-5,03	0	0	0,589	7,981	3,155	0,734	0	0	0	

↑

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0,807;\ y_1 = 1,467;\quad \tilde{y}_2 = 0;\qquad y_3 = 0;$$
$$\tilde{v}_1 = 0;\quad \tilde{v}_2 = 0;\quad w_1 = 9,393;\ w_2 = 6,68;\ \ w_3 = 10,77;$$

не задовольняє умові доповнюючої нежорсткості $y_1 \cdot w_1 = 0$. Вводимо нову допоміжну ЦФ $F = -v_1x_1 - v_2x_2 - w_1y_1 - w_2y_2 - w_3y_3 - x_1v_1 - x_2v_2 - y_1w_1 - y_2w_2 - y_3w_3 \to \max$ або

$F = 0x_1 + 0x_2 - 9,393y_1 - 6,68y_2 - 10,77y_3 - 0v_1 - 0,807v_2 - 1,467w_1 + 0w_2 + 0w_2 \to \max$.

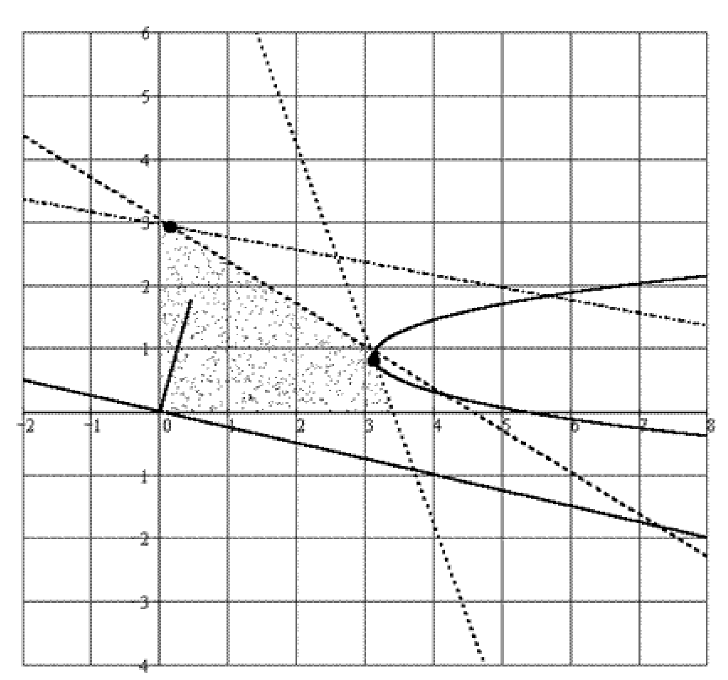
Тепер заповнюємо перший рядок (C_j) і перший стовпець (C_i).

Змінна x_1 увійде до базису, а змінна w_1 вийде. Ясно, що наступна таблиця буде останньою, тому будуємо її у скороченому вигляді.

Б$_4$	b_i
y_1	1,258
x_2	0,817
x_1	3,128
w_2	0,393
w_3	7,587

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0,807;\ y_1 = 1,467;\quad \tilde{y}_2 = 0;\qquad y_3 = 0;$$
$$\tilde{v}_1 = 0;\quad \tilde{v}_2 = 0;\quad w_1 = 9,393;\ w_2 = 6,68;\ \ w_3 = 10,77;$$

f = 20,488



Задача № 3.

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ -x_1 + x_2 - 5 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

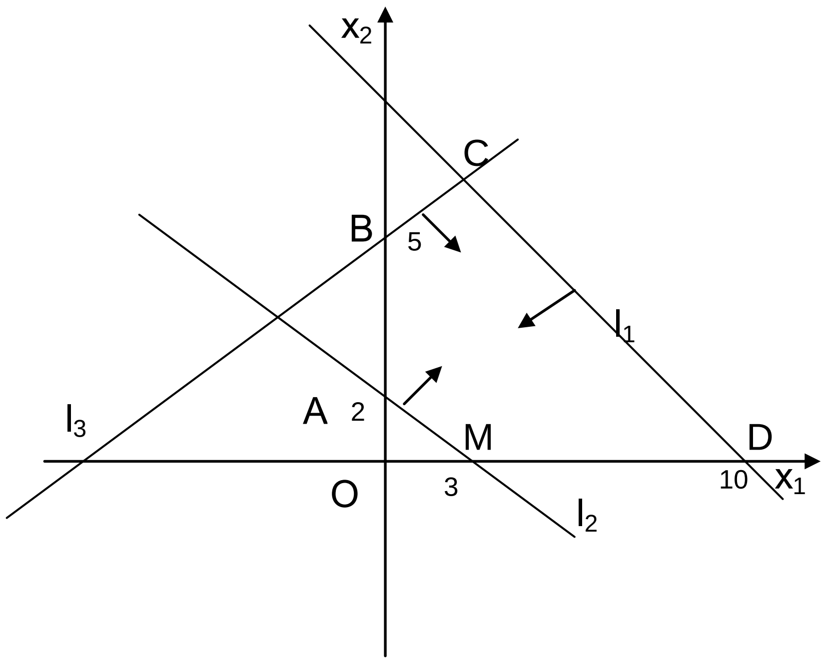
Розв´язання: Побудуємо спочатку многокутник розв´язків. Для цього побудуємо прямі, які обмежують цей многокутник.

*l*₁: $4x_1 + 5x_2 = 40$, *l*₂: $2x_1 + 3x_2 = 6$, *l*₃: $-x_1 + x_2 - 5 = 0$ *або* $-x_1 + x_2 = 5$.

x_1	0	10
x_2	8	0

x_1	0	3
x_2	2	0

x_1	0	-5
x_2	5	0



Тепер перевіримо справедливість кожної нерівності за однією точкою (початок координат). Розглянемо першу нерівність:

$$4x_1 + 5x_2 \le 40.$$

Початок координат (0,0) задовольняє цю нерівність, тому область розв'язку лежить по ту сторону, де знаходиться точка O. Це показано на малюнку стрілкою.

Розглянемо іншу нерівність $2x_1 + 3x_2 \ge 6$. Початок координат не задовольняє цю нерівність, тому область розв'язку лежить по інший бік від даної прямої.

Наступну нерівність $-x_1 + x_2 \le 0$ задовольняють координати точки O(0,0), тому область розв'язку лежить по той бік від прямої, що і початок координат.

Враховуючи, що $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$, отримуємо п'ятикутник ABCDM, який є розв'язком системи нерівностей.

Тепер побудуємо градієнт цільової функції. Це вектор $\vec{C}$ (2;5). Далі будуємо лінію рівня, відповідну z=0. Вона проходить через початок координат і перпендикулярна $\vec{C}$. Переміщуючи її в напрямку вектора $\vec{C}$ (2;5), бачимо, що найбільш віддаленою вершиною п’ятикутника є D.

Визначимо координати вершини D, розв’язавши сумісно систему із рівнянь прямих *l₁* та *l₃*:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 40, \\ -x_1 + x_2 = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 40, \\ -4x_1 + 4x_2 = 20, \end{cases}$$

$9x_2 = 60$, $\qquad x_2 = \frac{60}{9}$, $\qquad x_2 = \frac{20}{3}$.

Із другого рівняння знайдемо x_1: $\quad -x_1 + \frac{20}{3} = 5;\ x_1 = \frac{5}{3}$. Отже, D $\left(\frac{5}{3};\frac{20}{3}\right)$.

Тому $z_{\max} = 2\cdot\frac{5}{3} + 5\cdot\frac{20}{3} = \frac{110}{3} = 36\frac{2}{3}$.

Задача №4. Для виготовлення двох видів виробів А та В використовують три види сировини. На виробництво одиниці виробу А потрібно витрати сировини першого типу b_1, другого – b_2 та третього – b_3 кг. Виробництво забезпечене сировиною першого типу у кількості P_1, другого – P_2, третього – P_3. Скласти план виробництва виробів таким чином, щоб був найвищий прибуток від реалізації виробів.

Розв’язання: Позначимо за x_1 – кількість виробів типу А, які плануються виготовляти; x_2 – кількість виробів типу В.

За умовою задачі $\quad a_1 = 4,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3;\ b_1 = 3,\ b_2 = 4,\ b_3 = 5;$

$P_1 = 440, P_2 = 393, P_3 = 450$.

Прибуток від реалізації виробу А дорівнює $\alpha = 6$ виробу В – $\beta = 5$.

Складемо економіко-математичну модель задачі.

Система обмежень, яка показує забезпечення виробництва сировиною P_1, P_2 і P_3 має такий вид:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 440 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 393 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 450 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Цільова функція визначає максимальний прибуток від реалізації виробів

$$f = 6x_1 + 5x_2 \to \max.$$

Запишемо цю задачу в канонічній формі. Для цього систему нерівностей перетворимо в систему рівнянь, додавши до лівої частини кожної нерівності по невід'ємній змінній x_3, x_4, x_5 відповідно. Дістанемо систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 440 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 393 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_5 = 450 \end{cases}$$

$$f = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max.$$

Початковий опорний план (0,0,440,393,450). Будуємо симплекс-таблицю і перевіримо початковий опорний план на оптимальність.

i	$Б_1$	C_j	6	5	0	0	0	
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
→	P_3	440	$\boxed{\mathbf{4}}$	3	1	0	0	440:4=110
	P_4	393	3	4	0	1	0	393:3=131
	P_5	450	3	5	0	0	1	450:3=150
Z_j-C_j		0	-6	-5	0	0	0	f_1=0
			↑					

Даний опорний план не оптимальний, тому що в останньому рядку є від'ємні числа.

Будуємо другу симплексну таблицю. Вводимо в базис змінну x_1 замість x_3.

C_i	$Б_2$	C_j	6	5	0	0	0	
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
6	P_1	110	1	3/4	1/4	0	0	110:3/4=440/3
0	P_4	63	0	**$\boxed{7/4}$**	-3/4	1	0	63:7/4=252/7
0	P_5	120	0	11/4	-3/4	0	1	120:1/4=480
Z_j-C_j		660	0	-1/2	3/2	0	0	f_2=660

Опорний план (110,0,0,63,120) не оптимальний, його можна змінити.

Вводимо в базис змінну x_2 замість x_4

C_i	$Б_3$	C_j	6	5	0	0	0	
		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
6	P_1	83	1	0	4/7	-3/7	0	
5	P_2	36	0	1	-3/7	4/7	0	
0	P_5	21	0	0	3/7	-4/7	1	
Z_j-C_j		678	0	0	5/7	2/7	0	f_3=678

Опорний план (83,36,0) є оптимальним.

$$f_{\max} = f_3 = 678,\ x_1 = 83,\ x_2 = 36.$$

Відповідь: (83; 36). $f_{\max} = 678$.

Задача № 5.

З трьох пристаней A_1, A_2, A_3 на п’ять будівельних майданчиків B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 перевозять пісок. Запаси піску на кожній пристані, потреби будівельних майданчиків і вартість перевезень (грн./т піску) з кожної пристані на кожний будівельний майданчик подано нижче.

Сплануйте план перевезення піску з пристані на кожний будівельний майданчик, щоб транспортні витрати були мінімальними.

$$a_1 = 180,\ a_2 = 400,\ a_3 = 260;\ b_1 = 240,\ b_2 = 320,\ b_3 = 120,\ b_4 = 100,\ \mathrm{b}_5 = 60;$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 & 30 \\ 9 & 12 & 32 & 16 & 24 \\ 11 & 38 & 10 & 14 & 23 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Сумарна кількість вантажу, який міститься у постачальників,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 260 = 840 \quad .$$

Сумарні потреби $\sum_{j=1}^{5} b_j = 240 + 320 + 120 + 100 + 60 = 840$.

Так як $\sum a_i = \sum b_j$ - транспортна задача збалансована, тобто транспортна задача закритого типу.

Знаходимо початковий опорний план:

Постачальники \ Потреби / Запаси		B_1 240	B_2 320	B_3 120	B_4 100	B_5 60	U_i
A_1	180	22	**15** 180	40	18	30	0
A_2	400	**9** 240	**12** + 100	32	16	**24** - 60	-3
A_3	260	11	**38** 40 -	**10** 120	**14** 100	23 +	23
V_j		12	15	-13	-9	27	11620

Початковий опорний план складаємо, використовуючи спосіб мінімальної вартості. Заповнених кліток *k* повинно бути $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$.

Транспортні витрати відповідно до одержаного плану будуть такі:
$f = 180 \cdot 15 + 240 \cdot 9 + 100 \cdot 12 + 60 \cdot 24 + 40 \cdot 38 + 120 \cdot 10 + 100 \cdot 14 = 11620$.

Перевіримо оптимальність даного плану за допомогою методу потенціалів.

Значення потенціалів знаходимо з умови $U_i+V_j=C_{ij}$ для заповнених кліток. Для незаповнених кліток критерій оптимальності $U_i+V_j \le C_{ij}$.

Із восьми вільних кліток цьому критерію не задовольняють дві клітки: Δ_{31}=12+23-11=24, Δ_{35}=27+23-23=27.

Заповнюємо клітку (*3;5),* розміщуючи там вантаж 40 одиниць.

Потреби / Запаси		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		240	320	120	100	60	
A_1	180	22	**15** 180	40	18	30	0
A_2	400	**9** 240	**12** 140	32	16	**24** 20	-3
A_3	260	11	**38**	**10** 120	**14** 100	**23** 40	-4
V_j		12	15	14	18	27	10540

$$f = 15 \cdot 180 + 9 \cdot 240 + 12 \cdot 140 + 24 \cdot 20 + 10 \cdot 120 + 14 \cdot 100 + 23 \cdot 40 = 10540.$$

Перевіримо критерій оптимальності опорного плану для заповнених і вільних кліток. Опорний план оптимальний.

$f_{\min} = 10540$. Економія $1620 - 10540 = 1080$ (гр.од.)

Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання з основних тем курсу містять тридцять варіантів. Номер варіанта співпадає з сумою трьох останніх цифр номера залікової книжки студента.

Індивідуальні завдання до теми 2

Скласти за умовою задачі математичну модель задачі лінійного програмування, і визначити її форму.

№ 1. Бройлерне господарство птахівничої ферми нараховує 2000 курчат, які вирощуються до восьмитижневого віку і після відповідної обробки поступають у продаж. Хоч тижнева витрата корму для курчат залежить від їх віку, в подальшому будемо вважати, що в середньому (за 8 тижнів) він становить 500г.

Для того, щоб курчата досягли до восьмого тижня необхідних вагових кондицій, кормовий раціон повинен задовольняти певним вимогам за поживністю. Цим вимогам можуть відповідати суміші різних видів кормів, або інгредієнтів. Зазвичай перелік інгредієнтів достатньо широкий (для того, щоб спростити процес побудови моделі, обмежимося лише трьома інгредієнтами: вапном, зерном і соєвими бобами). Вимоги до поживності сформулюємо також у спрощеній формі, враховуючи лише три види поживних речовин: кальцій, білок і клітковину. В таблиці 1 наведені дані, що характеризують вміст (по масі) поживних речовин у кожному з інгредієнтів і питому вартість кожного інгредієнта. Відзначимо, що вапно не містить ні білка, ні клітковини.

Таблиця 1

Інгредієнт	Вміст поживних речовин, грам/грам інгредієнта			Вартість / грам
	Кальцій	Білок	Клітковина	
Вапно	0.38	-	-	0.04
Зерно	0.001	0.09	0.02	0.15
Соєві боби	0.002	0.50	0.08	0.40

Суміш повинна містити:

1) не менше 0,8%, але не більше 1,2% кальцію;
2) не менше 22% білка;
3) не більш 5% клітковини.

Для птахоферми потрібно визначити кількість (у грамах) кожного із трьох інгредієнтів, що утворюють суміш мінімальної вартості, при дотриманні вимог до загальних витрат кормової суміші та її поживності.

№ 2. Виконати замовлення з виготовлення 32 виробів виду $В_1$ та 4 виробів виду $В_2$ взялися бригади $Б_1$ та $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ по виготовленню 32 виробів виду $В_1$ та $В_2$ складає відповідно 4 і 3 вироби за одиницю часу, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 од. Продуктивність бригади $Б_1$ – відповідно 1 і 3, а її фонд робочого часу – 4 од. Витрати, що пов'язані з виготовленням одиниці виробу, для бригади $Б_1$ дорівнює відповідно 9 і 20 тис. гр. од., для бригади $Б_2$ – 15 і 30 тис. гр. од. Потрібно:

1) Скласти математичну модель задачі за показником витрат на виконання замовлення;

2) Знайти оптимальний план розміщення замовлення при додатковій вимозі: фонд робочого часу бригади $Б_2$ повинен бути повністю використаний.

№ 3. Промислова фірма виробляє виріб, що являє собою пристрій із 3-х різних вузлів. Ці вузли виготовляються на 2 заводах. Через відмінності у складі технологічного обладнання продуктивність заводів з випуску кожного із 3-х видів вузлів неоднакова. У таблиці 2 містяться вихідні дані, що характеризують як продуктивність заводів з випуску кожного із вузлів, так і максимальний сумарний ресурс часу, який протягом тижня має кожний із заводів для виробництва цих вузлів.

Таблиця 2

Завод	Максимальний тижневий фонд часу, год.	Продуктивність, вузол / год.		
		Вузол №1	Вузол №2	Вузол №3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Ідеальною є така ситуація, коли виробничі потужності обох заводів використовуються таким чином, що в результаті забезпечується випуск однакової кількості кожного із видів вузлів. Але цього важко досягти через різницю в продуктивності заводів. Більш реальна мета полягає, очевидно, в тому, щоб максимізувати випуск виробів, що, по суті, еквівалентне мінімізації дисбалансу, що виникає внаслідок некомплектності постачання з одного або двох видів вузлів. Можливий об'єм виробництва кожного із трьох видів вузлів залежить від того, який фонд часу виділяє кожний завод для їх виготовлення.

