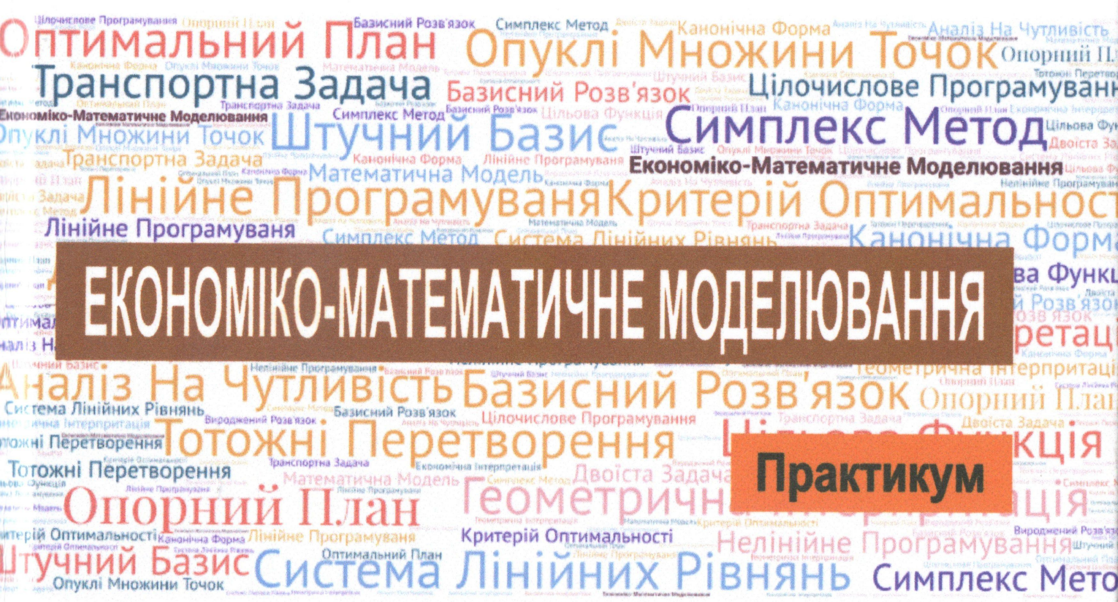
Н.В. Валько, Л.В. Кузьмич, О.Г. Савченко



ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Практикум

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний університет

Н.В. Валько
Л.В. Кузьмич
О.Г. Савченко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧИЙ ПОСІБНИК

Херсон 2019

УДК 519.866 (076)
В16

Рекомендовано до друку Ученою радою ХДУ (протокол № 7 від "21" 02. 2019 р.).

Рецензенти:
Танклевська Н.С., доктор економічних наук, професор
(ДНВЗ «Херсонський державний аграрний університет»),
Селіванов С.Є., доктор технічних наук, професор
(Херсонська державна морська академія).

Валько Н.В., Кузьмич Л.В., Савченко О.Г.
В16 ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. ПРАКТИКУМ: Навчально-методичний посібник / – Херсон: Айлант, 2019. – 140 с.
ISBN 978-966-630-228-4

Навчально-методичний посібник відповідає обсягу знань з економіко-математичного моделювання, зокрема математичного програмування, якими студенти мають оволодіти, щоб здобути ступінь бакалавра з економіки. Посібник містить необхідний теоретичний матеріал, методичні вказівки до розв'язування типових задач, навчальні завдання та завдання для перевірки знань з кожної теми. Розглядаються варіанти розв'язувань деяких типових задач розрахункового характеру з використання ПК. Практикум містить чимало задач прикладного характеру. Вони охоплюють майже всі теми, що вивчаються в кожному розділі, дають можливість студентові самостійно вивчити матеріал і перевірити як теоретичні знання, так і відповідні навички.

Призначено для студентів, які навчаються за спеціальностями 051 "Економіка", 072 "Фінанси, банківська справа та страхування", 073 "Менеджмент", 076 "Підприємництво, торгівля та біржова діяльність", 122 "Комп'ютерні науки", може бути корисним для студентів суміжних спеціальностей, а також аспірантам і спеціалістам, робота яких пов'язана з математичним програмуванням, математичним моделюванням і застосуванням сучасних математичних моделей в управлінні організаційними системами, інженерії програмного забезпечення, в економіці довкілля і природних ресурсів, економіці підприємства і т. п.

ISBN 978-966-630-228-4

ЗМІСТ

Вступ

У багатьох задачах прикладної математики, природознавства, економіки виникає задача відшукання максимуму або мінімуму деякої функції. Наприклад, яка максимальна швидкість, з якою тканини людини можуть забезпечуватися киснем? Яка потреба у харчуванні для мінімальних витрат енергії людини? Яка максимальна біомаса, яку може підтримувати дана екосистема? Яким повинен бути план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток від її реалізації? Скільки товарів певного виду потрібно виготовити, щоб рентабельність була найвищою? Багато економічних, екологічних, природознавчих проблем, наприклад, оптимізації, внутрішнього зв'язку прогнозів, вибору найефективніших інвестиційних рішень і т.п. можна розв'язати за допомогою математичних методів.

У системі економічної освіти значна роль відведена курсу економіко-математичного моделювання з циклу економіко-математичної та загальноекономічної бакалаврської підготовки фахівців за напрямами з економіки і підприємництва, обліку і аудиту, менеджменту.

Даний посібник містить стислий опис основних понять, методичні поради щодо розв'язування типових задач, набір навчальних задач і задач для перевірки знань, наведені питання для самоперевірки знань. Окремо подаються завдання для контролю знань у вигляді індивідуальних завдань з курсу „Економіко-математичне моделювання”. У посібнику розглядаються питання, які традиційно входять до курсу „Економіко-математичне моделювання" такі, як основи теорії лінійного та цілочислового програмування, методи розв'язування спеціальних задач лінійного програмування.

Основні поняття і приклади дослідження операцій

Сукупність математичних методів, що застосовуються для обґрунтування рішень у всіх галузях цілеспрямованої людської діяльності, прийнято об'єднувати під загальною назвою “Дослідження операцій”. Ця наука зобов'язана своєю появою і розвитком створенню й удосконалюванню електронно-обчислювальних машин.

Операцією називають будь-яку цілеспрямовану й керовану дію.

Розглянемо декілька типових задач дослідження операцій.

1. *Задача про раціон.* Скласти добовий раціон мінімальної собівартості для годівлі тварини виходячи з наявності кормів та вимог поживності.

2. *Задача оптимального використання сировини.* Підприємство виробляє продукцію кількох видів. Запаси сировини, норми витрат кожного виду сировини на виготовлення кожного виду продукції і прибуток від її реалізації задані. Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

3. *Транспортна задача.* Потрібно перевезти визначену кількість однорідного вантажу від постачальників до споживачів. Виходячи з тарифів на перевезення вантажу скласти план перевезень з мінімальною собівартістю.

4. *Задача про сітковий графік.* Необхідно провести комплекс робіт при наявності обмеженої кількості матеріальних ресурсів. Скласти оптимальний сітковий графік проведення робіт, тобто розподілити техніку і людей таким чином, щоб завершити роботи в мінімальний термін.

На першому етапі дослідження операції необхідно скласти її математичну модель. Математична модель – це система математичних формул, яка з більшою або меншою точністю описує процеси, які проходять у досліджуваній системі. При цьому дуже часто різні явища можуть мати однакову математичну модель. Проте при вирішенні практичних задач недостатньо мати математичну модель досліджуваної системи, необхідно також уміти використовувати її для прийняття рішень по оптимальному керуванню такою системою.

Розділ 1
Тема 1. Побудова математичної моделі задачі лінійного програмування

1.1. Постановка задач лінійного програмування

Розв'язування задач планування господарства, підвищення ефективності виробництва, економії ресурсів, покращення методів економічних розрахунків та їх обґрунтування дають можливість вивчати закономірності ринкової економіки, розробляти нові методи економічних розрахунків і аналізу, методів планування. При вивченні складних процесів і явищ, коли проведення експериментів вимагає значних витрат або взагалі неможливі, застосовується моделювання. Значну роль тут відіграє використання сучасних інформаційних технологій.

В основі економіко-математичних досліджень лежить ***математичне моделювання*** економічного процесу, що вивчається, тобто описання кількісних закономірностей за допомогою математичних виразів. Математична модель є абстрактним відображенням реального процесу, що з більшою чи меншою точністю характеризує його.

Універсального методу складання математичної моделі конкретної економічної задачі не існує. Але *процес побудови математичної моделі* для поставленої задачі можна описати наступним ***алгоритмом***:

1. Створення функціональної (наочної, описової) моделі, тобто формування основних законів, що пов'язують об'єкти досліджуваного явища. При цьому реальне явище спрощується, схематизується. Функціональна модель повинна відбивати основні риси явища, виходячи з цільової спрямованості операції.
2. Вибираються параметри моделі, які можна розбити на три групи:

а) задані, заздалегідь відомі фактори (умови, обмеження) $\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_k$, на які ми впливати не можемо;

б) невідомі (випадкові) фактори $\beta_1; \beta_2; ...; \beta_l$, значення яких не можна передбачити заздалегідь;

в) фактори, що залежать від нас (елементи розв'язку), $x_1; x_2; ...; x_n$, котрі ми у відомих межах можемо вибирати за своїм розсудом.

3. Складають систему обмежень і зв'язків між параметрами у вигляді рівнянь, нерівностей і т. д., що адекватно відбивають закони та зв'язки функціональної моделі:

$$\Phi_i(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_k; \beta_1; \beta_2; ...; \beta_l; x_1; x_2; ...; x_n) = 0, \quad i = \overline{1,m} \text{ або}$$

$$\Phi_i(x_1; x_2; ...; x_n) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Усякий певний вибір параметрів, що залежать від нас, $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, який задовольняє даній системі обмежень, називають *допустимим розв'язком (планом)*. Множину всіх допустимих у даній операції розв'язків називають *областю* *допустимих розв'язків* (ОДР = G).

4. Для вибору розв'язку, що найбільш ефективно реалізує ціль операції, необхідно визначити кількісний критерій, який називають показником ефективності операції. На цій стадії складають *цільову функцію* залежності показника ефективності від параметрів моделі, оптимальне (максимальне або мінімальне) значення якої необхідно найти: $F = F(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

Очевидно, що моделювання – циклічний процес, тобто за першим описаним циклом може настати другий, третій, …, щоб розширити, уточнити знання про досліджуваний об'єкт або явище, а їхню модель – удосконалити.

Для пошуку оптимального розв'язку застосовують спеціальні методи цілеспрямованого перебору, що розроблюються зокрема, в спеціальному розділі математики – "Математичне програмування".

У загальному випадку задачу математичного програмування можна поставити таким чином. Знайти найбільше (найменше) значення цільової функції:

$$F(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to \max(\min) \qquad (1.1.1)$$

на допустимій множині G, де G задається системою обмежень у вигляді нерівностей і (або) рівнянь:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (<, >, \le, \ge, \ne)\ 0, \text{ де } i = \overline{1, m} \qquad (1.1.2)$$

Якщо усі функції F і g_i – лінійні, то задачу (1.1.1) - (1.1.2) називають задачею лінійного програмування, у протилежному випадку говорять про нелінійне програмування. Якщо область G складається з окремих ізольованих точок, то говорять про дискретне або цілочислове програмування. Дослідженням багатокрокових операцій займається динамічне програмування.

Серед різних математичних моделей економічних процесів особливе місце займають так звані ***лінійні моделі***, тобто моделі, в яких математичні залежності (рівняння, нерівності) лінійні відносно всіх змінних величин, які включені у модель. Основою для розробки лінійних математичних методів дослідження операцій служить математичне програмування, результати застосування якого призвели до значних успіхів при розв'язуванні широкого кола задач у сферах промислового або аграрного виробництва, військової справи, економічних досліджень, транспорту і інших.

Приклади на створення математичної моделі

Приклад 1. Задача оптимального використання сировини.

Цех випускає продукцію двох видів P_1, P_2 використовуючи сировину 3 видів S_1, S_2, S_3. Запаси сировини, норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці кожного виду продукції і прибуток від реалізації кожного виду продукції задано в табл. 1.1.

Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації усієї продукції.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1 і x_2 відповідно планову кількість випуску продукції видів P_1 і P_2. Обмеження по витратам сировини видів S_1, S_2, S_3 задаємо у вигляді нерівностей відповідно: $2x_1 + x_2 \le 19$, $x_1 + 2x_2 \le 13$ і $x_1 + 3x_2 \le 18$. Також треба ввести додаткові обмеження невід'ємності $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$.

Таблиця 1.1

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		Запаси сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	2	1	19
S_2	1	2	13
S_3	1	3	18
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн.	5	7	–

У якості показника ефективності вибираємо прибуток від реалізації усієї продукції і складаємо цільову функцію: $f = 5x_1 + 7x_2 \to \max$.

Таким чином, задача оптимального використання сировини приводить до моделі лінійного програмування:

$$f = 5x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19 \\ x_1 + 2x_2 \le 13, \quad x_{1,2} \ge 0. \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$$

Цю задачу можна назвати ще задачею про прийняття рішень відносно прибутковості виробництва.

Приклад 2. Задача про раціон.

Для годівлі тварин використовують два види кормів K_1 і K_2. Мінімально необхідна добова норма поживних речовин S_1, S_2, S_3, їх кількість у 1 кг кожного виду корму і собівартість одного кілограма корма наведені у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Поживні речовини	Кількість поживних речовин у 1 кг корму		Мінімальна добова норма
	K_1	K_2	
S_1	2	1	7
S_2	1	2	8
S_3	1	3	9
Собівартість 1 кг корму	5	6	–

Скласти добовий раціон мінімальної собівартості.

Складемо математичну модель задачі. Введемо у раціон x_1 кг корму виду K_1 і x_2 кг корму виду K_2. Обмеження по дотриманню нормативів отримання поживних речовин видів S_1, S_2, S_3 матимуть вигляд відповідно: $2x_1 + x_2 \ge 7$, $x_1 + 2x_2 \ge 8$ і $x_1 + 3x_2 \ge 9$. Додаткові обмеження невід'ємності: $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$. Цільова функція – собівартість раціону: $f = 5x_1 + 6x_2 \to \min$.

Тобто задача складення оптимального раціону годівлі тварин також приводить до моделі лінійного програмування:

$$f = 5x_1 + 6x_2 \to \min, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \quad x_{1,2} \ge 0. \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$

1.2. Загальна і канонічна форми запису задачі лінійного програмування (ЗЛП)

ЗЛП називають задачу, яка полягає в знаходженні максимального або мінімального значення лінійної цільової функції:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min) \qquad (1.2.1)$$

при заданій системі обмежень у вигляді лінійних нерівностей і (або) рівнянь:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{matrix} \le \\ = \\ > \end{matrix} b_i, \qquad i = \overline{1,m} \qquad (1.2.2)$$

та при виконанні додаткової умови невід'ємності змінних (параметрів розв'язку):

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (1.2.3)$$

Вільні члени b_i без обмеження загальності можна також вважати невід'ємними ($b_i \ge 0$).

Задачу (1.2.1) - (1.2.3) називають *загальною* формою ЗЛП. Якщо цільова функція (1.2.1) наближується до максимуму, а система обмежень (1.2.2) складається виключно з рівнянь, то задачу (1.2.1') - (1.2.3') називають *канонічною* формою ЗЛП^

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max \qquad (1.2.1')$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (1.2.2')$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (1.2.3')$$

Перейти від загальної форми до канонічної можна наступним чином.

1. Якщо цільова функція наближується до мінімуму ($f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$), то необхідно ввести допоміжну цільову функцію з протилежним знаком ($z = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \to \max$).
2. У ліві частини нерівностей ввести додаткові невід'ємні змінні x_{n+1}, x_{n+2}, … із знаком "+", якщо знак у нерівності "≤", та із знаком "-", якщо знак у нерівності "≥". У цільову функцію додаткові змінні вводять з нульовими коефіцієнтами: $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots$

Зведемо до канонічного виду задачі з прикладів 1 і 2 (п. 1.1):

1) $f = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 13 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 18 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5}$.

2) $z = -f = -5x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 9 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5}$.

Додаткові змінні мають визначений економічний зміст. У першому прикладі змінні x_3, x_4, x_5 мають зміст залишків сировини відповідно видів S_1, S_2, S_3. У другому прикладі змінні x_3, x_4, x_5 мають зміст надлишків поживних речовин відповідно видів S_1, S_2, S_3.

1.3. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача. Фабрика виготовляє два види фарб: для внутрішніх (I) і зовнішніх (E) робіт. Продукція обох видів поступає в оптовий продаж. Для виробництва фарб використовуються 2 вихідних продукти - A та B. Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 8 і 10 тонн відповідно. Витрати A і B на 1 тонну відповідних фарб наведені в табл. 1.3. Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу I ніколи не перевищує попиту на фарбу E більше ніж на 1 тонну. Крім того, установлено, що попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни 1 т фарб складають:

Таблиця 1.3

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів (т) на тонну фарби		Максимально можливий запас, т
	Фарба Е	Фарба I	
А	1	2	8
В	2	1	10

- фарба Е – 3 тис. грошових одиниць,
- фарба I – 2 тис. грошових одиниць.

Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід (прибуток) від реалізації продукції був максимальним?

Розв'язання.

Змінні: Оскільки необхідно визначити об'єми виробництва кожного виду фарби, змінними моделі є:

x_e — добовий об'єм виробництва фарби Е (т)

x_i — добовий об'єм виробництва фарби I (т).

Цільова функція: Так як вартість 1т фарби Е становить 3000, то добовий дохід від її реалізації складе:

$3x_e$ одиниць на добу.

Аналогічно, дохід від реалізації X_i тонн фарби I складе:

$2x_i$ одиниць на добу.

У припущенні незалежності об'ємів збуту кожної із фарб загальний дохід складе:

$Z = 3x_e + 2x_i$ одиниць на добу.

Отже, можна дати наступне математичне формулювання цільової функції: визначити такі значення x_e і x_i, щоб отримати максимальну величину загального доходу.

Обмеження: При розв'язуванні задачі, що розглядається, повинні бути враховані обмеження на витрати вихідних продуктів і попит на фарби, що виготовляються. Обмеження на витрати вихідних продуктів можна записати наступним чином:

$$x_e + 2x_i \le 8, \quad \text{(для А)}, \qquad 2x_e + x_i \le 10 \text{(для В)}.$$

Обмеження на величину попиту на продукцію мають вид:

$$x_i - x_e \le 1, \qquad x_i \le 2.$$

Неявні (додаткові) обмеження полягають у тому, що об'єми виробництва продукції не можуть набувати від'ємних значень:

$$x_i \ge 0, \qquad x_e \ge 0.$$

Отже, математичну модель можна записати наступним чином:

Визначити добові об'єми виробництва (x_i та x_e) фарб I та Е (т), при яких досягається: $\max Z = 3x_e + 2x_i$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &x_e + 2x_i \le 8, \\ &2x_e + x_i \le 10, \\ &x_e + x_i \le 1, \\ &x_i \le 2, \\ &x_e \ge 0, \\ &x_i \ge 0. \end{aligned}$$

1. 4. Питання для самоперевірки

1. Що таке математична модель? Наведіть види класифікацій математичних моделей, дайте їх коротку характеристику.
2. В чому полягають етапи побудови математичної моделі?
3. Скільки прийнято форм представлення математичної моделі задачі лінійного програмування? Чим вони відрізняються?
4. Який економічний зміст мають додаткові змінні у математичній моделі ЗЛП?
5. Що називається цільовою функцією і що вона виражає економічно?

1. 5. Навчальні завдання

У задачах №№ 1.1 – 1.4 скласти економіко-математичні моделі.

№ 1.1. Для виробництва двох видів виробів А та В підприємство використовує три види сировини. Інші дані наведено в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Вид сировини	Витрати на 1 ц		Загальна кількість сировини, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одиниці виробу, г. о.	30	410	-

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальний при умові, що виробів В потрібно випустити не менше, ніж виробів А.

№ 1.2. Раціон для харчування тварин на фермі складається з двох видів кормів I та II. Один кілограм корму I коштує 80 г. о. і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму II коштує 10 г. о. і містить 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів. Скласти найбільш дешевий раціон харчування, що забезпечує жирів не менше 6 од., білків не менше 9 од., вуглеводів не менше 8 од., нітратів не більше 16 од.

№ 1.3. Необхідно розпиляти 20 колод довжиною по 5 м кожна на бруски 2 і 3 м; при цьому повинна вийти рівна кількість брусків кожного розміру. Скласти такий план розпилу, при якому буде отримане максимальне число комплектів і всі колоди будуть розпиляні (в один комплект входить по одному бруску кожного розміру).

№ 1.4. На двох автоматичних лініях випускають апарати трьох типів. Інші умови задачі наведені в табл. 1.5. Скласти такий план завантаження верстатів, щоб витрати були мінімальними, а завдання виконане не більше як за 10 діб.

Таблиця 1.5

Тип апарату	Продуктивність праці ліній, шт./ добу		Витрати на роботу ліній, гр. од./ добу		План, шт.
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	50
	6	5	100	200	40
З	8	2	300	400	50

1.6. Завдання для перевірки знань

Скласти математичну модель задачі.

№ 1.5. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виробництво одного валу робітник витрачає 3 год., однієї втулки – 2 год. Від реалізації одного валу підприємство одержує прибуток 800 тис. ум. г. о., однієї втулки – 600 тис. ум. г. о. Цех має випускати не менше 100 валів і 200 втулок. Скільки валів і втулок треба випустити, щоб одержати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу цеху становить 900 людино-годин?

№ 1.6. Будівельна дільниця кар'єру має екскаватори чотирьох типів, які повинні виконувати чотири види земляних робіт. Продуктивність машин різного типу за кожним видом роботи наведено в табл. 1.6. Розподілити екскаватори за видами робіт, забезпечивши максимальну продуктивність будівельної дільниці.

Таблиця 1.6

Тип екскаватора	Вид робіт			
	1	2	3	4
1	1,2	0,9	1,0	1,4
2	0,6	0,8	0,2	1,0
3	1,0	0,6	0,6	1,2
4	0,5	0,6	0,1	0,7

№ 1.7. Для виготовлення столів і шаф на підприємстві використовують два види деревини. Витрати сировини кожного виду (в $м^3$) на виготовлення кожного виду продукції та інші дані наведено в табл. 1.7. Скільки столів і скільки шаф має виготовити підприємство щоб забезпечити найвищу рентабельність?

Таблиця 1.7

Вид сировини	Витрати на 1 виріб		Загальна кількість сировини, $м^3$
	стіл	шафа	
I	0,3	0,12	84
II	0,1	0,2	88
Прибуток від реалізації одиниці виробу, г. о.	12	15	-

№ 1.8. Для відгодівлі тварин на фермі щоденний раціон кожної тварини включає не менше 6 одиниць поживної речовини А, 8 одиниць поживної речовини Б і 12 одиниць поживної речовини В. Для відгодівлі можна використовувати три види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі корму та вартість 1 кг корму наведені в табл. 1.8. Скласти добовий раціон мінімальної собівартості.

Таблиця 1.8

Поживні речовини / Корм	А	Б	В
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2
Вартість 1 кг корму, гр. од.	2	3	2,5

Тема 2. Застосування систем рівнянь до аналізу моделі Леонтьєва „витрати-випуск”. Матрична модель міжгалузевого балансу господарства

Застосування матричної алгебри в економічних розрахунках, ілюстрування на прикладі балансових розрахунків застосування понять лінійної алгебри. Застосування комп’ютера в роботі з балансовими моделями.

2.1. Теоретичні відомості

Розглянемо найпростішу модель „витрати - випуск” – замкнену і статичну, тобто економічну систему, що складається з n взаємопов’язаних галузей господарства. Продукція кожної галузі частково йде на зовнішнє споживання (кінцевий продукт), а частково використовується як сировина, напівфабрикати або інших засобів виробництва в інших галузях, зокрема і в даній. Цю частину продукції називають *виробничим споживанням*. Тому кожна з розглядуваних галузей є одночасно і виробником продукції (1-й стовпчик табл. 2.1), та її споживачем (1-й рядок табл. 2.1).

Позначимо через x_i валовий випуск продукції i-ї галузі за запланований період, y_i - кінцевий продукт, що йде на зовнішнє для розглядуваної системи споживання (засоби виробництва інших економічних систем, споживання населення, створення запасів тощо). Тоді різниця $x_i - y_i$ складає частину продукції i-ї галузі, що призначена для внутрівиробничого споживання. Надалі будемо вважати, що баланс складається не у натуральному, а у вартісному розрізі.

За характером показників модель міжгалузевого балансу умовно можна поділити на 4 квадранти. Основним є квадрант І. У ньому містяться міжгалузеві потоки засобів виробництва. За формою це квадратна матриця порядку n х n, сума елементів якої за рядками або стовпчиками дорівнює витратам засобів виробництва у матеріальній сфері.

Квадрант ІІ (товарна продукція) характеризує кінцеву продукцію, що спрямовується зі сфери виробництва на кінцеве споживання і нагромадження. У розгорнутій схемі балансу вона може конкретизуватися на особисте споживання населення, суспільне (освіта, наука, комунальне господарство, медицина тощо), на інвестиції, експорт і т. п. Отже, квадрант ІІ характеризує галузеву структуру національного доходу.

Квадрант ІІІ також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу, який можна поділити окремо на галузі матеріального виробництва.

Квадрант ІY відображає кінцевий розподіл і споживання національного доходу.

Позначимо через x_{ik} частину продукції i-ї галузі, яка споживається k-ю галуззю, для забезпечення випуску її продукції в розмірі x_k. Очевидно, що величини, які розташовані у рядках таблиці, пов’язані наступними балансовими рівностями (2.1.1) (їх можна записати як у натуральному, так і у вартісному вигляді):

$$\begin{cases} x_1-(x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n})=y_1 \\ x_2-(x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n})=y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n-(x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn})=y_n \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Таблиця 2.1

№ галузей		Споживання						Всього на внутрівиробниче споживання ($\sum_i x_{ik}$)	Кінцевий продукт (y_i) (товарна продукція)	Валовий випуск (x_i)
		1	2	...	k	…	n			
Виробництво	1	x_{11}	x_{12}		x_{1k}		x_{1n}	$\sum x_{1k}$	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2k}		x_{2n}	$\sum x_{2k}$	y_2	x_2
	...	**...**	**...**	**...**	**I квадрант**	**..**	**...**	**II квадрант**	**...**	**...**
	i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ik}		x_{in}	$\sum x_{ik}$	y_i	x_i
	...	**...**	**...**	**...**	**...**	**.**	**...**	**...**	**...**	**...**
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nk}		x_{nn}	$\sum x_{in}$	y_n	x_n
Дохід		Q_1	Q_2	**...**	**III квадрант**	**..**	Q_n	**IY квадрант**		
Всього виробничих витрат у k-ту галузь		$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	…	$\sum x_{ik}$		$\sum x_{in}$			

Одна із задач балансових досліджень полягає в тому, щоб на базі даних про виконання балансу за попередній період визначити вихідні дані на плановий період.

Позначимо через x_{ik}', y_i' і т. д. дані, що відносяться до попереднього періоду, а x_{ik}, y_i - аналогічні дані для планового періоду. Балансові рівності (2.1.1) повинні виконуватися як у пройденому, так і у плановому періоді.