Потрібно визначити щотижневі витрати часу (в годинах) на виробництво кожного із 3-х видів вузлів на кожному заводі, що не перевищують у сумі часові ресурси кожного заводу і забезпечують максимальний випуск виробів

№ 4. Меблева фабрика випускає крісла двох типів. На виготовлення крісла першого типу витрачається 2 м дощок стандартного перерізу, 0,8 кв. м оббивної тканини і витрачається 2 люд.-год., а на виготовлення крісла другого типу відповідно 4 м, 1,25 кв. м і 1,75 люд.-год. Відомо, що ціна одного крісла першого типу 15 гр. од., другого – 20 гр. од. скільки крісел кожного типу потрібно випустити, щоб вартість випущеної продукції була максимальною, якщо фабрика має у наявності 4400 м дощок, 1500 кв. м оббивної тканини і може витратити 3200 люд.-год. робочого часу на виготовлення цієї продукції?

№ 5. Є три технологічних процеси для виділення із руди двох необхідних речовин А та В. Із кожної тонни руди при застосуванні процесів 1, 2 і 3 отримується цих речовин відповідно до таблиці 3:

Таблиця 3

Речовини	Вихід речовини (в кг) із тонни руди при застосуванні процесу		
	1	2	3
A B	0.4 0.6	0.6 0.4	0.2 0.2
Витрати	5000	1600	1000

Визначити оптимальний розподіл 10т руди по процесам 1, 2 і 3, щоб витрати були мінімальними, якщо необхідно отримати не менше 3 кг кожної речовини.

№ 6. Промислова фірма виробляє виріб, що містить три різних вузли. Ці вузли виготовляються на 2 заводах. Через різницю в складі технологічного обладнання продуктивність заводів по випуску кожного із трьох видів вузлів неоднакова. В таблиці 4 містяться вихідні дані, що характеризують як продуктивність заводів по випуску кожного із вузлів, так і максимальний сумарний ресурс часу, який протягом тижня має кожний із заводів для виробництва цих вузлів.

Ідеальною є така ситуація, коли виробничі потужності обох заводів використовуються таким чином, що в результаті забезпечується випуск однакового кількості кожного із видів вузлів.

Таблиця 4

Завод	Максимальний тижневий фонд часу, год.	Продуктивність, вузол/год.		
		Вузол №1	Вузол №2	Вузол №3
1	120	10	6	10
2	100	8	10	6

Але цього важко досягти через різницю в продуктивності заводів. Більш реальна мета полягає, очевидно, в тому, щоб максимізувати випуск виробів, що, по суті, еквівалентно мінімізації кожного із трьох видів вузлів і залежить від того, який фонд часу виділяє кожний завод для їх виготовлення. Потрібно визначити щотижневі витрати часу (в годинах) на виробництво кожного з трьох видів вузлів на кожному заводі, що не перевищують в сумі часові ресурси кожного заводу і забезпечують максимальний випуск виробів.

№ 7. Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання вказані в таблиці 5. В ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 5

Обладнання	Витрати часу			Фонд часу
	A	B	C	
Токарне	8	6	10	150
Фрезерне	9	4	7	120
Зварювальне	4	2	12	80
Шліфувальне	6	12	8	100
Прибуток	10	8	12	

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації била максимальним.

№ 8. Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості потрібно щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна отримати не менш як 60 од. поживної речовини A, не менше 50 од. речовини B і не менше 12 од. речовини C. Вказані поживні речовини містять три види корму. Вміст одиниць поживних речовин у 1кг кожного із цих видів корму наведено в таблиці 6:

Таблиця 6

Речовина	Вид корму		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, який забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових затратах, якщо ціна 1кг корму I-го виду становить 9 коп., корму II-го виду – 12 коп. , і корму III-го виду - 10 коп.

№ 9. На швейній фабриці тканина може бути розкроєнаількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при і-му варіанті розкрою (і=1, n) із 100 кв. м тканини виготовляється bij деталей і-го виду (і=1 , m), а величина відходів при даному варіанті розкрою рівна 1 кв. М. Знаючи, що деталей і-го виду потрібно виготовляти В1 штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано необхідну кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі.

№ 10. В трьох пунктах відправлення є однорідний вантаж в кількостях, які відповідно рівні 420, 380, 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, які відповідно рівні 260, 520 і 420 т. Вартості перевезень 1т вантажу із кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, який забезпечує вивезення наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пунктах призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень.

№ 11. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В і С використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду наведені в таблиці 7. В ній же вказана загальна кількість сировини кожного виду, яке може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Таблиця 7

Вид сировини	норми витрат сировини (т) на одну тонну карамелі			кількість
	A	B	C	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре		0,1	0,1	120
Прибуток	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

№ 12. Продукцією міського молочного заводу є: молоко, кефір і сметана, які розфасовані в пляшки. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливанні 1т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Всього для виробництва сметанно-молочної продукції завод може використати 136000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани - протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1т молока, кефіру і сметани відповідно рівний 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

№ 13. В *m* пунктах можуть бути розміщені підприємства, які виробляють деяку однорідну продукцію. Ця продукція поступає в n пунктів її споживання, причому в *i*-му пункті потреби в продукції, рівні a_i одиницям. Витрати, що пов’язані з доставкою одиниці продукції з *i*-го пункту відправлення в *i*-й пункт споживання, складають c_{ij} грн. Відомо, що в і-му пункті виготовлення продукції максимальний об’єм її виробництва не може перевищувати b_i одиниць, а витрати, пов’язані з виготовленням одиниці продукції, складають d_i грн. Визначити таке розміщення підприємств, при якому забезпечуються потреби в продукції в кожному із пунктів її споживання при найменших загальних витратах, що пов’язані з виробництвом і доставкою продукції.

№ 14. На звірофермі можуть вирощуватися чорно-бурі лисиці і песці. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовуються три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні щодня отримувати лисиці і песці, наведено в таблиці 8. В ній же вказані загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця.

Таблиця 8

Вид корму	Кількість одиниць корму		Загальна кількість
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців потрібно вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальний.

№ 15. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці 9. Визначити, скільки столів і шаф фабриці потрібно виготовляти, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальний.

Таблиця 9

Ресурси Деревина (кв.м)	Стіл	Шафа	Кількість
1-го виду	0,2	0,1	40
2-го виду	0,1	0,3	60
Трудомісткість	1,2	1,5	371,4
Прибуток	6	8	

№ 16. Для виробництва двох видів виробів А і В використовуються токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми витрат часу для кожного із типів обладнання на один виріб даного виду наведені в таблиці 10. В ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного із типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу. Знайти план випуску виробів А і В, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

Таблиця 10

Тип обладнання	Виріб		Загальний фонд Робочого часу
	А	В	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації Одного виробу	14	18	

№17. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 11. В ній же вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством. Враховуючи, що вироби А і В можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації усіх виробів є максимальний.

Таблиця 11

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на один виріб		Кількість сировини
	А	В	
1	16	10	360
2	18	120	300
3	6	8	180
Прибуток	7	12	

№ 18. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів у кількості, відповідно рівній 24, 31 і 18 шт. Кожний лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість отримуваних заготовок при даному способі розкрою наведено в таблиці 12. Тут же вказана величина відходів, які отримуються при даному способі розкрою одного листа фанери.

Таблиця 12

Вид заготовки	Кількість заготовок	
	І спосіб	ІІ спосіб
1-й вид	2	6
2-й вид	5	4
3-й вид	2	3
Величина відходів	12	16

Визначити, скільки листів фанери і яким способом потрібно розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

№ 19. Деякій бригаді виділено для вирощення кормових культур 100 га пашні. Цю пашню передбачається зайняти кукурудзою і буряком, причому буряком вирішено зайняти не менше 40 га. Як повинна бути розподілена площа пашні за культурами, щоб вийшло найбільше число кормових одиниць? При цьому потрібно врахувати наступне: 1 ц кукурудзяного силосу містить 0,2 ц корм. од., 1 ц буряка – 0,26 ц корм. од.; на обробку 1 га кукурудзяного поля необхідно витратити 38 люд.-год. праці механізаторів і 15 люд.-год. ручної праці, а на 1 га поля, зайнятого буряком, - відповідно 43 і 185 люд.-год.; очікуваний урожай кукурудзи – 500 ц з 1 га, буряка – 200 ц/га; всього на вирощення кормових культур можна затратити 4000 люд.-год. праці механізаторів і 15000 люд.-год. ручної праці.

№ 20. Для виготовлення різних виробів А, В і С підприємство використовує три різні види сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А, В і С, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в таблиці 13. Вироби А, В і С можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду. Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

Таблиця 13

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на один виріб			Кількість
	A	B	C	
1	0,8	0,5	0,6	86
2	0,4	0,5	0,3	60
3	0,7	0,8	0,1	90
Прибуток	18	12	16	

№ 21. На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрат тканин усіх артикулів на пошив одного виробу наведені в таблиці 14. В ній же вказані наявні в розпорядженні фабрики загальна кількість тканини кожного артикула і ціна одного виробу даного виду. Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виготовити фабрика, щоб вартість виготовлено продукції була максимальною.

Таблиця 14

Артикул	Норми витрат тканини (м) на один виріб				Загальна кількість тканини (м)
	А	В	С	Д	
1-й	1		2	1	180
2-й		1	3	2	210
3-й	4	2		4	800
Ціна одного виробу	9	6	4	7	

№ 22. Підприємство випускає чотири види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного із типів обладнання наведені в таблиці 15. В ній же вказані загальний фонд робочого часу кожного із типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Визначити такий об'єм випуску кожного із виробів, при якому загальний прибуток від їх реалізації є максимальний.

Таблиця 15

Тип обладнання	Витрати часу на одиницю продукції				Фонд робочого часу
	I	II	I	IY	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1		2	1	70
Шліфувальне	1	2	1		340
Прибуток	8	3	2	1	

№ 23. Для перевезення вантажу на трьох лініях можуть бути використані судна трьох типів. Продуктивність суден при використанні їх на різних лініях характеризується даними, наведеними в таблиці 16. В ній же указані загальний час, протягом якого судна кожного типу знаходяться в експлуатації, і мінімально необхідні об'єми перевезень на кожній лінії. Визначити, які судна, на якій лінії і протягом якого часу потрібно використати, щоб забезпечити максимальне завантаження суден з урахуванням можливого часу їх експлуатації.

Таблиця 16

Тип судна	Продуктивність суден			Загальний час експлуатації
	I	II	III	
1-й	8	14	11	300
2-й	6	15	13	300
3-й	12	12	4	300
Обсяг перевезень	3000	5400	3300	

№ 24. Із трьох видів сировини необхідно скласти суміш, в склад якої повинні входити не менше 26 одиниць хімічної речовини А, 30 одиниць речовини В та 24 одиниць речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1кг сировини кожного виду, наведено в таблиці 17. В ній же наведена ціна 1 кг сировини кожного виду.

Таблиця 17

Речовина	Кількість одиниць речовини в 1 кг сировини			
	I	II	III	IY
A	1	1		4
B	2		3	5
C	1	2	4	6
Ціна 1 кг сировини	5	6	7	4

Скласти суміш, яка містить не менше потрібної кількості речовин даного виду і яка має мінімальну вартість.

№ 25. Стальні прути довжиною 110 см необхідно розрізати на заготовки довжиною 45, 35 і 50 см. Потрібна кількість заготовок даного виду становить відповідно 40, 30 і 20 штук. Можливі варіанти розрізу і величина відходів при кожному із них наведені в наступній таблиці 18. Визначити, скільки прутів по кожному із можливих варіантів потрібно розрізати, щоб отримати не менше необхідної кількості заготовок кожного виду при мінімальних відходах.

Таблиця 18

Довжина заготовки	Варіанти розподілу					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1			
35		1		3	1	
50			1		1	2
Величина відходів	20	30	15	5	25	10

№ 26. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 19. В ній же вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством.

Враховуючи, що вироби А та В можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації усіх виробів є максимальний.

Таблиця 19

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на один виріб		Кількість сировини
	A	B	
I	16	10	360
II	18	9	200
III	16	8	180
Прибуток	7	12	

№ 27. Є три технологічних процеси для виділення із руди двох необхідних речовин А та В. Із кожної тонни руди при застосуванні процесів 1, 2 і 3 отримується відповідно (таблиця 20):

Таблиця 20

Речовини	Вихід речовини (в кг) із тонни руди при застосуванні процесу		
	1	2	3
A B	0.6 0.5	0.4 0.8	0.7 0.1
Витрати	400	200	100

Визначити оптимальний розподіл 10т руди за процесами 1, 2 і 3, щоб витрати були мінімальними, якщо необхідно отримати не менше 5 кг кожної речовини.

№ 28. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів у кількості, відповідно рівній 29, 32 і 18 штук. Кожний лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість отримуваних заготовок при даному способі розкрою наведено в таблиці 21. В ній же вказана величина відходів, які отримуються при даному способі розкрою одного листа фанери.

Таблиця 21

Вид заготовки	Кількість заготовок за видами	
	I	II
1-й	2	
2-й	5	4
3-й	2	3
Величина відходів	12	18

Визначити скільки листів фанери і яким способом потрібно розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

№ 29. Для виготовлення трьох видів виробів A, B та C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання указані в таблиці 22. В ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний.

Таблиця 22

Обладнання	Витрати часу			Фонд часу
	A	B	C	
Токарне	8	5	10	150
Фрезерне		4	7	120
Зварювальне	4	7	12	180
Шліфувальне	6	12		120
Прибуток	10	18	12	

№ 30. У трьох пунктах відправлення зібрано однорідний вантаж в кількості, відповідно рівній 290, 600 і 420 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількості, відповідно рівній 250, 500 і 450 т. Вартості перевезень 1т вантажу із кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Знайти план перевезень, що забезпечує вивезення наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пункти призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень. Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальний при умові, що виробів B потрібно випустити не менше, ніж виробів A.

Індивідуальні завдання до теми 3

Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції.

№ 1.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,03x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,1x_2 + 0,02x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 8 \end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,2x_1 + 0,3x_3 + 0,08x_4 + 8 \\ x_3 &= 0,09x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 7 \end{aligned}$$

№ 3.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,25x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,3x_1 + 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,03x_1 + 0,02x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,2x_1 + 0,08x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,15x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,05x_1 + 0,07x_2 + 4 \end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,02x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,09x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,05x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,25x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,07x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ .8.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,08x_1 + 0,3x_2 + 1 \end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,25x_3 + 0,05x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,09x_1 + 0,1x_2 \end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 9 \end{aligned}$$

№ 11.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,1x_1 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 7 \end{aligned}$$

№ 12.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 8 \end{aligned}$$

№ 13.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$$

№ 14.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$$

№ 15.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 4 \end{aligned}$$

№.16.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$$

№ 17.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ 18.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 1 \end{aligned}$$

№ 19.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 \end{aligned}$$

№ 20.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_2 + 9 \end{aligned}$$

№ 21.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 8 \end{aligned}$$

№ 22.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 5 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 7 \end{aligned}$$

№ 23.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$$

№ 24.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,1x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$$

№ 25.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,03x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,05x_1 + 0,1x_2 + 4 \end{aligned}$$

№ 26.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,08x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$$

№ 27.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,06x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,07x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ 28.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,02x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,08x_1 + 0,1x_2 + 1 \end{aligned}$$

№ 29.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,09x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ 30.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,4x_3 + 0,3x_4 + 2 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_2 + 9 \end{aligned}$$

Індивідуальні завдання до теми 5

Знайти область допустимих розв'язків (ОДР) систем нерівностей і координати однієї з її вершин.

№ 1. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -15, \\ 4x_1 - x_2 \ge 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 30, \\ x_1 - 2x_2 \le 20. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 21, \\ x_1 - 2x_2 \le 10, \\ \le 0x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 1. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 0, \\ -x_1 + 5x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 10. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 7x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 5. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le -1, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 - 2x_1 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -1, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - 2x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 1. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -3, \\ 2x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1 - x_2 - 1 \le 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3 \le 0. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Індивідуальні завдання до теми 6

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

№ 1.
$$\begin{aligned}&F=-3x_1+6x_2\to\min;\\&5x_1-2x_2\le 4,\\&x_1-2x_2\ge -4,\\&x_1+x_2\ge 4,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned}&F=3x_1+3x_2\to\max;\\&x_1+x_2\le 8,\\&3x_1+7x_2\ge 21,\\&x_1-2x_2\le 10,\\&0\le x_1\le 5,\\&0\le x_2\le 1.\end{aligned}$$

№ .3.
$$\begin{aligned}&F=x_1+x_2\to\max;\\&-5x_1+x_2\le 0,\\&-x_1+5x_2\ge 0,\\&x_1+x_2\le 6,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned}&F=x_1+x_2\to\max;\\&5x_1-2x_2\le 7,\\&-x_1+x_2\le 5,\\&x_1+x_2\le 6,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned}&F=2x_1-4x_2\to\max;\\&8x_1-5x_2\le 16,\\&x_1+3x_2\ge 2,\\&2x_1+7x_2\le 9,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned}&F=2x_1+2x_2\to\max;\\&3x_1-2x_2\ge -6,\\&x_1+x_2\ge 3,\\&0\le x_1\le 3,\\&0\le x_2\le 5.\end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned}&F=2x_1-x_2\to\max;\\&x_1-x_2\ge -3,\\&6x_1+7x_2\le 42,\\&2x_1-3x_2\le 6,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 8.
$$\begin{aligned}&F=7x_1+6x_2\to\max;\\&2x_1+5x_2\ge 10,\\&5x_1+2x_2\ge 10,\\&x_1\le 6,\\&x_2\le 5,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned}&F=3x_1+3x_2\to\max;\\&x_1+x_2\le 4,\\&3x_1+x_2\ge 4,\\&x_1+5x_2\ge 4,\\&0\le x_1\le 3,\\&0\le x_2\ge 3.\end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned}&F=2x_1-x_2\to\max;\\&x_1-x_2\ge -3,\\&6x_1+7x_2\le 42,\\&2x_1-3x_2\le 6,\\&x_1+x_2\ge 4,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 11.
$$F = 5x_1 + x_2 \to \min;$$
$$x_1 + 7x_2 \ge 7,$$
$$-2x_1 + x_2 \le 6,$$
$$2x_1 + 5x_2 \ge 10,$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 10,$$
$$7x_1 + x_2 \ge 7,$$
$$x_1 \le 6, x_2 \le 7,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 12.
$$F = x_1 - x_2 \to \max;$$
$$-x_1 + x_2 \ge 8,$$
$$8x_1 + 5x_2 \le 80,$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2,$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 13.
$$F = 7x_1 + x_2 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 \le 14,$$
$$3x_1 - 5x_2 \le 15,$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 21,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 14.
$$F = x_1 - x_2 \to \max;$$
$$3x_1 + x_2 \ge 8,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6,$$
$$x_1 - x_2 \le 3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 15.
$$F = 7x_1 - x_2 \to \min;$$
$$x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$5x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$x_1 + 5x_2 \ge 5,$$
$$0 \le x_1 \le 4,$$
$$0 \le x_2 \le 4.$$

№ 16.
$$F = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6,$$
$$2x_1 - 3x_2 \ge -6,$$
$$x_1 - x_2 \le 4,$$
$$4x_1 + 7x_2 \le 28,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 17.
$$F = x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$-x_1 + x_2 \le 3,$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 20,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 18.
$$F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$$
$$8x_1 - 5x_2 \le 16,$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 2,$$
$$x_1 + 7x_2 \le 9,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 19.
$$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + x_2 \le 14,$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 9,$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 27,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 20.
$$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 - 2x_2 \ge -4,$$
$$x_1 + x_2 \ge 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 21.
$$F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 3,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$-3x_1 + x_2 \le 3,$$
$$2x_1 + x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 22.
$$F = 2x_1 - x_2 \to \max;$$
$$x_1 - 2x_2 \ge 4,$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 10,$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 12,$$
$$7x_1 + 4x_2 \le 28,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 23.
$$\begin{aligned}&F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;\\&3x_1 - 2x_2 \ge -6,\\&x_1 + x_2 \ge 3,\\&x_1 \le 3,\\&x_2 \le 5,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 24.
$$\begin{aligned}&F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;\\&x_1 - 4x_2 \le 4,\\&3x_1 + 2x_2 \le 6,\\&-x_1 + x_2 \le 1,\\&x_1 + 2x_2 \ge 2,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 25.
$$\begin{aligned}&F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;\\&3x_1 - 2x_2 \ge -6,\\&x_1 + x_2 \ge 3,\\&0 \le x_1 \le 3,\\&0 \le x_2 \le 5.\end{aligned}$$

№ 26.
$$\begin{aligned}&F = x_1 + 2x_2 \to \max;\\&5x_1 - 2x_2 \le 4,\\&x_1 - 2x_2 \ge -4,\\&x_1 + x_2 \ge 4,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 27.
$$\begin{aligned}&F = -2x_1 + x_2 \to \min;\\&2x_1 + x_2 \le 8,\\&x_1 + 3x_2 \ge 6,\\&3x_1 + x_2 \ge 3,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 28.
$$\begin{aligned}&F = x_1 + x_2 \to \min;\\&2x_1 + x_2 \ge 8,\\&x_1 + 2x_2 \ge 6,\\&x_1 - x_2 \le 3,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 29.
$$\begin{aligned}&F = -3x_1 + 2x_2 \to \min;\\&x_1 + 2x_2 \ge 10,\\&3x_1 + x_2 \ge 15,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 30.
$$\begin{aligned}&F = 3x_1 - 2x_2 \to \max;\\&2x_1 + x_2 \le 11,\\&-3x_1 + 2x_2 \le 10,\\&3x_1 + 4x_2 \ge 20,\\&x_1 \ge 0,\\&x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

Індивідуальні завдання до тем 7 - 8

Розв’язати ЗЛП за допомогою симплекс-методу.

№ 1.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;\\&x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4,\\&5x_1 + x_3 \ge -12,\\&-2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4,\\&x_1 + x_2 \ge 4,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned}&L = 3x_1 + 2x_2 \to \max;\\&4x_1 + 2x_2 \ge 12,\\&x_1 + 2x_2 \le 10,\\&2x_1 + 2x_2 = 6,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 3.
$$L = 2x_1 + 6x_2 \to \max;$$
$$8x_1 - 5x_2 \le 40,$$
$$2x_2 + 5x_3 \ge 10,$$
$$-6x_1 + 5x_2 \le 60,$$
$$2x_1 + x_2 \le 14,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 4.
$$L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 10,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

№ 5.
$$L = (-2x_3 + 2x_4 + x_5) \to \max;$$
$$x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4,$$
$$x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

№ 6.
$$L = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4) \to \max;$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3,$$
$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

№ 7.
$$L = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 \to \min;$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \le 30,$$
$$3x_1 \le 10,$$
$$x_2 + 4x_3 \le 20,$$
$$2x_4 + x_5 \le 15,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

№ 8.
$$L = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 30,$$
$$2x_1 + x_2 \le 20,$$
$$x_3 \le 10,$$
$$x_4 \le 10,$$
$$x_3 + x_4 \le 15,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

№ 9.
$$L = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 +$$
$$6x_5 + 12x_6) \to \max;$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 \le 24,$$
$$x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 18,$$
$$x_5 + 2x_6 \le 10,$$
$$3x_5 + x_6 \le 12,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.$$

№ 10.
$$L = (2x_1 - x_2 + 3x_4) \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \le 2,$$
$$2x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$-x_3 + 2x_4 \le 2,$$
$$-2x_3 + x_4 \le 1,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

№ 11.
$$L = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min;$$
$$2x_1 + 4x_2 \ge 10,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

№ 12.
$$L = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min;$$
$$2x_1 + 4x_2 \ge 10,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 10,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

№ 13.
$$L = (3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + x_5 \to \max;$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 28,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16,$$
$$x_4 + 2x_5 \le 12,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

№ 14.
$$L = 2x_1 + x_2 \to \max;$$
$$7x_1 + 4x_2 \le 28,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 14,$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 10,$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 12,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 15.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;\\&x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4,\\&5x_1 - x_3 \le 12,\\&2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 16.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + 2x_2 \to \max;\\&2x_1 + 3x_2 \le 8,\\&2x_1 + x_2 \le 6,\\&x_1 + x_2 \ge 1,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 17.
$$\begin{aligned}&L = 8x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;\\&5x_1 - x_2 + x_3 \le 2,\\&x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 18.
$$\begin{aligned}&L = 6x_1 + 4x_2 \to \min;\\&2x_1 + x_2 \ge 3,\\&x_1 - 2x_2 \le 2,\\&3x_1 + 2x_2 \ge 1.\end{aligned}$$

№ 19.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + x_2 \to \max;\\&5x_1 - 2x_2 \le 7,\\&-x_1 + x_2 \le 5,\\&x_1 + x_2 \le 6,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 20.
$$\begin{aligned}&L = 3x_1 + x_2 \to \max;\\&x_1 + 2x_2 \ge 5,\\&2x_1 + 4x_2 \le 16,\\&3x_1 + x_2 \ge 6,\\&x_1 + 3x_2 \le 9,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 21.
$$\begin{aligned}&L = 7x_1 - 2x_2 \to \max;\\&x_1 + x_2 \le 5,\\&2x_1 - 3x_2 \le 6,\\&3x_1 + x_2 \ge 2,\\&x_1 - x_2 \ge -3,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 22.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + 2x_2 \to \max;\\&2x_1 + 5x_2 \le 20,\\&3x_1 + x_2 \le 7,\\&4x_1 - 3x_2 \le 5,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 23.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 - x_2 \to \max;\\&2x_1 + x_2 \le 8,\\&x_1 + 3x_2 \ge 6,\\&3x_1 + x_2 \ge 3,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 24.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + x_2 \to \max;\\&2x_1 + 11x_2 \le 38,\\&x_1 + x_2 \le 7,\\&4x_1 - 5x_2 \le 5,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 25.
$$\begin{aligned}&L = 5x_1 - 3x_2 \to \min;\\&3x_1 + 2x_2 \ge 6,\\&2x_1 - 3x_2 \ge -6,\\&x_1 - x_2 \le 4,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 26.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min;\\&x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 40,\\&x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 80,\\&3x_2 + 3x_3 - 1{,}5x_4 \ge 36,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

№27.
$$\begin{aligned}
&L = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \max;\\
&4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35,\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30,\\
&3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 28.
$$\begin{aligned}
&L = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2,\\
&3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 6,\\
&3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 10,\\
&x_1 - x_2 \le 2,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 29.
$$\begin{aligned}
&L = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;\\
&5x_1 + 3x_2 \le 3,\\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4,\\
&2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 30.
$$\begin{aligned}
&L = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;\\
&x_1 + x_2 + x_3 \le 6,\\
&2x_1 + x_2 + x_3 \ge 9,\\
&3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Індивідуальні завдання до теми 10

Скласти двоїсту задачу; розв'язати одну із задач симплексним методом і знайти оптимальний план іншої задачі; показати взаємозв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач.

№ 1.
$$\begin{aligned}
&L = (x_1 + 2x_2) \to \max;\\
&2x_1 + 3x_2 \le 8,\\
&2x_1 + x_2 \le 6,\\
&x_1 + x_2 \ge 1,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned}
&L = (-2x_1 + 3x_2) \to \min;\\
&2x_1 + x_2 \le 8,\\
&x_1 + 3x_2 \ge 6,\\
&3x_1 + x_2 \ge 3,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 3.
$$\begin{aligned}
&L = (6x_1 + 4x_2) \to \min;\\
&2x_1 + x_2 \ge 3,\\
&x_1 - x_2 \le 1,\\
&-x_1 + 2x_2 \ge 1,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned}
&L = (4x_1 + 3x_2) \to \max;\\
&5x_1 + 2x_2 \ge 20,\\
&x_1 + 3x_2 \le 15,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned}
&L = (x_1 + 3x_2) \to \max;\\
&x_1 + x_2 \ge 3,\\
&6x_1 + x_2 \le 42,\\
&2x_1 - 3x_2 \ge 6,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned}
&L = (x_1 - 2x_2) \to \max;\\
&5x_1 - 2x_2 \le 3,\\
&x_1 + x_2 \ge 1,\\
&-3x_1 + x_2 \le 3,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned}
&L=(8x_1+2x_2)\to\max;\\
&x_1+4x_2\le 4,\\
&-4x_1+x_2\le 4,\\
&x_1+x_2\le 6,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 8.
$$\begin{aligned}
&L=(2x_1-3x_2)\to\min;\\
&5x_1+2x_2 10,\\
&x_1+3x_2\le 12,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned}
&L=(5x_1+4x_2)\to\max;\\
&2x_1+3x_2\le 3,\\
&x_1+3x_2\le 4,\\
&-x_1+x_2\le 5,\\
&5x_1+4x_2\le 6,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned}
&L=(2x_1+3x_2)\to\max;\\
&x_1+5x_2\ge 16,\\
&3x_1+2x_2\ge 12,\\
&2x_1+4x_2\ge 16,\\
&x_1\ge 1,\\
&x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 11.
$$\begin{aligned}
&L=(5x_1+4x_2)\to\max;\\
&2x_1+3x_2\le 3,\\
&x_1+3x_2\le 4,\\
&-x_1+x_2\le 5,\\
&5x_1+4x_2\le 6,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 12.
$$\begin{aligned}
&L=(-2x_1-x_2)\to\max;\\
&-x_1+2x_2\le 14,\\
&5x_1+2x_2\ge 10,\\
&4x_1-3x_2\le 12,\\
&7x_1+4x_2\le 28,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 13.
$$\begin{aligned}
&L=(7x_1-2x_2)\to\max;\\
&x_1+x_2\le 5,\\
&2x_1-3x_2\le 6,\\
&3x_1+x_2\ge 2,\\
&x_1-x_2\ge -3,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 14.
$$\begin{aligned}
&L=(5x_1+4x_2+6x_3)\to\max;\\
&x_1+x_2+x_3\le 6,\\
&2x_1+x_2+x_3\ge 9,\\
&3x_1+x_2+2x_3\ge 11,\\
&x_1,x_2,x_3\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 15.
$$\begin{aligned}
&L=(-7x_1+2x_2)\to\min;\\
&x_1+x_2\ge 1,\\
&5x_1+x_2\ge 3,\\
&-3x_1+x_2\le 3,\\
&2x_1+x_2\le 4,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 16.
$$\begin{aligned}
&L=(2x_1+x_2-3x_3)\to\max;\\
&x_1+3x_2-2x_3\le 4,\\
&-5x_1+x_3\ge -12,\\
&2x_1+x_2-3x_3\ge -4,\\
&2x_1+x_2\le 4,\\
&x_1,x_2,x_3\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 17.
$$\begin{aligned}
&L=(2x_1-x_2)\to\max;\\
&3x_1+x_2\ge 16,\\
&x_1+2x_2\le 12,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 18.
$$\begin{aligned}
&L=(6x_1+4x_2)\to\min;\\
&x_1+x_2\ge 3,\\
&x_1-2x_2\le 2,\\
&3x_1+2x_2\ge 1,\\
&x_1,x_2\ge 0.
\end{aligned}$$

№ 19. $$\begin{aligned}&L=(-x_1-2x_2)\to\min;\\&5x_1-2x_2\le 4,\\&-x_1+2x_2\le 4,\\&x_1+x_2\ge 4,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 20. $$\begin{aligned}&L=(x_1+2x_2)\to\min;\\&5x_1-2x_2\le 20,\\&x_1-2x_2\ge -20,\\&x_1+x_2\ge 16,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 21. $$\begin{aligned}&L=(x_1+x_2)\to\max;\\&2x_1+x_2\le 18,\\&x_1+2x_2\le 16,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 22. $$\begin{aligned}&L=(x_1+x_2)\to\max;\\&2x_1+x_2\le 8,\\&x_1+2x_2\ge 4,\\&x_1+4x_2\le 10,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 23. $$\begin{aligned}&L=(x_1+2x_2)\to\max;\\&2x_1+x_2\le 18,\\&x_1+2x_2\ge 14,\\&x_1-2x_2\le -10,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 24. $$\begin{aligned}&L=(x_1+x_2)\to\min;\\&2x_1+x_2\ge 8,\\&x_1+3x_2\ge 6,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 25. $$\begin{aligned}&L=(3x_1+2x_2)\to\max;\\&3x_1+x_2\le 21,\\&2x_1+3x_2\le 30,\\&2x_1\le 16,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 26. $$\begin{aligned}&L=(7x_1+x_2)\to\min;\\&x_1+x_2\ge 3,\\&5x_1+x_2\ge 5,\\&x_1+5x_2\ge 5,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 27. $$\begin{aligned}&L=(x_1+2x_2)\to\max;\\&6x_1+2x_2\ge 6,\\&3x_1-2x_2\le 6,\\&3x_1-x_2\ge -3,\\&2x_1+2x_2\le 10,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 28. $$\begin{aligned}&L=(15x_1+33x_2)\to\min;\\&3x_1+2x_2\ge 6,\\&6x_1+x_2\ge 6,\\&x_2\ge 1,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 29. $$\begin{aligned}&L=(2x_1-x_2)\to\min;\\&5x_1+9x_2\le 45,\\&6x_1+3x_2\le 18,\\&-x_1+2x_2\ge 2,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 30. $$\begin{aligned}&L=(x_1-3x_2)\to\min;\\&-x_1+3x_2-x_3+2x_4\le 6,\\&2x_1+x_2+2x_3-3x_4\ge 4,\\&1\le x_1\le 3,\\&x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{aligned}$$

Індивідуальні завдання до теми 12

Знайти опорний та оптимальний плани задачі транспортного типу. Для задач використати нижченаведені дані:

Постачальник Споживач	B_1 = 55+3M	B_2 = 115-M	B_3 = 10+2M	B_4 = 200-4M
A_1 =68+M	8-К	7	5+К	9
A_2 =25+2M	1	2	4	3
A_3 =99-3M	2	1+К/2	7	7-К

№ 1. К=2; М=15.

№ 2. К=4; М=17.

№ 3. К=6; М=19.

№ 4. К=2; М=21.

№ 5. К=4; М=18.

№ 6. К=6; М=20.

№ 7. К=2; М=10.

№ 8. К=4; М=15.

№ 9. К=3; М=10.

№ 10. К=4; М=35.

№ 11. К=1; М=11.

№ 12. К=6; М=16.

№ 13. К=4; М=32.

№ 14. К=5; М=31.

№ 15. К=6; М=23.

№ 16. К=2; М=11.

№ 17. К=4; М=18.

№ 18. К=6; М=6.

№ 19. К=6; М=5.

№ 20. К=2; М=33.

№ 21. К=2; М=12.

№ 22. К=6; М=30.

№ 23. К=5; М=20.

№ 24. К=3; М=15.

№ 25. К=4; М=14.

№ 26. К=7; М=13.

№ 27. К=2; М=9.

№ 28. К=4; М=13.

№ 29. К=5; М=14.

№ 30. К=6; М=22.

Індивідуальні завдання до теми 16

Розв'язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в таблиці. Прочерк (нуль) означає, що даний робітник не може працювати на даному верстаті. Знайти оптимальний розв'язок.

№ 1.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	10	10	30
Б	5	56	21	10
В	7	34	18	34
Г	23	24	11	56

№ 2.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	1	3	10
Б	5	4	7	5
В	6	38	8	8
Г	27	5	2	6

№ 3.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	5	7	9
Б	8	9	7	3
В	6	5	8	5
Г	5	3	6	8

№ 4.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	1	10	1	30
Б	5	56	2	13
В	7	34	18	34
Г	32	42	12	1

№ 5.