Сукупність значень y_1, y_2, ..., y_n, яка характеризує випуск кінцевого продукту, назвемо *асортиментним вектором*

$$\bar{Y}=(y_1,y_2,...y_n) \qquad (2.1.2)$$

а сукупність значень x_1, x_2, ..., x_n, які визначають валовий випуск всіх галузей, - *вектор-планом*

$$\bar{X}=(x_1,x_2,...x_n) \qquad (2.1.3)$$

Залежність між векторами (2.1.2) і (2.1.3) визначається балансовими рівностями (2.1.1). Але вони не дають можливості визначити за даним, наприклад, вектором $\bar{Y}$ необхідний для його забезпечення вектор-план $\bar{X}$, бо, крім шуканих невідомих x_k, містять n^2 невідомих x_{ik}, які в свою чергу залежать від x_k. Тому перетворимо ці рівності.

Розрахуємо величини $a_{ik}=\frac{x_{ik}}{x_k}$ $(i,k=1,2,...,n)$ – *коефіцієнти прямих витрат*, або *технологічні коефіцієнти,* які визначають витрати продукції *i*-ї галузі, що використовуються *k*-ю галуззю на виготовлення одиниці її продукції, і залежать головне від технології виробництва в цій *k*-й галузі. Їх можна наближено вважати сталими в деякому проміжку часу, який охоплює як попередній, так і плановий період, тобто

$$\frac{x_{ik}'}{x_k'}=\frac{x_{ik}}{x_k}=a_{ik}=const \qquad (2.1.4)$$

Тоді маємо:

$$x_{ik}=a_{ik}x_k \qquad (2.1.5)$$

тобто витрати *i*-ї галузі в *k*-у галузь пропорційні її валовому випуску, або, інакше, залежать лінійно від валового випуску x_k. Тому рівність (2.1.5) називають умовою *лінійності* прямих витрат.

Матрицю коефіцієнтів прямих витрат a_{ik} ($a_{ik} \geq 0$), яка є невід'ємною ($A \geq 0$),

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають *матрицею витрат* (або *структурною*, *технологічною* матрицею).

Якщо матриця А задана, то визначені всі внутрішні взаємозв'язки між виробництвом і споживанням, що записані у вищенаведеній табл.. Матриця А надає також інформацію про величину зміни у рівнях валового випуску, спричинених змінами рівнів кінцевої продукції. Деякі її елементи можуть бути нулями. У деяких випадках наявність нулів у матриці А дозволяє розбити економічну систему на підгрупи галузей, в яких виробництво може здійснюватися більш або менш незалежно.

Підставляючи значення $x_{ik}=a_{ik}x_k$ (2.1.5) в усі рівняння системи (2.1.1), отримаємо *лінійну балансову модель*, що характеризує баланс витрат-випуску продукції відповідно до табл.:

$$\begin{cases} x_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_{12}+\ldots+a_{1n}x_n)=y_1 \\ x_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)=y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n)=y_n \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

Систему (2.1.6) можна записати як матричне рівняння $E\cdot\overline{X}-A\cdot\overline{X}=\overline{Y}$, або

$$(E-A)\cdot\overline{X}=\overline{Y}, \qquad (2.1.\ 6')$$

або

$$\overline{X}=A\overline{X}+\overline{Y}, \qquad (2.1.6'')$$

де Е – одинична матриця.

Матриця А називається ***продуктивною (цілком продуктивною)***, якщо матриця $(E-A)^{-1}$ не має від'ємних елементів, де Е – одинична матриця. Для того щоб модель була продуктивна, необхідно і достатньо, щоб ***власне число*** $\lambda(A)<1$, де λ - ***невід'ємний*** корінь характеристичного рівняння $\left|A-\lambda E\right|=0$. На практиці використовують також просту достатню умову продуктивності моделі: $\sum a_{ij}<1$ для будь-яких i, j.

Розв'язувати балансові рівняння можна і ***за допомогою обернених матриць.*** Будемо вважати, що технологічні коефіцієнти a_{ik} задано наперед. Модель (2.1.6) дозволяє за умов, коли задано вектор Y, визначити:

а) розміри відповідних значень вектора валового продукту X=$(E-A)^{-1}$Y=$B^{-1}Y$;

б) виробничу собівартість випуску кожного виду продукції $S_i=\frac{\sum B_{iij}}{\Delta B}$, де B_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів матриці $B^{-1}=(E-A)^{-1}$, $\Delta B=\det B$ - визначник (детермінант) матриці B^{-1};

в) матрицю повних (внутрівиробничих) витрат $(E-A)^{-1}$; ця матриця надає інформацію про те, яким способом вектор зовнішнього кінцевого попиту $\overline{Y}$ перераховується на вектор валового випуску $\overline{X}$;

г) виробничу програму кожного із підприємств (галузей) за умовою (2.5) $x_{ik}=a_{ik}x_k$;

д) коефіцієнти непрямих витрат як різницю (в матричній формі) $(E-A)^{-1}-A$;

е) дослідити на продуктивність матрицю А.

2. 2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Нехай виконання балансу за попередній період характеризується даними, що занесені в наступну табл. 2.2. Розрахувати за даними цієї табл. коефіцієнти прямих витрат.

Таблиця 2.2

№ галузей		Споживання		Всього витрат	Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2			
виробництво	1	0,2 100	0,4 160	260	240	500
	2	0,55 275	0,1 40	315	85	400
Всього витрат в *k*-у галузь		375	200	575 575		

Розв'язання.

Розрахуємо за даними цієї табл. коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11}=\frac{100}{500}=0{,}2;\ a_{12}=\frac{160}{400}=0{,}4;\ a_{21}=\frac{275}{500}=0{,}55;\ a_{22}=\frac{40}{400}=0{,}1.$$

Ці коефіцієнти напишемо в правих верхніх кутах відповідних кліток. Тепер можна записати лінійну балансову модель (2.1.6), що відповідає табл.-умові:

$$\begin{cases} x_1-0{,}2x_1-0{,}4x_2=y_1 \\ x_2-0{,}55x_1-0{,}1x_2=y_2 \end{cases}.$$

Ця система двох рівнянь може бути використана для знаходження x_1 та x_2 при даних значеннях y_1 та y_2, для дослідження впливу на валовий випуск будь-яких змін в асортименті кінцевого продукту і т. д.

Так, при $y_1=240$ та $y_2=85$ маємо $x_1=500$ та $x_2=400$; при $y_1=480$, $y_2=170$ отримаємо $x_1=1000$, $x_2=800$ і т. д.

Задача 2. Побудувати матричну модель тригалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю прямих матеріальних витрат А і кінцеву продукцію Y:

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Додатково припустимо, що дохід поділяється на чистий прибуток *u* і оплату праці *v* у співвідношенні 3:2.

Розв'язання. Перевіримо модель на продуктивність, оскільки вихідний матеріал береться зі звітів, є наближеним або навіть має випадковий характер. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння

$\begin{vmatrix} 0.1-\lambda & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2-\lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $\lambda^3 - 0.4\lambda^2 - 0.04\lambda - 0.018 = 0$, $\lambda = 0.6.$ Отже, модель є продуктивною.

Для заповнення таблиці міжгалузевого балансу послідовно виконуємо такі обчислення:

а) складемо систему рівнянь (2.1.6'') для визначення валових випусків x_1, x_2, x_3:

$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.3x_3 + 120 = x_1, \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 180 = x_2, \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 50 = x_3. \end{cases}$ або $\begin{cases} 0.9x_1 - 0.3x_3 = 120, \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.1x_3 = 180, \\ -0.2x_1 - 0.3x_2 + 0.9x_3 = 50. \end{cases}$

Розв'язавши систему рівнянь за методом Жордана–Гаусса, отримаємо: $x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 200$.

б) за формулою (2.5) $x_{ik} = a_{ik} x_k$ обчислюємо міжгалузеві потоки:

$$x_{11} = 0.1*200 = 20,\ x_{12} = 0*300 = 0,\ \ x_{13} = 0.3*200 = 60,$$
$$x_{21} = 0.2*200 = 40,\ x_{22} = 0.2*300 = 60,\ \ x_{23} = 0.1*200 = 20,$$
$$x_{31} = 0.2*200 = 40,\ x_{32} = 0.3*300 = 90,\ \ x_{33} = 0.1*200 = 20.$$

Ці дані занесемо у квадрант I матричної моделі (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Виробничі галузі	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	20	0	60	120	200
2	40	60	20	180	300
3	40	90	20	50	200
Оплата праці	40	60	40	$\sum v_i = 140$	-
Чистий дохід	60	90	60	$\sum u_i = 210$	-
Валова продукція	200	300	200	-	700

в) Обчислимо величини, що входять у III квадрант, для чого використаємо співвідношення між u та v. Так як $u_1 + v_1 = 200 - (20 + 40 + 40) = 100$ і $u : v = 3 : 2$, то на одну частину доходу припадає 100 / 5 = 20 одиниць, отже,

$$u_1 = 3*20 = 60 \text{ од.},\ v_1 = 2*20 = 40 \text{ од.}$$

Аналогічно: $u_2 + v_2 = 300 - (0 + 60 + 90) = 150$,
$u_2 = 3*30 = 90$ од., $v_1 = 2*30 = 60$ од., $u_3 + v_3 = 200 - (60 + 20 + 20) = 100$,
$u_3 = 3*20 = 60$ од., $v_3 = 2*20 = 40$ од.

Примітка. За допомогою моделі Леонтьєва можна розрахувати умовні ціни (вартості), які склалися в результаті міжгалузевих зв'язків. Формально система рівнянь має вигляд

$$EZ - A^* \cdot Z = W, \qquad (2.1.\ 6^*)$$

де A^* - матриця, що транспонована до А. У розгорнутому вигляді система (2.1.6*) запишеться так: $z_i - \sum a_{ij} z_i = w_j$, $j = 1, \ldots, n.$ Величину $z_i - \sum a_{ij} z_i$ можна інтерпретувати як суму деяких витрат на одиницю продукції, а праву частину w_j - як чистий прибуток від випуску одиниці продукції j-ї галузі або добавлену вартість, що припадає на одиницю продукції j-ї галузі. Тому z_j можна інтерпретувати як ціну одиниці продукції j-ї галузі. Чистий прибуток w_j можна обчислити як результат ділення чистого прибутку галузі на її обсяг: $w_j = \frac{Q_j}{X_j}$.

У даній задачі $w_1 = \frac{40+60}{200} = 0.5$, $w_2 = \frac{60+90}{300} = 0.5$, $w_3 = \frac{40+60}{200} = 0.5$.

Система рівнянь для розрахунків міжгалузевих цін матиме вигляд:

$$\begin{cases} z_1 - (0.1z_1 + 0.1z_2 + 0.2z_3) = 0.5, \\ z_2 - (0.2z_1 + 0.3z_3) = 0.5, \\ z_3 - (0.3z_1 + 0.1z_2 + 0.1z_3) = 0.5, \end{cases}$$

звідки отримаємо міжгалузеві ціни: для I галузі – 0,36, для II – 0,4, для III – 0,4.

Відзначимо, що систему рівнянь можна розв'язати й за допомогою комп'ютера (п. 2.3).

Задача 3. Нехай матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{вектор } Y = (17;7;5;12).$$

Знайти: а) матрицю повних витрат $(E-A)^{-1}$; б) вектор валового випуску X; в) виробничу собівартість S_1, S_2, S_3, S_4 кожного виду продукції.

Розв'язання. **1**) Знайдемо матрицю B^{-1}:

$$B^{-1} = (E-A)^{-1} = \frac{1}{\Delta B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\Delta B = 1 \cdot B_{11} + (-0.2) \cdot B_{12} + (-0.3) \cdot B_{13} + (-0.1) \cdot B_{14}.$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.896; \quad B_{12} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.324;$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} -0.3 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & 1 \end{vmatrix} = 0.276; \quad B_{14} = -\begin{vmatrix} -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 1 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.446;$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.304; \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.864;$$

$$B_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.1\\ -0.1 & -0.3 & -0.2\\ -0.4 & -0.1 & 1\end{vmatrix}=0.345;\quad B_{24}=\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.3\\ -0.1 & -0.3 & 1\\ -0.4 & -0.1 & -0.2\end{vmatrix}=0.277;$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix}-0.2 & -0.3 & -0.1\\ 1 & -0.2 & 0\\ -0.1 & -0.2 & 1\end{vmatrix}=0.362;\quad B_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -0.3 & -0.1\\ -0.3 & -0.2 & 0\\ -0.4 & -0.2 & 1\end{vmatrix}=0.288;$$

$$B_{33}=\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.1\\ -0.3 & 1 & 0\\ -0.4 & -0.1 & 1\end{vmatrix}=0.897;\quad B_{34}=-\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.3\\ -0.3 & 1 & -0.2\\ -0.4 & -0.1 & -0.2\end{vmatrix}=0.353;$$

$$B_{41}=-\begin{vmatrix}-0.2 & -0.3 & -0.1\\ 1 & -0.2 & 0\\ -0.3 & 1 & -0.21\end{vmatrix}=0.162;\quad B_{42}=\begin{vmatrix}1 & -0.3 & -0.1\\ -0.3 & -0.2 & 0\\ -0.1 & 1 & -0.2\end{vmatrix}=0.09;$$

$$B_{43}=-\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.1\\ -0.3 & 1 & 0\\ -0.1 & -0.3 & -0.2\end{vmatrix}=0.207;\quad B_{44}=\begin{vmatrix}1 & -0.2 & -0.3\\ -0.3 & 1 & -0.2\\ -0.1 & -0.3 & 1\end{vmatrix}=0.819;$$

$$\Delta B=1\cdot 0.896-0.2\cdot 0.324-0.3\cdot 0.276-0.1\cdot 0.446=0.7038;$$

$$B^{-1}=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0.7038}\begin{pmatrix}0.896 & 0.304 & 0.362 & 0.162\\ 0.324 & 0.864 & 0.288 & 0.09\\ 0.276 & 0.345 & 0.897 & 0.207\\ 0.446 & 0.277 & 0.353 & 0.819\end{pmatrix}.$$

2) Вектор валового випуску

$$X=(E-A)^{-1}Y=\frac{1}{0.7038}\begin{pmatrix}0.896 & 0.304 & 0.362 & 0.162\\ 0.324 & 0.864 & 0.288 & 0.09\\ 0.276 & 0.345 & 0.897 & 0.207\\ 0.446 & 0.277 & 0.353 & 0.819\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\ 7\\ 5\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\ 20\\ 20\\ 30\end{pmatrix};$$

3) Знайдемо виробничу собівартість $s_i=\frac{\sum B_{ij}}{\Delta B}$:

$$s_1=\frac{B_{11}+B_{12}+B_{13}+B_{14}}{\Delta B}=2.76;\quad s_2=\frac{B_{21}+B_{22}+B_{23}+B_{24}}{\Delta B}=2.54;\quad s_3=\frac{B_{31}+B_{32}+B_{33}+B_{34}}{\Delta B}=2.70;$$

$$s_4=\frac{B_{41}+B_{42}+B_{43}+B_{44}}{\Delta B}=1.82.$$

2.3. Застосування комп'ютера в роботі з балансовими моделями

Ми показали, що при моделюванні різних (економічних, технічних, фізичних, соціальних) процесів досить часто доводиться розв'язувати окремі рівняння або системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). До цих же СЛАР, як найпростіших математичних об'єктів з добре розробленою теоретичною базою, зводять багато чисельних методів, розв'язання складних прикладних задач.

Довільна СЛАР містить m рівнянь відносно n невідомих (змінних) $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=y_i,\quad 1\le i\le m \qquad (2.1.7)$$

Більш компактним є матричний запис СЛАР

$$A\vec{x}=\vec{y} \qquad (2.1.8)$$

де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - числова матриця СЛАР, $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ - вектор правих частин СЛАР.

Для розв'язування тих систем, матриця яких невироджена (тобто детермінант матриць яких відмінний від нуля), розроблено багато чисельних методів, які зводяться до обчислення (n+1)-го визначника порядку n. Якщо число n велике, то обчислення визначників є громіздким. Тому розроблено прямі прийоми знаходження коренів систем лінійних рівнянь, найвідомішими з яких є метод Гаусса (та його модифікація – метод Жордана-Гаусса, див. п. 3.1.3), метод Крамера, матричний метод, метод простої ітерації, метод Зейделя. Крім того, зараз існує багато інших методів розв'язування СЛАР, такі як метод Перселя, ескалаторний метод, метод Річардсона та інші. Отже, методи й алгоритми розв'язування СЛАР розглядаються в курсі вищої математики, але для практичного знаходження розв'язків, особливо при великому числі рівнянь і змінних, доцільно використовувати комп'ютерні програми (наприклад, Excel, Maple та інші).

Спеціалізовані пакети Mathcad, Maple, Mathematica мають вбудовані функції для отримання розв'язку СЛАР. У процесорі електронних таблиць MS Excel такої вбудованої функції немає. Можна створити програмну реалізацію вищеназваних методів, хоч це й нелегко та громіздко.

Можна скористатись мовою VBA для написання програм за допомогою макросів, оскільки саме на ній і пишуться макроси. VBA (Visual Basic for Application) – мова програмування, що була розроблена компанією Microsoft. Ця мова не є самостійною, а призначена для автоматизації процесів у пакеті MS Office. VBA широко використовується в Excel, а також в Access, Word та інших програмах пакета. VBA - нескладна мова програмування. Вивчивши її, можна задавати команди Excel, що робити з колонками, рядками, значеннями в чарунках, переміщувати/додавати/сортувати листи, виводити раніше запрограмовані повідомлення, писати свої формули та функції і т. д. Суть мови VBA полягає в оперуванні об'єктами (що відносить її до об'єктно-орієнтованого програмування). Щоб працювати з VBA кодом, потрібний редактор, який уже встановлений за замовчуванням. Вивчивши VBA, можна створювати макроси та виконувати в MS Excel практично будь-які задачі. VBA можна відкрити, натиснувши комбінацію клавіш " ALT + F11".

Програма MS Excel розв'язує задачі оптимізації практично без обмежень. У ній є також широкий інструментарій для розв'язування різноманітних видів рівнянь та їх систем різними методами, зокрема і стандартними.

Приклади

Задача 4. Підприємство випускає щодобово чотири види продукції; основні економічні показники випуску наведені в табл. 2.4. Визначити добові витрати сировини S, затрати робочого часу T і вартість випущеної продукції P.

Таблиця 2.4

Вид продукції, № п/п	Кількість виробів, од.	Витрати сировини, кг	Норма часу виготовлення, люд/вир.	Ціна виробу гр. од./вир.,
1	30	6	8	20
2	40	3	5	15
3	20	5	10	50
4	50	4	15	40

Вказівка. В електронній табл. Excel ввести чотири вектори:

$\vec{x}=\begin{pmatrix}30\\40\\20\\50\end{pmatrix}$ - асортимент, $\vec{y}=\begin{pmatrix}6\\3\\5\\4\end{pmatrix}$ - витрати сировини,

$\vec{t}=\begin{pmatrix}8\\5\\10\\15\end{pmatrix}$ - затрати робочого часу, $\vec{p}=\begin{pmatrix}20\\15\\50\\40\end{pmatrix}$ - ціни.

Тоді шукані величини дорівнюють скалярним добуткам векторів:

$$S=\vec{x}^T\cdot\vec{y},\ T=\vec{x}^T\cdot\vec{t},\ P=\vec{x}^T\cdot\vec{p} \qquad (2.3.1)$$

Через $\vec{x}^T$ позначено вектор-рядок, тобто матрицю, що транспонована до матриці $\vec{x}$: $\vec{x}^T=(30,\ 40,\ 20,\ 50)$. Розрахунок скалярних добутків за формулами (2.3.1) визначається правилом множення матриць. Необхідні обчислення виконують у Excel, за допомогою функції МУМНОЖ або функції СУММПРОИЗВ.

Задача 5. Нехай $\vec{x}$ - вектор, що визначає план випуску кожного з п'яти видів виробів: $\vec{x}^T=(40,50,45,50,30)$. Елементи матриці A_{ij} визначають затрати i-го виду сировини на виробництво одиниці продукції j-го виду:

$$A=\begin{pmatrix}3&3&4&5&2\\1&2&3&6&5\\7&2&6&2&1\\4&5&6&2&3\end{pmatrix}.$$

Визначити необхідну кількість сировини кожного виду.

Вказівка. Витрати сировини визначаються вектором $\vec{y}=A\cdot\vec{x}$. Матричне множення виконують в Excel (функція МУМНОЖ).

Задача 6. План випуску продукції й затрати сировини визначаються вектором $\vec{x}$ та матрицею A з попередньої задачі. Собівартість кожного з п'ятьох видів сировини визначається вектором $\vec{c}^T=(4,6,3,5,8)$, а затрати праці (у грошовому вираженні) на одиницю продукції кожного виду вектором – вектором $\vec{q}^T=(10,17,25,14,15)$. Визначити повні затрати Q, що пов'язані з даним виробництвом.

Вказівка. Повні затрати визначаються за формулою $Q=\vec{c}^T A\vec{x}+\vec{q}^T\vec{x}$. Розв'язання отримується в Excel аналогічно.

Задача 7. Розв'язати систему рівнянь матричним методом в Excel:

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\
x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\
3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8.
\end{cases}
$$

Розв'язання. З курсу вищої математики відомо, що СЛАР можна записати як матричне рівняння $AX=B$. Якщо визначник матриці А $\det A \neq 0$, то матриця невироджена. Отже, для неї існує обернена матриця A^{-1}, а СЛАР сумісна і має єдиний розв'язок $X = A^{-1}B$.

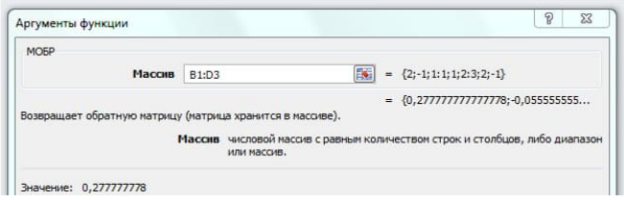
1. Значення елементів введемо в чарунки Excel у вигляді табл. 2.5.

Таблиця 2.5

	A	B	C	D	E	F	G
1	A=	2	-1	1	B=	6	
2		1	1	2		4	
3		3	2	-1		-8	

2. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}. Виділимо діапазон, куди потім помістимо елементи матриці (орієнтуємося на кількість рядків і стовпців у початковій матриці). Відкриваємо список функцій (f_x). У категорії «Математичні» знаходимо функцію МОБР (MINVERSE). Аргумент – масив чарунок з елементами початкової матриці (табл. 2.6).

Таблиця 2.6



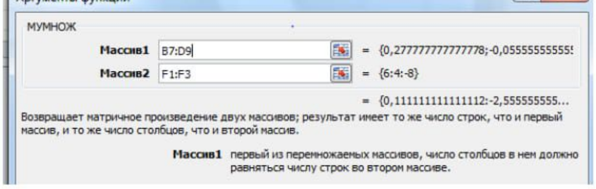
Натискуємо ОК – у лівому верхньому кутку діапазону з'являється значення. Послідовно натискуємо кнопку F2 і комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

7	A^{-1}=	0,2778	-0,056	0,1667
8		-0,389	0,2778	0,1667
9		0,0556	0,3889	-0,167

3. Помножимо обернену матрицю A^{-1} на матрицю В (саме в такому порядку!). Виділяємо діапазон, де потім з'являться елементи результуючої матриці (орієнтуємося на число рядків і стовпців матриці В). Відкриваємо діалогове вікно математичної функції МУМНОЖ (MMULT) і заповнюємо її діалогове вікно: перший діапазон (Масив 1) – обернена матриця, другий (Масив 2) – матриця В (табл. 2.8).

Таблиця 2.8



4. Закриваємо вікно з аргументами функції натисненням кнопки ОК. Послідовно натискуємо кнопку F2 і комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter.

Отримали корені рівнянь (табл. 2.9, матриця X).

Таблиця 2.9

{=МУМНОЖ(B7:D9;F1:F3)}

E	F	G
B=	6	
	4	
	-8	
X=	0,1111	
	-2,556	
	3,2222	

Задача 8. Розв’язати систему рівнянь методом Крамера в Excel.

Візьмемо систему рівнянь з попереднього прикладу:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв’язання. Щоб розв’язати її методом Крамера, обчислимо головний D визначник матриці A і допоміжні D_1, D_2, D_3 визначники матриць, що отримуються заміною одного стовпця (відповідно першого, або другого, або третього) в матриці A на стовпчик-матрицю B (табл. 2.10).

Таблиця 2.10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
12	D=	2	-1	1		D_2=	2	6	1
13		1	1	2			1	4	2
14		3	2	-1			3	-8	-1
15									
16	D_1=	6	-1	1		D_3=	2	-1	6
17		4	1	2			1	1	4
18		-8	2	-1			3	2	-8

Для їх обчислень використаємо функцію МОПРЕД (MDETERM). Аргумент – діапазон з відповідною матрицею (табл. 2.11).

Таблиця 2.11

=МОПРЕД(B12:D14)

	A	B
21	D=	-18
22	D_1=	-2
23	D_2=	46
24	D_3=	-58

Визначник системи відмінний від 0 – розв’язок можна знайти за формулами Крамера (D_i / det A).

Для знаходження X_1: =B22/$B$21, де B22 – D_1 (табл. 2.11). Для знаходження X_2: =B23/$B$21, і т. д. Отримаємо корені рівнянь:

X=	0,1111
	-2,5556
	3,2222

Задача 9. Розв’язати ту ж систему рівнянь методом Гаусса в Excel.

Розв’язання. Нагадаємо, що процес розв’язування СЛАР за методом Гаусса зводиться до побудови еквівалентної системи, що має трикутну матрицю. Необхідною і достатньою умовою застосування цього методу є відмінність від нуля всіх «провідних елементів». Обчислення доцільно записувати у вигляді табл.

(матриці). Знаходження коефіцієнтів трикутної матриці називається *прямим ходом*, а процес отримання значень невідомих (змінних) – зворотним ходом.

Коефіцієнти при змінних запишемо в матрицю A, вільні члени – в матрицю B, тобто запишемо розширену матрицю системи A|B (для наочності вільні члени виділимо заливкою) (табл. 2.12).

Таблиця 2.12

	A	B	C	D
1	2	-1	1	6
2	1	1	2	4
3	3	2	-1	-8
4				

Якщо в першій чарунці матриці A виявиться 0, потрібно поміняти місцями рядки, щоб тут стало відмінне від 0 значення. Тут поміняємо місцями перший і другий рядки (щоб крайнім елементом у першому рядку була 1).

1. Зведемо всі коефіцієнти при x_1 до 0 (крім першого рівняння). Скопіюємо значення з першого рядка двох матриць у чарунки B6:E6. У чарунку B7 введемо формулу: =(-2*(B2:E2)+B3:E3)/(-3). Виділимо діапазон B7:E7. Натиснемо F2 і комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter. Ми додали до другого рядка перший, який помножили на -2, та все це поділили на -3 (крайній елемент нового рядка).

2. Вводимо аналогічну формулу у 8 рядок: =-3*(B2:E2)+B4. Так ми позбулися коефіцієнтів перед x_1. Залишили без змін тільки перше рівняння (табл. 2.13).

Таблиця 2.13

	A	B	C	D	E	F
1						
2		1	1	2	4	
3		2	-1	1	6	
4		3	2	-1	-8	
5						
6		1	1	2	4	
7		0	-3	-3	-2	
8		0	-1	-7	-20	
9						

3. Зведемо до 0 коефіцієнти перед x_2 у третьому рівнянні. Копіюємо рядки 6 і 7 (лише значення). Переносимо їх нижче, у рядки 10 і 11. Ці дані повинні залишитися незмінними. В чарунку B12 вводимо формулу масиву: =(B7:E7)/(-3)+B8 (табл. 2.14).