	Верстати

Виконавці	1	2	3	4
А	2	10	51	3
Б	53	45	23	1
В	4	34	48	3
Г	5	24	2	5

№ 6.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	10	20	40
Б	55	66	45	10
В	27	43	38	24
Г	77	78	22	37

№ 7.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	10	3	10
Б	8	4	7	1
В	7	3	9	3
Г	3	4	10	6

№ 8.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	5	7	46
Б	2	35	6	3
В	5	3	34	7
Г	3	3	56	54

№ 9.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	5	7	8	4
Б	9	5	6	7
В	5	6	8	8
Г	4	5	7	5

№ 10.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	4	3	5
Б	4	5	7	5
В	5	4	8	4
Г	6	5	9	6

№ 11.

	Верстати

Виконавці	1	2	3	4
А	2	4	2	1
Б	3	5	6	4
В	7	8	8	3
Г	5	6	3	8

№ 12.

	Верстати			
Виконавці	1	2	3	4
А	23	45	57	34
Б	45	65	66	85
В	65	35	44	67
Г	35	44	34	45

№ 13.

	Верстати			
Виконавці	1	2	3	4
А	12	45	77	5
Б	6	46	4	6
В	10	80	76	74
Г	45	8	6	5

№ 14.

	Верстати			
Виконавці	1	2	3	4
А	2	2	2	42
Б	35	5	3	5
В	45	6	5	18
Г	6	3	4	24

№ 15.

	Верстати			
Виконавці	1	2	3	4
А	2	30	45	25
Б	35	46	6	10
В	67	5	4	5
Г	4	43	45	76

№ 16.

	Верстати			
Виконавці	1	2	3	4
А	21	35	54	34
Б	44	67	77	56
В	21	87	99	63
Г	11	56	78	54

№ 17.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	23	4	7	65
Б	4	5	56	10
В	5	67	8	7
Г	44	34	9	8

№ 18.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	32	37	80
Б	23	2	21	42
В	43	30	23	23
Г	25	23	78	14

№ 19.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	5	6	7
Б	4	6	7	10
В	6	7	8	4
Г	7	4	6	4

№ 20.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	56	67	88
Б	56	34	45	67
В	45	53	63	78
Г	34	45	45	56

№ 21.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	10	20	35
Б	5	505	21	5
В	17	25	18	32
Г	21	34	11	56

№ 22.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	4	2	3	10
Б	6	4	17	5
В	15	38	3	4
Г	21	15	2	6

№ 23.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	5	7	9
Б	25	18	7	23
В	6	5	8	25
Г	5	13	6	18

№ 24.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	4	10	11	22
Б	25	56	22	13
В	16	24	8	34
Г	32	42	15	10

№ 25.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	10	5	1
Б	3	24	23	3
В	4	14	48	4
Г	5	4	2	25

№ 26.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	10	30	40
Б	5	7	5	1
В	2	3	3	24
Г	7	7	2	36

№ 27.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	22	12	3	10
Б	38	4	17	20
В	17	3	19	3
Г	52	35	28	6

№ 28.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	13	2	27	9
Б	22	4	16	3
В	15	3	34	7
Г	23	5	56	14

№ 29.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	15	27	13	4
Б	26	14	26	17
В	35	36	37	28
Г	14	25	7	25

№ 30.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	22	2	1	35
Б	14	8	7	5
В	25	12	38	4
Г	6	15	19	5

Індивідуальні завдання до теми 17

Розв’язати задачі у цілих числах або довести, що вони не мають розв’язку: а) методом Гоморі; б) методом „віток і меж”.

1. $F = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$2x_1 + x_2 \le 11,$
$-3x_1 + 2x_2 \le 10,$
$3x_1 + 4x_2 \ge 20,$
$x_1 \ge 0,$
$x_2 \ge 0.$

2. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$3x_1 - 2x_2 \ge -6,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$0 \le x_1 \le 3,$
$0 \le x_2 \le 5.$

5. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$5x_1 - 2x_2 \le 4,$
$x_1 - 2x_2 \ge -4,$
$4x_1 - 3x_2 \le 12,$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

6. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 - x_2 \ge -3,$
$6x_1 + 7x_2 \le 42,$
$2x_1 - 3x_2 \le 6,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

7. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$
$8x_1 - 5x_2 \le 16,$
$x_1 + 3x_2 \ge 2,$
$2x_1 + 7x_2 \le 9,$
$x_1, x_2 \le 0.$

8. $F = -2x_1 + x_2 \to \max;$
$2x_1 + x_2 \le 8,$
$x_1 + x_2 \le 6,$
$-3x_1 + 2x_2 \ge 3,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

9. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$
$8x_1 - 5x_2 \le 16,$
$x_1 + 3x_2 \le 2,$
$2x_1 + 7x_2 \ge 9,$
$x_1, x_2 \le 0.$

10. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$5x_1 - 2x_2 \le 4,$
$x_1 - 2x_2 \ge -4,$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$x_1, x_2 \le 0.$

11. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$x_1 - 4x_2 \le 4,$
$3x_1 + 2x_2 \le 6,$
$-x_1 + x_2 \le 1,$
$x_1 + 2x_2 \ge 2,$
$x_1, x_2 \le 0.$

12. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$
$5x_1 - 2x_2 \le 3,$
$x_1 + x_2 \ge 1,$
$-3x_1 + x_2 \le 3,$
$2x_1 + x_2 \le 4,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

13. $F = -2x_1 + x_2 \to \min;$
$2x_1 + x_2 \le 8,$
$x_1 + 3x_2 \ge 6,$
$3x_1 + x_2 \ge 3,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

14. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$2x_1 + x_2 \le 14,$
$-3x_1 + 2x_2 \le 9,$
$3x_1 + 4x_2 \le 27,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

15. $F = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$-x_1 + x_2 \le 3,$
$4x_1 + 3x_2 \le 20,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

16. $F = -3x_1 + 2x_2 \to \min;$
$x_1 + 2x_2 \ge 10,$
$3x_1 + x_2 \ge 15,$
$x_1, x_2 \le 0.$

17. $F = 5x_1 + x_2 \to \min;$
$x_1 + 7x_2 \ge 7,$
$-2x_1 + x_2 \le 6,$
$2x_1 + 5x_2 \ge 10,$
$5x_1 + 2x_2 \ge 10,$
$7x_1 + x_2 \ge 7,$
$x_1 \le 6, x_2 \le 7$
$x_1, x_2 \ge 0.$

18. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$3x_1 - 2x_2 \ge -6,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$x_1 \le 3,$
$x_2 \le 5,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

19. $F = x_1 - x_2 \to \max;$
$-x_1 + x_2 \le 8,$
$8x_1 + 5x_2 \le 80,$
$x_1 - 2x_2 \le 2,$
$x_1 + 4x_2 \ge 4,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

20. $F = 7x_1 - x_2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$5x_1 + x_2 \ge 5,$
$x_1 + 5x_2 \ge 5,$
$0 \le x_1 \le 4,$
$0 \le x_2 \le 4.$

21. $F = 7x_1 + x_2 \to \max;$
$x_1 + x_2 \le 14,$
$3x_1 - 5x_2 \le 15,$
$5x_1 + 3x_2 \ge 21,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

22. $F = x_1 + x_2 \to \min;$
$3x_1 + x_2 \ge 8,$
$x_1 + 2x_2 \ge 6,$
$x_1 - x_2 \le 3,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

23. $F = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$
$3x_1 + 2x_2 \ge 6,$
$2x_1 - 3x_2 \ge -6,$
$x_1 - x_2 \le 4,$
$4x_1 + 7x_2 \le 28,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

24. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 - x_2 \ge -3,$
$6x_1 + 7x_2 \le 42,$
$2x_1 - 3x_2 \le 6,$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

25. $F = 7x_1 + 6x_2 \to \max;$
$2x_1 + 5x_2 \ge 10,$
$5x_1 + 2x_2 \ge 10,$
$x_1 \le 6,$
$x_2 \le 5,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

26. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$x_1 - x_2 \ge 4,$
$x_1 + x_2 \ge 10,$
$4x_1 - x_2 \le 12,$
$7x_1 + x_2 \le 7,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

27. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$3x_1 - 2x_2 \ge -6,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$0 \le x_1 \le 3,$
$x_2 \le 5,$
$x_2 \ge 0.$

28. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$
$8x_1 - 5x_2 \le 16,$
$x_1 + 3x_2 \ge 2,$
$2x_1 + 7x_2 \le 9,$
$x_1 \ge 0,$
$x_2 \ge 0.$

29. $F = -3x_1 + 6x_2 \to \min;$
$5x_1 - 2x_2 \le 4,$
$x_1 - 2x_2 \ge -4,$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$x_1 \ge 0,$
$x_2 \ge 0.$

30. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$x_1 + x_2 \le 8,$
$3x_1 + 7x_2 \ge 21,$
$x_1 + 2x_2 \ge 6,$
$0 \le x_1 \le 1,$
$0 \le x_2 \ge 1.$

Індивідуальні завдання до теми 18

Знайти оптимальні стратегії гравців А та В, якщо матриця гри має наступний вигляд:

1. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 28 & 34 & 32 & 70 \\ 29 & 30 & -20 & 90 \\ 180 & 60 & 120 & 60 \\ 20 & 70 & 20 & 50 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 & 17 \\ 16 & 12 & 14 & 19 \\ 18 & 12 & 15 & 16 \\ 13 & 18 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 10 & 8 \\ 12 & 10 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Індивідуальні завдання до теми 19

I. Розв’язати задачу нелінійного програмування графічним методом.

1. $f = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 \le 4, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

2. $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

3. $$f=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2\to\max\ (\min)$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\ge 6,\\ 3x_1-2x_2\le 18,\\ -x_1+2x_2\le 8,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

4. $$f=3x_1+4x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 25,\\ x_1x_2\ge 4,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

5. $$f=x_1x_2\to\max$$
$$\begin{cases}6x_1+4x_2\ge 12,\\ 2x_1+3x_2\le 24,\\ -3x_1+4x_2\le 12,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

6. $$f=9(x_1-5)^2+4(x_2-6)^2\to\min$$
$$\begin{cases}3x_1+2x_2\ge 12,\\ x_1-x_2\le 6,\\ x_2\le 4,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

7. $$f=4x_1+3x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1^2-2x_1+x_2^2-2x_2-34\le 0,\\ x_1\ge 1,\\ x_2\ge 1.\end{cases}$$

8. $$f=4x_1+5x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 16,\\ -x_1+2x_2\le 4,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

9. $$f=2x_1x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1+x_2\le 5,\\ x_1\le 4,\\ x_2\le 3,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

10. $$f=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\to\max\ (\min)$$
$$\begin{cases}x_1+x_2\ge 1,\\ -2x_1+(1/2)x_2\le 4,\\ x_1-3x_2\le 6,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

11. $$f=x_1x_2\to\max\ (\min)$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\ge 2,\\ x_1+x_2\le 6,\\ 2x_1+x_2\le 10,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

12. $$f=4(x_1-2)^2+2(x_2-2)^2\to\max\ (\min)$$
$$\begin{cases}x_1+x_2\le 7,\\ 2x_1-x_2\le 8,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

13. $$f=x_1^2-2x_1+x_2^2-4x_2+5\to\max\ (\min)$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 10,\\ 2x_1+x_2\le 8,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

14. $$f=x_1^2+x_2^2\to\max\ (\min)$$
$$\begin{cases}x_1x_2\ge 1,\\ x_1+3x_2\le 6,\\ x_1\le 3,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

15. $$f=x_1^2-2x_1+4x_2^2-8x_2+5\to\min$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\le 8,\\ 2x_1+x_2\le 10,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

16. $$f=x_1+x_2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1x_2\ge 2,\\ x_1^2+x_2^2\le 16.\end{cases}$$

17. $f=(x_1-4)^2+(x_2-1)^2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 10, \\ x_1+x_2\le 6, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

18. $f=x_1+x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1x_2\ge 1, \\ x_1\le 4, \\ x_2\le \sqrt{x_1}, \\ x_1, x_2\ge 0. \end{cases}$$

19. $f=(x_1-3)^2+(x_2-3)^2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1x_2\ge 5, \\ x_1+x_2\le 6, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

20. $f=x_1x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2, \\ 2x_1+x_0\ge 2, \\ x_1+x_2\le 4, \\ x_1, x_2\ge 0. \end{cases}$$

21. $f=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 8, \\ x_1+x_2\le 6, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

22. $f=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 8, \\ x_1+x_2\le 7, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

23. $f=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 6, \\ x_1+2x_2\le 8, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

24. $f=2x_1+2x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 16, \\ x_1+2x_2\ge 2, \\ 2x_1+x_2\ge 2, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

25. $f=x_2-x_1^2+6x_1 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24, \\ x_1+2x_2\le 15, \\ 3x_1+2x_2\le 24, \\ x_2\le 4, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

26. $f=2x_1+2x_2 \to \max(\min)$
$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 16, \\ x_1+2x_2\ge 2, \\ 2x_1+x_2\ge 2, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

27. $f=x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1+x_2\le 4, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

28. $f=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 4, \\ x_1\le 2x_2, \\ x_2\le 2x_2, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$$

29. $$f=(x_1-3)^2+2(x_2-2)^2\to\min$$
$$\begin{cases}x_1+4x_2\le 16,\\ 3x_1+x_2\le 15,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

30. $$f=2-x_1^2-x_2^2\to\max$$
$$\begin{cases}x_1^2+x_2\le 4,\\ x_1+x_2\ge 1,\\ x_{1,2}\ge 0.\end{cases}$$

II. За **методом Л**агранжа знайти точку умовного екстремуму функції.

1. $f=2x_1^2+x_2^2,$
$2x_1+3x_2=5.$

2. $f=x_1^2-x_2^2,$
$3x_1+4x_2=12.$

3. $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2,$
$x_1+2x_2+x_3=8.$

4. $f=x_1^2+2x_1+x_2^2-5x_2,$
$x_1+3x_2=6.$

5. $f=3x_1^2+2x_2^2-3x_3+1,$
$x_1^2+x_2^2=4.$

6. $f=2x_1+3x_2^2+x_3^2,$
$x_1+x_2+x_3=8.$

7. $f=3x_1^2+2x_2^2,$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2=4,\\ x_1+2x_2=8.\end{cases}$$

8. $f=x_1^2+2x_2^2+x_3,$
$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=6,\\ x_1+x_2=4.\end{cases}$$

9. $f=2x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3,$
$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=1,\\ 2x_1-x_2-3x_3=4.\end{cases}$$

10. $f=x_2-x_1-2x_1^2,$
$$\begin{cases}3x_1+4x_2=12,\\ -x_1+2x_2=6.\end{cases}$$

11. $f=x_1x_2,$
$$\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=1.$$

12. $f=x_1^2+x_2^2,$
$x_1+x_2-2=0.$

13. $f=x_1+x_2,$
$x_1^2+x_2^2-1=0.$

14. $f=x_1,$
$$\begin{cases}-(1-x_1)^3+x_2=0,\\ x_2=0.\end{cases}$$

15. $f=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2,$
$x_1^2+x_2^2=52.$

16. $f=x_1^2+(x_2-2)^2,$
$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=1,\\ x_1=0,\\ x_2=0.\end{cases}$$

17. $f = x_1 + x_2,$
$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1.$

18. $f = x_1^2 + x_2^2,$
$x_1 + x_2 = 1.$

19. $f = x_1 + x_2,$
$x_1^2 + x_2^2 = 8.$

20. $f = x_1 x_2,$
$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0.$

21. $f = x_1^2 + {}_2^2,$
$x_1^2 + 2x_2^2 = 8.$

22. $f = x_1^2 + x_2^2,$
$x_0 - x_1^2 = 2.$

23. $f = x_1^2 + x_2^2,$
$-x_1 + x_2^2 = 0.$

24. $f = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3,$
$x_1 + x_2 = -6.$

25. $f = -4x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 8x_2 - 5,$
$2x_1 - x_2 - 6 = 0.$

26. $f = (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + 1,$
$2x_1 - x_2 - 2 = 1.$

27. $f = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2,$
$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

28. $f = x_1^2 + x_2^2,$
$x_1^2 + 4x_2^2 = 16.$

29. $f = x_1^2 + x_2^2,$
$(x_1 - 2)^2 + 4x_2^2 = 16.$

30. $f = x_1^2 + x_2^2,$
$2x_1 + (x_2 - 4)^2 = 1.$

Тести для закріплення та перевірки знань

Тестові завдання містять теоретичні питання і практичні завдання, що охоплюють курс вивчення дисципліни “Оптимізаційні методи і моделі”. Теоретичні питання мають виявити рівень засвоєння студентами базових понять теорії оптимізації, практичні - уміння та навички розв’язування оптимізаційних задач.

Тестові завдання охоплюють розділи “Задачі лінійного програмування”, “Елементи теорії двоїстості”, “Транспортні задачі”, “Задачі дискретного програмування”, “Задачі нелінійного програмування”, “Задачі теорії ігор”. У кожному завданні пропонується три варіанти відповідей. Якщо серед них студент не знаходить правильної, то він має додати свій варіант розв’язку.

Виконуючи практичні завдання, студент здійснює необхідні розрахунки на окремих аркушах паперу і подає їх на перевірку разом з тестовим завданням. Правильна відповідь на теоретичне питання оцінюється у 3 бали, правильне повне розв’язання практичного завдання оцінюється у 5 балів, правильне неповне — у 2 бали. Рекомендується така система оцінювання відповідей: 35–40 балів — “відмінно”; 27–34 бали — “добре”; 20 – 26 балів — “задовільно”; менше 20 балів — “незадовільно”.

Теоретичні завдання
Тема 1

1.1. Задачі безумовної оптимізації виділяють в окремий клас за наступною ознакою класифікації:

А) кількість змінних;
Б) наявність додаткових умов на змінні задачі;
В) відображення впливу часу;
Г) інший варіант.

1.2. Задачі багатовимірної оптимізації виділяють в окремий клас за наступною ознакою класифікації:

А) кількість змінних;
Б) наявність додаткових умов на змінні задачі;
В) відображення впливу часу;
Г) інший варіант.