Таблиця 2.14

	A	B	C	D	E
1					
2		1	1	2	4
3		2	-1	1	6
4		3	2	-1	-8
5					
6		1	1	2	4
7		0	-3	-3	-2
8		0	-1	-7	-20
9					
10		1	1	2	4
11		0	-3	-3	-2
12		0	0	-6	-19,33

4. Пряму прогонку за методом Гаусса зробили. У зворотному порядку почнемо проганяти з останнього рядка отриманої матриці. Всі елементи даного рядка потрібно поділити на коефіцієнт при x_3 – число -6. Введемо у 16 рядок формулу масиву: {=B12:E12/D12} (табл. 2.15).

Таблиця 2.15

9					
10		1	1	2	4
11		0	-3	-3	-2
12		0	0	-6	-19,33
13					
14					
15					
16		0	0	1	3,2222

5. У рядку 15 вводимо формулу: =(C11-C16*$D$11)/$C$11. У рядку 14: =(B10-B15*$C$10-B16*$D$10)/$B$10. При цьому зліва у новій матриці отримали одиничну матрицю, а в останньому стовпчику - корені рівняння (табл. 2.16).

Таблиця 2.16

	A	B	C	D	E
1					
2		1	1	2	4
3		2	-1	1	6
4		3	2	-1	-8
5					
6		1	1	2	4
7		0	-3	-3	-2
8		0	-1	-7	-20
9					
10		1	1	2	4
11		0	-3	-3	-2
12		0	0	-6	-19,33
13					
14		1	0	0	0,1111
15		0	1	0	-2,556
16		0	0	1	3,2222
17					

Задача 10. Підприємство випускає продукцію трьох видів A, B, C, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні дані наведені в табл. 2.17. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

Таблиця 2.17

Вид сировини	Витрати сировини за видами продукції, ваг. од./вир.			Запаси сировини, ваг.од.
	A	B	C	
1	4	2	5	3500
2	5	3	1	1500
3	6	4	3	1700

Вказівка. Задача зводиться до розв'язання СЛАР

$$A\vec{x} = \vec{y}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \; \vec{y} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 1500 \\ 1700 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи Excel, переконатися, що $\det(A) \neq 0$ (функція МОПРЕД) і, отже, СЛАР з квадратною матрицею має єдиний розв'язок, який можна розрахувати за рівнянням: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$. Для знаходження оберненої матриці A^{-1} потрібно використати функцію МОБР.

2. 4. Питання для самоперевірки

1. Поясніть схему балансу витрат-випуску продукції.
2. Що таке прямі витрати, асортиментний вектор, вектор-план?
3. Чим визначається лінійність балансової моделі?
4. Запишіть систему рівнянь, яка характеризує лінійну балансову модель. В розгорнутій формі і у вигляді матричного рівняння.
5. В чому суть коефіцієнтів прямих, повних та непрямих витрат?
6. Як визначити необхідний валовий випуск кожної галузі за даним асортиментним вектором?
7. Назвіть приклади постановок задач прийняття рішень, які розв'язуються за допомогою СЛАР.
8. Як визначаються операції додавання, віднімання матриць, їх добутку на число?
9. Як визначається операція скалярного добутку векторів?
10. Як визначається операція добутку матриць?
11. Яка матриця називається квадратною? Одиничною?
12. У чому суть операції транспонування матриці?
13. Як визначається обернена матриця? Чи всяка матриця має обернену?
14. Викладіть алгоритм розв'язування СЛАР: а) за правилом Крамера; б) за методом оберненої матриці; в) за методом Гаусса.
15. Яким чином реалізується розв'язування СЛАР в MS Excel?
16. Які головні функції MS Excel використовують для розв'язування СЛАР у MS Excel стандартними методами?

2.5. Навчальні завдання

№ 2.1. Перевірити на продуктивність модель, якщо матриці прямих витрат задаються таблицями:

а) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.05 & 0.1 & 0.005 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а), б) продуктивна; в) непродуктивна.

№ 2.2. Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких випускає один вид продукції. У табл. 2.18 вказані витратні коефіцієнти (прямі витрати) a_{ik} одиниць продукції i-го цеху, що використовуються як „сировина" (проміжний продукт) для випуску продукції k-го цеху, кількість одиниць y_i продукції i-го цеху, що призначена для реалізації (кінцевий продукт).

Таблиця 2.18

Цехи	Прямі витрати a_{ik}			Кінцевий продукт, y_i
	1	2	3	
1		0,2		200
2	0,2		0,1	100
3			0,2	300

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) валовий випуск (план) для кожного цеху; 3) виробничу програму цехів; 4) коефіцієнти непрямих витрат.

№ 2.3. Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2.6. Завдання для перевірки знань

№ 2.4. Перевірити на продуктивність модель, якщо матриці прямих витрат задаються таблицями: а) $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.01 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.01 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) продуктивна, б), в) не продуктивна.

№ 2.5. Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

№ 2.6. На підприємство надійшло замовлення на виготовлення 10 виробів трьох різних видів. Загальні витрати на виготовлення цих виробів складуть 440 г. о., а плановий прибуток від реалізації продукції має скласти 42 г. о. Скласти план випуску виробів кожного виду, якщо на виготовлення одиниці продукції кожного виду витрачають відповідно 60, 40, 30 гр. од., а плановий прибуток від реалізації одного виробу кожного виду становить відповідно 3, 5, 4 гр. од.

Відповідь: 3, 5,2.

№ 2.7. У рамках лінійної моделі багатогалузевої економіки (моделі Леонтьєва) споживання валового випуску продукції кожної галузі x_i, $1 \le i \le n$, розподіляється між виробничою й невиробничою сферами:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad (2.1.6")$$

де елементи матриці прямих витрат a_{ij} (сталі числа) визначають величину споживання продукції i-ої галузі всередині j-ої галузі, $\vec{y}$ - вектор позавиробничого споживання. СЛАР (2.3.2) доцільно переписати в матричному вигляді

$$(E - A)\vec{x} = \vec{y} \qquad (2.1.\ 6')$$

де E - одинична матриця, A - матриця з коефіцієнтів a_{ij}.

а) Нехай матриця прямих затрат має вид

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Для заданого вектора обсягів виробництва $\vec{x}^T = (10{,}11{,}12)$ розрахувати вектор $\vec{y}$ обсягів позавиробничого споживання; для заданого вектора обсягів позавиробничого споживання $\vec{y}^T = (5{,}4{,}3)$ розрахувати вектор необхідних обсягів виробництва $\vec{x}$.

б) Нехай матриця прямих затрат має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.12 & 0.08 & 0.06 & 0.16 \\ 0.10 & 0.03 & 0.02 & 0.30 & 0.07 \\ 0.10 & 0.05 & 0.20 & 0.20 & 0.10 \\ 0.10 & 0.05 & 0.20 & 0.10 & 0.05 \\ 0.07 & 0.15 & 0.30 & 0.20 & 0.03 \end{pmatrix};$$

для заданого вектора $\vec{x}^T = (100{,}100{,}50{,}50{,}100)$ знайти $\vec{y}$;

для заданого вектора $\vec{y}^T = (70{,}70{,}70{,}70.70)$ знайти $\vec{x}$.

№ 2.8. У рамках лінійної моделі міжнародної торгівлі бюджети країн, що торгують між собою, пропорціональні компонентам власного вектора структурної матриці торгівлі A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Тобто бюджети країн знаходяться з однорідної системи лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{x} \quad \text{або} \quad (A - E)\vec{x} = 0. \qquad (2.3.2)$$

Структурна матриця торгівлі чотирьох країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Знайти бюджети цих країн при умові, що їхня сума відома:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6700 \text{ (ум. гр. од.)} \qquad (2.3.3)$$

Вказівка. Для розв'язування задачі в Excel за допомогою інструмента *Пошук рішення* її доцільно сформулювати наступним чином: знайти вектор, який забезпечує рівність $\left|(A - E)\vec{x}\right|^2 = 0$ при умові (2.3.3).

№ 2.9. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети першої та другої країн, при умові, що бюджет третьої країни дорівнює 2200 ум. гр. од. Розв'язати задачу в Excel.

Тема 3. Розв'язування систем лінійних рівнянь з кількома змінними

Розглядається теорія знаходження загального, частинного і базисного розв'язку системи лінійних рівнянь.

3.1. Теоретичні відомості

3.1.1. Сумісність системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі

Нехай задана система m лінійних рівнянь з n невідомими (змінними)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1.1).$$

Матриця, що складається з коефіцієнтів при невідомих, називається *основною матрицею* або *матрицею системи* (3.1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & ,,, & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці A справа (або зліва) приписати стовпчик вільних членів, то отримаємо *розширену матрицю*

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & ,,, & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ранг розширеної матриці B або дорівнює рангу матриці системи A, або на одиницю більший за нього (r або $r+1$).

При розв'язуванні системи (3.1.1) можливі наступні випадки:

1. Система сумісна, має єдиний розв'язок,
2. Система невизначена, має безліч розв'язків,
3. Система несумісна, не має розв'язків.

Сумісність системи (3.1.1) встановлюється теоремою Кронекера–Капеллі:

Теорема Кронекера–Капеллі. Система лінійних рівнянь (3.1.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(B)$.

Очевидно, що $r(A) \leq r(B)$.

Теорема Кронекера – Капеллі тільки встановлює загальну умову сумісності системи лінійних рівнянь (3.1.1) і стверджує існування розв'язку, але не надає способів знаходження всіх розв'язків цієї системи у разі її сумісності.

Теорема (критерій визначеності системи). Для того щоб сумісна система

(3.1.1) була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих (змінних), що входять у цю систему.

3.1.2. Загальний, частинний, базисний розв'язок системи лінійних рівнянь

Нехай $r(A)=r(B)=r$. Тоді система (3.1.1) сумісна і містить r лінійно незалежних рівнянь. Нехай перші r рівнянь системи (3.1.1) є лінійно незалежними, а решта *m-r* рівнянь системи є лінійними комбінаціями перших r її рівнянь. Тоді розв'язок перших r рівнянь є і розв'язком решта *m-r* рівнянь. Тому для розв'язування системи залишають r лінійно незалежних рівнянь системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases}, \qquad (3.1.2.)$$

Залишимо у лівих частинах які-небудь r невідомих (наприклад, перших r невідомих), а решта перенесемо вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-(a_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n), \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-(a_{2,r+1}x_{r+0}+\ldots+a_{2n}x_n), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-(a_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{rrn}x_n) \end{cases}, \qquad (3.1.3)$$

Невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_r$, що залишені зліва, називаються ***базисними*** змінними (невідомими), а перенесені вправо $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - ***вільними***. Зазначимо, що в число базисних невідомих потрібно вводити такі невідомі, коефіцієнти при яких утворюють відмінний від нуля визначник. Розв'язавши (3.1.3) будь-яким способом відносно базисних змінних, отримаємо систему

$$\begin{cases} x_1=p_1-q_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-p_{1n}x_n \\ x_2=p_2-q_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-p_{2n}x_n \\ \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_r=p_r-q_{rr}x_{r+1}-\ldots-p_{rn}x_n \end{cases}, \qquad (3.1.\ 4)$$

Її розв'язок називають ***загальним розв'язком***. Він виражає базисні невідомі через вільні невідомі. Надаючи вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ довільних числових значень, отримаємо відповідні числові значення для базисних невідомих системи (3.1.4). Отримані таким чином числові значення всіх невідомих називаються ***частинними розв'язками*** системи (3.1.4), а, отже, і системи (3.1.1). Крім того, із загального розв'язку системи лінійних рівнянь можна отримати довільний розв'язок системи фіксацією значень вільних невідомих.

Якщо вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ прирівняти до нуля, то отримуємо ***базисний розв'язок*** системи (3.1.1):

$$x_1=p_1, x_2=p_2, \ldots, x_{rr}=p_r, x_{r+1}=\ldots=x_n=0.$$

Зауваження. Якщо $r=n$, тобто ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих, то система (3.1.1) має єдиний розв'язок. Якщо $r<n$, тобто ранг менший за кількість невідомих, то система (3.1.1) має безліч розв'язків.

3.1.3. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Жордана–Гаусса

Суть методу: послідовне виключення невідомих зводить дану систему до еквівалентної їй трикутної системи (прямий хід виключень), а з утвореної трикутної системи невідомі знаходять послідовними підстановками (обернений хід). Часто в методі Гаусса замість того, щоб виконувати елементарні перетворення над рівняннями системи, виконують ці перетворення з рядками розширеної матриці системи, яка складається з коефіцієнтів і вільних членів системи.

Метод послідовного виключення невідомих з усіх рівнянь системи, крім одного, називають методом Жордана - Гаусса. Цей метод є деякою модифікацією методу Гаусса. Тоді усі обчислення зручніше виконувати, записуючи всі системи у вигляді матриць-таблиць. У табл. вибирають ***розв'язувальний (ключовий, головний, напрямний)*** елемент a_{ij}, який обводять. Необхідною і достатньою умовою застосування цього методу є відмінність від нуля всіх «провідних елементів». Відповідний i-тий рядок та j-тий стовпчик називають теж розв'язувальними. Якщо в якомусь рядку або стовпчику табл. вже було взято розв'язувальний елемент, більше в цьому рядку або стовпці його брати не можна. Не можна його брати й у стовпці вільних членів b_{ij}.

Алгоритм перетворень Жордана-Гаусса (перехід від однієї таблиці до іншої):

1. Усі елементи розв'язувального рядка першої табл. ділимо на розв'язувальний елемент $a_{ij} \neq 0$, і результат записуємо в i-тий рядок нової табл..

2. Усі елементи розв'язувального стовпчика, крім a_{ij}, замінюємо нулями.

3. Решту елементів обчислюємо за правилом „прямокутника": в першій матриці мислено виділяється прямокутник, одна з вершин якого збігається із замінюваним елементом (a_{ij}), на місце якого обчислюється новий, а протилежна вершина – з розв'язувальним елементом (a_{kl}); дві інші вершини містяться відповідно в розв'язувальному рядку і розв'язувальному стовпці.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{kj} & \cdots & \boxed{a_{kl}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{il} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Тоді відповідний замінюваному елемент другої матриці-табл. знаходиться за формулою:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}}$$

або у мнемонічному вигляді:

$$'\textit{відповідний елемент}' = '\textit{замінюваний елемент}' - \frac{'\textit{добуток елементів іншої діагоналі}'}{\boxed{'\textit{напрямний елемент}'}}.$$

При цьому розрахунок проводиться за рядками.

Правильність обчислень можна (і треба) контролювати. Для цього записують контрольний стовпчик К. Елементи кожного рядка підсумовуються і знайдена сума порівнюється з елементом контрольного стовпчика. Якщо ці величини збігаються, то елементи i-го рядка обчислені правильно.

3.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 32. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи має такий вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -3 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I\cdot 3 + II \\ I + III \end{array} \sim$$

(помножуємо перший рядок на 3 і додаємо до другого рядка, перший рядок додаємо до третього рядка):

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II\cdot(-1) + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система зведена до трикутного вигляду. Рядок, який містить лише нулі, можна відкинути. Отримуємо систему трапецієподібного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ 11x_2 - 2x_3 = 46. \end{cases}$$

Оскільки ранги основної і розширеної матриць рівні (r=2), то система сумісна. Оскільки невідомих більше, ніж ранг основної матриці, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків. Знайдемо її загальний розв'язок. Покладемо x_2 вільною змінною, а x_1 та x_3 - залежними:

$$\begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 - x_3, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{74 - 17x_2}{2}, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв'язок системи ($\frac{74-17x_2}{2}$, x_2, $\frac{11x_2-46}{2}$), де $x_2 \in R$.

Зауваження. Якщо вільною змінною взяти x_3, то $x_1 = \frac{16-17x_3}{11}$, $x_2 = \frac{46+2x_3}{11}$, тоді загальний розв'язок системи буде ($\frac{16-17x_3}{11}$, $\frac{46+2x_3}{11}$, x_3), де $x_3 \in R$.

Задача 2. Знайти невід'ємний базисний розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо до базису, наприклад, x_1. Для цього перепишемо систему у вигляді системи нуль-рівнянь і знайдемо найменше відношення вільного члена до ***додатного*** коефіцієнта при x_1 у кожному рівнянні, щоб з того рівняння знайти x_1:

$$\begin{cases} 0 = 10 - (2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4), \\ 0 = 15 - (x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4), \end{cases}$$

$min\left\{\frac{10}{2}; \frac{15}{1}\right\} = 5$, тому з першого рівняння знайдемо x_1: $x_1 = 5 - (-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)$ і підставимо отримане значення у друге рівняння (виключимо з другого рівняння x_1):

$$0 = 15 - (5 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_2 - x_3 + 4x_4), \qquad 0 = 10 - (\frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4),$$

отже, отримуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - (\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4), \\ 0 = 10 - (\frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4). \end{cases}$$

Введемо до базису іншу змінну, наприклад, x_2: $min\left\{\frac{5}{1/2};\frac{10}{5/2}\right\} = \{10;4\} = 4$, тому x_2 знайдемо з другого рівняння і підставимо знайдене значення у перше рівняння, щоб виключити з нього x_2:

$x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4)$; $x_1 = 5 - (-\frac{1}{2}(4 + 3x_3 - \frac{9}{5}x_4) + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)$, $x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4)$.

Отримали систему: $\begin{cases} x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4), \\ x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4). \end{cases}$

Загальний розв'язок з додатними вільними членами $\begin{cases} x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4), \\ x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4). \end{cases}$

Невід'ємний базисний розв'язок: $x_1 = 7; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = 0$, або у вигляді точки: (7; 4; 0; 0).

Як було сказано в п. 2.3, програма MS Excel розв'язує багато задач оптимізації. Та найбільш розвинені в ньому методи розв'язування задач лінійного програмування та систем лінійних алгебраїчних рівнянь, зокрема і стандартні.

3.3. Питання для самоперевірки

1. Як проводиться дослідження системи за допомогою таблиць Гаусса?
2. Скільки ітерацій потрібно зробити, щоб звести систему до одиничного базису?
3. Як визначити ранг матриці?
4. Які особливості методу Жордана-Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь (СЛР)?
5. Що називається рангом системи? Чи існує таке поняття для несумісної системи?
6. Коли система *m* рівнянь з *n* невідомими буде визначеною? Невизначеною?
7. Що називається загальним розв'язком системи?
8. Що називається базисним розв'язком системи?
9. Скільки може бути базисних розв'язків у системи?
10. В чому суть поняття „вільні" невідомі?
11. Яке рівняння називається нуль-рівнянням?
12. Як знайти частинний розв'язок СЛАР?

3.4. Навчальні завдання

№ 3.1. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2; \\ 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -3; \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв'язок

$(4 - 13x_4 + 36x_5;\ 1 - 3x_4 + 7x_5;\ 1 - 2x_4 + 3x_5;\ x_4; x_5)$.

№ 3.2. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити розширену матрицю системи, знайти загальний, який-небудь частинний і базисний розв'язок):

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2; \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3; \\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки:

а) $(-\frac{6}{7}+\frac{8}{7}x_4;\ \frac{1}{7}-\frac{13}{7}x_4;\ \frac{15}{7}-\frac{6}{7}x_4;x_4)$; б) $(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{16}x_4;\ -\frac{11}{8}x_4$.

№ 3.3. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+4x_5=6; \\ x_1+x_2+2x_3+5x_4+3x_5=28; \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4+4x_5=20. \end{cases}$$

1) Знайти загальний розв'язок системи з базисними змінними x_1, $x_2; x_3$ при додатних вільних членах і відповідний невід'ємний базисний розв'язок.
2) Знайти інший невід'ємний базисний розв'язок системи, увівши попередньо в число базисних змінних x_4.

Відповідь: (2; 6; 10; 0; 0); (5; 0; 4; 3; 0).

№3.4. Знайти два різні невід'ємні базисні розв'язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4-5x_5=26; \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=25. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3-x_4=10; \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=15. \end{cases}$

Відповідь: а) (8; 9; 0; 0; 0); (17; 0; 0; 9; 0);

б) $(\frac{65}{7};\frac{20}{7};0;0)$; (7; 0; 0; 4).

3.5. Завдання для перевірки знань

№ 3.5. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2; \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3; \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3-2x_4=3; \\ x_1-2x_2-2x_3-1x_4=-2; \\ 3x_1-6x_2+5x_3-3x_4=5; \\ 4x_1-8x_2-3x_3-4x_4=-3. \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки:

а) $(x_1;x_2;6-15x_1+10x_2;\ -7+18x_1-12x_2)$; б) $(2x_2+x_4;x_2;1;x_4)$.

№ 3.6. Перетворити розширену матрицю, знайти методом Гаусса загальний, частинний і базисний розв'язок систем рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=4; \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=8; \\ 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=20; \\ 2x_1-4x_2+x_3-6x_4=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7; \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2; \\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23 \\ \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12. \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки: а) $(6-\frac{3}{2}x_3-x_4;\ 2-\frac{1}{2}x_3-2x_4)$,

б) $(-16+x_3+x_4+5x_5;\ 23-2x_3-2x_4-6x_5;\ x_3;x_4;x_5)$.

№ 3.7. Дослідити на сумісність та визначеність систему лінійних рівнянь і знайти її загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

Відповідь: а) $\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5; -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4; x_3; x_4; x_5\right)$;

б) $\left(x_3 - 2x_4 + 1; 2x_3 + x_4 + 2; x_3; x_4\right)$.

№ 3.8. Знайти два різні невід'ємні базисні розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 18; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_5 = 24; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 26. \end{cases}$$

Відповідь: (4; 6; 8; 0; 0); (0; 2; 4; 2; 0).

Тема 4. Графічне розв'язування системи лінійних нерівностей із двома змінними

Застосування геометричного способу розв'язування систем лінійних нерівностей.

4.1. Теоретичні відомості

Попередньо розглянемо деякі поняття, що важливі для геометричного способу розв'язування задач лінійного програмування.

Множина точок називається ***опуклою***, якщо вона разом з будь-якими двома точками містить відрізок, що з'єднує ці точки. Найпростішими прикладами випуклих множин можуть служити: відрізок, трикутник, квадрат, деякі геометричні тіла, наприклад, піраміда, куб і т. д. Відзначимо, що опуклий многокутник має ту властивість, що він весь розташований по один бік кожної з прямих, що беруть участь у її утворенні.

Очевидно, що всяка точка опуклого многокутника, що лежить всередині нього або на одній із сторін, за виключенням вершин, може бути представлена як опукла лінійна комбінація інших точок цього многокутника. Навпаки, вершини многокутника не можна представити у вигляді опуклої комбінації двох яких-небудь інших точок. У цьому розумінні вершини многокутника називають ***екстремальними*** точками.

Опуклий многокутник можна задати аналітично, за допомогою системи лінійних нерівностей. Розглянемо детальніше системи лінійних нерівностей і покажемо, що їхнє розв'язування тісно пов'язане з поняттями опуклого многокутника.

4.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Розглянемо нерівність з однією змінною x_1, наприклад $x_1 \le 5$. Якщо на площині провести пряму $x_1 = 5$, то вона розділить всю площину на дві частини - півплощини: в одній із них, а саме зліва від прямої $x_1 = 5$, лежать точки, абсциси яких менше від 5, а справа від прямої - точки, абсциси яких більше від 5.

Отже, обмеження-нерівність $x_1 \le 5$ геометрично визначає півплощину (рис.4.1), яка розташована зліва від межі - прямої $x_1 = 5$.

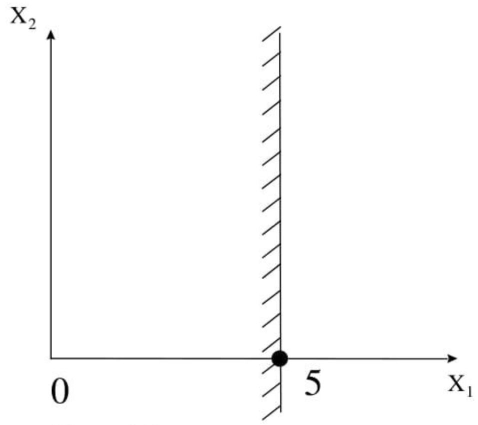


Рис. 4.1

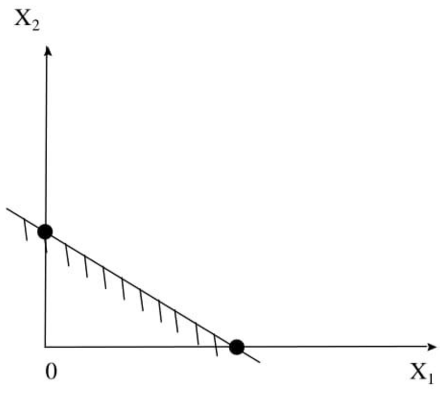


Рис. 4.2

Задача 2. Розглянемо нерівність з двома змінними: $3x_1 + 5x_2 \le 15$. Побудуємо пряму лінію $3x_1 + 5x_2 = 15$. Нерівність $3x_1 + 5x_2 < 15$ являє собою сукупність усіх точок площини, що лежать нижче від прямої, тобто в заштрихованій частині (рис. 4.2).

Щоб легше було визначити, яку саме півплощину визначає нерівність, потрібно в ліву частину нерівності підставити координати довільної точки, наприклад, початку координат, тобто $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

Якщо нерівність задовольняється, то вона визначає ту півплощину, в якій лежить початок координат, у противному випадку - іншу півплощину (її позначають штрихуванням або стрілками). Користуючись геометричними міркуваннями, легко знайти можливі розв'язки системи нерівностей.

Задача 3. Знайти область допустимих розв'язків (ОДР) системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}.$$

Розв'язання. Кожна з нерівностей системи визначає півплощину, відмічену на рис. 4.3 штрихами.

Отже, перший крок при використанні графічного методу для розв'язування систем нерівностей полягає в геометричному представленні допустимих розв'язків, тобто побудові області (допустимих) розв'язків (ОДР), в якій одночасно задовольняються всі обмеження моделі. Шукана область показана на рис. 4.3. Умови невід'ємності змінних $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$ обмежують область їхніх допустимих значень першим квадрантом.

Області, в яких виконуються відповідні обмеження у вигляді нерівностей, указуються стрілками, що направлені у бік допустимих значень змінних. Отримана ОДР – многокутник - показана на рис. 4.3. Многокутник є опуклим, бо разом з будь-якими двома точками містить весь відрізок, що з'єднує їх.

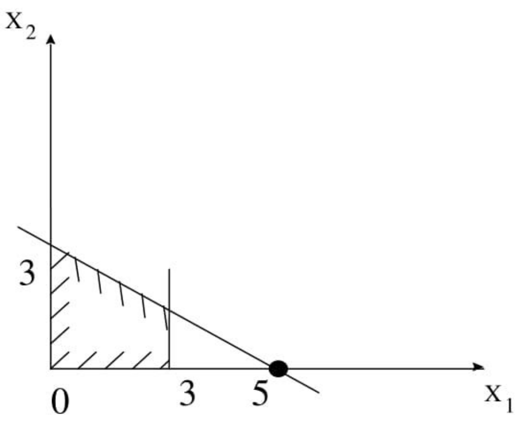


Рис. 4.3

4.3. Питання для самоперевірки

1. Яка множина називається опуклою?
2. Що таке простір обмежень?
3. Що таке замкнена множина?
4. Які можуть зустрітися області розв'язків системи нерівностей? Наведіть геометричну ілюстрацію цих випадків.
5. Дайте геометричну інтерпретацію області розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей.
6. Як означити опуклий многогранник і опуклу многогранну область n-вимірного простору (гіперплощину)?
7. Суть алгоритму графічного методу розв'язування систем лінійних нерівностей.

4.4. Навчальні завдання

№ 4.1. Побудувати площини, координати точок яких задовольняють нерівність:

а) $3x_1 - 2x_2 \ge 6;$ б) $x_1 + 2x_2 \ge 0;$ в) $x_2 \le 3.$

№ 4.2. Побудувати многокутник розв'язків системи нерівностей і знайти координати однієї з вершин:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6 \ge 0; \\ 6x_1 + 5x_2 - 30 \le 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3 \ge 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 20; \\ 4x_1 - 3x_2 \le 19; \\ x_1 - 4x_2 \ge -7 \\ x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 11 \ge 0; \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 0; \\ 6x_1 - 5x_2 + 24 \ge 0; \\ x_1 - 1 \ge 0; \\ x_1 - 6 \le 0; \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 38 \le 0; \\ x_1 - 2x_2 + 7 \ge 0; \\ 3x_1 + x_2 \ge 0; \\ x_2 - 6 \le 0; \\ x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$.

4.5. Завдання для перевірки знань

№ 4.3 Побудувати многокутник розв'язків системи лінійних нерівностей і знайти координати однієї з його вершин:

а) $\begin{cases} x_1+5x_2-13\le 0; \\ 7x_1-x_2-4\ge 0; \\ x_1-3x_2+1\le 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6\ge 0; \\ 5x_1+7x_2-35\le 0; \\ 3x_1+8x_2+24\ge 0; \\ x_1-6\le 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x_1+5x_2\le 30; \\ 2x_1-x_2\le 6; \\ x_1+3x_2\ge 3; \\ x_1\le 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1-x_2\ge 2, \\ 3x_1+2x_2\le 3, \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1-x_2\le 3; \\ x_1+x_2-6\le 0; \\ -x_1+3x_2-10\le 0; \\ x_1+4x_2\ge 4; \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 10x_1+3x_2-30\ge 0; \\ x_1-x_2-4\ge 0; \\ -x_1+x_2-3\ge 0; \\ x_1+x_2-10\le 0; \\ x_{1,2}\ge 0. \end{cases}$

є) $\begin{cases} 5x_1+2x_2\ge 10; \\ x_1+x_2\le 4; \\ -4x_1+x_2\ge -8; \\ x_1-2x_2\le 0; \\ x_{1,.2}\ge 0. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x_1+5x_2\le 10; \\ 2x_1+x_2\le 6; \\ x_1+2x_2\ge 2; \\ x_1+3x_2\le 3. \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x_1+x_2+1\ge 0; \\ 3x_1-2x_2+3\ge 0; \\ x_1-x_2-1\le 0; \\ -2x_1-x_2-3\le 0. \end{cases}$

Тема 5. Графічне розв'язування задач лінійного програмування

Застосовування геометричного способу розв'язування систем лінійних нерівностей до задач лінійного програмування.

5.1. Теоретичний відомості

Геометрична інтерпретація економічних задач дає можливість наочно представити їхню структуру, виявити особливості та відкриває шляхи дослідження більш складних властивостей. ЗЛП з двома змінними завжди можна розв'язати графічно. Але уже в тривимірному просторі таке розв'язування ускладняється, а в просторах, розмірність яких більша за три, графічне розв'язування, взагалі кажучи, неможливе без застосування ІКТ.

Випадок двох змінних прояснює властивості ЗЛП, приводить до ідеї її розв'язання, робить геометрично наочними способи розв'язування та шляхи їхньої практичної реалізації.

Розв'яжемо графічно задачу лінійного програмування:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2\to max \qquad (5.2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\le b_m \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.2)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0 \qquad (5.2.3)$$

Розв'язання. Кожне з обмежень (5.2.2), (5.2.3) задає на площині x_1Ox_2 деяку півплощину. Півплощина — опукла множина. А перетин будь-якого числа опуклих множин є опуклою множиною. Тому область допустимих розв'язків задачі (ОДР) (5.2.1) — (5.2.3) є опукла множина.

Пряма лінія називається *опорною*, якщо вона має з опуклим многокутником, принаймні, одну спільну точку і весь многокутник розташований по один бік від цієї прямої. Через кожну з вершин многокутника можна провести нескінчену множину опорних ліній.

У тривимірному просторі, за аналогією з поняттям опорної прямої, вводиться поняття опорної площини. *Опорною площиною* називається всяка площина, що має з опуклим многогранником, принаймні, одну спільну точку, причому таку, що весь многогранник розташований по один бік від неї. Опорна площина може мати з опуклим многогранником спільну точку (вершину многогранника), прямую (ребро), і, нарешті, спільну грань.

Геометрична інтерпретація цільової функції. Нехай область допустимих розв'язків ЗЛП — непуста множина, наприклад многокутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 5.1).

Виберемо довільне значення цільової функції $Z = Z_0$, найчастіше $Z_0 = 0$. Отримаємо $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Це рівняння прямої лінії, яка при паралельному перенесенні в напрямку нормального вектора $\bar{c}$ стає опорною прямою. У точках прямої NM цільова функція зберігає одне і те ж стале значення Z_0.

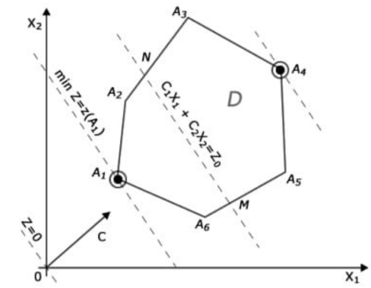


Рис. 5.1 – Область допустимих розв'язків ЗЛП

Вважаючи у рівності (5.2.1) Z параметром, отримаємо рівняння сімейства паралельних прямих, які називаються лініями рівня цільової функції (лініями сталого значення). Знайдемо частинні похідні цільової функції по x_1 і x_2:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = C_1 \qquad (5.2.4)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = C_2 \qquad (5.2.5)$$

Частинні похідні (5.2.4) - (5.2.5) функції показують швидкість її зростання вздовж даної осі. Отже, c_1 та c_2 — швидкості зростання Z відповідно вздовж осей Ox_1 та Ox_2. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ називається *градієнтом* функції. Він показує напрям найшвидшого зростання цільової функції $\bar{c} = (\partial Z/\partial x_1, \partial Z/\partial x_2)$. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ перпендикулярний до прямих $Z = const$ сімейства $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$.

Вектор $-\bar{c}$ указує напрям найшвидшого спадання цільової функції. Його називають *антиградієнтом*.

Порядок (алгоритм) графічного розв'язання

1. З урахуванням системи обмежень будуємо область допустимих розв'язків (ОДР) **G.**
2. Проводимо довільну лінію рівня $Z = 0$ цільової функції (ЦФ).
3. Будуємо вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ найшвидшого зростання цільової функції — вектор *градієнтного* напрямку (нормальний вектор до лінії нульового рівня ЦФ).

4. При розв'язуванні задачі на максимум переміщуємо лінію рівня $z=0$ у напрямку вектора $\overline{c}=(c_1,c_2)$ так, щоб вона дотикалась області допустимих розв'язків в її крайньому положенні (крайній, кутовій точці). У випадку розв'язування задачі на мінімум лінію рівня $z=z_0$ переміщають в *антиградієнтному* напрямку.

5. Визначаємо оптимальний план $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ та екстремальне значення цільової функції $z^* = z(x^*)$.

Очевидно, що оптимальні значення досягаються або в кутових точках (вершинах) многокутника розв'язків або зовсім не досягаються (Рис. 5.2).

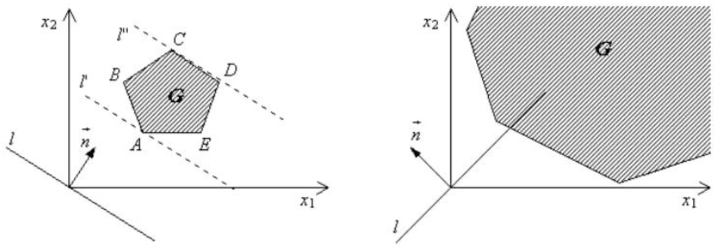


Рис. 5.2

Аналогічно для задачі з трьома змінними у тривимірному просторі графіками цільової функції при різних значеннях z будуть паралельні площини. Розв'язком нерівності з трьома змінними буде півпростір, а системи лінійних обмежень - опуклий многогранник (обмежений або необмежений).

5.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Розглянемо алгоритм графічного розв'язання ЗЛП з двома змінними на конкретному прикладі задачі про складання раціону тварини. Скласти добовий раціон для корів із мінімальною собівартістю за вихідними даними (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Поживні речовини	Поживність кормів		Добова норма
	Комбікорм	Силос	
Кормові одиниці, кг	0,8	0,4	Не менше 12 кг
Перетравний протеїн, г	120	20	Не менше 1400 г
Суха речовина, кг	0,8	0,3	Не більше 18 кг
Максимальна кількість корму в раціоні	16	30	—
Собівартість 1 кг, грн	12	4	—

Розв'язання.

1. Позначимо змінні (параметри розв'язку): x_1 – кількість кг комбікорму в раціоні, x_2 – кількість кг силосу в раціоні.
2. За умовою задачі складаємо систему обмежень.

а) обмеження по вмісту кормових одиниць у раціоні:

$$0,8x_1 + 0,4x_2 \geq 12;$$

б) обмеження по вмісту перетравного протеїну в раціоні:

$$120x_1 + 20x_2 \geq 1400;$$

в) обмеження по вмісту сухої речовини в раціоні: $0,8x_1 + 0,3x_2 \leq 18$;

г) верхнє обмеження по вмісту комбікорму в раціоні: $x_1 \leq 16$;

д) верхнє обмеження по вмісту силосу в раціоні: $x_2 \leq 30$;

е) додаткові обмеження на невід'ємність змінних: $x_{1,2} \geq 0$.

3. Складаємо цільову функцію задачі - собівартість раціону:

$$F = 12x_1 + 4x_2 \to \min$$

4. Складаємо математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,4x_2 \geq 12 \\ 120x_1 + 20x_2 \geq 1400 \\ 0,8x_1 + 0,3x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 16 \\ x_2 \leq 30 \end{cases} \quad x_{1,2} \geq 0 \quad F = 12x_1 + 4x_2 \to \min$$

Усі обмеження і цільова функція лінійні, отже, це задача лінійного програмування.

5. Будуємо область допустимих розв'язків G системи обмежень (рис. 5.3). Графічним розв'язком кожної нерівності буде півплощина на координатній площині. Рівняння границі кожної такої півплощини, можна одержати, замінивши знак нерівності знаком рівності і побудувавши відповідну пряму по двох точках (звичайно на осях координат).

L_1: $0,8x_1 + 0,4x_2 = 12$

x_1	0	15
x_2	30	0

Напрямок півплощини показуємо стрілками. Щоб визначити напрямок, необхідно підставити координати довільної точки (звичайно початок координат O(0;0)), що не лежить на границі, у нерівність. Підставивши координати точки O(0;0) у першу нерівність: $0,8 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0 \geq 12$, бачимо, що вони йому не задовольняють. Отже, вибираємо півплощину з границею L_1, що не містить точку O, і показуємо її напрямок стрілками.

Аналогічно визначаємо напрямок і в інших випадках.

L_2: $120x_1 + 20x_2 = 1400$

x_1	0	10
x_2	70	10

L_3: $0,8x_1 + 0,3x_2 = 18$

x_1	0	22,5
x_2	60	0

L_4: $x_1 = 16$ L_5: $x_2 = 30$

З огляду на додаткові обмеження, область G розташовуємо в першій координатній чверті. Одержимо шестикутник розв'язків ABCDEF (рис. 5.3).

6. Будуємо графік цільової функції при F = 0.

L: $12x_1 + 4x_2 = 0$

x_1	0	-5
x_2	0	15

7. Будуємо нормальний вектор прямої L: $\vec{n}(12;4)$.

8. Рухаємо пряму L у напрямку вектора $\vec{n}$, доки вона не стане опорною (дотичною) до многокутника розв'язків (L′). Таким чином цільова функція досягає мінімуму в точці A (максимуму в точці D).

9. Знаходимо координати точки A, розв'язавши систему рівнянь прямих L_1 і L_2, на перетині яких знаходиться ця точка.

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,4x_2 = 12 \\ 120x_1 + 20x_2 = 1400 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 30 \\ 6x_1 + x_2 = 70 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x_1 = 40 \\ -2x_2 = -20 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 10 \end{cases}, \quad A(10;10).$$

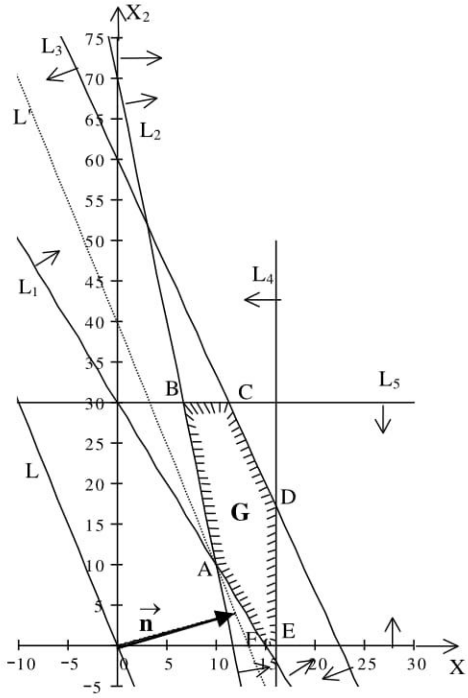


Рис. 5.3

10.Знаходимо мінімальне значення цільової функції у точці А:
$F_{\min} = F(A) = F(10;10) = 12 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 160$

Таким чином, оптимальний раціон повинен містити 10 кг комбікорму і 10 кг силосу. При цьому його собівартість буде мінімальною і складе 160 грн.

Проведемо аналіз розв'язку.

$$\begin{cases} 0,8 \cdot 10 + 0,4 \cdot 10 = 12 \geq 12 \\ 120 \cdot 10 + 20 \cdot 10 = 1400 \geq 1400 \\ 0,8 \cdot 10 + 0,3 \cdot 10 = 11 \leq 18 \\ 10 \leq 16 \\ 10 \leq 30 \end{cases}$$

Отже: добовий раціон забезпечує мінімальні вимоги за вмістом кормових одиниць та перетравного протеїну і містить на 18 – 11 = 7 кг сухої речовини менше максимально можливої кількості. Також не досягнуті вимоги максимальної кількості кормів у раціоні: на 16 – 10 = 6 кг для комбікорму і на 30 – 10 = 20 кг для силосу.

5.3. Питання для самоперевірки

1. Яка множина називається опуклою?
2. Що таке простір обмежень?
3. Що таке замкнена множина?
4. Що таке лінії рівня цільової функції?
5. Що таке градієнт? антиградієнт?
6. Що таке область допустимих розв'язків (ОДР)?
7. Яка пряма називається опорною (дотичною) до многокутника розв'язків?
8. Що називається допустимим і оптимальним розв'язком?
9. Які можуть зустрітися області допустимих розв'язків ЗЛП? Наведіть геометричну ілюстрацію цих випадків.
10. В яких випадках задача може не мати оптимального розв'язку? Проілюструйте ці випадки графічно.

5.4. Навчальні завдання

Розв'язати графічно задачі лінійного програмування.

№ 5.1. Знайти найменше і найбільше значення цільової функції $Z = x_1 + x_2$ при обмеженнях: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 25; \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8; \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26. \end{cases}$

Відповідь: $z_{min} = \frac{96}{17}$ в точці $(\frac{77}{17}; \frac{19}{17})$; $z_{max} = \frac{208}{11}$ в точці $(\frac{141}{11}; \frac{67}{11})$.

№ 5.2. Знайти мінімальне і максимальне значення лінійної функції $Z = x_1 + x_2$ при обмеженнях: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ -x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \le 4. \end{cases}$

Відповідь: $z_{min} = 2\frac{2}{3}; z_{max} = 6$.

№ 5.3. Знайти максимальне і мінімальне значення цільової функції $Z = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях: $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ -2x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 3; \\ x \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$

Відповідь: $z_{min} = 7\frac{1}{3}$ у точці $(\frac{2}{3}; \frac{10}{3})$; $z_{max} = 1$ у точці $(1;0)$.

№ 5.4. У господарстві необхідно організувати виробництво картоплі та ячменю. Наявність ресурсів і витрати на виробництво 1ц продукції наведені в табл. 5.2. Скласти план виробництва продукції і вказати площі посівів кожної культури при оптимальному плані.

Таблиця 5.2

	Виробничі ресурси	Картопля	Ячмінь	Об'єми ресурсів
1	Пашня, га	0,01	0,05	1000
2	Затрати ручної праці, люд.-дні	0,2	0,1	8000
3	Затрати ручної праці, тр. – зм.	0,021	0,03	900
4	Ціна реалізації (млн. г. о.)	60	10	-

Відповідь: $z_{\max} = 280$ млн. гр. од.; 200 га; 800 га.

№ 5.5. Скласти денний раціон мінімальної собівартості для відгодівлі тварин із двох видів кормів K_1 та K_2. Усі необхідні дані містяться в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Харчові речовини	Кількість харчових речовин на 1 кг корму.		Мінімальна норма харчової речовини в раціоні.
	K_1	K_2	
S_1	2	1	7
S_2	1	2	8
S_3	1	3	9
Собівартість 1 кг кормів, грн.	5	6	-

Відповідь: 2 кг; 3 кг; $z_{\min} = 28$ гр. од.

5.5. Завдання для перевірки знань

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

№ 5.6.
$$z = 2x_1 + 3x_2 \to min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{min} = \frac{23}{5}$ в точці $(\frac{7}{5};\frac{3}{5})$.

№ 5.7.
$$z = 5x_1 + 3x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{max} = \frac{235}{19}$ в точці $(\frac{20}{19};\frac{45}{19})$.

№ 5.8.
$$z = x_1 + 4x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \le 5. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{max} = 44$ в точці $(12;8)$.

№ 5.9.
$$z = 2x_1 + 3x_2 \to min(max),$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_{1-2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{min} = 2$ у точці $(\frac{8}{7};\frac{4}{7})$; $z_{max} = 11$ у точці $(1;3)$.

№ 5.10. Для виготовлення столів і шаф в меблевому цеху використовуються два види деревини. Витрати деревини кожного виду (у кв. м) на кожний виріб, прибуток цеху від виробництва кожного виду меблів (в г. о.), запаси деревини кожного виду (у кв. м) задані табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Вироби	Сировина		Прибуток від виробництва одного виробу
	S_1	S_2	
Стіл	0,3	1	12
Шафа	0,12	2	15
Запаси деревини	84	88	-

Скільки столів і шаф має виготовити меблевий цех, щоб його рентабельність була найвищою? Скласти математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

Відповідь: 6335 гр. од., 130 столів, 375 шаф.

№ 5.11. Підприємство має три види сировини і може випускати одну і ту ж продукцію двома різними способами. При цьому за 1 год. роботи першим способом випускається 20 одиниць продукції, а другим способом – 30 одиниць продукції. Кількість сировини (кг) того чи іншого виду, яка витрачається за 1 год. Роботи при різних способах виробництва, запаси сировини (кг) наведені в табл. 5.5. Знайти план виробництва, при якому буде випущена найбільша кількість продукції.

Таблиця 5.5

Спосіб виробництва	Сировина		
	S_1	S_2	S_3
Перший	10	20	15
Другий	20	10	15
Запаси сировини	100	100	90

Відповідь: 2; 4; 160.

Розділ 2
Тема 6. Розв’язування задач симплексним методом

Застосовування аналітичного способу розв’язування систем лінійних рівнянь для знаходження базисних розв’язків. Вивчення симплексного методу розв’язування ЗЛП.

6.1. Теоретичні відомості

Симплексний метод або метод послідовного покращення плану є одним з основних методів розв’язування задач ЛП. Назву симплексний метод бере від слова «симплекс», яким автор методу Р. Данциг позначив накладені на змінні $x_1; x_2; ...; x_n$ обмеження $x_1+x_2+...+x_n=1$. В математиці *симплексом* у *k*-вимірному просторі називається сукупність $k+1$ вершин. Так для площини при $k=2$ симплексом буде трикутник; в просторі при $k=3$ симплексом буде тетраедр, який має *4* вершини.

Враховуючи ці поняття, аналітичний метод розв’язування ЗЛП називають *симплекс-методом*. Він заснований на алгоритмі цілеспрямованого перебору вершин многокутника. Цей алгоритм забезпечує перехід від однієї вершини многокутника розв’язків до іншої в такому напрямку, при якому значення цільової функції від вершини до вершини покращується. Тому процес ніколи не повернеться на вже пройдену вершину (ребро), більш того, метод дозволяє уникнути обчислення всіх вершин. Великою перевагою симплекс-методу є те, що його кроки легко реалізовуються обчислювальною технікою.

Знаходження значення цільової функції та змінних в одній вершині називається ***ітерацією***. Число ітерацій в реальних задачах може вимірюватися сотнями. Вручну, за допомогою симплекс-метода, можуть бути розв’язані задачі, що містять не більше 10 ітерацій. Тому в реальних задачах застосовують ЕОМ (зокрема, ПК) та пакети прикладних програм (ППП).

6.1.1. Знаходження невід’ємного базисного розв’язку системи лінійних рівнянь

Оптимальний розв’язок ЗЛП може досягатися у вершині многогранника розв’язків з невід’ємними координатами. Цим вершинам відповідають невід’ємні базисні розв’язки системи обмежень. Таким чином, для аналітичного розв’язування ЗЛП необхідно вміти знаходити такі розв’язки. Розглянемо на прикладі:

Приклад. Нехай потрібно знайти невід’ємний базисний розв’язок наступної системи рівнянь.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=12 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+x_4=13 \end{cases}$$

Базисний розв’язок буде невід’ємним, якщо у відповідному загальному розв’язку системи вільні члени виявляться невід’ємними. Представимо у вигляді системи 0-рівнянь.

$$\begin{cases} 0=12-(3x_1+2x_2+x_3+2x_4) \\ 0=13-(2x_1+3x_2+3x_3+x_4) \end{cases}$$

До числа базисних змінних можна ввести будь-яку змінну, яка має додатний коефіцієнт хоча б у одному рівнянні. Припустимо, що в число базисних змінних необхідно ввести змінну x_1. Щоб з’ясувати з якого рівняння потрібно знайти x_1, знайдемо мінімальне відношення вільних членів до *додатних* коефіцієнтів при x_1 у кожному рівнянні.

$$\min\left\{\frac{12}{3};\frac{13}{2}\right\}=\frac{12}{3}$$

Оскільки найменше відношення відповідає першому рівнянню, то з нього і знаходимо x_1 (при цьому вільні члени у загальному розв'язку виявляться невід'ємними).

$$3x_1=12-(2x_2+x_3+2x_4) \text{ або } x_1=4-\left(\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4\right)=4-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4.$$

Знайдене значення x_1 підставимо в друге рівняння.

$$0=13-\left(8-\frac{4}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3-\frac{4}{3}x_4+3x_2+3x_3+x_4\right)=5-\left(\frac{5}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4\right).$$

Здобудемо систему: $\begin{cases} x_1=4-\left(\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4\right)\\ 0=5-\left(\frac{5}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4\right)\end{cases}$.

Аналогічно введемо до базису змінну x_2: $\min\left\{\frac{4}{2/3};\frac{5}{5/3}\right\}=\frac{5}{5/3}$. Тобто, з другого рівняння: $\frac{5}{3}x_2=5-\left(\frac{7}{3}x_3-\frac{1}{3}x_4\right)$ або $x_2=3-\left(\frac{7}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4\right)=3-\frac{7}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4$.

Підставимо в перше рівняння:

$$x_1=4-\left(2-\frac{14}{15}x_3+\frac{2}{15}x_4+\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4\right)=2-\left(-\frac{3}{5}x_3+\frac{4}{5}x_4\right)$$

Таким чином, одержимо загальний розв'язок у вигляді:

$$\begin{cases} x_1=2-\left(-\frac{3}{5}x_3+\frac{4}{5}x_4\right)\\ x_2=3-\left(\frac{7}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4\right)\end{cases} \qquad (6.1.1)$$

Відповідний невід'ємний базисний розв'язок матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1=2\\ x_2=3\\ x_3=0\\ x_4=0\end{cases} \text{ або } (2;\,3;\,0;\,0).$$

Для того, щоб здобути іншій невід'ємний базисний розв'язок, уведемо до базису змінну x_3. Її можна ввести тільки з другого рівняння.

$$\frac{7}{5}x_3=3-\left(x_2-\frac{1}{5}x_4\right) \text{ або } x_3=\frac{15}{7}-\left(\frac{5}{7}x_2-\frac{1}{7}x_4\right)=\frac{15}{7}-\frac{5}{7}x_2+\frac{1}{7}x_4.$$

Тобто змінна x_3 стала базисною, а x_2 – вільною. У першому рівнянні також необхідно виключити змінну x_3 з числа вільних.

$$x_1=2-\left(-\frac{3}{5}\left(\frac{15}{7}-\frac{5}{7}x_2+\frac{1}{7}x_4\right)+\frac{4}{5}x_4\right)=2+\frac{9}{7}-\left(\frac{3}{7}x_2-\frac{3}{35}x_4+\frac{28}{35}x_4\right)=\frac{23}{7}-\left(\frac{3}{7}x_2+\frac{5}{7}x_4\right)$$

Здобудемо загальний розв'язок із базисними змінними x_1 та x_3.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{23}{7} - \left(\frac{3}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_4\right) \\ x_3 = \frac{15}{7} - \left(\frac{5}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_4\right) \end{cases} \qquad (6.1.2)$$

Відповідний невід'ємний базисний розв'язок: $\left(\frac{23}{7}; 0; \frac{15}{7}; 0\right)$.

Щоб спростити такі тотожні перетворення системи, розглянемо розширені матриці систем (6.1.1) і (6.1.2). Отримаємо:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 3 & 0 & 1 & \boxed{\frac{7}{5}} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & & \uparrow & \end{array} \end{array} \qquad (6.1.1')$$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{23}{7} & 1 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{5}{7} \\ \frac{15}{7} & 0 & \frac{5}{7} & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (6.1.2')$$

Стовпчик коефіцієнтів при змінній, що вводять до базису, та *рядок* змінної, що виключають з базису, називають *напрямними* (*розв'язувальними, ключовими*) і позначають стрілками відповідно ↑ і ← (6.1.1'). На їх перетині обводять *елемент*, який також називають *напрямним* (*розв'язувальним, ключовим*).

Для того, щоб здобути з розширеної матриці одного загального розв'язку (6.1.1') розширену матрицю іншого загального розв'язку (6.1.2'), необхідно дотримуватися наступного ***алгоритму***.