1.3. Оптимізаційна задача може бути віднесена до класу нелінійних в залежності від:

А) кількості змінних;
Б) цільова функція або функції обмежень нелінійні щодо керованих змінних моделі;
В) цільова функція і функції обмежень нелінійні щодо керованих та некерованих змінних моделі;
Г) інший варіант.

1.4. Смисл, що вкладається у поняття «умовна оптимізація» залежить від:

А) кількості змінних;
Б) наявності додаткових умов на змінні задачі;
В) відображення впливу часу;
Г) інший варіант.

1.5. Точка називається стаціонарною, якщо в ній:

А) існує локальний екстремум;
Б) існує глобальний екстремум;
В) частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю;
Г) інший варіант.

1.6. Множина точок називається опуклою, якщо:

А) має нескінченну кількість точок;
Б) наявні додаткові умови на точки множини;
В) разом із будь-якими двома її точками їй належить і відрізок, що з’єднує ці дві точки;
Г) інший варіант.

Тема 2

2.1. Модель - це:

А) умовний образ досліджуваного об'єкта або процесу;
Б) реальний об'єкт;
В) і те, і інше;
Г) інший варіант.

2.2. Економічна модель – це:

А) спеціально створений об’єкт, на якому відтворюють певні характеристики досліджуваного явища або процесу;
Б) зразок для масового виготовлення окремого виробу або конструкції;
В) абстрактний об’єкт, який виразами штучної мови описує існуючі взаємозв’язки досліджуваних процесів або явищ;
Г) інший варіант.

2.3. Статичні моделі описують стан об'єкта:

А) через взаємозв'язки змінних у часі;
Б) у конкретний період часу;
В) через вивчення загальних властивостей економіки та її характерних елементів;
Г) інший варіант.

2.4. Моделювання – це:

А) циклічний процес;
Б) нециклічний процес;
В) і те, і інше;
Г) інший варіант.

2.5. Моделювання включає такі елементи:

А) об’єкт, предмет і модель;
Б) об'єкт, суб'єкт і предмет;
В) об'єкт, суб'єкт і модель;
Г) інший варіант.

2.6. Етапами моделювання виступають:

А) побудова моделі, вивчення моделі;
Б) перенесення знань з моделі на оригінал, перевірка й застосування знань;
В) і перше, і друге;
Г) інший варіант.

2.7. Виберіть найбільш точне твердження:

А) інформаційна невизначеність підсилює істинну;
Б) істинна невизначеність підсилює інформаційну;
В) обидва твердження невірні;
Г) інший варіант.

2.8. Проведення «модельних» експериментів здійснюється на етапі:

А)побудови моделі;
Б)вивчення моделі;

В) перенесення знань з моделі на оригінал;
Г) інший варіант.

2.9. За способом відображення дійсності оптимізаційні моделі є:

А) структурними;
Б) функціональними;
В) концептуальними;
Г) інший варіант.

2.10. За характером оптимізаційні моделі найчастіше є:

А) теоретичними;
Б) прикладними;
В) нормативними;
Г) інший варіант.

2.11. За рівнем об'єкта моделювання в господарській ієрархії оптимізаційні моделі найчастіше є:

А) макроекономічними;
Б) мезоекономічними;
В) мікроекономічними;
Г) інший варіант.

2.12. Об'єктивні характеристики будь-якого виробництва, що не змінюється у процесі виробництва, називаються параметрами:

А) моделі;
Б) некерованими;
В) керованими;
Г) інший варіант.

2.13. Математична модель $z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0,\ \mathrm{j} = \overline{1, n}$$

є моделлю задачі програмування:

А) лінійного;
Б) нелінійного;
В) цілочислового;
Г) інший варіант.

2.14. Математичною моделлю задачі оптимізації є:

А) мета виробництва, яка сформульована у вигляді деякого співвідношення, що містить керовані та некеровані параметри виробництва;

Б) цільова функція та обмеження, що залежать від керованих параметрів виробництва;
В) система рівнянь і нерівностей, що описують існуючі взаємозв'язки між підрозділами підприємства;
Г) інший варіант.

2.15. Математичне програмування – це:

А) складова частина класичної теорії екстремальних задач;
Б) набір математичних методів, за допомогою яких формулюють оптимальні програми розвитку виробництва;
В) область математики, яка розробляє теорію та чисельні методи розв'язування багатовимірних задач;
Г) інший варіант.

Тема 6

6.1. Задачі лінійного програмування виділяють в окремий клас за наступною ознакою класифікації:

А) структура функцій, які входять до складу задачі;
Б) наявність додаткових умов на змінні задачі;
В) відображення впливу часу;
Г) інший варіант.

6.2. До задач лінійного програмування належать задачі:

А) вибору оптимального асортименту продукції;
Б) вибору оптимального типу транспортного засобу;
В) оптимального розподілу капітальних вкладень;
Г) інший варіант.

6.3. Допустима множина розв'язків задачі математичного програмування — це:

А) набір значень керованих змінних, що задовольняють обмеження задачі;
Б) набір змінних, що задовольняють обмеження задачі та відповідають екстремуму цільової функції;
В) обмежена множина некерованих параметрів задачі;
Г) інший варіант.

6.4. Математична модель $z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n}$$

є моделлю задачі програмування:

А) нелінійного;
Б) лінійного;
В) дискретного;
Г) інший варіант.

6.5. Задачі лінійного програмування мають місце тоді, коли цільова функція та функції-обмеження:

А) лінійні щодо некерованих параметрів;
Б) лінійні щодо керованих параметрів;
В) є сумою функцій, що залежать від різних аргументів;
Г) інший варіант.

6.6. Функція цілі в задачі математичного програмування — це:

А) набір виробничих функцій, що сприяє досягненню поставленої перед підприємством задачі оптимізації виробництва;
Б) мета виробництва, сформульована у вигляді деякого функціонального співвідношення, що містить керовані та некеровані параметри виробництва;
В) залежність між керованими та некерованими параметрами виробництва, яку необхідно оптимізувати;
Г) інший варіант.

6.7. Розв'язок задачі математичного програмування — це:

А) значення цільової функції, якого вона набуває в екстремальній точці;
Б) допустимий набір керованих параметрів, коли цільова функція набуває екстремального значення;
В) набір керованих та некерованих параметрів, для якого визначено екстремум цільової функції;
Г) інший варіант.

6.8. Канонічна форма задачі лінійного програмування містить обмеження у формі:

А) рівностей та нерівностей;
Б) рівностей;
В) нерівностей;

Г) інший варіант.

6.9. Стандартна форма задачі лінійного програмування містить обмеження у формі:

А) рівностей та нерівностей;
Б) рівностей;
В) нерівностей;
Г) інший варіант.

6.10. Планом або допустимим розв’язком задачі лінійного програмування є вектор Х=($x_1, x_2, ..., x_n$), координати якого:

А) задовольняють хоча б одну з умов системи обмежень;
Б) задовольняють всі умови системи обмежень;
В) не задовольняють жодну з умов системи обмежень;
Г) інший варіант.

6.11. При геометричному розв’язуванні задачі лінійного програмування область допустимих розв’язків є множиною:

А) необмеженою;
Б) обмеженою;
В) перші два варіанти;
Г) інший варіант.

6.12. Пошук розв’язку задачі лінійного програмування зводиться до дослідження:

А) внутрішніх точок допустимої області;
Б) стаціонарних точок цільової функції;
В) межових точок допустимої області розв’язків;
Г) інший варіант.

6.13. Розв’язок задачі лінійного програмування, якщо він існує, перебуває серед:

А) точок, які мають хоча б одну ненульову координату;
Б) внутрішніх точок многогранника розв’язків;
В) кутових точок многогранника розв’язків;
Г) інший варіант.

6.14. План Х*, при якому цільова функція приймає своє максимальне значення, називається:

А) опорним;

Б) оптимальним;
В) канонічним
Г) інший варіант.

6.15. Задача виду $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1,k},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{k+1,m},$$
$$x_j \ge 0, \; \mathrm{j} = \overline{1,n}$$

є:

А) стандартною задачею лінійного програмування;
Б) канонічною ЗЛП;
В) загальною ЗЛП;
Г) інший варіант.

6.16. Задача виду: $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{k+1,m},$$
$$x_j \ge 0, \; \mathrm{j} = \overline{1,n}$$

є:

А) стандартною задачею лінійного програмування;
Б) канонічною ЗЛП;
В) загальною ЗЛП;
Г) інший варіант.

6.17. Кутова точка многогранника розв'язків є:

А) опорним планом ЗЛП;
Б) лінійною комбінацією інших кутових точок многогранника;
В) недопустимим планом ЗЛП;
Г) інший варіант.

6.18. Сукупність чисел X = (x_1, x_2,... ,x_n), яка задовольняє обмеженням задачі, називається:

А) допустимим розв'язком або опорним планом;
Б) непустою множиною планів основної ЗЛП;
В) оптимальним планом ЗЛП;
Г) інший варіант.

6.19. Якщо максимальне (мінімальне) значення цільова функція приймає більш ніж в одній кутовій точці, то вона приймає його:

А) не у всякій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин;

Б) у всякій точці, що є лінійною комбінацією всіх точок-вершин многогранника розв'язків;

В) у всякій точці, що є лінійною комбінацією цих точок;

Г) інший варіант.

6.20. Задача оптимального вибору асортименту продукції є задачею програмування:

А) лінійного;
Б) дискретного;
В) динамічного;
Г) інший варіант.

6.21. Для розв'язування задач лінійного програмування застосовують метод:
А) симплексний;
Б) північно-західного кута;
В) мінімального елемента;
Г) інший варіант.

Тема 7

7.1. При максимізації цільової функції обраний вектор уводиться в той базис, у якого $\Delta_j = z_j - c_j \geq 0$.

А) так;
Б) ні;
В) $\Delta_j = z_j - c_j = 0$;
Г) інший варіант.

7.2. Вибрати значення відносної оцінки небазисної змінної, яка свідчить про наявність декількох оптимальних розв'язків:

А) $\Delta_j = z_j - c_j > 0$;

Б) $\Delta_j = z_j - c_j = 0$.

В) $\Delta_j = z_j - c_j < 0$;

Г) інший варіант.

7.3. Метод штучного базису застосовується для розв'язування:

А) ЗЛП, у якої немає вихідного опорного плану;
Б) двоїстої ЗЛП;
В) симетричної ЗЛП;
Г) інший варіант.

Тема 10

10.1. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості:
А) змінних прямої задачі
Б) обмежень прямої задачі;
В) ненульових коефіцієнтів у цільовій функції;
Г) інший варіант.

10.2. Якщо цільова функція прямої задачі задається на мінімум, то цільова функція двоїстої задачі:

А) на мінімум;
Б) на максимум;
В) на визначене значення;
Г) інший варіант.

10.3. Число змінних двоїстої задачі дорівнює:

А) числу змінних вихідної задачі;
Б) числу обмежень вихідної задачі;
В) числу обмежень двоїстої задачі;
Г) інший варіант.

10.4. Пара взаємно двоїстих задач є симетричною, якщо задачі:
А) подані в загальній формі;
Б) хоча б одна з них подана в канонічній формі;
В) подані в канонічній формі;
Г) інший варіант.

10.5. Задача, двоїста до двоїстої задачі:

А) має протилежний знак цільової функції;
Б) симетрична до початкової задачі;
В) збігається з початковою задачею;
Г) інший варіант.

10.6. Двоїстий симплекс-метод застосовується до задачі у формі:
А) симетричної ЗЛП;
Б) канонічної ЗЛП;
В) загальної ЗЛП;
Г) інший варіант.

10.7. ЗЛП не має планів, якщо в псевдоплані
X= $(b_1;b_2;...;b_m;0;...;0)$, обумовленому базисом X_1, X_2,… X_m, є хоча б одне від'ємне число b_i таке, що всі:

А) $a_{ij} \le 0$; $j = \overline{1,n}$;

Б) $a_{ij} \ge 0$; $j = \overline{1,n}$;

В) $a_{ij} = 0$; $j = \overline{1,n}$;

Г) інший варіант.

10.8. Щоб у двоїстому симплекс-методі визначити, який вектор варто ввести до базису, знаходять:

А) min (Δ_j/a_{ij}) де $a_{ij} > 0$;
Б) max ($-\Delta_j/a_{ij}$), де $a_{ij} > 0$;
В) min ($-\Delta_j/a_{ij}$) де $a_{ij} < 0$;
Г) інший варіант.

10.9. Аналіз стійкості двоїстих оцінок припускає визначення таких інтервалів зміни кожного з вільних членів системи обмежень прямої задачі, у яких:

А) опорний план двоїстої задачі залишається незмінним;
Б) оптимальний план прямої задачі залишається незмінним;
В) оптимальний план двоїстої задачі залишається незмінним;
Г) інший варіант.

10.10. Розв'язок вихідної задачі має вигляд:

Базис	**C_i**	**B**	**4**	**10**	**20**	**0**	**0**	**0**
			X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
X_2	10	6	1	1	0	1/4	-1/5	0
X_3	20	20	1/4	0	1	1/6	1/2	0
X_6	0	14	4	0	0	-1/6	-1/8	1
		460	11	0	0	35/6	8	0

Тоді оптимальний план двоїстої задачі (за умови, що початковий базис складали вектори X_2,$X_{3,}$ X_1) має вигляд:

А) Y*=(0;0;11);
Б) Y*=(35/6;8;0);
В) Y*=(11;0;0);
Г) інший варіант.

10.11. Наявність яких значень базисних змінних x_j передбачає застосування двоїстого симлекс-методу?

А) $x_j > 0$;
Б) $x_j < 0$;
В) $x_j = 0$;
Г) інший варіант.

10.12. Якщо цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то інша задача:

А)має єдиний оптимальний план;
Б)має безліч оптимальних планів;
В)не має планів;
Г) інший варіант.

10.13. У задачах лінійного програмування при переході до двоїстої задачі обмеження-рівності перетворюються на обмеження:

А) нерівності типу “ ”;
Б) рівності, але зі зміною знаку цільової функції;
В) нерівності типу “ P”;
Г) інший варіант.

Тема 12

12.1. До транспортних задач належать задачі:

А) оптимального вибору транспортних засобів;
Б) оптимізації транспортних перевезень;
В) оптимального вибору маршруту;
Г) інший варіант.

12.2. Якщо виконується умова $\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (сумарні запаси вантажу дорівнюють сумарним потребам); то модель транспортної задачі називають:

А) відкритою;
Б) симетричною;
В) закритою;
Г) інший варіант.

12.3. Якщо не виконується умова $\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (сумарні запаси вантажу не дорівнюють сумарним потребам), то модель транспортної задачі називають:

А) відкритою;
Б) симетричною;
В) закритою;
Г) інший варіант.

12.4. Для можливості розв'язання транспортної задачі необхідною і достатньою умовою є така:

А) число пунктів відправлення дорівнює числу пунктів призначення;

Б) сумарні запаси вантажу в пунктах відправлення дорівнюють потребам у вантажі в пунктах призначення;
В) сумарні запаси вантажу в пунктах відправлення перевищують потреби у вантажі в пунктах призначення;
Г) інший варіант.

12.5. Для розв’язування транспортної задачі застосовують метод:

А) симплекс;

Б) потенціалів:

В) гілок і границь;

Г) інший варіант.

12.6. Відкрита транспортна задача:

а) немає жодного розв’язку;

б) має безліч розв’язків;

в) зводиться до закритої транспортної задачі;

г) інший варіант.

12.7. Закрита транспортна задача:

А) може мати багато розв’язків;

Б) немає жодного розв’язку;

В) завжди має єдиний розв’язок;

Г) інший варіант.

12.8. У випадку, якщо і $\sum_{j=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (сумарні потреби перевищують сумарні запаси вантажу), то:

А) вводиться фіктивний пункт призначення, з вартостями перевезень, що дорівнюють великому додатному числу М;
Б) вводиться фіктивний пункт відправлення, з вартостями перевезень, що дорівнюють великому додатному числу М;
В) вводиться фіктивний пункт відправлення, з вартостями перевезень, що дорівнюють 0;
Г) інший варіант.

12.9. У випадку якщо $\sum_{j=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (сумарні запаси вантажу перевищують сумарні потреби) то: i=1, j=1

А) вводиться фіктивний пункт призначення, з вартостями перевезень, що дорівнюють великому додатному числу М;
Б) вводиться фіктивний пункт призначення, з вартостями перевезень, що дорівнюють 0;
В) вводиться фіктивний пункт відправлення, з вартостями перевезень, що дорівнюють великому додатному числу М;
Г) інший варіант.

12.10. Чому дорівнює обсяг виробництва у фіктивному пункті призначення транспортної задачі:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	3	4	5	20
A_2	4	1	5	3	30
A_3	5	3	4	5	40
A_4	2	6	2	2	50
b_J	30	30	40	35	

А) 10;
Б) 5;
В) 0;
Г) інший варіант.

12.11. Методом мінімального елемента розв’язують задачі:
А) цілочислового програмування;
Б) лінійного програмування;
В) транспортні;
Г) інший варіант.

12.12. Метод мінімального елемента застосовують:
А) для розв’язання задачі мінімізації;
Б) для побудови оптимального розв’язку;
В) для побудови початкового опорного розв’язку;
Г) інший варіант.

12.13. Методом потенціалів можна знайти розв’язок:

А) початковий;

Б) опорний;

В) оптимальний;

Г) інший варіант.

12.14. Метод північно-західного кута застосовують при розв’язуванні задачі:

А) дискретного програмування;
Б) транспортної;
В) динамічного програмування;
Г) інший варіант.

Тема 17

17.1. Задачі дискретного програмування виникають тоді, коли:
А) цільова функція набуває цілих значень;
Б) множина допустимих розв’язків складається з дискретних величин;
В) некеровані змінні задачі є дискретними величинами;
Г) інший варіант.

17.2. До задач дискретного програмування належить задача:
А) оптимального вибору асортименту;
Б) про призначення кандидатів на вакантні посади;
В) про оптимальний вибір транспортних засобів;
Г) інший варіант.