1. Стовпці базисних змінних заповнюють як одиничні вектори.
2. Елементи напрямного рядка ділять на напрямний елемент.
3. Інші елементи знаходять за правилом "прямокутника". Для цього в першій матриці необхідно мислено виділити прямокутник, на кінцях однієї з діагоналей якого знаходяться замінюваний (a_{ij}) і напрямний (a_{kl}) елементи.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{kj} & \cdots & \boxed{a_{kl}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{il} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Тоді відповідний замінюваному елемент другої матриці знаходиться за формулою:

$$a'_{ij} = \frac{a_{kl} \cdot a_{ij} - a_{kj} \cdot a_{il}}{[a_{kl}]} \qquad (6.1.3)$$

(подібно, як обчислюється визначник матриці другого порядку, але тут обчислення завжди починається з діагоналі, яка містить напрямний елемент). Якщо поділити чисельник почленно на знаменник, отримуємо:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}} \qquad (6.1.3')$$

або у мнемонічному вигляді:

$$\text{'}\mathit{відповідний\ елемент}\text{'} = \text{'}\mathit{замінюваний\ елемент}\text{'} - \frac{\text{'}\mathit{добуток\ елементів\ іншої\ діагоналі}\text{'}}{\boxed{\text{'}\mathit{напрямний\ елемент}\text{'}}}.$$

У даному прикладі: $(x_1, b) = 2 - \dfrac{3 \cdot \left(-3/5\right)}{7/5} = \dfrac{23}{7}$ або $(x_1, x_4) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{\left(-3/5\right) \cdot \left(-1/5\right)}{7/5} = \dfrac{5}{7}$.

6.1.3. Критерій оптимальності опорного плану

Невід'ємний базисний розв'язок системи обмежень канонічної ЗЛП називають *опорним планом*. Перехід від одного опорного плану ЗЛП до іншого проводять за правилом "прямокутника". Кожний опорний план відповідає певній вершині многогранника розв'язків і може бути оптимальним для цільової функції. Знайти оптимальний опорний план можна звичайним перебором, підставивши усі можливі опорні плани у цільову функцію. Але раціональніше застосовувати метод цілеспрямованого перебору, який лежить в основі аналітичного симплекс-методу розв'язування ЗЛП.

Розглянемо ЗЛП у канонічній формі:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Нехай система обмежень сумісна і знайдено її який-небудь загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 - \left(q_{1,l+1}x_{l+1} + q_{1,l+2}x_{l+1} + \ldots + q_{1,n}x_n\right) \\ x_2 = p_2 - \left(q_{2,l+1}x_{l+1} + q_{2,l+2}x_{l+1} + \ldots + q_{2,n}x_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l = p_l - \left(q_{l,l+1}x_{l+1} + q_{l,l+2}x_{l+1} + \ldots + q_{l,n}x_n\right) \end{cases}$$

Відповідний опорний план має вигляд: $(p_1, p_2, \cdots, p_l, 0, 0, \cdots, 0)$.

Щоб з'ясувати, чи є цей план оптимальним, для кожної змінної знаходимо індекс (значення цільової функції):

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij}\right) - c_j \qquad (6.1.4)$$

Індекс базисної змінної дорівнює нулю:

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij}\right) - c_j = c_1 \cdot q_{1j} + c_2 \cdot q_{2j} + \ldots + c_j \cdot q_{jj} + \ldots c_n \cdot q_{nj} - c_j = c_j - c_j = 0 \qquad (6.1.5)$$

Сформулюємо ***критерій оптимальності*** ЗЛП:

1) якщо індекси всіх вільних змінних невід'ємні: $\Delta j \geq 0$, то отриманий опорний план є оптимальним;

2) якщо серед індексів є від'ємні, то план не оптимальний, і його можна покращити, увівши до базису змінну з найменшим від'ємним індексом.

6.1.4. Симплексний метод розв'язування ЗЛП

Симплексний метод є аналітичним методом розв'язування ЗЛП і складається у послідовному покращенні опорного плану за допомогою тотожних перетворень розширеної матриці системи обмежень і критерію оптимальності.

Алгоритм симплекс-методу

розглянемо на прикладі задачі 1 (п. 1.1) про оптимальне використання сировини.

1) За умовою задачі складаємо математичну модель ЗЛП у загальному вигляді:

$$f = 5x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \quad x_{1,2} \ge 0 \end{cases}.$$

2) Зводимо модель ЗЛП до канонічного вигляду:

$$f = 5x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \boxed{x_3} = 19 \\ x_1 + 2x_2 + \boxed{x_4} = 13 \\ x_1 + 3x_2 + \boxed{x_5} = 18 \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}.$$

Симплекс-метод вимагає, щоб у кожному рівнянні була базисна змінна, які треба обвести. Якщо ця вимога не виконується, то можна знайти загальний розв'язок методом Жордана-Гаусса, але краще застосувати метод штучних базисних змінних, який розглянемо пізніше.

3) Записують розширену матрицю системи:

$$\begin{array}{cccccc} b & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 19 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

звідки видно, що для початкового опорного плану доцільно брати ті базисні змінні, стовпчики яких утворюють одиничну матрицю. Ці дані заносять у так звану симплексну табл. №1 - базис Б1 (табл. 6.1).

Алгоритм побудови симплексної таблиці:

У першому рядку пишемо послідовно вільний член та змінні $b, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Зліва добавляємо колонку „Базисні змінні", поряд з нею колонку „C_j", в якій поставлені коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції, в даному випадку величини C_3, C_4, C_5.

В останньому рядку, який називається *індексним* і позначається через $\Delta_j = f_j - C_j$, проставляються числа, що дорівнюють протилежному значенню коефіцієнтів лінійної функції, у відповідності до рівняння $(j=1, 2, 3, 4, 5)$. Взагалі, індекси розраховуються за формулою (6.1.4). Індекс базисної змінної дорівнює нулю (6.1.5).

5) Знаходимо відповідно до таблиці опорний план $X^1 = (0; 0; 19; 13; 18)$ і значення цільової функції $f^1 = \Delta b = 0 \cdot 19 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 18 = 0$.

Таблиця 6.1

	C_i	C_j	0	5	7	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	x_3	19	2	1	1	0	0	19
	0	x_4	13	1	2	0	1	0	6,5
←	0	x_5	18	1	$\boxed{3}$	0	0	1	6
	Δ_j		0	-5	-7	0	0	0	–
					↑				

6) Знаходимо індекси змінних і заповнюємо індексний рядок табл.: $\Delta_1 = 0{\cdot}2 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}1 - 5 = -5$; $\Delta_2 = 0{\cdot}1 + 0{\cdot}2 + 0{\cdot}3 - 7 = -7$. Індекси базисних змінних дорівнюють нулю: $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$. Серед індексів є від'ємні числа, тобто отриманий опорний план X^1 не оптимальний, і його можна покращити, якщо ввести до базису змінну x_2, яка має найменший від'ємний індекс. Відповідний стовпець відмічаємо стрілкою ↑, як напрямний.

7) Знаходимо найменше відношення вільних членів до *додатних* елементів напрямного стовпця: $\min\left\{\frac{b_i}{q_{ij}}\right\} = \min\left\{\frac{19}{1}; \frac{13}{2}; \frac{18}{3}\right\} = \frac{18}{3}$. Ці числа заносимо в останній стовпець таблиці. Найменше відношення відповідає рядку змінної x_5, тобто її треба вивести з базису, а напрямний рядок відмічаємо стрілкою ←. На перетині напрямних рядка та стовпця знаходимо і обводимо напрямний елемент $\boxed{3}$.

8) Складаємо наступну симплексну табл. (Базис Б2).
Стовпці базисних змінних заповнюємо як одиничні вектори.
Елементи напрямного рядка ділимо на напрямний елемент:

$$(x_2, b) = \frac{18}{3} = 6; \quad (x_2, x_1) = \frac{1}{3}; \quad (x_2, x_5) = \frac{1}{3}.$$

Інші елементи знаходимо за правилом "прямокутника" (робота ведеться у старій табл. Б1, а результати записуються у нову симплекс-табл. Б2 (табл. 6.2).

9) Далі повторюємо виконання пунктів 5-8, доки отримаємо оптимальний план. При цьому для контролю при переході від однієї таблиці до іншої доцільно щоразу знаходити значення ЦФ.

$$X^2 = (0; 6; 13; 1; 0), \ f^2 = 0{\cdot}13 + 0{\cdot}1 + 7{\cdot}6 = 42.$$

Таблиця 6.2

	C_i	C_j	0	5	7	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_2$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	x_3	13	5/3	0	1	0	-1/3	7,8
←	0	x_4	1	$\boxed{1/3}$	0	0	1	-2/3	3
	7	x_2	6	1/3	1	0	0	1/3	18
	Δ_j		42	-8/3	0	0	0	7/3	–
				↑					

$$(x_3, b) = 19 - \frac{18\cdot 1}{3} = 13; \quad (x_3, x_1) = 2 - \frac{1\cdot 1}{3} = \frac{5}{3}; \quad (x_3, x_5) = 0 - \frac{1\cdot 1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$(x_4, b) = 13 - \frac{18\cdot 2}{3} = 1; \quad (x_4, x_1) = 1 - \frac{1\cdot 2}{3} = \frac{1}{3}; \quad (x_4, x_5) = 0 - \frac{2\cdot 1}{3} = -\frac{2}{3};$$

Таблиці 6.3 - 6.4

	C_i	C_j	0	5	7	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_3$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
←	0	x_3	8	0	0	1	-5	$\boxed{3}$	$2\frac{2}{3}$
	5	x_1	3	1	0	0	3	-2	–
	7	x_2	5	0	1	0	-1	1	5
	Δ_j		50	0	0	0	8	-3	–
								↑	

$X^3 = (3; 5; 8; 0; 0)$, $f^3 = 0\cdot 8 + 5\cdot 3 + 7\cdot 5 = 50$.

C_i	C_j	0	5	7	0	0	0
	$Б_4$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_5	8/3	0	0	1/3	-5/3	1
5	x_1	25/3	1	0	2/3	-1/3	0
7	x_2	7/3	0	1	-1/3	2/3	0
Δ_j		58	0	0	1	3	0

Індекси усіх змінних невід'ємні, тобто знайдений опорний план є оптимальним:

$$X^{опт} = X^4 = \left(\frac{25}{3}; \frac{7}{3}; 0; 0; \frac{8}{3}\right),$$

а відповідне значення цільової функції максимальним: $f_{max} = f^4 = 58$.

Очевидно, що при переході від однієї табл. (ітерації) до іншої значення ЦФ не зменшується (для задачі на max): воно може залишатись або таким же, або збільшитися. Симплекс-метод розрахований на те, що з кожною ітерацією значення ЦФ збільшується (в крайньому випадку не погіршується), але щоразу потрібно робити перевірку, обчислюючи значення ЦФ для кожного опорного плану.

Відповідно до цього плану необхідно виробити $8\frac{1}{3}$ одиниць продукції виду P_1 і $2\frac{1}{3}$ одиниць продукції виду Р2. При цьому загальний прибуток буде максимальним і складе 58 грошових одиниць. При цьому сировина видів S_1 і S_2 буде використана без залишків ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$), а залишки сировини виду S_3 складуть $x_5 = 2\frac{2}{3}$. Більш детальний аналіз проведемо у табл. 6.5:

Таблиця 6.5

Види сировини	Витрати сировини на виробництво кожного виду продукції, кг		Всього	Вид обмеження	Запаси сировини, кг	Залишки сировини
	P_1	P_2				
S_1	$16\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$	19	≤	19	0
S_2	$8\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	13	≤	13	0
S_3	$8\frac{1}{3}$	7	$15\frac{1}{3}$	≤	18	$2\frac{2}{3}$
Прибуток від реалізації продукції, гр.	$41\frac{2}{3}$	$16\frac{1}{3}$	58	–	–	–

6.1.5. Алгоритм симплекс-методу

Нехай задано канонічну форму задачі лінійного програмування, для якої відомий будь-який опорний план. Знайти максимум функції $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, якщо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad x_j \geq 0 \qquad (j=\overline{1,n}).$$

Складаємо початковий опорний план.

1. Переглядаємо знаки всіх коефіцієнтів Δ_j m+1-го рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то задача розв'язана: допустимий план є оптимальним, max $f = f_0$. Якщо ж не всі $\Delta_j \geq 0$, то переходимо до наступного кроку.

2. Серед значень $\Delta_j < 0$ знаходимо найбільше за абсолютною величиною, і відповідний йому стовпчик виберемо за провідний (ключовий, розв'язувальний, напрямний). Нехай це буде стовпчик з номером *s*. Якщо у цьому стовпчику всі елементи $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то це означає, що цільова функція *f* необмежена, тобто max $f = \infty$. Розв'язування закінчено. Якщо ж не всі $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то переходимо до кроку 3.

3. Для кожного елемента $a_{is} > 0$ провідного стовпчика знаходимо симплексне відношення $\frac{b_i}{a_{is}}$ вільних членів до *додатних* елементів цього стовпця, вибираємо найменше $\Theta_{Os} = \min\limits_i \frac{b_i}{a_{is}}$, і беремо рядок, де цей мінімум досягається, за провідний. Нехай це буде рядок з номером *r*. Елемент a_{rs}, який стоїть на перетині провідного рядка і провідного стовпчика, є провідним (ключовим, розв'язувальним, напрямним).

4. Виконуємо жорданове перетворення (див. тему 3, а також п. 6.1.2) симплексної табл. з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

Послідовність операцій 1-4 називається *ітерацією* симплексного методу.

Зауваження. 1) Індексні рядки також можна заповнювати за правилом прямокутника (крім першої табл.).

2) Геометрично симплекс-методу відповідає найкоротший обхід вершин n-вимірного опуклого многогранника, що утворює область допустимих розв'язків задачі.

6.1.6. Можливі випадки при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом

1) Якщо в індексному (m+1)-у рядку останньої симплексної табл. серед Δj є більше, ніж m нульових (тобто оцінка $\Delta j=0$ відповідає вільній, небазисній змінній), то це означає, що знайдений оптимальний план не єдиний, тобто існує альтернативний оптимальний план. Знайти його можна, якщо вибрати ключовий елемент у зазначеному стовпчику симплекс-табл. та здійснити один крок симплекс-методу.

2) Якщо в індексному рядку є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δj, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\max\limits_j c_j$. Точнішим є таке правило: якщо не всі $\Delta j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то до базису вводять той вектор,

якому відповідає $\min \Delta_j$ (беруть ті j, для яких Δj <0); якщо ж мінімальних оцінок декілька, то до базису вводять вектор, якому відповідає $\max_j c_j$.

3) При розв'язуванні задач на мінімум цільової функції рекомендується замість f_{min} знаходити $(-f)_{max}$.

4) У випадку, коли $f \to \min$, умовою оптимальності плану є $\Delta j \leq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо вона не виконується, то до базису вводять вектор, якому відповідає найбільше Δj. Якщо таких значень є декілька, то включають той вектор, якому відповідає $\min_j c_j$.

5) При побудові симплекс-методу передбачалося, що всі опорні плани ЗЛП невироджені, що забезпечувало досягнення оптимального плану за скінчену кількість кроків. Якщо опорний план вироджений, тобто серед його компонентів a_{ij} одна або декілька базисних змінних дорівнюють нулю, то $\frac{b_j}{a_{ij}} = 0$, і значення лінійної функції при переході до нового опорного плану не зміниться, тобто характер збіжності її такий, що буде кілька ділянок сталості. Тоді може не змінюватися й значення плану деяких базисних змінних. Але й при цьому можна підібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення лінійної форми знову почне зростати. У разі виродженого опорного плану обчислення проводять аналогічно, як і у випадку невиродженого плану.

6) Виродження базису практично не впливає на кількість ітерацій k, що потрібні для визначення оптимального плану. Як правило, їх є в межах $1{,}5m \leq k \leq 3m$, де m – число обмежень задачі.

7) Якщо в опорному плані нульових компонент більше однієї, то лінійна функція може зберігати своє значення протягом декількох наступних ітерацій і можливе повернення до старого базису, що приведе до так званого зациклення. Щоб уникнути зациклення, треба вибрати інший опорний план на деякій ітерації. На практиці зациклення зустрічається надзвичайно мало (в літературі описано лише два випадки таких задач).

8) Якщо на якому-небудь етапі виникає невизначеність у виборі ключового рядка (кілька однакових відношень), то необхідно вибрати ключовим той рядок, для якого відношення елементів наступного стовпчика, що не входить до базису, до ключового стовпчика є мінімальним, і т.д. доти, доки ключовий рядок не визначиться однозначно.

9) Якщо у симплекс-методі при переході від одного плану до іншого в ключовому стовпчику немає додатних елементів a_{ij}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція ЗЛП є необмеженою, отже, оптимальних планів не існує. Аналогічно, якщо для усіх змінних з від'ємними індексами (Δj <0) усі відповідні стовпці мають коефіцієнти $q_{ij} \leq 0$ (тобто не можна вибрати ключовий рядок), то цільова функція необмежена зверху на ОДР і не досягає свого максимуму, отже, ЗЛП не має розв'язку.

6.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Метод розв'язування ЗЛП за допомогою симплексних таблиць розглянемо на конкретному прикладі.

Задача 1. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \le 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases} \qquad (6.2.1)$$

якщо цільова функція (лінійна форма) $f = 3x_1 + 4x_2 \to max$.

Розв'язання. Спочатку перейдемо від системи нерівностей (6.2.1) до системи рівнянь, додавши до лівих частин нерівностей невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5 (*зведемо до канонічного виду задачу ЛП*). Ми отримаємо:

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max \qquad (6.2.2)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 56, \\ 5x_1 + 3x_2 + \quad x_4 = 37, \\ -x_1 + 2x_2 + \quad x_5 = 2. \end{cases} \qquad (6.2.3)$$

Перепишемо тепер систему (6.2.3) у вигляді системи нуль-рівнянь (0-рівнянь):

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max \qquad (6.2.4)$$

$$\begin{cases} 0 = 56 - (4x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5), \\ 0 = 37 - (5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5), \\ 0 = 2 - (-x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5). \end{cases} \qquad (6.2.5)$$

Введемо в базис x_3, x_4, x_5. Це означає, що, присвоївши $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, отримуємо з (6.2.3) перший базисний розв'язок: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 56, x_4 = 37, x_5 = 2$.

При цьому значення цільової функції f=0. На основі (6.2.5) будуємо першу симплексну таблицю (таблиця 6.1).

Алгоритм побудови симплексної таблиці описано у п. 6.1.4.

Коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції - величини C_3, C_4, C_5. В результаті маємо табл. 6.1.

Таблиця 6.1

C_i	C_j Базисні змінні Б1	0	3	4	0	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	56	4	9	1	0	0
0	X_4	37	5	3	0	1	0
0	X_6	2	-1	**2**	0	0	1
Індексний рядок $\Delta_j = f_j - C_j$		0	-3	-4	0	0	0

В останньому рядку, який називається *індексним*, і позначається через $\Delta_j = f_j - C_j$, проставляються числа, що дорівнюють протилежному значенню лінійної функції, у відповідності до рівняння *(j=1, 2, 3, 4, 5)*. Взагалі, індекси розраховуються за формулою (6.1.4). Індекс базисної змінної дорівнює нулю (6.1.5).

Це перша симплексна таблиця, що відповідає першому базисному розв'язку X_1: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=56,\ x_4=37,\ x_5=2$. Значення лінійної функції, яке дорівнює нулю, записуємо в першій клітці індексного рядка (стовпчик b).

Оскільки ми розв'язуємо задачу на максимум, то з виразу цільової функції (лінійної форми) видно, що потрібно збільшити x_1 або x_2. Дійсно, коефіцієнти при цих змінних у дужках від'ємні (а насправді додатні), і якщо ми покладемо $x_1 \geq 0$ або $x_2 \geq 0$, то значення f збільшиться. Але ці ж коефіцієнти з їхніми знаками стоять у індексному рядку.

Отже, ми приходимо до наступного висновку: наявність у індексному рядку від'ємних чисел при розв'язуванні задачі на максимум свідчить про те, що оптимальний розв'язок не отримано (*критерій оптимальності опорного плану*), і тому від першої таблиці потрібно перейти до наступної.

Перехід до нової таблиці, тобто до нової кращої програми, здійснюється наступним способом: у індексному рядку знаходимо *найбільше за модулем від'ємне* (а в задачі на мінімум - найбільше додатне) число. В даному прикладі таким числом буде - 4. Знайдене число визначає провідний (або ключовий, або розв'язувальний) стовпчик, який позначають стрілкою ↑. Далі будемо діяти за таким алгоритмом:

1) Ділимо вільні члени на *додатні* елементи провідного стовпчика і вибираємо з отриманих відношень *найменше*. Найменше відношення визначає *провідний рядок* (позначають стрілкою ←). У даному випадку маємо (ці числа можна внести в останній стовпчик таблиці):

$$\min\left\{\frac{56}{9};\frac{37}{3};\frac{2}{2}\right\}=\frac{2}{2}=1.$$

Таким чином, провідним рядком буде рядок x_5. На перетині провідного стовпчика і провідного рядка стоїть *провідний (ключовий, розв'язувальний, напрямний, головний) елемент* (його обводять рамкою, кружечком, або виділяють жирним шрифтом тощо). Тут - це число 2 (клітинка з адресою (x_5; x_2) виділена).

Тепер приступаємо до складання другої таблиці або другого опорного плану. Замість одиничного вектора x_5 ми в базис уводимо вектор x_2. Перехід до нового базису еквівалентний до елементарного перетворення матриці, елементами якої є числа табл. 6.1. А саме:

2) У новій табл. елементи рядка, які відповідають елементам провідного рядка попередньої табл., діляться на провідний елемент.

3) Щоб отримати будь-який інший елемент нової симплексної табл., потрібно від відповідного елемента попередньої табл. відняти добуток елемента провідного рядка на елемент провідного стовпчика, що поділений на провідний елемент. Наприклад, елементу 4 (табл. 6.1, клітинка за адресою (x_3;x_2)) буде відповідати елемент табл. 6.2:

$$4-\frac{(-1)\cdot 9}{2}=\frac{17}{2}.$$

Відповідний замінюваному елемент другої таблиці можна знаходити також за формулою правила „прямокутника” (6.1.3):

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{kj}\cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}} \qquad 6.1.3$$

При цьому розрахунок проводиться за рядками. За цим же правилом можна розраховувати індекси (крім початкового плану).

Таким чином, ми переходимо до наступної ітерації (табл. 6.2). Указані вище перетворення відносяться до стовпчиків *b*, x_1, x_2, x_3, x_4 , x_5 (стовпчики базисних змінних можна заповнити як одиничні вектори).

З таблиці 6.2 видно, що значення лінійної функції збільшилось, і тепер дорівнює 4. Але наявність в індексному рядку від'ємних чисел свідчить про те, що це значення ще можна збільшити.

Таблиця 6.2

	C_j	0	3	4	0	0	0
C_i	Б 2	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	47	17/2	0	1	0	-9/2
0	X_4	34	**13/2**	0	0	1	-3/2
4	X_2	1	-1/2	1	0	0	1/2
$\Delta_j = fj\text{-}C_j$		4	-5	0	0	0	2

Переходимо до наступної симплексної таблиці, використовуючи пункти 1) – 3) алгоритму. Число-індекс -5 визначає провідний стовпчик (x_1). Знаходимо провідний рядок. Для цього визначимо:

$$\min\left\{\frac{47}{17/2};\frac{34}{13/2};-\right\} = \frac{34\cdot 2}{13} = \frac{68}{13}.$$

Отже, провідним елементом буде 13/2. Змінну x_4 виводимо з базису й уводимо замість нього змінну x_1. Перерахунок коефіцієнтів проводиться за указаним вище правилом, тоді маємо табл. 6.3.

Таблиця 6.3.

	C_j	0	3	4	0	0	0
C_i	**Б 3**	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	33/13	0	0	1	-7/13	-3/13
3	X_1	68/13	1	0	0	2/13	-3/13
4	X_2	47/13	0	1	0	1/13	5/13
$\Delta_j = fj\text{-}C_j$		392/13	0	0	0	10/13	11/13

В індексному рядку нема від'ємних елементів. Отже, ми отримали оптимальну програму (оптимальний план). Оптимальний розв'язок: $X^*_{опт}$=(68/13; 47/13; 33/13; 0; 0), лінійна (цільова) функція набуває максимального значення f = 392/13.

6.3. Питання для самоперевірки

1. Як звести загальну форму ЗЛП до канонічного виду?
2. Яка змінна називається додатковою змінною? Який її економічний зміст?
3. Наведіть умову оптимальності опорного плану при відшуканні мінімуму цільової (лінійної) функції; максимуму цільової (лінійної) функції.
4. Опишіть алгоритм симплексного методу для ЗЛП.
5. Яка змінна виводиться з базису?
6. Яка змінна уводиться до нового базису?
7. Який рядок (стовпчик, елемент) симплексної табл. називається ключовим рядком (стовпчиком, елементом)?

8. Сформулюйте правило, за яким будується друга симплексна таблиця за елементами першої симплексної табл..

9. Яким чином обмеження-рівності перетворюються до обмежень - нерівностей і навпаки?

10. Як переходити від задачі на відшукання мінімуму цільової функції до задачі на відшукання максимуму і навпаки?

11. Охарактеризуйте сутність проблеми виродження (поняття виродженого розв'язку, геометрична інтерпретація, явище зациклення і додаткове правило для його усунення).

12. Вкажіть особливі випадки симплексного методу (не єдиність оптимального розв'язку (альтернативний оптимум), відсутність скінченого оптимуму).

6.4. Навчальні завдання

№ 6.1. Знайти максимум лінійної функції $Z=-x_4+x_5$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1+x_4+x_5=2; \\ x_2+2x_4+3x_5=7; \\ x_3-x_4-3x_5=2; \\ x_j \geq 0, \end{cases} \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j=1,2,3,4,5).$$

Відповідь: 2.

№ 6.2. Максимізувати лінійну функцію $Z=8x_1+5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \leq 10; \\ x_1+x_2 \leq 12; \\ 4x_1+x_2 \leq 8; \\ x_1+4x_2 \leq 10, \end{cases} \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j=1,2).$$

Відповідь: 22,4.

№ 6.3. Знайти мінімум цільової функції $Z=x_1-3x_2+x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_2 \leq 7; \\ -2x_1+4x_2 \leq 12; \\ -4x_1+3x_2+8x_3 \leq 10, \end{cases} \quad \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j=1,2,3).$$

Відповідь: -11.

№ 6.4. Знайти максимум цільової функції $Z=2x_1+3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \leq 18; \\ 2x_1+x_2 \leq 16; \\ x_2 \leq 5; \\ 3x_1 \leq 21, \end{cases} \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j=1,2).$$

Відповідь: 24.

6.5. Завдання для перевірки знань

№ 6.5. Знайти максимум цільової функції $Z=6x_1+5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leq 12; \\ 3x_1+2x_2 \leq 10; \\ 2x_1+x_2 \leq 18, \end{cases} \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j=1,2)$$

Відповідь: 23,2.

№ 6.6. Розв'язати задачу ЛП симплексним методом: $Z=2x_1+3x_2 \to max$

при обмеженнях: $\begin{cases} -3x_1+x_2 \leq 1; \\ x_1+x_2 \leq 2; \\ x_1-2x_2 \leq 0; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

Відповідь: 5,75.

№ 6.7. Максимізувати лінійну функцію $Z = x_1 + 3x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_2 \le 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2; \\ x_{1-3} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 36,5.

№ 6.8. Розв'язати задачу ЛП симплексним методом і, якщо можливо, дати геометричну інтерпретацію процесу розв'язання:

а) $Z = x_1 + 2x_2 \to max$

при обмеженнях: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 1; \\ x_1 - x_2 \ge -1; \\ 2x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

Відповідь: (0,6; 1,6); $Z_{\max} = 3{,}8$.

б) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 = 2 \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 0; 2; 0; 0); $Z_{\max} = 8$.

Тема 7. Розв'язування задач симплексним методом за допомогою штучного базису (М-метод)

Розв'язування розширених задачі ЛП за допомогою штучного базису (М-методу).

7.1. Теоретичні відомості

У попередніх прикладах усі обмеження мали знак „≤", завдяки чому після зведення до канонічного виду у кожному рівнянні виявилася базисна змінна. Таким чином, одразу ж знайдено початковий опорний план. У загальному випадку частина, або навіть усі рівняння можуть не мати базисних змінних, і їх можна відокремити за допомогою тотожних перетворень. Отже, якщо система обмежень ЗЛП не містить одиничної матриці, з якої був би складений початковий базис (а таких задач більшість), то варто застосувати інші методи розв'язування ЗЛП. Один із них є так званий ***метод штучного базису або М-метод***. раціональніше застосувати метод штучного базису.

При розв'язуванні ЗЛП методом штучного базису до лівої частини кожного рівняння-обмеження, які не містять базисних змінних („природних" чи додаткових), вводять (додають) по одній невід'ємній ***штучній*** базисній змінній $x_{n+i} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$. Для того, щоб виключити штучні змінні з базису, їх вводять у цільову функцію з достатньо великими від'ємними коефіцієнтами (–М) (при розв'язуванні задач на максимум). Тому ЗЛП зі штучними базисними змінними називають ще М-задачею.

Після виключення штучних змінних з базису при застосуванні симплекс-методу, у наступних таблицях відповідні стовпці також виключають. Штучні змінні назад у базис не вводяться. На відміну від додаткових змінних, штучні змінні потрібні тільки для створення початкового базису і не мають практичного економічного змісту. Якщо ж у оптимальному плані М-задачі залишиться штучна змінна, то відповідна вихідна задача не має розв’язку.

У випадку задачі на мінімізацію цільової функції штучні змінні мають коефіцієнти (+М).

7.2. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Розглянемо метод введення штучного базису на прикладі.

Задача. Знайти мінімум цільової функції $Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 \ge 3, \quad \text{де} \quad x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3). \end{cases}$$

Розв’язання. Зведемо задачу до канонічного виду:

$$f = -Z = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

У базис можна ввести змінну x_4, тому що коефіцієнти при цій змінній утворюють одиничний вектор. Введемо штучні змінні x_6, x_7 у систему та цільову функцію:

$$f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 3, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6,7) \end{cases}$$

Отже, отримали М-задачу. Перша ітерація записана в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Б1	C_i	0	-5	-2	3	0	0	-M	-M
	C_i	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	-M	5	2	-1	1	0	0	1	0
x_4	0	2	1	1	-1	1	0	0	0
x_7	-M	3	**5**	-8	2	0	-1	0	1
$m+1$ $m+2$		-8M	5 -7M	2 +9M	-3 -3M	0	M	0	0

Для визначення ключового рядка у цій таблиці знаходимо найменше відношення вільних членів до відповідних елементів ключового рядка: $min\left\{\frac{5}{2};\frac{2}{1};\frac{3}{5}\right\}=\frac{3}{5}$. Це число відповідає третьому рядку. Штучна змінна x_7 виводиться з базису і з таблиці (табл. 7.2, 7.3).

Таблиця 7.2

Б2	C_i	0	-5	-2	3	0	0	-M
	C_i	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	-M	3,8	0	2,2	0,2	0	0,4	1
x_4	0	1,4	0	**2,6**	-1,4	1	0,2	0
X_1	-5	0,6	1	-1,6	0,4	0	-0,2	0
$m+1$ $m+2$		-3 -3,8M	0	10 2,2M	-5 -0,2M	0	1 -0,4M	0

Таблиця 7.3

Б3	C_i	0	-5	-2	3	0	0	-M
	C_i	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	-M	2,62	0	0	**1,38**	-0,85	0,23	1
X_2	-2	0,54	0	1	-0,54	0,38	0,08	0
X_1	-5	1,46	1	0	-0,46	0,62	-0,08	0
$m+1$ $m+2$		-8,38 -2,62M	0	0	0,38 -1,38M	-3,86 0,85M	0,24 -0,29M	0

Штучна змінна x_6 виводиться з базису і з таблиці (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

Б4	C_i	0	-5	-2	3	0	0
	C_i	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_3	3	1,90	0	0	1	-0,62	0,17
X_2	-2	1,57	0	1	0	0,05	0,17
X_1	-5	2,33	1	0	0	**0,34**	0
$m+1$		-9,09	0	0	0	-3,66	0,17

Таблиця 7.5

Б	C_i	0	-5	-2	3	0	0
	C_i	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_3	3	6,15	1,52	0	1	0	0,17
X_2	-2	1,23	-0,15	1	0	0	0,17
X_4	0	6,85	2,94	0	0	1	0
$m+1$		15,99	10,76	0	0	0	0,17

Отриманий план $X^*_{опт}$=(0; 1,23; 6,15; 6,85; 0) є оптимальним, причому $f_{\max} \approx 16$ або $Z_{\min} \approx -16$.

7.3. Питання для самоперевірки

1. Методика зведення загальної ЗЛП до канонічної форми.
2. Яка задача ЛП називається розширеною задачею? Поняття М-задачі.
3. Які змінні називаються штучними змінними? Який їхній економічний зміст?
4. Який базис називають штучним базисом?

5. Як побудувати першу симплексну табл. для М-задачі?

6. Алгоритм розв'язування ЗЛП методом штучного базису.

7. Якими мають бути штучні невідомі в оптимальному плані М-задачі, щоб відповідний йому план вихідної задачі був оптимальним?

8. Необхідна умова оптимальності опорного плану при розв'язуванні М-задачі.

7.4. Навчальні завдання

№ 7.1. Знайти мінімум цільової функції $Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 \geq 3, \end{cases} \quad \text{де } x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3).$$

Відповідь: -16,1(6)≈-16.

№ 7.2. Розв'язати ЗЛП симплексним методом за допомогою штучного базису:

а) $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

б) $Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3) \end{cases}$$

в) $Z = 4x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ x_2 \leq 2{,}5; \\ x_1 - 2x_2 \leq 2; \\ 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

г) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 2; \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

Відповідь: а) (0,6; 1,6); $z_{\max} = 3{,}8$;

в) (1,5; 2,5), $z_{\max} = 13{,}5$; г) (1; 0; 2; 0; 1); $z_{max} = 9$.

№ 7.3. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на 100 електроплит. Конструкторам запропоновано до випуску три моделі плит А, Б, В за ціною відповідно 100, 60 і 50 ум. г. о. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей, запас сировини на фірмі наведено в табл. 7.6:

Таблиця 7.6

Сировина	Витрати сировини на одиницю виробу			Запас сировини
	А	Б	В	
I	10	4	5	700
II	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей за критерієм максимуму прибутку фірми. Записати економіко-математичну модель задачі та розв'язати її.

Відповідь: 8000 гр. од.

№ 7.4. Їдальня готує дієтичний салат, використовуючи для цього варений буряк, моркву і квашену капусту. Салат повинен містити не менш як 710 одиниць речовини А, не менш як 73 одиниці речовини В, не менше 3550 одиниць речовини С. Дані про вміст цих речовин у продуктах наведені в табл. 7.7. Визначити складові частини салату при загальній мінімальній вартості.

Таблиця 7.7

Харчові речовини	Вміст речовин (г) у 1 кг овочів			Норми споживання речовин (кг)
	буряк	морква	капуста	
А	3	2	4	710
В	0,3	0,4	0,2	73
С	20	15	10	3550
Вартість овочів (грн)	0,4	0,5	0,4	

Відповідь: 1 кг салату коштує 97 грн. Щоб вартість салату була мінімальною, його склад має бути таким: буряк - 230 г, морква - 10 г, використовувати капусту для приготування салату не рекомендується.

7.5. Завдання для перевірки знань

№ 7.5. а) Знайти максимум цільової функції $Z = 3x_1 - x_2 + x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18, \end{cases} \quad \text{де } x_j \geq 0 \ \left(j = 1,2,3\right).$$

Відповідь: 7,2.

б) Мінімізувати лінійну функцію $Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_6 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 510, \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = 1,2,3,4\right). \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = -15$ у точці ($\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2};0$).

№ 7.6. Знайти мінімальне значення лінійної функції $Z = 2x_1 - 3x_2 + \frac{5}{2}x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 + 3x_6 \geq 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = 1,2,3\right). \end{cases}$$

Відповідь: $z_{min} = \frac{110}{9}$ в точці ($0;-\frac{10}{3};-\frac{8}{9}$).

№ 7.7. Розв'язати за допомогою штучного базису ЗЛП:

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ \quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Відповідь: X*=(0; 4/3; 0; 2); $f_{\max} = \frac{14}{3}$.

№ 7.8. Скласти добовий раціон мінімальної собівартості для корови масою 550 кг, добовим надоєм 15 літрів. Маса раціону не повинна перевищувати 70 кг. Набір кормів, їхня поживність, мінімальна норма поживних речовин у раціоні та собівартість кормів задано в табл. 7.7.

Таблиця 7.7

Харчові речовини	Кількість поживних речовин на 1 кг			Мінімальна норма харчових речовин у раціоні
	Озимого ячменю	Зеленого корму озимої пшениці	Люцерни	
Кормові одиниці, кг.	1,2	0,2	0,2	14,2
Перетравний протеїн, г.	80	18	35	1650
Собівартість 1 кг корму, грн.	10	1	1,05	-

Відповідь: $x_1 = 0{,}202$; $x_2 = 47{,}595$; $x_3 = 22.203$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $z_{\min} = 72{,}95$ грн.

№ 7.9. Для дійної корови скласти добовий раціон мінімальної собівартості. Всі необхідні показники дано в табл. 7.8.

Таблиця 7.8

Харчові речовини	Кількість поживних речовин на 1 кг		Мінімальна норма харчових речовин у раціоні
	Дерть кукурудзи	Сіно люцерни	
Кормові одиниці, кг	1,2	0,5	10
Перетравний протеїн, г	78	40	1020
Каротин, мг	4	50	400
Собівартість 1 кг корма, гр.	3,1	1,5	-

Відповідь: $x1 = 9.35$; $x2 = 7.26$; $x3 = 4.86$; $x5 = 0$; $x6 = 0$ і $Z_{min} = 39{,}88$ грн.

Тема 8. Розв'язування симплексним методом задач практичного змісту

Дослідження залежності між величинами, що фігурують у прикладних галузевих задачах, за допомогою методів лінійного програмування.

8.1. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Максимальна площа, яку господарство може використати під посадку плодових дерев, складає 1000 га. На цій площі планується посадити три види дерев P_1, P_2, P_3. Господарство має три типи обмежених ресурсів: S_1 – орна земля; S_2 – трудові ресурси; S_3 – гроші та матеріали. Запаси ресурсів, витрати їх на 1 га посадок та ціна продукції з одного гектара відповідної культури задані у табл. 8.1. Треба знайти такі площі посадок дерев кожного виду, які б забезпечували максимальний прибуток від реалізації одержаної продукції.

Таблиця 8.1

Типи ресурсів	Види дерев			Запаси ресурсів
	P_1	P_2	P_3	
S_1	1	1	1	1 тис. га
S_2	100	60	200	200 тис. люд.-днів
S_3	400	200	800	600 тис. грн..
Ціна продукції з 1 га (тис. грн.)	3	2	5	

Розв'язання. 1. ***Побудова математичної моделі***. Позначимо через x_1, x_2 і x_3 площі посадок дерев відповідно видів P_1, P_2, P_3. Оскільки загальна площа посадок не може перевищувати 1 тис. га, то

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1 .$$

Обмеженість ресурсів дає такі нерівності:

$$100x_1 + 60x_2 + 200x_3 \le 200,$$
$$400x_1 + 200x_2 + 800x_3 \le 600.$$

Сумарна вартість виробленої продукції $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

2. Розв'яжемо ЗЛП симплексним методом. Спочатку напишемо задачу в канонічній формі, увівши додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 = 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, ..., 6\}.$$

Складемо симплексні табл. 8.2.

Таблиця 8.2

C_i	**Б**	C_j	$\frac{0}{b}$	$\frac{3}{X_1}$	$\frac{2}{X_2}$	$\frac{5}{X_3}$	$\frac{0}{X_4}$	$\frac{0}{X_5}$	$\frac{0}{X_6}$	$\frac{bj}{q_{ij}}$
1	X_4	0	1	1	1	1	1	0	0	1
2	X_5	0	10	5	3	10	0	1	0	1
3	X_6	0	3	2	1	**4**	0	0	1	3/4
m+1 (Δ_j)			0	-3	-2	-5	0	0	0	
1	X_4	0	1/4	1/2	**3/4**	0	1	0	-1/4	1/3
2	X_5	0	5/2	0	1/2	0	0	1	-5/2	5
3	X_3	5	3/4	1/2	1/4	1	0	0	¼	3
m+1 (Δ_j)			15/4	-1/2	-3/4	0	0	0	5/4	
1	X_2	2	1/3	2/3	1	0	4/3	0	-1/3	
2	X_5	0	7/3	-1/3	0	0	-2/3	1	-7/3	
3	X_3	5	2/3	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	
m+1 (Δ_j)			4	0	0	0	1	0	1	

Оскільки в першій симплексній таблиці серед Δ_j є від'ємні, то початковий опорний план не є оптимальним. Максимальне за абсолютною величиною $\Delta_3 = -5$ (найменший від'ємний індекс), а тому треба ввести до базису вектор X_3. Вивести з базису треба вектор X_6, бо min $\frac{bj}{q_{ij}}$ = min (1/1, 10/10, 3/4)=3/4, i=3. Ці дані можна записати в останній стовпчик табл. 8.2. Далі робимо перерахунок за правилом „прямокутника", взявши за провідний елемент $(x_6;x_3)=4$.

У другій симплексній таблиці найбільшим за абсолютною величиною серед від'ємних Δ_j є $\Delta_3 = -\frac{3}{4}$. Це означає, що провідним є другий стовпчик, а провідним рядком є перший, бо min $\frac{bj}{q_{ij}}$ = min(1/3, 5, 3) = 1/3, i=1. Отже, до базису треба включити вектор X_2, а вивести X_4. Переходимо до нової ітерації, зробивши перерахунок за правилом „прямокутника", взявши за провідний елемент $(x_4;x_2)=3/4$.

У третій симплексній таблиці всі $\Delta_j > 0$, а це означає, що план оптимальний.

Таким чином, оптимальний план $X^*=(0,\ 1/3,\ 2/3)$, а $f_{max}=4$. Звідси випливає, що для одержання максимального прибутку від реалізації продукції, одержаної від багаторічних насаджень, треба під дерева виду P_2 відвести 1/3 тис. га, під дерева виду P_3 – 2/3 тис. га. Тоді сумарна вартість одержаної продукції досягне максимального значення $f_{max}=4$ тис. грн.

Задача 2. Підприємство виготовляє верстати двох типів і двигуни до них (табл. 8.3):

Таблиця 8.3

Види сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	Верстат №1	Верстат №2	Двигуни	
Сировина №1	4	2	1	25
Сировина №2	2	1	3	30
Прибуток від реалізації одиниці продукції	4	3	–	–

Скласти оптимальний план виготовлення продукції за критерієм максимуму прибутку від реалізації усіх верстатів, якщо їх загальна кількість не може бути менша від п'яти.

Розв'язання. Математична модель задачі у загальній формі має вигляд:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Зведемо до канонічного вигляду:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + \boxed{x_4} = 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \boxed{x_5} = 30 \\ x_1 + x_2 - x_6 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Обведемо базисні змінні у перших двох рівняннях. У ліві частини третього і четвертого рівнянь вводимо штучні базисні змінні і складаємо М-задачу:

$$f = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 - Mx_8 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + \boxed{x_4} = 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \boxed{x_5} = 30 \\ x_1 + x_2 - x_6 + \boxed{x_7} = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + \boxed{x_8} = 0 \end{cases} \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,8}.$$

Далі розв'язуємо задачу симплексним методом (табл. 8.4).

Таблиця 8.4

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	-M	-M	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
	0	x_4	25	4	2	1	1	0	0	0	0	6,25
	0	x_5	30	2	1	3	0	1	0	0	0	15
	-M	x_7	5	1	1	0	0	0	-1	1	0	5
←	-M	x_8	0	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	0	0	1	0
	Δ_j		-5M	-2M-4	-2M-3	M	0	0	M	0	0	–
				↑								

Доки в опорному плані залишаються штучні змінні, він не має практичного змісту. Штучну змінну x_8 виключаємо з базису і відповідний стовпець з наступної табл.8.5.

Таблиця 8.5

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	-M	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_2$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	0	x_4	25	0	-2	5	1	0	0	0	5
	0	x_5	30	0	-1	5	0	1	0	0	6
←	-M	x_7	5	0	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	5
	4	x_1	0	1	1	-1	0	0	0	0	–
	Δ_j		-5M	0	1	-M-4	0	0	M	0	–
						↑					

Штучну змінну x_7 виключаємо з базису і відповідний стовпець з наступної табл. 8.6 відкидаємо.

Таблиця 8.6

	C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
		$Б_3$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
←	0	x_4	0	0	-2	0	1	0	$\boxed{5}$	0
	0	x_5	5	0	-1	0	0	1	5	1
	0	x_3	5	0	0	1	0	0	-1	–
	4	x_1	5	1	1	0	0	0	-1	–
	Δ_j		20	0	1	0	0	0	-4	–
									↑	

$X^3 = (5; 0; 5; 0; 5; 0)$, $f^3 = 20$.

Таблиця 8.7

C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0	$\frac{b_i}{q_{ij}}$
	$Б_4$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_6	0	0	-0,4	0	0,2	0	1	-
← 0	x_5	5	0	$\boxed{1}$	0	-1	1	0	5
0	x_3	5	0	-0,4	1	0,2	0	0	–
4	x_1	5	1	0,6	0	0,2	0	0	$8\frac{1}{3}$
Δ_j		20	0	-0,6 ↑	0	0,8	0	0	0

$X^4 = (5; 0; 5; 0; 5; 0),\ f^4 = 20.$

Таблиця 8.8

C_i	C_j	0	4	3	0	0	0	0
	$Б_1$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_6	2	0	0	0	-0,2	0,4	1
3	x_2	5	0	1	0	-1	1	0
0	x_3	7	0	0	1	-0,2	0,4	0
4	x_1	2	1	0	0	0,8	-0,6	0
Δ_j		23	0	0	0	0,2	0,6	0

$X^*=X^{опт} = X^5 = (2; 5; 7; 0; 0; 2),\ f^*=f^{max} = f5 = 23.$

Таким чином, необхідно виготовити 2 верстати першого і 5 верстатів другого типу, а також 7 двигунів до них. При такому плані прибуток від їх реалізації буде максимальним і складе 23 грошових одиниці. При цьому сировина обох видів буде використана без залишків ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$), а перевиконання плану виготовлення верстатів складе $x_6 = 2$. Детальніший аналіз - у табл. 8.9.

Таблиця 8.9

Види сировини	Витрати сировини на виготовлення продукції			Всього	Вид обмеження	Обсяг обмеження	Залишки і надлишки
	Верстат №1	Верстат №2	Двигуни				
Сировина №1	8	10	7	25	≤	25	0
Сировина №2	4	5	21	25	≤	30	0
Планова кількість верстатів	2	5	–	7	≥	5	2
Відповідність кількості двигунів і верстатів	2	5	-7	0	=	0	0
Прибуток від реалізації всієї продукції	8	15	–	23	–	–	–

8.2. Навчальні завдання

8.1. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на електроплити. Конструкторам запропоновано до випуску три моделі плит А, Б, В за ціною відповідно 100, 60 і 50 ум. г. о. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей, запас сировини на фірмі наведено в табл. 8.10.

Таблиця 8.10

Сировина	Витрати сировини на одиницю виробу			Запас сировини
	А	Б	В	
I	10	4	5	700
II	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей за критерієм максимуму прибутку фірми. Записати економіко-математичну модель задачі та розв'язати її.

Відповідь: (0; 175; 0); 10500 г. о.

№ 8.2. Знайти оптимальне поєднання посівів пшениці і картоплі, що максимізують дохід, на площі 8000 га, якщо економічні показники їх виробництва задано в табл. 8.11.

Таблиця 8.11.

Види ресурсів	Затрати на 1 га посівів		Об'єм ресурсів
	пшениці	картоплі	
Механізована праця, тр.-зм.	0,6	4,6	1000
Конно-ручна праця, люд,-дн.	2	22	50000
Урожайність, ц/га	20	100	-
Прибуток, тис. г. о./ц	0,3	0,1	-

Відповідь: 6696,65 га, 1303,348 га, 53213.39 гр. од.

№ 8.3. У великій лікарні хірургічні операції розбиті у відповідності до їхньої середньої тривалості на три категорії: 30 хв., 1 год., 2 год. За операцію I, II і III категорії лікарня отримує відповідно 10, 15 і 20 у. г. о. Якщо у лікарні є чотири операційних, які працюють в середньому по 10 год., то скільки операцій кожного типу лікарня повинна планувати, щоб максимізувати: а) дохід; б) загальне число операцій?

8.3. Завдання для перевірки знань

№ 8.4. Знайти оптимальне поєднання посівів кукурудзи і гороху з максимальною вартістю валової продукції, якщо економічні показники їхнього виробництва наведені в табл. 8.12.

Таблиця 8.12

Виробничі ресурси	Витрати на 1 ц		Об'єм ресурсів
	кукурудзи	гороху	
Пашня, га.	0,025	0,05	1200
Ручна праця, люд./дн., тр./зм.	0,16	0,074	6000
Механізована праця, тр./зм.	0,064	0,037	2500
Ціна реалізації 1ц, тис. гр. од.	5,5	10	-

Відповідь: 34341,463 ц; 6829,27 ц; 257170,73 тис. гр. од.

№ 8.5. Для виготовлення чотирьох видів продукції (А, Б, В, Г) використовується три види сировини (I, II, III). Інші умови задачі задано в табл. 8.13. Визначити план випуску продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Таблиця 8.13

Ресурси	Запас ресурсів, од.	Норми витрат сировини на одиницю продукції, од.			
		А	Б	В	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	1	0	6	1
Прибуток від реалізації продукції, гр. од.		7,5	3	6	12

№ 8.6. Кондитерська фабрика виготовляє цукерки в будь-яких кількостях (збут забезпечений), але запаси сировини обмежені. Необхідно визначити, яких цукерок і скільки (у десятках кілограмів) необхідно виготовити, щоб прибуток від реалізації був максимальним. Норми витрат сировини на виробництво 10 кг цукерок кожного виду наведені в табл. 8.14.

Таблиця 8.14

Сировина	Витрати сировини на 10 кг цукерок			Запас сировини
	А	Б	В	
Какао	18	15	12	360
Цукор	6	4	8	192
Наповнювач	5	3	3	180
Прибуток від реалізації продукції, гр. од.	5	3	8	

Відповідь: X*=(0;80;20); f*=400.

№ 8.7. Для виготовлення продукції фабрика використовує три види сировини. При цьому можна застосовувати будь-який із чотирьох способів виробництва. Запаси сировини, витрати і кількість виробленої продукції за 1 год. роботи по кожному із способів наведені в табл. 8.15. Визначити план випуску продукції за способами виробництва для отримання найбільшого прибутку.

Таблиця 8.15

Сировина	Спосіб виробництва				Запаси сировини
	I	II	III	IУ	
Сировина №1	1	2	1	0	18
Сировина №2	1	1	2	1	30
Сировина №3	1	3	3	2	40
Випуск продукції	12	7	18	10	

Відповідь: X*=(18;0;0; 11); f*=326.

№ 8.8. (Задача отримання дешевого металургійного сплаву). Для виготовлення виробів з металу в цех як сировина надходить латунь (сплав міді і цинку) чотирьох типів зі вмістом цинку 10, 20, 25 і 40% за ціною 10, 30, 40, 60 у. гр. о. за 1 кг відповідно. В яких пропорціях потрібно переплавляти цю сировину, щоб одержати найдешевший сплав латуні, що містить 30% цинку?

Відповідь: X*=(1/3;0;0; 2/3);отже, найдешевший сплав I і IУ типу сировини у відношенні 1:2, тоді $X^*_{опт}$=(0,3333; 0; 0; 0,6667); f*=43,333.

№ 8.9. Озеро заселяють три види риб середньою масою 4, 2 і 1 кг відповідно. Для середньої рибини I виду потрібно 2 од. їжі А і 3 од. їжі Б на день. Відповідні потреби в їжі для риби II виду 1 і 2 од, III виду – 1 і 0,5 од. Щоденні запаси їжі видів А та Б становлять по 1000 од. Як треба заселити озеро, щоб загальна маса риби в ньому була найбільшою?

Відповідь: X*=(250;0;500).

№ 8.10. Компанія, що виробляє консервовані фрукти, заготовила 12 т яблук, 10 т персиків, 8 т груш. Компанія виготовляє три види фруктових сумішей у банках ємністю по 1 л. Перша суміш складається з яблук і персиків навпіл і реалізується за 5 г. о. за банку. Друга суміш містить всі три види фруктів порівну і коштує 4 г. о. Третя суміш складається з персиків і груш навпіл і реалізується за 3 г. о. Скласти план випуску продукції (у банках), щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним.

Тема 9. Двоїсті задачі ЛП та їх властивості

Формулювання двоїстих задач ЛП з умов вихідної задачі, яка представлена в канонічній формі, й отримання оптимального розв'язку двоїстої пари задач за допомогою симплекс – методу.

9.1. Теоретичні відомості

9.1.1. Математичні моделі двоїстих задач. Зв'язок між їхніми умовами

У симплекс-методу є велика перевага: розв'язуючи цим методом задачу максимізації, ми в той же час отримуємо без додаткових обчислень розв'язок двоїстої задачі мінімізації. Поняття двоїстості є виключно важливим не лише в теоретичному відношенні, але являє також великий практичний інтерес, тому що використовується при розробці ефективних методів аналізу на чутливість. Двоїста задача - це допоміжна задача лінійного програмування, яка формулюється за допомогою певних правил безпосередньо з умов вихідної (або прямої) задачі.

Нехай пряма задача задана в загальній формі:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{m} A_{ij} X_i \le B_j, \quad X_i \ge 0, \ i = \overline{1,n}$

Умови двоїстої задачі формуються відповідно до табл. 9.1

Таблиця 9.1

Пряма задача в загальній формі	Двоїста задача		
	Цільова функція	Обмеження	Змінні
Максимізація	Мінімізація	$\geq$	не обмежені в знакові
Мінімізація	Максимізація	$\leq$	не обмежені в знакові

Узагальнюючи, напишемо математичні моделі всіх двоїстих задач.

Вихідна задача **Двоїста задача**

Несиметричні задачі

1.
$$f_{min} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j = b_j, \quad x_j \geq 0. \qquad z_{max} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \leq c_i.$$

2.
$$f_{max} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j = b_j, \quad x_j \geq 0. \qquad z_{min} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \geq c_i.$$

Симетричні задачі

3.
$$f_{min} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j \geq b_j, \quad x_j \geq 0. \qquad z_{max} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \leq c_i, \quad y_j \geq 0.$$

4.
$$f_{max} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j \leq b_j, \quad x_j \geq 0. \qquad z_{min} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \geq c_i, \quad y_j \geq 0.$$

Пару двоїстих задач називають ***симетричною*,** якщо усі обмеження в них є нерівностями, а всі змінні невід’ємні.