17.3. Який з методів розв’язування ЗЛП використовується після складання додаткового обмеження в задачі цілочислового програмування?
А) симплекс-метод;
Б) двоїстий симплекс-метод;
В) потенціалів;
Г) інший варіант.

17.4. Задачі цілочислового програмування розв’язують методом:
А) потенціалів;
Б) симплекс;
В) Гоморі;
Г) інший варіант.

17.5. У методі Гоморі додаткове обмеження має вигляд:

А) $\sum_{j=1}^{m} f(a*_{ij})x_j = \sum_{j=1}^{n} f(b*_i)$;

Б) $\sum_{j=1}^{m} f(a*_{ij})x_j \geq \sum_{j=1}^{n} f(b*_i)$;

В) $\sum_{j=1}^{m} f(a*_{ij})x_j \leq \sum_{j=1}^{n} f(b*_i)$;

Г) інший варіант.

17.6. Заокруглення значень компонент оптимального плану, який отримано симплекс-методом:

А) завжди дасть оптимальний розв’язок задачі цілочислового програмування;

Б) не завжди дасть оптимальний розв’язок задачі цілочислового програмування;

В) перша або друга відповідь в залежності від наявності умови цілочисельності;

Г) інший варіант.

17.7. При розв’язуванні задачі цілочислового програмування методом Гоморі застосовують:

А) тільки звичайний симплекс-метод;

Б) тільки двоїстий симплекс-метод;

В) спочатку звичайний симплекс-метод, а потім двоїстий;

Г) інший варіант.

17.8. При розв’язуванні задач цілочислового програмування:

А) розв’язок задачі лінійного програмування заокруглюється до цілочислового значення;

Б) застосовують методи відтинання;

В) застосовують двоїстий симплекс-метод;

Г) інший варіант.

17.9. Для пошуку розв’язку задачі цілочислового програмування застосовують метод:

А) потенціалів;

Б) симплекс;

В) гілок і границь;

Г) інший варіант.

17.10. Многокутник допустимих розв’язків задачі цілочислового програмування:

А) збігається з многокутником допустимих розв’язків основної ЗЛП;

Б) перебуває усередині многокутника допустимих розв’язків основної ЗЛП;

В) перебуває усередині многокутника допустимих розв’язків основної ЗЛП і складений таким чином, що координати кожної з вершин є цілими числами;

Г) інший варіант.

17.11. У методі Гоморі додаткове обмеження складається для вільного члена, що мав:

А) найбільшу дробову частину;
Б) найменшу дробову частину;
В) найменшу дробову частину відповідної змінної.
Г) інший варіант.

17.12. Чи правильно, що цілочислова задача може не мати розв'язку, навіть якщо вихідна ЗЛП мала розв'язок ?

А) так;
Б) ні;
В) матиме безліч розв'язків;
Г) інший варіант.

17.13. Для якої змінної необхідно скласти додаткове обмеження в задачі цілочислового програмування, якщо в останній симплекс-таблиці значення базисних змінних приймають значення: x_1=14/3; x_3=12/5; x_4=10; x_6=11/8 ?

А) x_1;
Б) x_3;
В) x_6;
Г) інший варіант.

17.14. При складанні додаткового обмеження в задачі цілочислового програмування відбувається:

А) збільшення числа обмежень;
Б) заміна обмежень і збільшення числа змінних;
В) заміна змінних і збільшення числа обмежень;
Г) інший варіант.

17.15. Дробова частина числа:

А) є величиною додатною;
Б) є величиною від'ємною;
В) залежить від знака числа;
Г) інший варіант.

Тема 18

18.1.Теорія ігор є математичною теорією:

А) конфліктних ситуацій;

Б) мережевих моделей;
В) прийняття рішень в умовах невизначеності;
Г) інший варіант.

18.2. Апарат теорії ігор може бути застосований для опису наступних економічних ситуацій:

А) спортивні змагання;
Б) бойові операції;
В) взаємовідносини між постачальником і споживачем;
Г) інший варіант.

18.3. Значення, яке вкладається в поняття «гра», є:

А) прийняття рішень в умовах невизначеності;
Б) балансова модель;
В) конфліктна ситуація;
Г) інший варіант.

18.4. Предметом теорії ігор як наукової дисципліни є:

А) визначення оптимальних стратегій учасників конфліктних ситуацій;
Б) знаходження оптимального розв'язку задач лінійного програмування;
В) вивчення різноманітного характеру взаємовідносин між учасниками в різних ситуаціях;
Г) інший варіант.

18.5. Гра називається антагоністичною, якщо:

А) в ній беруть участь більше двох гравців;
Б) виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого;
В) результат гри є невизначеним виключно завдяки випадковим причинам;
Г) інший варіант.

18.6. Матричні ігри однозначно визначаються наявністю:

А) варіантів дій гравців;
Б) об'ємом інформації кожного гравця про поведінку партнерів;
В) виграшу, до якого приводить кожна сукупність дій;
Г) інший варіант.

18.7. Гра називається грою з нульовою сумою, якщо:

А) гра є антагоністичною;

Б) виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого;
В) результат гри є невизначеним виключно завдяки випадковим причинам;
Г) інший варіант.

18.8. Принципи максиміну та мінімаксу полягають у:

А) антагоністичності гри;
Б) гарантованому виграші (програші) гравця А при будь-якій стратегії гравця В;
В) найбільшому (найменшому) виграші одного з гравців;
Г) інший варіант.

18.9. Можна говорити, що гра має сідлову точку, коли:

А) гра є антагоністичною;
Б) гра є парною;
В) елемент a_{ij} матриці гри є одночасно мінімальним у рядку *i* та максимальним у стовпчику *j*;
Г) інший варіант.

18.10. Ціною або значенням гри називають

А) значення виграшу (програшу) гравця А;
Б) спільне значення верхньої та нижньої ціни гри;
В) максимально можливий середній виграш;
Г) інший варіант.

18.11. Стратегією гравця називається:

А) сукупність правил, які визначають вибір варіанту дій при будь-якому ході гравця в залежності від ситуацій, що склалась у процесі гри;
Б) величина найбільшого виграшу (програшу) одного з гравців;
В) будь-який хід будь-якого гравця;
Г) інший варіант.

18.12. Чиста стратегія гравців являє собою:

А) рішення, яке може бути прийняте гравцем завчасно;
Б) стратегію, в якій окремі стратегії чергуються випадковим чином з деякою ймовірністю;
В) стратегію, при якій досягається максимін (мінімакс) гравця;
Г) інший варіант.

18.13. Мішаною стратегією гри називається:

А) стратегія, при якій досягається максимін (мінімакс) гравця;

Б) стратегія, в якій окремі чисті стратегії чергуються випадковим чином з деякою ймовірністю;
В) стратегія, при якій отримується максимально можливий середній виграш;
Г) інший варіант.

18.14. Елементи a_{ij} матриці (платіжної матриці) гри являють собою:

А) виграші, що відповідають стратегіям A_i та B_j парної скінченої гри;
Б) виграші гравця А, що відповідають стратегіям A_i та B_j парної скінченої гри;
В) значення максиміну (мінімаксу) гри;
Г) інший варіант.

18.15. Для визначення оптимальних стратегій існують наступні підходи:

А) графічний метод розв'язування гри;
Б) зведення матричної гри до задачі лінійного програмування;
В) спрощення платіжної матриці;
Г) інший варіант.

Тема 19

19.1. Задачі нелінійного програмування виникають, коли:

А) цільова функція моделі нелінійна, а обмеження лінійні;
Б) цільова функція і система обмежень є нелінійними;
В) цільова функція лінійна, а обмеження нелінійні;
Г) інший варіант.

19.2. Прикладом економічної моделі, яка зводиться до задачі нелінійного програмування, є:

А) модель розподілу ресурсів;
Б) модель розподілу капітальних вкладень;
В) модель оптимізації діяльності страхової компанії ;
Г) інший варіант

19.3. Точка максимуму (мінімуму) цільової функції задачі нелінійного програмування може перебувати:

А) на границі області допустимих розв’язків;
Б) усередині області допустимих розв’язків;
В) як на границі, так і усередині області допустимих розв’язків;
Г) інший варіант.

19.4. Умова невід'ємності змінних є:

А) необов'язковим елементом задачі нелінійного програмування;
Б) обов’язковим елементом задачі нелінійного програмування;
В) неможливим елементом задачі нелінійного програмування;
Г) інший варіант.

19.5. Область допустимих розв’язків задачі нелінійного програмування є:

А) завжди опуклою;
Б) не завжди опуклою;
В) завжди увігнутою;
Г) інший варіант.

19.6. Основні труднощі, що виникають у процесі розв’язування задачі нелінійного програмування, полягають у наступному:

А) завжди опуклою;
Б) не завжди опуклою;
В) завжди увігнутою;
Г) інший варіант.

19.7. Задача, що розв'язується методом множників Лагранжа, є:

А) задачею на умовний екстремум;
Б) задачею на безумовний екстремум;
В) задачею на напівумовний екстремум;
Г) інший варіант.

19.8. Для розв’язання задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа необхідною є:

А) наявність умови невід'ємності змінних;
Б) відсутність умови невід'ємності змінних;
В) наявність умови від'ємності змінних;
Г) інший варіант.

19.9. Квадратична форма є опуклою функцією, якщо вона є:

А) від'ємно-визначеною;
Б) додатно-визначеною;

В) додатно-напіввизначеною;
Г) інший варіант.

19.10. Використовуючи градієнтні методи, можна знайти розв’язок:

А) обмеженого числа задач нелінійного програмування;
Б) будь-якої задачі нелінійного програмування;.
В) тільки задачі на умовний екстремум;
Г) інший варіант.

19.11. Які розв’язки забезпечують градієнтні методи?

А) допустимі;
Б) оптимальні;
В) прийнятні;
Г) інший варіант.

19.12. У якому градієнтному методі досліджувані точки завжди належать області допустимих розв’язків:

А) Франка-Вульфа;
Б) Ерроу-Гурвіца;
В) штрафних функцій;
Г) інший варіант.

19.13. Процес розв’язання задачі нелінійного програмування зводиться до послідовного розв’язання ЗЛП у методі:

А) Франка-Вульфа;
Б) Ерроу-Гурвіца;
В) штрафних функцій;
Г) інший варіант.

Практичні завдання

Варіант 1

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

А) A_1, A_2, A_3;
Б) A_1, A_2, A_4;
В) A_2, A_4, A_5;
Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f = 3x_1 + 3x_2$, якщо $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 - 3x_2 \le -12, \end{cases}$
$x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f_{max} = 16{,}5$ при $x_1 = 4{,}5; x_2 = 1$;
Б) $f_{max} = 12$ при $x_1 = 0; x_2 = 4$;
В) $f_{max} = 24$ при $x_1 = 6; x_2 = 2$;
Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до даної задачі лінійного програмування: $z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 14, \end{cases}$
$x_2, x_3 \ge 0.$

А) $f = 3y_1 - 2y_2 + 5y_3 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 10, \\ 4y_1 - y_2 + 2y_3 = 14, \end{cases}$
$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

Б) $f = 10y_1 + 14y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \le 3, \\ 3y_1 - y_2 \le -2 \\ -y_1 + 2y_2 \le 5, \end{cases}$
$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

В) $f = -10y_1 + 14y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} -2y_1 + 4y_2 \le 3, \\ -3y_1 - y_2 \le -2 \\ y_1 + 2y_2 \le 5, \end{cases}$
$y_1 \ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потреби	75	80	60	85	

А) $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$; P=665 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 75 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 60 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$; P=1295 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 40 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$; P=670 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 2

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

А) A_1, A_2, A_3;

Б) A_1, A_2, A_5;

В) A_3, A_4, A_5;

Г) інший варіант.

2. Знайти мінімум функції $z = 4x_1 + x_2$, якщо $\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -2, \\ 7x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \end{cases}$
$x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f_{\min}$ не існує при заданих обмеженнях;

Б) $f_{\min} = 6$ при $x_1 = 0; x_2 = 2$;

В) $f_{\min} = 4$ при $x_1 = 1; x_2 = 0$;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $f = 4x_1 + x_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 13, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20, \end{cases}$
$x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f = -4y_1 + 13y_2 - 20y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} -2y_1 + y_2 - 4y_3 \le 4, \\ y_1 + 3y_2 - 9y_3 \le 1, \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$

Б) $f = -4y_1 + 13y_2 - 20y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 - 9y_3 \ge 1. \end{cases}$

В) $f = 4y_1 + y_2 \to \min$, якщо $\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 4, \\ y_1 + 3y_2 \ge 13 \\ -4y_1 + 9y_2 \le 20, \end{cases}$
$y_1, y_2 \ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	3	5	11	120
A_2	10	6	12	2	60
A_3	7	1	4	8	80
Потреби	90	40	50	80	

А) $X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 40 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Р=1360 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 40 & 40 & 0 \end{pmatrix}$; Р=1400 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 90 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$; Р=2200 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 3

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів: $A_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}; A_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}; A_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}; A_4=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}; A_5=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$.

А) A_1, A_2, A_3;

Б) A_1, A_2, A_5;

В) A_3, A_4, A_5;

Г) інший варіант.

2. Знайти мінімум функції $f=-2x_1+4x_2$, якщо $\begin{cases}5x_1+2x_2\le 10,\\ x_1+x_2\ge 3,\\ 4x_1+3x_2\le 12,\end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f_{\min}=4$; при $x_1=\dfrac{4}{3}; x_2=\dfrac{5}{3}$;

Б) $f_{\min}=16$ при $x_1=0; x_2=4$;

В) $f_{\min}=-5$ при $x_1=\dfrac{13}{12}; x_2=-\dfrac{4}{3}$;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z=x_1+2x_2\to\min$, якщо $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 12,\\ -4x_1-x_2\le -8,\\ x_1-3x_2\ge 6,\end{cases}$ $x_1, x_2\ge 0.$

А) $f=12y_1-8y_2+6y_3\to\max$, якщо $\begin{cases}-3y_1+4y_2+y_3\ge 1,\\ 2y_1+y_2-3y_3\ge 2,\end{cases}$ $y_1, y_2, y_3\ge 0.$

Б) $f=-12y_1+8y_2+6y_3\to\max$, якщо $\begin{cases}-3y_1+4y_2+y_3\le 1,\\ -2y_1+y_2-3y_3\le 2.\end{cases}$

В) $f=y_1+2y_2\to\min$, якщо $\begin{cases}3y_1+2y_2\ge 12,\\ 4y_1+y_2\le 8\\ y_1-3y_2\le 6,\end{cases}$ $y_1, y_2\ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом найменшої вартості знайти план $X=(x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень P :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	7	30
A_2	7	6	2	9	20
A_3	2	3	9	10	25
Потреби	10	20	25	20	

А) $X=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 10 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; P=285 (од. вартості);

Б) $X=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{pmatrix}$; P=425 (од. вартості);

В) $X=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; P=285 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 4

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; A_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; A_4=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; A_5=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

А) A_1, A_2, A_3;
Б) A_1, A_2, A_5;
В) A_3, A_4, A_5;
Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f=3x_1+3x_2$, якщо $\begin{cases} x_1+2x_2 \geq 2, \\ 4x_1+5x_2 \leq 20, \\ 2x_1+x_2 \geq 2, \end{cases}$
$x_1, x_2 \geq 0.$

А) $f_{\max}=12$ при $x_1=0; x_2=4$;
Б) $f_{\max}=6$ при $x_1=0; x_2=2$;
В) $f_{\max}=15$ при $x_1=5; x_2=0$;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 \geq -5, \\ -x_1 + x_2 \leq -4, \\ x_1 + 5x_2 \leq 10, \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0.$

А) $f = 4y_1 + 3y_2 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \leq -5, \\ -y_1 + y_2 \geq -4, \\ y_1 + 5y_2 \geq 10. \end{cases}$

Б) $f = 5y_1 - 4y_2 + 10y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \geq 4, \\ 2y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 3. \end{cases}$

В) $f = 5y_1 + 4y_2 + 10y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4, \\ 2y_1 - y_2 + 5y_2 \geq 3, \end{cases}$ $y_1, y_2 \geq 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	4	6	12	160
A_2	9	2	11	8	100
A_3	5	7	3	10	40
Потреби	90	80	50	80	

А) $X = \begin{pmatrix} 90 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$; Р=1300 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 10 & 60 \\ 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 40 & 40 & 0 \end{pmatrix}$; Р=1310 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 60 & 20 & 40 & 40 \\ 0 & 60 & 0 & 40 \\ 30 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; Р=1480 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 5

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

А) A_1, A_2, A_3;
Б) A_1, A_2, A_5;
В) A_3, A_4, A_5;
Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f = 3x_1 + 3x_2$, якщо $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f_{\max} = 12$ при $x_1 = 0; x_2 = 4$;
Б) $f_{\max} = 6$ при $x_1 = 0; x_2 = 2$;
В) $f_{\max} = 15$ при $x_1 = 5; x_2 = 0$;
Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 \ge -5, \\ -x_1 + x_2 \le -4, \\ x_1 + 5x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f = 4y_1 + 3y_2 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \le -5, \\ -y_1 + y_2 \ge -4, \\ y_1 + 5y_2 \ge 10. \end{cases}$

Б) $f = 5y_1 - 4y_2 + 10y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \ge 4, \\ 2y_1 + y_2 + 5y_3 \ge 3. \end{cases}$

В) $f = 5y_1 + 4y_2 + 10y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 4, \\ 2y_1 - y_2 + 5y_2 \ge 3, \end{cases}$ $y_1, y_2 \ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X=(x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень P :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	5	2	110
A_2	7	4	6	8	100
A_3	5	1	10	11	150
Потреби	90	80	110	80	

А) $X=\begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 80 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; P=1160 (од. вартості);

Б) $X=\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 60 & 80 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; P=1360 (од. вартості);

В) $X=\begin{pmatrix} 90 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 80 \end{pmatrix}$; P=2650 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 6

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; A_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; A_3=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; A_4=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}; A_5=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А) A_1, A_2, A_3;

Б) A_1, A_2, A_5;