Симетричні двоїсті задачі мають такі **властивості**:

1. В одній задачі відшукують максимум цільової функції, в іншій – мінімум.
2. Коефіцієнти при змінних у цільовій функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень в іншій.
3. Кожна із задач задана у стандартній формі, а саме: в задачах на максимум всі нерівності виду „$\leq$”, а в задачі на мінімум – всі нерівності виду „$\geq$”.
4. Матриці коефіцієнтів при змінних у системах обмежень є транспонованими одна до одної.
5. Число нерівностей у системі обмежень однієї задачі дорівнює числу змінних у іншій задачі.
6. Умова невід’ємності змінних є в обох задачах.
7. Якщо на j-ту змінну прямої задачі накладена умова невід’ємності, то j-те обмеження двоїстої задачі буде нерівністю; якщо j-та змінна прямої задачі не обмежена умовою невід’ємності, то j-те обмеження двоїстої задачі буде рівнянням.

9.1.2. Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Теореми двоїстості

1. Якщо одна з двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має й інша задача. Оптимальні значення їхніх цільових функцій рівні: $\max Z = \min F$ і навпаки (***перша*** (основна) ***теорема двоїстості***).

Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то умови іншої задачі суперечливі (друга задача не має розв'язків).

2. Відповідність між початковими змінними однієї із задач і додатковими змінними іншої задачі можна задати табл. 9.2:

Таблиця 9.2

Змінні вихідної задачі							
Початкові				Додаткові			
x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	...	y_{m+n}	y_1	y_2	...	y_m
Додаткові				Початкові			
Змінні двоїстої задачі							

3. Якщо пряма ЗЛП має оптимальний план X*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y* визначається зі співвідношення $Y^* = \bar{c}_{баз} D^{-1}$, де $\bar{c}_{баз}$ - вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані. При цьому порядок слідування його координат визначається порядком запису базисних змінних у останній симплекс-табл.;

D^{-1} - матриця, що обернена до матриці D, яка складена з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-табл. в тих стовпчиках, де в першій табл. містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих ЗЛП знаходять розв'язок іншої.

4. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння (***друга теорема двоїстості***).

5. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження (***третя теорема двоїстості***).

Економічний зміст третьої теореми двоїстості: відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Таким чином, за допомогою теорем двоїстості можна, розв'язавши симплекс-методом пряму задачу, знайти оптимальний розв'язок двоїстої, і, навпаки. Метод, при якому спочатку симплексним методом розв'язується двоїста задача, а потім оптимальний розв'язок прямої задачі відшукується за теоремами двоїстості, називається *двоїстим симплексним методом*.

9.1.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі

Теореми двоїстості дають можливість дати економічне тлумачення двоїстої задачі.

1. У прямій задачі кожен коефіцієнт цільової функції c_j являє собою величину прибутку, який з'явиться від реалізації *j*-го виду продукції ($j=\overline{1,n}$);

b_i $(i=\overline{1,m})$ – запаси сировини *i*-го виду, що використовується для виготовлення одиниці *j*-го виду продукції;

x_{ij} - кількість одиниць *j*-го виду продукції, яку потрібно виготовити;

цільова функція *f* характеризує прибуток і має розмірністю гроші.

З того, що $f_{\max}=z_{\min}$ випливає, що розмірністю y_i $(i=\overline{1,m})$ є $\dfrac{гроші}{об'єми\ ресурсів}$, тобто цінність *i*-го ресурсу. Тому двоїсті оцінки називають ще *тіньовими цінами*.

2. За допомогою двоїстих оцінок можна визначити *статус* кожного ресурсу прямої задачі.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, умовно поділяють на *дефіцитні* та *недефіцитні* в залежності від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі.

Якщо $y_i > 0$, то *i*-тий ресурс *використовується повністю* і є *дефіцитним*. Якщо $y_i = 0$, то *i*-тий ресурс *використовується не повністю* і є *недефіцитним*.

3. За допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі можна визначити *рентабельність* продукції, що виготовляється.

Ліва частина *j*-го обмеження являє собою вартість усіх ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці *j*-го виду продукції. Якщо вона більша за c_j, то виробництво *нерентабельне*, і тому в прямій задачі ЛП $x_j = 0$. Якщо ж вона дорівнює c_j, то виробництво *рентабельне*, і в оптимальному плані $x_j > 0$.

9.1.4. Післяоптимізаційний аналіз ЗЛП

Актуальність теорії двоїстості полягає в тому, що вона складає основу методів аналізу лінійних моделей на чутливість.

Якщо ЗЛП розв'язана графічно, то у рамках аналізу на чутливість розв'язуються такі три задачі: 1) аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень; 2) аналіз ступеня дефіцитності ресурсів; 3) аналіз розв'язку ЗЛП на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції (ЦФ).

1. **Перша задача на чутливість:** до зміни правих частин обмежень. Вона дає відповіді на запитання: на скільки доцільно збільшити або скоротити запаси ресурсів? На яку величину можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення

отриманого оптимального значення ЦФ? На яку величину можна зменшити запас деякого ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення ЦФ?

Оскільки величина запасу кожного з ресурсів фіксується в правих частинах обмежень, то цей вид аналізу називають ще аналізом на чутливість до правих частин (обмежень).

Обмеження лінійної моделі поділяються на *активні (зв'язуючі)* та *неактивні (незв'язуючі)*.

Якщо деякі обмеження є *активними*, то ресурс, який йому відповідає, відноситься до *дефіцитних* ресурсів, оскільки він витрачається повністю.

Ресурс, з яким асоціюється *неактивне* обмеження, відноситься до розряду *недефіцитних* ресурсів, тобто наявних у деякому надлишку.

Отже, аналіз на чутливість розв'язку до правих частин обмежень дає можливість визначити такі величини: 1) гранично допустиме *збільшення* запасу *дефіцитного* ресурсу, що дозволяє *поліпшити* раніше знайдений оптимальний розв'язок; 2) гранично допустиме *зниження* запасу *недефіцитного* ресурсу, що *не змінює* знайденого раніше значення ЦФ. Тоді надлишки недефіцитного ресурсу можуть бути використані для інших цілей (Задача 3 п. 9.2, Задача 1 п. 10.2).

2. Друга задача на чутливість: оцінка дефіцитності ресурсів. Вона дає відповіді на запитання: збільшення якого з ресурсів є найбільш вигідним?

Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення ЦФ. Таку характеристику можна одержати безпосередньо за результатами першої задачі на чутливість.

Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу i-го виду через y_i, її визначають зі співвідношення тіньової ціни: $y_i = \dfrac{\Delta f_i}{\Delta b_i}$, де Δb_i - приріст запасу i-го виду ресурсу, Δf_i - приріст ЦФ, що зумовлений збільшенням i-го ресурсу на величину Δb_i.

3. Третя задача на чутливість: до зміни коефіцієнтів ЦФ. Визначає, в яких межах є допустимі зміни коефіцієнтів ЦФ, при яких оптимальний план не зміниться.

Зміна коефіцієнтів ЦФ впливає на нахил прямої ЦФ (при графічному розв'язанні). Тому варіація коефіцієнтів ЦФ може призвести до зміни сукупності *активних* обмежень, *статусу* якогось ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки). Отже, можуть виникнути такі питання: а) Яким є діапазон зміни (збільшення чи зменшення) якогось коефіцієнта ЦФ, при якому не зміниться оптимальний розв'язок? б) На скільки варто змінити той чи інший коефіцієнт ЦФ, щоб зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки?

9.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Побудувати модель двоїстої ЗЛП.

Пряма задача: $\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Зводимо до канонічної форми: $\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

при обмеженнях: $$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ & x_1.x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Двоїста задача: $\min f = 10y_1 + 8y_2$

при обмеженнях: $$\begin{aligned} & y_1 + 2y_2 \ge 5, \\ & 2y_1 - y_2 \ge 12, \\ & y_1. + 3y_2 \ge 4, \\ & y_1 + 0y_2 \ge 0. \end{aligned}$$ y_1, y_2 - не обмежені в знаках.

Задача 2. Побудувати двоїсту задачу до даної: $\min z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$

при обмеженнях $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \end{cases}$$
$$.x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Розв'язання. Упорядкуємо спочатку запис двоїстої задачі – нерівності мають бути смислу „≤", оскільки цільова функція максимізується. Для цього другу нерівність помножимо на -1 і напишемо двоїсту задачу:

$$\max f = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3, \qquad \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1, \\ -2y_1 - 3y_2 = -2, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 = -1, \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \le 1, \end{cases}$$
$$y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0.$$

друге і четверте обмеження виражені у вигляді рівнянь, тому що відповідні їм змінні x_2, x_4 не мають умови невід'ємності. Умови невід'ємності у двоїстій задачі стосуються лише змінних y_2, y_3, оскільки у прямій задачі їм відповідають обмеження у вигляді нерівностей.

Задача 3. Для виготовлення чотирьох видів продукції використовують три види сировини. Запаси сировини, норми її витрат і прибуток від реалізації кожного продукту наведені в табл. 9.3.

Таблиця 9.3

Тип сировини	Норми витрат				Запаси сировини
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Ціна виробу	9	6	4	7	

Потрібно:

1. Сформулювати пряму оптимізаційну задачу на максимум загальної собівартості, указати оптимальну виробничу програму.
2. Сформулювати двоїсту задачу і знайти її оптимальний план.
3. Проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані.

4. Визначити, як зміниться загальна вартість продукції й план випуску при збільшенні запасів сировини II й III видів на 120 та 160 одиниць відповідно й одночасному зменшенні запасів сировини I виду на 60 одиниць.

5. Визначити доцільність включення у план виробництва продукції виду «Д» ціною 12 грошових одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду сировини.

Розв'язання.

1) *Сформулюємо пряму оптимізаційну задачу на максимум загальної собівартості та вкажемо оптимальну виробничу програму*. Нехай $x_1; x_2; x_3; x_4$ - обсяги виробництва продукції кожного виду. Тоді математична модель ЗЛП така:

Цільова функція: $max\, f(\bar{x}) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$.

Функціональні обмеження:

$$\begin{aligned} &x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ &0x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ &4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 \le 800. \end{aligned}$$

Додаткові (прямі) обмеження: $x_{1,2,3,4} \ge 0$.

При розв'язуванні задачі на максимум загальної собівартості отримали такі результати: $x_1 = 95$; $x_2 = 210$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$.

Оптимальна виробнича програма передбачає випуск 95 одиниць першої продукції, 210 одиниць другої продукції, 0 одиниць третьої продукції та 0 одиниць четвертої продукції.

Третій і четвертий вид продукції випускати не вигідно, тому що затрати перевищують ціну.

Значення ЦФ $max\, f(\bar{x}) = 9 \cdot 95 + 6 \cdot 210 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 2115$.

2) Сформулюємо двоїсту задачу і знайдемо її оптимальний план.

Нехай $y_1; y_2; y_3$ - двоїсті оцінки типів ресурсів відповідно.

Цільова функція: $min\, z(\bar{y}) = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3$

Функціональні обмеження:

$$\begin{aligned} &y_1 + 0y_2 + 4y_3 \ge 9, \\ &0y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 6, \\ &2y_1 + 3y_2 + 0y_3 \ge 4, \\ &y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 7. \end{aligned}$$

Додаткові (прямі) обмеження: $y_{1,2,3} \ge 0$.

Знайдемо оптимальний план цієї задачі, використовуючи теорему двоїстості:

$$\max f(\bar{x}) = 95 \cdot 9 + 210 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 2115.$$

Перш за все, перевіримо, чи є вказаний в умові задачі план допустимим розв'язком:

по ресурсу I: $1 \cdot 95 + 0 \cdot 210 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \le 180$,

по ресурсу II: $0 \cdot 95 + 1 \cdot 210 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 210$,

по ресурсу III: $4 \cdot 95 + 2 \cdot 210 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 800$.

Отже, план оптимальний. Ресурс I залишається в надлишку, а ресурси II й III витрачаються повністю.

Скористаємося співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0,$$

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0.$$

Оскільки $x_1 > 0$ та $x_2 > 0$, то

$$\begin{aligned} &y_1 + 4y_3 = 9, \\ &y_2 + 2y_3 = 6, \\ &y_1 = 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &y_1 = 0, \\ &y_2 = \frac{3}{2}, \\ &y_3 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Обчислимо значення цільової функції двоїстої задачі:

$$z(\overline{y}) = 180 \cdot 0 + 210 \cdot \frac{3}{2} + 800 \cdot \frac{9}{4} = 2115,$$

тобто наведений в умові план є оптимальним.

3) Проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані. Ресурс I є недефіцитним ($y_1 = 0$). Ресурси II й III є дефіцитними, причому ресурс III більш дефіцитний, ніж ресурс II ($y_3 = \frac{9}{4},\ y_2 = \frac{3}{2},\ y_3 > y_2$).

Знайдемо норму замінюваності для дефіцитних ресурсів: $y_3 : y_2 = \frac{9}{4} : \frac{3}{2} = 3 : 2$, отже, ресурс III в 1,5 рази більш ефективний, ніж ресурс II з точки зору впливу на максимум продукції.

4) Визначимо, як зміниться загальна вартість продукції й план випуску при збільшенні запасів сировини II й III видів на 120 та 160 одиниць відповідно й одночасному зменшенні запасів сировини I виду на 60 одиниць.

Будемо вважати, що дані зміни об’ємів ресурсів знаходяться в межах стійкості оптимального розв’язку (у межах стійкості двоїстих оцінок), тоді за третьою теоремою двоїстості маємо:

$$\Delta f(\overline{x}) = \Delta b_i y_i,$$

$$\Delta f(\overline{x}) = (+120) \cdot \frac{3}{2} + (+160) \cdot \frac{9}{4} + (-60) \cdot 0 = 540,$$

$$f(\overline{x}) = 2655.$$

Напишемо вихідну й двоїсту ЗЛП зі зміненими обсягами ресурсів.

Вихідна:

$$\max f(\overline{x}) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4,$$

$$\begin{aligned} &x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ &0x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 90, \\ &4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 \le 960, \end{aligned}$$

$$x_{1,2,3,4} \ge 0.$$

Двоїста:

$$\min z(\overline{y}) = 180y_1 + 90y_2 + 960y_3,$$

$$\begin{aligned} &y_1 + 0y_2 + 4x_3 \ge 9, \\ &0y_1 + y_2 + 2x_3 \ge 6, \\ &2y_1 + 3y_2 + 0x_3 \ge 4, \\ &y_1 + 2y_2 + 4x_3 \ge 7, \end{aligned}$$

$$y_{1,2,3} \ge 0.$$

Скористаємося співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0,$$

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0.$$

Розглянемо перші співвідношення (їх два):

$0 + 4 \cdot \frac{9}{4} = 9$, отже, про x_1 нічого сказати не можна.

$\frac{3}{2} + \frac{9}{4} \cdot 2 = 6$, отже, про x_2 нічого сказати не можна.

$2 \cdot 0 + \frac{3 \cdot 3}{2} \neq 4$, $x_3 = 0$ (витрати більші від ціни),

$0 \cdot 2 + \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{9}{4} \neq 7$, $x_4 = 0$ (витрати більші від ціни).

Розглянемо другі співвідношення:

$y_1 = 0$, - нічого сказати не можна,

$y_2 = \frac{3}{2}$, - друге обмеження перетворюється у рівність.

$x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 330$,

$y_3 = \frac{9}{4}$, - третє обмеження перетворюється у рівність.

$4x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 960$.

Напишемо систему рівнянь та розв'яжемо її:

$$\begin{array}{l} x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 330, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 960, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_{14} = 75, \\ x_2 = 330, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \end{array}$$

ЦФ: $f(x) = 9 \cdot 75 + 6 \cdot 330 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 2655$.

Це співпадає з висновком, який було зроблено раніше на основі теореми про оцінки.

5) Визначимо доцільність включення у план виробництва продукції виду «Д» ціною 12 грошових одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду сировини. Це завдання виконується на основі третьої властивості двоїстих оцінок, тобто оцінки як означення ефективності.

Розрахуємо показник ефективності для цієї продукції:

$$\Delta_4 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{9}{4} - 12 = -4{,}5 < 0,$$

отже, дану продукцію випускати доцільно (витрати менші від ціни).

Задача 4. Чи є для даної задачі ЛП оптимальним запропонований план x = (0; 1/5; 8/5)?

$$z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,3}.$$

Розв'язання. Розв'язання задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Потрібно побудувати двоїсту задачу, і в припущенні, що даний план X є оптимальним, знайти оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Якщо при цьому оптимуми обох цільових функцій співпадуть, то припущення правильне. В протилежних випадках може бути наступне: а) даний план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі; б) визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі; в) визначений план двоїстої задачі допустимий, але при цьому $f_{опт} \neq z_{опт}$, отже, не виконується перша теорема двоїстості.

Складемо двоїсту задачу до даної ЗЛП: $max\, f = y_1 + 2y_2$,

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4, \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in R, \quad y_2 \ge 0.$$

Перевіримо даний план на оптимальність. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі: $2 \cdot 0 - 3 \cdot (1/5) + 8/5 = 1$, $0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2$.

Обидва обмеження виконуються і тому план X = (0; 1/5; 8/5) є допустимим. Припустимо тепер, що він є оптимальним, тоді для нього $z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_2 та x_3 додатні, то друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4, \\ y_1 + y_2 = 2, \end{cases} \text{, звідки } \begin{cases} y_1 = \frac{8}{5}, \\ y_2 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в перше обмеження системи двоїстої задачі: $2 \cdot \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{18}{5} < 12$.

Оскільки перше обмеження виконується, тому план Y=(8/5; 2/5) є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього $f = \frac{8}{5} + 2 \cdot (\frac{2}{5}) = \frac{12}{5}$.

Отже, екстремальні значення цільових функцій прямої та двоїстої задач збіглися, тому наше припущення оптимальності відносно даного плану виявилося правильним.

9.3. Питання для самоперевірки

1. У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Які задачі ЛП називаються симетричними? Несиметричними? В чому їх відмінність?
3. Опишіть правило побудови двоїстої задачі до даної, якщо вони симетричні, несиметричні.
4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?
5. Чи правильно, що пряма задача є задачею максимізації?
6. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
7. Чи правильно, що якщо для зведення обмеження прямої задачі до канонічної форми нема необхідності використовувати залишкову або надлишкову змінну, то відповідна двоїста змінна обов'язково немає обмеження в знакові?
8. Чи правильно, що коли кількість змінних прямої задачі набагато менше числа обмежень, то більш ефективно знаходження її розв'язку шляхом розв'язування двоїстої до неї задачі?
9. Чи правильно, що в будь-якій парі допустимих розв'язків прямої й двоїстої задач значення цільової функції двоїстої задачі незалежне від її напрямку оптимізації?
10. Який висновок можна зробити про двоїсту задачу, якщо обмеження прямої задачі виявились несумісними?
11. Як визначається оптимальний розв'язок двоїстої задачі за знайденим оптимальним розв'язком вихідної задачі для симетричних і несиметричних (канонічних) двоїстих задач? Який розв'язок двоїстої задачі можна отримати відразу з останньої симплексної табл.?
12. Наведіть економічне тлумачення двоїстої задачі до вихідної, що являє собою задачу визначення оптимального виробничого плану при даних ресурсах сировини.

9.4. Навчальні завдання

№ 9.1. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати одну із них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

а) $z = -5x_1 + 2x_2 \to max,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

б) $z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to min,$
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

в) $z = 5x_1 + 6x_2 \to max,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

г) $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

д) $z = x_1 + x_2 \to max,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

е) $f = 10y_1 - 3y_2 \to min,$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge 3, \end{cases}$$
$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

№ 9.2. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

а) $z = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to min,$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

б) $z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to max,$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

в) $z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to max,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

г) $z = 2x_1 - 3x_2 \to min,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$

№ 9.3. Дати геометричну інтерпретацію таких взаємно двоїстих задач:

Вихідна задача(1): знайти невід'ємні значення (x_1, x_2) з умов $x_1 + 2x_2 \ge 4,\ x_1 - x_2 \ge -1$ і мінімізації лінійної функції $L = 3x_1 + 2x_2$.

Двоїста задача (1\`): знайти невід'ємні значення (y_1, y_2) з умов $y_1 + x_2 \le 3,\ 2y_1 - y_2 \le 2$ і максимізації лінійної функції $T = 4y_1 - y_2$.

№ 9.4. Для виготовлення чотирьох видів продукції А, Б, В, Г використовується три види ресурсів (I, II, III). Інші умови дано в табл. 9.4.

Таблиця 9.4

Ресурси	Норми витрат				Запаси ресурсів
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7,5	3	6	12	

Необхідно:

1. Визначити план випуску продукції, при якому величина прибутку від її реалізації буде максимальною.

2. Сформулювати економічно, записати й розв'язати двоїсту задачу. Дати економічне тлумачення одержаних оцінок ресурсів.

3. Знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок по відношенню до зміни запасів ресурсів кожного виду.

4. Визначити зміни максимального прибутку від реалізації продукції при збільшенні запасу ресурсу I на 40 од., ресурсу III – на 50 од., та зменшенні запасу ресурсу II на 90 од. Оцінити окремий вплив цих змін і сумарний вплив.

5. Визначити норми змінюваності ресурсів.

6. Спів ставити оцінку витрат та прибутку за оптимальним планом та кожним видом продукції.

7. Оцінити доцільність введення в план п'ятого виду продукції Д, норми витрат сировини на одиницю якого відповідно дорівнюють 2, 4 і 2 од., а прибуток – 15 гр. од.

9.5. Завдання для перевірки знань

№ 9.5. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати одну із них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

а) $$f = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \to min,$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \ge 4, \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0.$$

б) $$z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = 1,2,3,4.$$

в) $$z = -x_1 + 2x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,5}.$$

г) $$z = x_1 + x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,4}.$$

Відповідь: в) X*=(95; 210; 0; 0); Y*= (0; 3/2; 9/4); $z_{max}=f_{min}=2115$.
г) X*=(0; 6; 0; 0); Y*= (1; 0); $z_{max}=f_{min}=6$.

№ 9.6. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

а) $$z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = 1,2,3,4.$$

б) $$z = x_2 - 2x_3 - 3x_5 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,5}.$$

Відповідь: а) X*=(4; 5; 0; 0); Y*= (13/8; -1/4); $z_{max}=f_{min}=25$.
б) X*=(0; 7; 0; 10; 0); Y*= (1; 2); $z_{max}=f_{min}=7$.

№ 9.7. Чи є для даної задачі ЛП

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,2}.$$

оптимальними запропоновані плани: а) x = (10; 10/3); б) x = (20; 10); в) x = (10/3; 10/3)?

№ 9.8. У рекламі своєї продукції виробник консервів для тварин гарантує, що його продукція цілком складається з натуральних продуктів і одна банка консервів забезпечує денну потребу у вуглеводах та білках середньої тварини масою у 8 кг. Консерви готуються з яловичини, конини і печінки. Сто грам печінки коштує 4 г. о. і дає 18 г білка та 8 г вуглеводів. Сто грам яловичини коштує 12 г. о. і дає 19 г білка та 10 г вуглеводів, а конини – відповідно 7 г. о., 20г, 14 г. Мінімальна потреба середньої тварини оцінюється як 85 г білка та 170 г вуглеводів на добу. Визначити комбінацію з трьох сортів м'яса, при якій будуть задоволені ці потреби з мінімальною вартістю продукції.

Тема 10. Розв'язування практичної задачі симплексним методом на ПК

Застосування інформаційних технологій при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом.

10.1. Теоретичні відомості

А) Комп'ютерний розділ на базі Mathcad

Оптимізаційні задачі в Mathcad розв'язуються за допомогою розв'язувального блока, який починається ключовим словом Given, а закінчується функцією Minimize та Maximize для визначення відповідно мінімуму або максимуму цільової функції.

Вбудована функція *Stack* ($A_1, A_2, ..., A_N$), аргументи $A_1, A_2, ..., A_N$ якої – матриці з однаковим числом стовпчиків, формує матрицю $\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \\ ... \\ AN \end{pmatrix}$ з тим же числом стовпчиків (матриці $A_1, A_2, ..., A_N$ розміщуються послідовно зверху вниз). Наприклад, якщо $A_1 = (1 \quad 2)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, то *stack* ($A_1$, A_2)=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Пошук мінімуму і максимуму в функціях *minimize* та *maximize* у Mathcad реалізований декількома алгоритмами. Який із алгоритмів вибрати – залежить від виду цільової функції. На практиці рекомендується перевірити пошук розв'язку кожним методом і результати порівняти. Альтернативні методи пошуку розв'язку потрібно використовувати і в тому випадку, коли який-небудь метод не дає розв'язку. Для вибору методів розв'язування необхідно клікнути лівою кнопкою миші на функцію *minimize* або *maximize*, і викликати контекстне меню (рис. 10.1), потім клікнути правою кнопкою миші на потрібну команду в ньому, і далі поставити прапорець поряд з відповідним методом пошуку розв'язку.

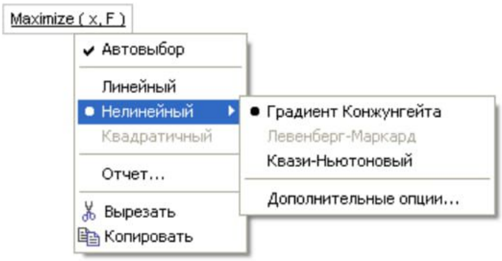


Рисунок 10.1. Контекстне меню функції

Б) Комп'ютерний розділ на базі MS EXCEL

Вище було зазначено, що програма MS Excel розв'язує задачі оптимізації практично без обмежень (п. 2.3). У складі MS Excel у папці Приклади\Розв'язання знаходиться книга з прикладами використання процедури *Пошуку рішення (Solver.xls)*. У цій книзі можна довідатися про процедури максимізації або мінімізації цільової функції, а також про накладення обмежень і збереження моделі оптимізації. Листи з прикладами розрахунків із книги *Solvsamp.xls* можна використовувати як основу для постановки прикладних задач оптимізації. Якщо математична модель досліджуваного процесу та обмеження на значення її параметрів лінійні, то задача досягнення цілі є ЗЛП. Книга *Solverex.xls* місить велику кількість прикладів, які можна використовувати як зразки розв'язання варіантів задач оптимізації („Перевезення вантажів", „Графік роботи", „Оборотний капітал" тощо).

Для розв'язування задач лінійного програмування в MS Excel у Надбудовах існує Пошук Рішення. Для використання її потрібно активізувати командою Сервіс - Надбудови - Пошук Рішення. Тоді в меню Сервіс з'явиться команда Пошук Рішення (або Файл-Параметри-Надбудови-Пошук Рішення). Далі потрібно описати його параметри, вказавши в *Параметрах* на *Лінійність моделі*. Запустивши Пошук рішення, отримаємо оптимальний план.

10.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. На основі інформації, що наведена у табл. 10.1, розв'язати задачу оптимального використання ресурсів на максимум виручки від реалізації готової продукції. Потрібно:

1. Сформулювати пряму оптимізаційну задачу на максимум виручки від реалізації готової продукції, отримати оптимальний план випуску продукції.

Таблиця 10.1

Вид ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції			Запаси ресурсів
	A	B	C	
Праця	1	4	3	200
Сировина	1	1	2	80
Обладнання	1	1	2	140
Ціна виробів	40	60	80	

2. Сформулювати двоїсту задачу й знайти її оптимальний план за допомогою теорем двоїстості.