В) A_3, A_4, A_5;

Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f=-4x_1-4x_2$, якщо $\begin{cases} x_1+2x_2 \geq 4, \\ 5x_1+2x_2 \geq 10, \\ 2x_1-3x_2 \leq 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0.$

А) $f_{\max}=-11$ при $x_1=\dfrac{3}{2}; x_2=\dfrac{5}{4}$;

Б) $f_{\max} = -20$ при $x_1 = 0; x_2 = 5$;

В) $f_{\max}$ не існує при даних обмеженнях;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = x_1 - 3x_2 + 6x_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f = -8y_1 - 10y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \le 1, \\ 3y_1 - y_2 \ge -3, \\ y_1 + 5y_2 \ge 6. \end{cases}$

Б) $f = 8y_1 - 10y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 \le -3, \\ -y_1 - 5y_2 \le 6. \end{cases}$

В) $f = y_1 - 3y_2 + 6y_3 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \le 8, \\ 3y_1 - y_2 + 5y_2 \ge 10, \end{cases}$ $y_1, y_2 \ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	5	2	100
A_2	6	7	2	1	70
A_3	15	3	10	12	80
Потреби	90	50	60	50	

А) $X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 30 & 40 \\ 0 & 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}$; Р=840 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 50 \\ 0 & 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}$; Р=860 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 90 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$; P=1550 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 7

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

А) A_1, A_2, A_3;

Б) A_1, A_2, A_5;

В) A_3, A_4, A_5;

Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f = -5x_1 + 4x_2$, якщо $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f_{\max} = 0$ при $x_1 = 0; x_2 = 0$;

Б) $f_{\max} = 16$ при $x_1 = 0; x_2 = 4$;

В) $f_{\max} = 19$ при $x_1 = 1; x_2 = 6$;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = 4x_1 + 5x_2 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \ge -3, \\ -x_1 + 2x_2 = 7, \\ x_1 - 3x_2 \le 9, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f = 4y_1 + 5y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 \le -3, \\ -y_1 + 2y_2 \ge 7, \\ y_1 - 3y_2 \ge 9. \end{cases}$

Б) $f = -3y_1 + 7y_2 - 9y_3 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 - y_2 - y_3 \le 4, \\ -4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 5. \end{cases}$

В) $f = 3y_1 + 7y_2 + 9y_3 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4, \\ 4y_1 - 2y_2 + 3y_2 \geq 5, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	5	2	110
A_2	7	10	6	8	100
A_3	11	1	10	15	190
Потреби	90	120	110	80	

А) $X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 60 & 120 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; P=1640 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 90 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 80 \end{pmatrix}$; P=3720 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 60 & 0 \\ 0 & 80 & 30 & 80 \end{pmatrix}$; P=2800 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 8

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

А) A_1, A_2, A_3;

Б) A_1, A_2, A_5;

В) A_3, A_4, A_5;

Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f = -5x_1 + 4x_2$, якщо $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$
$x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f_{\max} = 0$ при $x_1 = 0; x_2 = 0$;
Б) $f_{\max} = 16$ при $x_1 = 0; x_2 = 4$;
В) $f_{\max} = 19$ при $x_1 = 1; x_2 = 6$;
Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = 5x_1 - x_2 + x_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 6, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \le 17, \end{cases}$
$x_1 \ge 0.$

А) $f = 5y_1 - y_2 + y_3 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \le 6, \\ 3y_1 - y_2 + 5y_3 \ge 17, \\ y_1 \ge 0. \end{cases}$

Б) $f = 6y_1 - 17y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 \le 5, \\ 3y_1 + y_2 \le -1, \\ -y_1 - 5y_2 \le 1, \end{cases}$
$y_2 \ge 0.$

.

В) $f = 6y_1 + 17y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \ge 5, \\ 3y_1 - y_2 \ge -1, \\ -y_1 + 5y_2 \ge 1, \end{cases}$
$y_1, y_2 \ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	2	3	4	150
A_2	5	9	5	1	130
A_3	2	7	6	10	140
Потреби	90	120	100	110	

А) $X = \begin{pmatrix} 0 & 120 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 90 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$; P=1020 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 100 & 0 \\ 30 & 100 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$; P=2850 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 60 & 90 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 110 \end{pmatrix}$; P=2830 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 9

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

А) A_1, A_2, A_3;

Б) A_1, A_2, A_5;

В) A_3, A_4, A_5;

Г) інший варіант.

2. Знайти максимум функції $f = x_1 + x_2$, якщо $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -13, \\ x_1 - x_2 \leq -2, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0.$

А) $f_{\max} = \frac{26}{3}$ при $x_1 = \frac{11}{3}; x_2 = 5$;

Б) $f_{\max} = 10$ при $x_1 = 4; x_2 = 6$;

В) $f_{\max} = 20$ при $x_1 = 9; x_2 = 11$;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = x_1 + x_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$

А) $f = y_1 + y_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} y_1 - 4y_2 \ge 4, \\ 3y_1 - y_2 \le 0, \\ y_1 + y_2 - 4 \le 0, \end{cases}$ $y_1, y_2 \ge 0.$

Б) $f = 4y_1 - 4y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} y_1 - 3y_2 - y_3 \ge 1, \\ -4y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \end{cases}$

В) $f = 4y_1 + 4y_3 \to \max$, якщо $\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - y_2 + y_2 \le 1, \end{cases}$ $y_1, y_2 \ge 0.$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	5	3	60
A_2	1	6	5	2	120
A_3	6	3	7	4	100
Потреби	20	110	40	110	

А) $X = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Р=760 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 50 & 40 & 10 \end{pmatrix}$; Р=810 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$; Р=1140 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Варіант 10

1. Вибрати базисні вектори в системі векторів:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А) $A_1, A_2, A_3;$

Б) $A_1, A_2, A_5;$

В) $A_3, A_4, A_5;$

Г) інший варіант.

2. Знайти мінімум функції $z = 2x_1 - 3x_2 + 1$, якщо $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0.$

А) $f_{msn} = -1$ при $x_1 = 2; x_2 = 2$;

Б) $f_{\max} = 7$ при $x_1 = 3; x_2 = 1$;

В) f_{msn} не існує при даних обмеженнях;

Г) інший варіант.

3. Записати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування: $z = x_1 + x_2 \to \max$, якщо $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -13, \\ x_1 - x_2 \leq -2, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0.$

А) $f = y_1 + y_2 \to \min$, якщо $\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \leq 13, \\ -y_1 + y_2 \geq 2, \\ -3y_1 + y_2 \geq -6. \end{cases}$

Б) $f = 13y_1 - 2y_2 + 6y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1, \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \geq 1. \end{cases}$

В) $f = -13y_1 - 2y_2 + 6y_3 \to \min$, якщо $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1, \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \geq 1. \end{cases}$

Г) інший варіант.

4. Методом мінімальної вартості знайти план $X = (x_{ij})$ перевезень вантажу у транспортній задачі й обчислити вартість перевезень Р :

Пункт постачання	Пункт споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	1	2	5	40
A_2	3	2	3	7	60
A_3	4	4	5	2	100
Потреби	45	35	55	65	

А) $X = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 5 & 0 \\ 45 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 65 \end{pmatrix}$; P=530 (од. вартості);

Б) $X = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & 50 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$; P=495 (од. вартості);

В) $X = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$; P=610 (од. вартості);

Г) інший варіант.

Дисципліна “Оптимізаційні методи і моделі” є нормативною дисципліною циклу природничонаукової та загальноекономічної підготовки бакалаврів за напрямком “Облік і аудит” та “Економіка підприємства”.

Дисципліна має практичну спрямованість на вирішення широкого спектра прикладних питань на усіх рівнях ієрархії управління щодо прийняття рішень (планів, програм, об’єктів, проектів, стратегій тощо) з урахуванням наявних економічних умов та обмежень.

Предметом вивчення дисципліни є методологія та інструментарій економіко-математичного моделювання та аналізу економічних процесів, тенденцій та причинно-наслідкових зв’язків в економіці; теоретичні та практичні питання аналізу економічного ризику.

Мета дисципліни – формування знань щодо методології та інструментарію побудови та адекватного використання різних типів економіко-математичних моделей.

Завданням дисципліни є засвоєння студентами основних принципів та інструментарію щодо постановки задач, основних методів їх розв’язування та аналізу з метою широкого використання в економіці та підприємництві.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен знати:

1) концептуальні засади, принципи і підходи до побудови економіко-математичних моделей;
2) основні класи математичних моделей, що використовуються для дослідження економічних процесів;
3) основні методи розв’язування задач.

Студент повинен уміти:

1) самостійно здійснювати постановку прикладних економічних задач;
2) визначати обсяг необхідної інформації для чіткої постановки та розв’язування прикладних економічних задач;
3) адекватно використовувати економіко-математичні моделі для розв’язування прикладних економічних задач;
4) використовувати інформаційні технології на базі ПЕОМ для розв’язування прикладних економічних задач;
5) здійснювати аналіз отриманих результатів, формувати та приймати на їх основі відповідні ефективні рішення.

Частина I. Теоретичні основи економіко-математичного моделювання

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки

1. Економіка як об’єкт моделювання, предмет та завдання дисципліни.
2. Особливості та принципи математичного моделювання економічних систем і процесів.
3. Елементи класифікації економіко-математичних моделей.
4. Етапи економіко-математичного моделювання.

Для самостійного вивчення теми рекомендується література [1,4,6,7,9,10,17,19].

Частина II. Економіко-математичні моделі та методи оптимізації

Тема 2. Основні поняття теорії та методів оптимізації

1. Характеристика задач оптимізації.
2. Модель та загальна постановка економічної задачі на оптимум.
3. Класифікація методів оптимізації та їх характеристика.

Для самостійного вивчення теми рекомендується література [1,2,15,20].

Тема 3. Лінійні оптимізаційні економіко-математичні моделі та методи. Лінійне програмування

1. Загальна лінійна оптимізаційна математична модель. Лінійне програмування.
2. Геометричне тлумачення ЗЛП та властивості її розв’язків.
3. Графічний метод розв’язування лінійних оптимізаційних задач.

Навчальні завдання для самостійної роботи студентів (Тема 3)

Тема 4. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки лінійних оптимізаційних задач

1. Правила побудови двоїстих моделей оптимізаційних задач.
2. Основні теореми двоїстості.
3. Економічне тлумачення двоїстої задачі та теорем двоїстості.
4. Загальна характеристика методів розв’язування задач лінійного програмування.
5. Симплексний метод.
6. Метод штучного базису.

Навчальні завдання для самостійної роботи студентів (Тема 4)

Тема 5. Моделі та методи цілочислової оптимізації

1. Область застосування задач цілочисельного лінійного програмування

2. Загальна модель цілочисельної задачі лінійного програмування.

3. Розв’язування задачі цілочисельного програмування. Метод Гоморі.

4. Комбінаторні методи. Метод гілок і меж.

Навчальні завдання для самостійної роботи студентів (Тема 5)

Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі та методи

1. Економічна постановка задач, що приводять до нелінійних оптимізаційних моделей.

2. Геометричне тлумачення задачі НП.

3. Методи знаходження безумовного екстремуму функції багатьох змінних

4. Методи знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних для задач з обмеженнями-рівностями. Метод множників Лагранжа. Економічна інтерпретація множників Лагранжа.

5. Розв’язання задач опуклого та угнутого програмування. Теорема Куна-Таккера.

Тема 7. Аналіз та управління ризиком в економіці

1.Ризик як економічна категорія. Концептуальні засади ризикології.

2.Основні підходи щодо кількісного аналізу ризику.

3.Системний підхід в управлінні ризиком.

4.Зовнішні та внутрішні способи зниження (оптимізації) ступеня ризику.

Тема 8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику

1.Загальні підходи щодо кількісної оцінки ступеня ризику. Міра ризику як векторна величина.

2.Кількісні показники ступеня ризику в абсолютному вираженні.

3.Кількісні показники ступеня ризику у відносному вираженні.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Абстрактна модель

- знакова модель. Розрізняють знакові *математичні моделі*, в яких елементи, властивості чи явища виражаються математичними засобами (аналітично, статистично, алгоритмічно); *словесні (вербальні)* – логічні об’єкти, які замінюють оригінал і виражають його властивості за допомогою певної системи знаків і символів (за допомогою тексту на звичайній мові); *графічні* – монограми, креслення, схеми, графіки, діаграми.

Адекватна модель

- до об'єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення (на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу) відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому середовищі.

Азартні ігри

-ігри, в яких результат є невизначеним виключно завдяки випадковим причинам. Прикладом таких ігор може слугувати гра в кості, рулетка тощо.

Активний вплив на систему

- полягає у знаходженні такого співвідношення між вхідними і внутрішніми станами системи, за яких досягається найкращий стан виходів, тобто реалізується цільова функція системи.

Алгоритм розв’язування ЗЛП симплекс-методом

- передбачає наступні кроки:

1. Формулювання задачі ЛП в канонічній формі.

2. Визначення початкового опорного плану.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність. Здійснюється в симплексних таблицях за допомогою критерію оптимальності.

4. Перехід до іншого опорного плану виконується за допомогою симплексних перетворень (перетворень Жордана-Гаусса з використанням критерію оптимальності).

Алгоритмічне (імітаційне) моделювання

- (може бути як детермінованим, так і стохастичним) — це вид комп'ютерного моделювання, для якого характерним є відтворення на комп'ютері (імітація) процесу функціонування досліджуваної складної системи. Тут імітуються (з використанням аналітичних залежностей і моделей) елементарні явища, що становлять процес, зі збереженням їхньої логічної та семантичної структури, послідовності плину в часі, що дозволяє отримати нову інформацію про стан системи у задані моменти часу.

Алгоритмічна форма

— зображення математичної моделі у вигляді послідовності дій. (Симплекс-метод).

Аналіз систем

- пізнання закономірностей, їх функціонування за заданої структури.

Аналітичне моделювання

- характеризується тим, що процеси функціонування елементів системи записують у вигляді деяких математичних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференціальних, кінцево-різницевих тощо) чи логічних умов.

Аналітична форма

— зображення математичної моделі у вигляді формул та співвідношень між математичними виразами.

Базис (база)

- така мінімальна система елементів множини, що кожний елемент цієї множини можна подати у вигляді лінійної комбінації зазначених (базисних)елементів.

Базисні змінні

-визначені одиничні лінійно-незалежні вектори, які утворюють базис, і змінні задачі, які відповідають їм.

Балансові змінні

- це допоміжні невід'ємні змінні, щоб обмеження-нерівність можна було б представити у вигляді обмеження-рівності.

Гомоморфна модель

в якій віддзеркалюються не всі, а лише суттєві властивості об'єкта-оригіналу виходячи із цілей дослідження, узятої системи гіпотез тощо.

Динамічність економічних процесів

- полягає в зміні у часі параметрів і структури економічних систем під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх чинників (навколишнього середовища), часу.

Динамічні моделі

- характеризують зміни економічних процесів у часі. За тривалістю розглянутого періоду розрізняють моделі короткотермінового (до року), середньотермінового (до 5 років), довготермінового (10—15 і більше років) прогнозування і планування. Час в економіко-математичних моделях може змінюватися неперервно або дискретно.

Дескриптивні моделі

- відповідають на запитання: як це відбувається або як це найімовірніше може розвиватися далі? Інакше, вони лише пояснюють факти, які спостерігалися, чи дають прогноз. Застосування дескриптивного підходу в моделюванні економіки пояснюється необхідністю емпіричного виявлення суттєвих залежностей в економіці встановлення статистичних закономірностей економічної поведінки соціальних груп, вивчення ймовірних шляхів розвитку якихось процесів за незмінних умов чи таких, що відбуваються без зовнішніх впливів. Прикладом дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на підставі опрацювання статистичних даних.

Чи є економіко-математична модель дескриптивною або нормативною — це залежить не лише від її математичної структури, а й від характеру використання моделі. Наприклад, модель міжгалузевого балансу є дескриптивною, якщо вона використовується для аналізу пропорцій минулого періоду. Але ця сама модель стає нормативною, якщо застосовується для розгляду збалансованих варіантів розвитку народного господарства які задовольняють кінцеві потреби суспільства.

Дослідження операцій

Дослідження операцій - прикладне направлення математики, що розглядає практичну методику кількісного обґрунтування прийняття оптимальних рішень за змістовною ознакою економічних задач. З великої різноманітності практичних задач різних сфер економічної діяльності можна виділити наступні основні класи задач дослідження операцій: задачі сіткового планування та управління, задачі масового обслуговування, задачі управління запасами, задачі розподілу ресурсів, задачі ремонту та заміни обладнання, задачі складання розкладів (календарного планування), задачі планування та розміщення, задачі вибору маршруту, або задачі мереж, задачі теорії ігор тощо. Особливістю дослідження операцій вважається їх міждисциплінарний, комплексний характер, який передбачає системний підхід до прийняття рішення.

Економіко-математична модель

- це концентрований вираз найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь, відношень формальної логіки тощо.

Економічна система

- це складна, ймовірнісна, динамічна система, яка належить до класу кібернетичних, тобто керованих систем.

Економічний ризик

— це об'єктивно-суб'єктивна категорія у діяльності суб'єктів господарювання, що пов'язана з подоланням невизначеності та конфліктності в ситуації неминучого вибору. Вона відображає міру (ступінь) відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, міру невдачі (збитків) з урахуванням впливу керованих і некерованих чинників, прямих та зворотних зв'язків стосовно об'єкта керування.

Екстремум

- це поняття об'єднує поняття максимуму і мінімуму. Дослідження функцій на екстремум є однією з важливих задач диференціального числення. Деякі з найпростіших задач можна розв'язати елементарними методами.

Елемент системи

- об'єкт, який виконує певну функцію і не підлягає подальшому розкладенню у рамках сформульованої задачі. Його зв'язок із зовнішнім оточенням моделюється за допомогою входів (***екзогенних*** величин) і виходів (***ендогенних*** величин). Елемент розглядається як перетворювач входів **X** у виходи **Y**. Зрозуміло, що елемент системи неподільний лише з позицій дослідника. Систему також можна уявити як окремий елемент. Кожний елемент має структуру і характеризується внутрішнім станом **Q.**

Емерджентність

— це результат виникнення між елементами системи так званих синергетичних зв'язків, які забезпечують збільшення загального ефекту до більших обсягів, ніж сума ефектів окремо взятих елементів системи, що діють (функціонують) незалежно. Тому соціально-економічні системи потрібно досліджувати й моделювати зважаючи на синергізм.

Загальна форма ЗЛП

- модель, яка має лінійну цільову функцію та обмеження у вигляді системи лінійних нерівностей або рівнянь і нерівностей з невід'ємним вектором вільних членів і невід'ємними змінними

Задачі лінійного програмування

- задачі дослідження конкретних виробничо-господарських ситуацій, які можна тлумачити як оптимальне використання обмежених ресурсів (задача оптимального плану виробництва, складання денного раціону годівлі худоби, розкрою тощо).

Задачі оптимізації

- це такі задачі людської діяльності, де виникає проблема вибору, яка підпорядкована досягненню певної мети. Проблема пошуку оптимального розв'язку зводиться до того, щоб побудувати адекватну модель задачі та підібрати ефективний метод її розв'язування.

Задача цілочислового програмування

- задача математичного програмування, змінні якої приймають цілі значення. Цілочисельні задачі математичного програмування можуть бути лінійними, нелінійними та мішаними. Якщо цілочисельні умови накладаються тільки на частину змінних задачі, то її називають частково цілочисельною.

Інваріантна форма

— зображення математичної моделі безвідносно до методів, за допомогою яких може розв'язуватись поставлена задача моделювання.

Інформаційна ситуація

— певний ступінь градації невизначеності навколишнього середовища в одному із можливих станів заданої множини, якою володіє суб'єкт управління на момент прийняття рішення.

Ітерація

- (від латинського iteration – повторення) результат повторного застосування якої-небудь математичної операції. Ітерації часто застосовують при розв'язуванні рівнянь методом послідовних наближень, вони відіграють важливу роль у різних розділах математики та прикладних науках.

Ітераційні методи

- розв'язування задач лінійного програмування розроблені в теорії ігор та опуклому програмуванні. Їх доцільно використовувати в тих випадках, коли потрібно досить швидко отримати наближений до оптимального розв'язок задачі. Вони менш чутливі до випадкових збоїв та помилок обчислень, ніж скінченні методи ЛП.

Представником першого класу ітераційних методів ЛП є метод Брауна-Робінсона. Розв'язування пари двоїстих задач ЛП зводиться до обчислення оптимальних мішаних стратегій двох гравців у матричній грі двох осіб з нульовою сумою.

Другий клас ітераційних методів ЛП - методи градієнтного типу - використовують принципи і процедури розв'язування задач опуклого, зокрема, квадратичного програмування. Ряд ітераційних методів лінійного програмування зводять умовну лінійну екстремальну задачу до безумовної опуклої задачі.***Канонічна форма ЗЛП***

- модель, яка має лінійну цільову функцію та обмеження у вигляді системи лінійних рівнянь з невід'ємним вектором вільних членів і невід'ємними змінними. Взагалі – найпростіший, найзручніший для вивчення вигляд.

Квадратична форма

- форма другого степеня. К. ф. зустрічається в різних розділах вищої математики і прикладних науках

Комп'ютерне моделювання

- характеризується тим, що математична модель системи (використовуючи основні співвідношення аналітичного моделювання, — на цьому необхідно зробити наголос) подається у вигляді деякого алгоритму та програми, придатної для її реалізації на комп'ютері, що дозволяє проводити з нею обчислювальні експерименти.***Лінійне програмування (ЛП)***

– область математики, що розроблює теорію та числові методи розв'язування задач пошуку екстремуму лінійної функції багатьох змінних, що обумовлені множиною лінійних обмежень (рівнянь та нерівностей).

Лінія рівня

- геометричне місце точок, в яких дана функція кількох змінних набуває одного значення.

Локальний

- локальними називають властивості функцій (або інших об’єктів), які стосуються певного місця, певної точки або околу точки. Наприклад, локальний екстремум.

Математичне програмування

- це прикладне направлення математики, яке займається вивченням задач оптимізації та розробкою теорії та методів їх розв’язання. В основу класифікації цих задач покладено вид математичних залежностей моделі. Наприклад, задачі лінійного програмування, задачі цілочисельного програмування, задачі динамічного програмування, задачі нелінійного програмування тощо.***Метод навчання***

- це упорядкована за певними принципами система цілеспрямованих послідовних дій суб'єктів навчання над свідомо визначеним предметом діяльності із застосуванням відповідних засобів, внаслідок чого отримують очікувані результати навчання (Козаков В.А., Дзвінчук Д.І. Психолого-педагогічна підготовка фахівців у непедагогічних університетах: К.: ЗАТ «НІЧЛАВА», 2003. – С. 35.).

Методи оптимізації

- це методи, що розроблюються різними розділами прикладної математики для кількісного обґрунтування прийняття рішень. Їх застосування в технології пошуку оптимальних розв'язків економічних проблем поєднує здібності людини розв'язувати складні, неформалізовані задачі з можливостями математики та комп'ютерного моделювання.***Метод штучного базису***

- застосовується в тих випадках, коли для канонічної форми задачі ЛП не означений початковий опорний план. Тоді симплекс-методом розв'язується перетворена задача зі штучним базисом. Вона утворюється з початкової задачі додаванням до лівої частини векторного рівняння-обмеження стількох штучних одиничних векторів з відповідними невід'ємними штучними змінними, щоб створена матриця містила систему m одиничних лінійно-незалежних векторів. У цільову функцію початкової задачі штучні змінні входять з досить великими від'ємними коефіцієнтами ($-M$), у разі максимізації Z, або досить великими додатними коефіцієнтами $+M$, у разі мінімізації Z. Після виключення штучних змінних з базису при застосуванні симплекс-методу, у наступних таблицях відповідні стовпці теж виключають.

Якщо в оптимальному плані задачі зі штучним базисом усі штучні змінні дорівнюють нулю, то відповідний опорний план є оптимальним планом початкової задачі. Якщо оптимальний план задачі зі штучним базисом містить хоч одну штучну змінну або задача нерозв'язна, то початкова задача також не має розв'язків.— це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває найважливіші риси і властивості оригіналу для певної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Моделювання

- є процесом побудови, вивчення та застосування моделей. Воно є невід’ємною частиною будь-якої цілеспрямованої діяльності.

Моделювання економіки

- як науковий напрям сформувався у 60-ті роки XX століття, хоча має давню й багату передісторію, зокрема, праці Франсуа Кене за часів короля Людовіка XV. В основу моделювання економіки, окрім економічних, покладено низку таких фундаментальних дисциплін, як математика, теорія ймовірностей, теорія систем, інформатика, статистика, теорія автоматичного управління тощо.

Модель

— це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває найважливіші риси і властивості оригіналу для певної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Невизначеність

— фундаментальна характеристика недостатньої забезпеченості процесу прийняття економічних рішень знаннями стосовно певної проблемної ситуації. Невизначеність можна трактувати та деталізувати як недостовірність (ефект «марева»), неоднозначність (ефект «нечіткості», «розпливчастості»).

Невизначеність системи

щодо розвитку економічних явищ (процесів). Економічні явища та процеси мають випадковий характер. Невизначеність притаманна економічним системам, тому для вивчення їх потрібно застосовувати економіко-математичні моделі на базі теорії ймовірностей і математичної статистики, а також на базі теорії нечітких (розпливчастих) множин тощо. Важливою також є розбудова ризикології (науки про економічний ризик тощо.***Нелінійне програмування***

- це математичний апарат для пошуку екстремуму нелінійних функцій, заданих з певними обмеженнями. До типових галузей його застосування можна віднести задачі планування і управління промисловим виробництвом, товарними ресурсами та інвестиціями, в яких передбачається, що ефективність виробництва або використання ресурсів змінюються не пропорційно до його обсягів; ефективності використання ресурсів за зростання виробництва, зміни попиту і споживання населення, збільшення виробництва, зміни попиту населення зі зростанням доходів тощо.

Нормативні моделі

- відповідають на запитання: як це має бути? Тобто передбачають цілеспрямовану діяльність. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального (раціонального) планування, що формалізують у той чи інший спосіб мету економічного розвитку, можливість і засоби її досягнення.

Чи є економіко-математична модель дескриптивною або нормативною — це залежить не лише від її математичної структури, а й від характеру використання моделі. Наприклад, модель міжгалузевого балансу є дескриптивною, якщо вона використовується для аналізу пропорцій минулого періоду. Але ця сама модель стає нормативною, якщо застосовується для розгляду збалансованих варіантів розвитку народного господарства які задовольняють кінцеві потреби суспільства.

Процес моделювання

- включає три елементи, що утворюють систему:

* суб'єкт дослідження (системний аналітик);

* об'єкт дослідження;

* модель, яка опосередковує відносини між об'єктом, який вивчається, та суб'єктом, який пізнає (системним аналітиком). Побудова моделі поєднується з такими категоріями, як *абстракція, аналогія, гіпотеза.*

Синтез моделі

- є побудова такої структури системи, за якої найкращим чином будуть реалізовані задані її функції.

- комплекс взаємопов'язаних елементів, які спільно реалізують певні цілі. Складність системи визначається кількістю елементів, які до неї входять, зв'язками між ними, а також взаємовідношеннями між системою і зовнішнім оточенням.

Системний аналіз

- розглядає загальні принципи дослідження складних об'єктів із врахуванням їх системного характеру.

Статичні моделі

-у яких усі залежності відносять до одного моменту або періоду часу.

Статистичне моделювання

— це вид комп'ютерного моделювання, який дозволяє отримати статистичні дані відносно процесів у модельованій системі.

Стаціонарні точки

– точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю.

Структурні моделі

- У дослідженнях на виробничо-господарському рівні частіше застосовуються структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають внутрішні залежності між елементами систем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Один і той самий об'єкт може описуватись одночасно і структурною, і функціональною моделями.***Суб'єкт ризику***

- особа (або колектив), яка зацікавлена в результатах керування об'єктом ризику і має компетенцію прийняття рішень щодо об'єкта ризику.

Схемна форма

— зображення математичної моделі у вигляді графів, таблиць, діаграм.

Тест дидактичний (педагогічний)

- підготовлений згідно з певними вимогами комплекс стандартизованих завдань, що дають змогу виявити в учасників тестування компетенції, які піддаються певному оцінюванню за заздалегідь встановленими критеріями (Психологія діяльності та навчальний менеджмент: Навчальний посібник. / М.В. Артюшина, Л.М. Журавська, Л.А. Колесніченко та ін.; За заг. ред. М.В.Артюшиної. – К.: КНЕУ, 2008. – С. 231.).

Тестові завдання

– певні типи дій тих, хто навчається, які мають бути прийняті за свідчення досягнення результату (Психологія діяльності та навчальний менеджмент: Навчальний посібник. / М.В. Артюшина, Л.М. Журавська, Л.А. Колесніченко та ін.; За заг. ред. М.В.Артюшиної. – К.: КНЕУ, 2008. – С. 231.).

Функціональні моделі

- широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкта («вихід») впливають шляхом зміни «входу». Прикладом може слугувати модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин. Один і той самий об'єкт може описуватись одночасно і структурною, і функціональною моделями.

Числове моделювання

- це вид комп'ютерного моделювання, в якому для побудови комп'ютерної моделі використовуються методи обчислювальної математики, а обчислювальний експеримент полягає в числовому розв'язанні деяких математичних рівнянь за заданих значень параметрів і початкових умов.

Література

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. пос. для студ.экон. спец. вузов. - Москва: Высш. шк., 1986. – 319 с.

2. Александрович В.М. Математические модели в планировании производства: Учебное пособие / В.М. Александрович; Алт. гос. техн. ун-т, БТИ. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2009. – 196 с.

3. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. / Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.

4. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации./ Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. – К.: Вища школа, 1983. – 512 с.

5. Боровик О.Л. Дослідження операцій в економіці: Навч. посібник / Боровик О.Л., Боровик Л.В. – К.: Центр учбової літератури, 2007.– 424 с.

6. Боровиков В. Statistica: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. – СПб.: Питер, 2001. – 656 с.

7. Браславец М.Е. Математическое моделирование экономических процессов в сельскохозяйственном производстве. / Браславец М.Е., Кравченко Р.Г. - М.: Колос, 1972. - 589 с.

8. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: ВЦ Академія, 2003. - 520 с.

9. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: ВЦ Академія, 1998. – 272 с.

10. Вітлінський В.В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни. / Вітлінський В.В., Верченко П.І.— К.: КНЕУ, 2000. — 292 с.

11. Вітлінський В.В. Ризик у менеджменті. / Вітлінський В.В.,

Наконечний С.І.– К.: Борисфен, 1996. – 336 с.

12. Вітлінський В.В. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник. / Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Шарапов О.Д. - К.: ІЗМН, 1996. – 400 с.

13. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. – К., 2001. – 342 с.

14. Гетманцев В.Д. Математика для економістів. Дослідження операцій. Математичне програмування. – К.: КНЕУ, 2006. – 308 с.

15. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их приложение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.

16. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. - М.: Наука, 1976. – 224 с.

17. Ермольев Ю.М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. / Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. - М.: Физматгиз, 1979. – 255 с.

18. Зайденман И.А. Математика в сетевом планировании. / Зайденман И.А., Маргулис А.Я. – М.: Изд-во «Знание», 1967. – 48 с.

19. Зайченко Ю.П. Исследование операций. - Київ: Вища школа, 1988. – 320 с.

20. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Сборник задач. / Зайченко Ю.П., Шумилова С.А - Київ: Вища школа, 1990. -

21. Замков О.О. Математические методы в экономике. / Замков О.О, Толстонятенко А.В., Черемних Ю.Н. - М.: ДНСС, 1997.

22. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория: Пер. с англ. - М.: Прогресс,1975.

23. Исследование операций в экономике: / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. – М.: ЮНИТИ, 2002. - 407 с.

24. Кабак Л.Ф., Суворовский А.А. Математическое программирование. - К.: ІМКВО, 1992.

25. Калихман М.Л. Линейная алгебра и программирование. – М.:

Высшая школа, 1967. – 428 с.

26. Калихман М.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975. – 276 с.

27. Карагодова О.О. Дослідження оперцій: Навч. посібник. / Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.

28. Карасев А.І. Математические методы и модели в планировании. / Карасев А.І., Кремер Н.Ш., Савельева Т.Н. - М.: Экономика, 1987.

29. Крупка М.І. Основи економічної теорії. / Крупка М.І., Островерх П.І., Реверчук С.К. Основи економічної теорії / За ред. канд. екон. наук, доц. П. Островерха, С. Реверчука. Навч. посібник. – Львів: Приватне видавничо-поліграфічне підприємство “Діалог”, 1997. – 276 с.

30. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0.- СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.- 384 с.

31. Ляшенко И.Н., Кароагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.В. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.

32. Малихин В.І. Математическое моделирование экономики. - М.: Изд-во УРАО, 1998.

33. Лавренчук В.П. Вища математика. Частина 3: Навч. пос. / Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. – Чернівці: Рута, 2002. – 169 с.

34. Міхайленко В.М Математичний аналіз для економістів: Навч. посіб. / Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. – 2-ге вид. – К., Вид-во Європейського університету, 2002. – 298 с.

35. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 312 с.

36. Ржевський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій. – К.: Академвидав, 2006. – 560 с.

37. Романюк Т.П. Математичне програмування.: Навч. посібник. / Романюк Т.П., Терещенко Т.О., Присенко Г.В., Городкова І.М.– К. ІЗМН,

1996. – 212 с.

38. Савченко О.Г. Економіко-математичне моделювання: [навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисципліни] / Савченко О.Г., Валько Н.В., Кузьмич Л.В. - Херсон: РВЦ «Колос», 2011. – 179 с.

39. Савченко О.Г. Методичні вказівки та варіанти контрольної роботи з математичного програмування. / Савченко О.Г., Малік Я.Г., Плоткін С.Я. – Херсон: вид-во ХДАУ, 2010. – 35 с.

40. Таха Х. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом „Вильямс", 2001. - 912 с.

41. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. - М.: Статистика, 1988. – 232 с.

42. Тунеев М.М. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. / Тунеев М.М., Сухоруков В.Ф - М.: Колос, 1977. - 224 с.

43. Ушкаренко В.О. Використання персональних комп'ютерів для розв'язування задач оптимізації сільськогосподарського виробництва: Навч. посібник / Ушкаренко В.О., Коваленко В.П., Плоткін С.Я., Поляков М.Г. - Херсон, 2001.- 94 с.

44. Черняк А.А. Математика для экономистов на базе Mathcad / Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. - СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 496 с.

45. Шарапов О.Д. Системний аналіз: Навч. посібник / Шарапов О.Д., Терехов Л.П., Сіднев С.П. - К.: Вища школа, 1993.

46. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебн. пособие для вузов / Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайнтбегов Д.М. и др.; Под ред. Федосеева В.В. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

47. Ястремский А.И. Стохастические модели математической экономики. – К., 1983. – 216 с.

48. Ястремський О. Моделювання економічного ризику. - К.: Либідь, 1992. – 200 с.

Навчально-методичне видання

Савченко Олександр Григорович
Валько Наталія Валеріївна
Кузьмич Людмила Василівна
Кавун Галина Михайлівна

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ
Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни

ISBN 978-966-630-095-2

Технічний редактор – Осадчий А.А.

Підписано до друку 07.08.2014. Формат 60x90/16.
Папір офсетний. Друк різографія. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 27. Наклад 500 прим. Зам. № 28.

Віддруковано з готових оригінал-макетів в ТОВ "Айлант"
Свідоцтво про реєстрацію ХС №1 від 20.08.2000 р.
73000, м. Херсон, пров. Пугачова, 5/20
тел.: 49-33-48.