3. Пояснити нульові значення змінних в оптимальному плані.

4. На основі властивостей двоїстих оцінок і теорем двоїстості:

✓ проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі;

✓ визначити, як змінюється виручка від реалізації продукції й план її випуску при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць;

✓ оцінити доцільність включення в план виробу четвертого виду ціною 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.

Розв'язання. 1) *Сформулюємо пряму оптимізаційну задачу на максимум виручки від реалізації готової продукції,* щоб отримати оптимальний план випуску продукції.

X_1- норма витрат ресурсу першого виду,

X_2 - норма витрат ресурсу другого виду,

X_3 - норма витрат ресурсу третього виду.

Цільова функція має вид:

$f(\bar{x}) = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 \to max$, де $x_{1,2,3} \geq 0$.

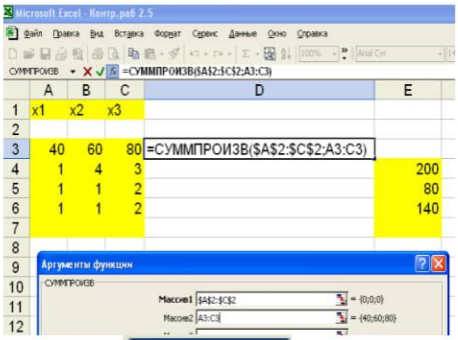
Обмеження:

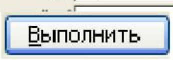
1) за працею: $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 200$,
2) за сировиною $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80$,
3) за обладнанням $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140$, $x_{1,2,3} \geq 0$.

Оптимальний план знайдемо через Пошук Рішення в надбудовах Excel (Сервіс Надбудови - Пошук Рішення (або Файл-Параметри-Надбудови-Пошук Рішення).

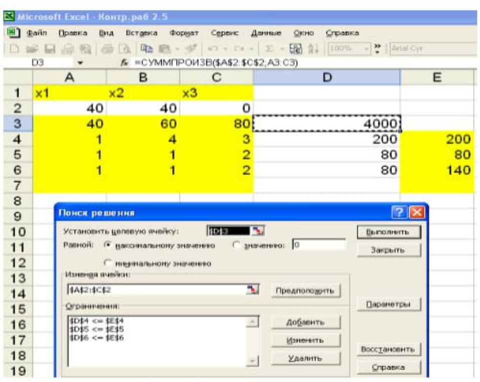
Викличемо Пошук рішення та занесемо відповідні дані (табл. 10.1).

Таблиця 10.1



Тепер потрібно натиснути кнопку  і система повідомить про знайдений розв'язок (табл. 10.2).

Таблиця 10. 2



Отриманий розв’язок означає, що максимальну виручку від реалізації готової продукції (4000 гр. од.) підприємство може отримати при випуску 40 од. виробів першого виду та 40 од. виробів другого виду. При цьому ресурси „праці” та „сировини” будуть використані повністю, із 140 од. обладнання буде використано лише 80 од.

Excel дозволяє представити результати пошуку рішення у формі звіту (табл. 10.3).

Оптимальний план $(x)^* = (40;40;0)$.

У звіті за результатами містяться оптимальні значення змінних x_1, x_2, x_3, які відповідно дорівнюють 40; 40; 0; значення цільової функції – 4000, а також недовикористаний ресурс „обладнання” у розмірі 60 одиниць.

Таблиця 10. 3

Microsoft Excel 10.0 Звіт за результатами					
Робочий лист: [Задача 1.xls]					
Звіт створений: 12.12.2018 14:42:36					
Цільова чарунка (Максимум)					
Чарунка	**Ім’я**	**Вихідне значення**	**Результат**		
$D$3		4000	4000		
Змінювані чарунки					
Чарунка	**Ім’я**	**Вихідне значення**	**Результат**		
$A$2	x1	40	40		
$B$2	x2	40	40		
$C$2	x3	0	0		
Обмеження					
Чарунка	**Ім’я**	**Значення**	**Формула**	**Статус**	**Різниця**
$D$4		200	$D$4<=$E$4	Активна	0
$D$5		80	$D$5<=$E$5	Активна	0
$D$6		80	$D$6<=$E$6	Неактивна	60

2) *Сформулюємо двоїсту задачу та знайдемо її оптимальний план за допомогою теорем двоїстості.*

Число невідомих у двоїстій задачі дорівнює числу функціональних обмежень у вихідній задачі. Вихідна задача містить три обмеження: праця, сировина й обладнання. Отже, у двоїстій задачі три невідомих:

y_1 - двоїста оцінка ресурсу праця,

y_2 - двоїста оцінка ресурсу сировина,

y_3 - двоїста оцінка ресурсу обладнання..

Цільова функція двоїстої задачі формулюється на мінімум. Коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени в системі обмежень вихідної задачі:

$$g(y) = 200y_1 + 80y_2 + 140y_3 \to \min$$

Необхідно знайти такі «ціни» на типи сировини (Y_i), щоб загальна вартість використаних типів сировини була мінімальною.

Обмеження. Число обмежень у системі двоїстої задачі рівне числу змінних у вихідній задачі. У вихідній задачі три змінних, отже, в двоїстій задачі три обмеження. В правих частинах обмежень двоїстої задачі стоять коефіцієнти при невідомих у цільовій функції вихідної задачі. Ліва частина визначає вартість типу сировини, яка витрачена на виробництво одиниці продукції.

Кожне обмеження відповідає певній нормі витрат сировини на одиницю продукції:

$$y1 + y2 + y3 \geq 40,$$
$$4y1 + y2 + y3 \geq 60,$$
$$3y1 + 2y2 + 2y3 \geq 80,$$
$$y1,2,3,4 \geq 0.$$

Знайдемо оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи теореми двоїстості.

Скористаємося першим співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0,$$

тоді: $y1(x1 + 4x2 + 3x3 - 200) = 0,$

$y2(x1 + x2 + 2x3 - 80) = 0,$

$y3(x1 + x2 + 2x3 - 140) = 0,$

$(\bar{x})^* = (40;40;0).$

Підставимо оптимальне значення вектора $\bar{x}$ в отримані вирази:

$$y1(40 + 40 \times 4 + 0 - 200) = 0,$$
$$y2(40 + 40 - 80) = 0,$$
$$y3(140 + 40 + 0 - 140) = 0.$$

Матимемо:

$$y1(200 - 200) = 0,$$
$$y2(80 - 80) = 0,$$
$$y3(80 - 140) = 0,$$

оскільки 80 < 140, то $y_3 = 0$.

У задачі $x_1 = 40 > 0$ та $x_2 = 40 > 0$, тому перше і друге обмеження двоїстої задачі обертаються в рівності:

$$y1 + y2 + y3 = 40,$$
$$4y1 + y2 + y3 = 60,$$
$$y3 = 0.$$

Розв’язуючи систему рівнянь, отримаємо: y_1=6,67; y_2 = 33,33; y_3 = 0.

Перевіряємо виконання першої теореми двоїстості:

$$g(\bar{y}) = 200y1 + 80y2 + 140y3 = 200 \times 6{,}67 + 80 \times 33{,}33 + 140 \times 0 = 4000,$$

$$f(x) = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 = 40 \times 40 + 60 \times 40 + 80 \times 0 = 4000.$$

Це означає, що оптимальний план двоїстої задачі визначений правильно.

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти, вибравши команду Пошук рішень – Звіт за стійкістю надано в табл. 10.4.

3) *Пояснимо нульові значення змінних у оптимальному плані.*

Підставимо в обмеження двоїстої задачі оптимальні значення вектора $\bar{y}$: $(\bar{y})^* = (6{,}67;33{,}33;0)$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 40$;

$4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60$;

$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 80$.

Маємо: $6{,}67 + 33{,}33 + 0 \geq 40$; $4 \times 6{,}67 + 33{,}33 + 0 \geq 60$; $3 \times 6{,}67 + 2 \times 33{,}33 + 0 \geq 80$,

звідки : $40 = 40$, $60 \geq 60$, $86{,}67 \geq 80$.

Таблиця 10.4

Microsoft Excel 10.0 Звіт за стійкістю						
Робочий лист: Задача 1.xls						
Звіт створений: 12.12.2018 16:04:27						
Змінювані чарунки						
		Результ.	**Нормована**	**Цільовий**	**Допустиме**	**Допустиме**
Чарунка	**Ім'я**	**значення**	**вартість**	**коефіцієнт**	**збільшення**	**зменшення**
$A$2	x1	40	0	40	20	4.000000003
$B$2	x2	40	0	60	100	20
$C$2	x3	0	-6.6666667	80	6.6666667	1E+30
Обмеження						
		Результ.	**Тіньова**	**обмеження**	**Допустиме**	**Допустиме**
						Продовження табл. 10.4
Чарунка	**Ім'я**	**значення**	**ціна**	**Права част.**	**збільшення**	**зменшення**
$D$4		200	6.666666667	200	120	120
$D$5		80	33.33333333	80	60	30
$D$6		80	0	140	1E+30	60

Витрати на три вироби перевищують ціну ($86{,}67 > 80$). Це ж видно й у звіті зі стійкості: значення x_3 (нормована вартість) рівна -6,67. Тобто, вартість норми витрат на одиницю виробу більша, ніж ціна виробу. Ці вироби не ввійдуть у оптимальний план через їх збитковість.

4) *На основі властивостей двоїстих оцінок і теорем двоїстості:*

✓ *проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі;*

✓ *визначимо, як змінюється виручка від реалізації продукції й план її випуску при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць;*

✓ *оцінимо доцільність включення в план виробу четвертого виду ціною 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.*

Проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі: $200 \leq 200$, $80 \leq 80$, $80 \leq 140$.

Запаси сировини за першим та другим видами були використані повністю, а за третім видом – обладнанням - було недовикористане на 60 одиниць.

Визначимо, як зміняться виручка й план випуску продукції при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць.

З теореми про оцінки відомо, що коливання величини b_i призводить до збільшення або зменшення $f(\overline{X})$. Воно визначається:

$$\Delta f(\overline{X})^* = \Delta b_i y_i^*$$

$\Delta b_1 = 18$, $\quad \Delta f_1(\overline{X})^* = \Delta b_1 y_1^* = 18 \times 33{,}33 = 600$,

$$\Delta f(\overline{X})^*_{нов.} = 4000 + 600 = 4600 \text{ (од.)}$$

З розрахунків видно, що якщо ми збільшимо запаси сировини на 18 од., то виручка зросте на 600 од., тобто загальна виручка складе після зміни запасів 4600 **о**д.

При цьому структура плану не змінилась – вироби, які були збиткові, не ввійшли і до нового плану випуску, тому що ціни на них не змінились.

$y_1 = 6{,}67$, $\quad x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200$;

$y_2 = 33{,}33$, $\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 + 18$;

$y_3 = 0$, $\quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 140$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$x_1 + 4x_2 = 200,$$

$$x_1 + x_2 = 98,$$

і отримаємо: $x_1 = 64$, $\quad x_2 = 34$.

Новий оптимальний план $(\overline{x})^*_{нов} = (64;34;0)$

Зміна загальної вартості продукції на 600 одиниць отримана за рахунок збільшення плану випуску першого виду продукції на 24 одиниць за ціною 40 одиниць (40*(64-40)=960 од..) і зменшення на 6 одиниць. плану випуску продукції другого виду за ціною 60 одиниць (60*(34-40)= -360 од.)

Оцінимо доцільність включення в план виробу четвертого виду вартістю 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.

Для оцінки доцільності включення в план виробу четвертого виду скористуємося другою властивістю двоїстої оцінки.

$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 70$, підставимо $y_1 = 6.67$, $y_2 = 33.33$, $y_3 = 0$;

$2 \times 6.67 + 2 \times 33.33 + 2 \times 0 = 70$.

Оскільки 80>70, то включення в план виробу четвертого виду невигідне.

Задача 2. У склад раціону годівлі на стійловий період дійних корів входить 9 видів кормів. У табл. 10.5 наводяться необхідні дані про корми. Для забезпечення наміченої продуктивності стада необхідно, щоб у раціоні годівлі містилось не менше 14,5 кг кормових одиниць, 1750 г перетравного протеїну, 110 г кальцію, 45 г фосфору, 660 мг каротину й 18 кг сухої речовини. В якості додаткових умов дано наступні співвідношення для окремих груп кормів у раціоні: концентратів (кукурудза, макуха та комбікорм) – 5-20%, грубих кормів (стебла кукурудзи, сіно люцернове, сіно суданки) – 15-35%, силосу – 35-60%, коренеплодів (буряк цукровий і кормовий) –10-20%. Визначити раціон годівлі тварин за критерієм мінімальної собівартості.

Таблиця 10.5

Вміст корисних речовин у 1 кг корму та його собівартість

Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	0,4	13
Каротин, мг	4	2	5	45	15	15	-	-	-
Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,13	0,87
Собівартість грн/кг	0,43	0,65	0,05	0,25	0,3	0,6	2,1	0,14	9,5

***Розв'язання*:** Позначимо через x_j (j=1, ..., 9) кількість виробленої продукції. Задача зводиться до знаходження оптимального плану виробництва продукції кожного виду з метою отримання максимального прибутку. Економіко-математична модель складається з цільової функції, системи обмежень та умови невід'ємності змінних x_j , j=1, ..., 9.

Цільова функція:

$$F = 0.43x1 + 0.65x2 + 0.05x3 + 0.25x4 + 0.3x5 + 0.6x6 + 0.21x7 + 0.14x8 + 9.5x9 \rightarrow min$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases}
1.34x1 + 1.9x2 + 0.37x3 + 0.49x4 + 0.52x5 + 0.2x6 + 0.26x7 + 0.12x8 + 0.9x9 \geq 14.5 \\
78x1 + 356x2 + 14x3 + 116x4 + 65x5 + 19x6 + 12x7 + 9x8 + 112x9 \geq 1750 \\
0.7x1 + 5.9x2 + 6.2x3 + 17.7x4 + 5.7x5 + 1.5x6 + 0.5x7 + 0.4x8 + 15x9 \geq 110 \\
3.1x1 + 9.1x2 + x3 + 2.2x4 + 2.3x5 + 0.5x6 + 0.4x7 + 0.4x8 + 13x9 \geq 45 \\
4x1 + 2x2 + 5x3 + 45x4 + 15x5 + 15x6 \geq 660 \\
0.87x1 + 0.87x2 + 0.8x3 + 0.85x4 + 0.85x5 + 0.26x6 + 0.24x7 + 0.13x8 + 0.87x9 \geq 18 \\
x1 + x2 + x9 \geq 0.5 \\
x1 + x2 + x9 \leq 0.2 \\
x3 + x4 + x5 \geq 0.15 \\
x3 + x4 + x5 \leq 0.35 \\
x6 \geq 0.35 \\
x6 \leq 0.6 \\
x7 + x8 \geq 0.1 \\
x7 + x8 \leq 0.2 \\
x j \geq 0, \quad j = \overline{1,9}.
\end{cases}$$

Введемо ці дані в табл. 10.6. У дев'ятому рядку будуть розміщатися шукані коефіцієнти. Початкове наближення повинне бути в даній задачі не рівним 0, оскільки у обмеженнях є ділення на суму коефіцієнтів і може виникнути помилка ділення на 0.

Таблиця 10.6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
2	Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
3	Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
4	Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
5	Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	0,4	13
6	Каротин, мг	4	2	5	45	15	15			
7	Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,13	0,87
8	Собівартість, грн/кг	0,43	0,65	0,05	0,25	0,3	0,6	2,1	0,14	9,5
9	xj	1	1	1	1	1	1	1	1	1

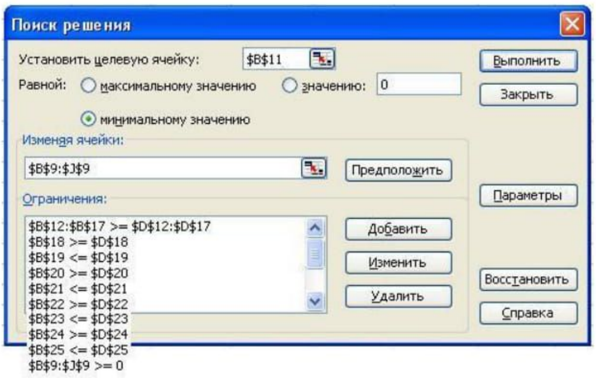
Побудуємо цільову функцію та систему обмежень (табл. 10.7).

Таблиця 10.7

	A	B	C	D
10				
11	ЦФ:	**=СУММПРОИЗВ(B8:J8;B9:J9)**	------>min	
12	Система обмежень:	=СУММПРОИЗВ(B2:J2;$B$9:$J$9)	<=	14,5
13		=СУММПРОИЗВ(B3:J3;$B$9:$J$9)	<=	1750
14		=СУММПРОИЗВ(B4:J4;$B$9:$J$9)	<=	110
15		=СУММПРОИЗВ(B5:J5;$B$9:$J$9)	<=	45
16		=СУММПРОИЗВ(B6:J6;$B$9:$J$9)	<=	660
17		=СУММПРОИЗВ(B7:J7;$B$9:$J$9)	<=	18
18		=СУММ(B9:C9;J9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,05
19		=СУММ(B9:C9;J9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,2
20		=СУММ(D9:F9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,15
21		=СУММ(D9:F9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,35
22		=G9/СУММ(B9:J9)	>=	0,35
23		=G9/СУММ(B9:J9)	<=	0,6
24		=СУММ(H9:I9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,1
25		=СУММ(H9:I9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,2

Викличемо Пошук розв'язку та занесемо відповідні дані (табл. 10.8).

Таблиця 10.8



Тепер потрібно натиснути кнопку Выполнить і система повідомить про знайдений розв'язок (табл. 10.9).

З отриманого розв'язку виходить, що мінімальні витрати на складання раціону годівлі, що містить всі необхідні елементи, складають 12,34 гр. од.

Отже, цільова функція:

$$F_{\min} = 0.43x_1 + 0.65x_2 + 0.05x_3 + 0.25x_4 + 0.3x_5 + 0.8x_6 + 0.15x_7 + 0.14x_8 + 0.75x_9 = 12{,}34.$$

Оптимальний раціон годівлі:

X = (6,2653785; 0; 0,573197; 10,39124; 0; 10,96444; 0; 3,132712; 0),

тобто в раціон ввійдуть:

Таблиця 10.9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
9	xj	6,2653785	0	0,573197	10,39124	0	10,96444	0	3,132712	0
10										
11	ЦФ:	12,337827	------>min							
12	Система обмежень:	16,268212	>=	14,5						
13		1938,6272	>=	1750						
14		209,56432	>=	110						
15		49,591909	>=	45						
16		660	>=	660						
17		18	>=	18						
18		0,1999995	>=	0,05						
19		0,1999995	<=	0,20						
20		0,35	>=	0,15						
21		0,35	<=	0,35						
22		0,35	>=	0,35						
23		0,35	<=	0,60						
24		0,1000005	>=	0,10						
25		0,1000005	<=	0,20						
26										

Кукурудза – 6,2653785 кг
Стебла кукурудзи – 0,573197 кг
Сіно люцерни – 10,39124 кг
Силос кукурудзи – 10,96444 кг
Буряк кормовий – 3,132712 кг

Решта кормів (макуха, сіно суданки, буряк цукровий та комбікорм) в раціон не ввійшли.

Двоїста задача

До даної задачі можна скласти двоїсту. Вона будується на основі прямої задачі шляхом транспортування матриці коефіцієнтів. При цьому коефіцієнти цільової функції прямої задачі стають вільними членами системи обмежень двоїстої задачі, і, навпаки. Отже, в даному прикладі цільова функція двоїстої задачі:

$$F = 14{,}5y_1 + 1750y_2 + 110y_3 + 45y_4 + 660y_5 + 18y_6 + 0.05y_7 - 0.2y_8 +$$
$$+ 0.15y_9 - 0.35y_{10} + 0.35y_{11} - 0.6y_{12} + 0.1y_{13} - 0.2y_{14} \to max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases}
1.34y_1 + 78y_2 + 0{,}7y_3 + 3{,}1y_4 + 4y_5 + 0{,}87y_6 + y_7 - y_8 \le 0.43 \\
1.9y_1 + 356y_2 + 5.9y_3 + 9.1y_4 + 2y_5 + 0.87y_6 + y_7 - y_8 \le 0.65 \\
0.37y_1 + 14_2 + 6.2y_3 + y_4 + 5y_5 + 0.8y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.05 \\
0{,}49y_1 + 116y_2 + 17.7y_3 + 2.2y_4 + 45y_5 + 0.85y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.25 \\
0.52y_1 + 65y_2 + 5.7y_3 + 2.3y_4 + 15y_5 + 0.85y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.3 \\
0.2y_1 + 19y_2 + 1.5y_3 + 0.5y_4 + 15y_5 + 0.26_6 + y_{11} - y_{12} \le 0.6 \\
0.26y_1 + 12y_2 + 0.5y_3 + 0.4y_4 + 0.24y_6 + y_{13} - y_{14} \le 0.21 \\
0.12y_1 + 9y_2 + 0.4y_3 + 0.4y_4 + 0.13y_6 + y_{13} - y_{14} \le 0.14 \\
0.9y_1 + 112y_2 + 15y_3 + 13y_4 + 0.87y_6 + y_7 - y_8 \le 9.5 \\
y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,14}.
\end{cases}$$

Розв’язок прямої задачі дає оптимальний план мінімізації витрат на раціон годівлі, а розв’язок двоїстої задачі – оптимальну систему оцінок поживної цінності використаних кормів.

Розв’язавши цю задачу за допомогою команди Пошук Рішення, отримаємо наступний висновок: значення цільових функцій двоїстих задач рівні:

Z(X)=F(Y)=12,34.

З отриманих даних видно, що всі ресурси використовуються оптимально, крім сіна суданки та комбікорму, які взагалі не ввійшли до раціону.

На основі розв’язку задачі можна зробити наступний висновок: отриманий розв’язок прямої задачі є оптимальним, тобто ферма, використовуючи даний раціон, мінімізує його собівартість, при цьому поживна цінність раціону знаходиться в межах норм.

10.3. Навчальні завдання і завдання для перевірки знань

Розв’язати задачу за допомогою ПК.

№ 10.1. У склад раціону годівлі дійних корів на стійловий період входить 9 видів кормів. У табл. 10.6 наводяться необхідні дані про корми. Для забезпечення наміченої продуктивності стада необхідно, щоб у раціоні годівлі містилось не менше (14,5+0,1N) кг кормових одиниць, (1750+N) г перетравного протеїну, (110+N) г кальцію, (45+0,1N) г фосфору, (660+0,1N) мг каротину й (18+0,1N) кг сухої речовини. В якості додаткових умов дано наступні співвідношення для окремих груп кормів у раціоні: концентратів (кукурудза, макуха та комбікорм) – 5-20%, грубих кормів (стебла кукурудзи, сіно люцернове, сіно суданки) – 15-35%, силосу – 35-60%, коренеплодів (буряк цукровий і кормовий) –10-20%. Визначити раціон годівлі тварин за критерієм мінімальної собівартості. (N – сума двох останніх цифр залікової книжки студента).

Таблиця 10.6

Вміст корисних речовин у 1 кг корму та його собівартість

Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	13	---
Каротин, мг	4	2	5	45	15	15	---	---	---
Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,12	0,87
Собівартість, грн/кг	0,43+ 0,01N	0,65- 0,01N	0,05+ 0,01N	0,25+ 0,01N	0,3+ 0,01N	0,8- 0,01N	0,15+ 0,01N	0,14 +0,01N	0,75- 0,01N

Розділ 3
Тема 11. Транспортна задача. Розв'язування транспортної задачі методом потенціалів

Формулювання транспортної задачі ЛП, складання її математичної моделі; формування її початкового опорного плану різними методами; відшукання оптимального плану ТЗ методом потенціалів.

11.1.Теоретичні відомості

Нехай маємо *m* пунктів відправлення (постачальники) $A_1, A_2,...,A_m$, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях $a_1, a_2,..., a_m$ відповідно. Нехай є n пунктів призначення (споживачі) $B_1, B_2,..., B_n$, яким потрібна ця продукція відповідно в кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_n$ Нехай відомі c_{ij} витрати за перевезення одиниці продукції з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Нехай x_{ij} - кількість продукції, яка вивозиться з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки продукції з кожного пункту відправлення треба вивезти в кожний пункт призначення, щоб весь вантаж від постачальника був вивезений, попит усіх споживачів був задоволений, а сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Математична модель транспортної задачі для будь-яких m постачальників і n споживачів: знайти такі значення змінних $x_{ij} \;\; i=\overline{1,m}; \;\; j=\overline{1,n})$, які задовольняють обмеження

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m1} + \ldots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

(тобто з кожного пункту відправлення повністю вивозиться продукція і кожний пункт споживання одержує потрібну кількість цієї продукції) і перетворюють у мінімум цільову функцію

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{mn}x_{mn}.$$

Ці співвідношення і цільову функцію можна зобразити у більш компактній формі:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}(min), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_1(j=\overline{1,n}), \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_1(i=\overline{1,m}),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}).$$

Необхідною і достатньою умовою розв'язку транспортної задачі є умова балансу $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,

тобто загальна кількість виробленої продукції дорівнює загальній кількості попиту споживачів.

Транспортна задача, де виконується ця умова, називається *закритою* (*збалансованою*). Кожна транспортна задача розв'язується за тією ж схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування симплексним методом, а саме:

1) знаходимо спочатку будь-який базисний невід'ємний розв'язок;

2) перевіряємо, чи буде знайдений розв'язок оптимальним;

3) якщо знайдений розв'язок не оптимальний, то виконуємо кілька кроків заміни, які приводять до оптимального розв’язку.

Всі дані та шукані величини можна розмістити в табл. 11.1:

Таблиця 11.1

Пункти відправлення	Пункти призначення				
	B_1	B_2	…	B_n	Запаси
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	

11.2. Знаходження початкового опорного плану

Спосіб "північно-західного кута" (діагональний спосіб)

Цей спосіб полягає в тому, що ми розподіляємо продукцію постачальників і задовольняємо потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в табл.: спочатку розподіляємо продукцію першого постачальника a1, намагаючись повністю задовольнити за його рахунок перших записаних у табл. споживачів B_1,.B_2,..., Bn, наскільки це можливо. Вичерпавши продукцію постачальника A_1, розподіляємо продукцію постачальника A_2 за тим самим принципом: задовольняємо потреби дальших споживачів, яких не вдалося задовольнити за рахунок постачальника A_1, і так доти, поки не буде розподілена вся продукція всіх постачальників. Таким чином заповнення кліток табл. починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітки, з "північно-західного кута", і продовжується в напрямі діагоналі табл. до крайньої клітки в правому нижньому кутку. Розглянемо застосування цього методу на прикладі (Задача 1 п. 11.7).

Спосіб мінімальної вартості

Цей спосіб полягає в тому, що з усієї табл. вартостей вибираємо найменшу, і в клітці, яка їй відповідає, записуємо менше з чисел a_i і b_j. З розгляду виключаємо або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого вичерпані; або стовпчик, відповідний споживачеві, потреби якого повністю задоволенні, або рядок і стовпчик, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволенні потреби споживача. В частині табл., що залишилася, знову вибираємо найменшу вартість, і процес розподілу запасів продовжуємо, доки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені. При використанні способу мінімальної вартості клітки кількість ітерацій, як правило, є меншою, ніж при використанні способу "північно-західного кута".

Спосіб подвійної переваги

Перед початком заповнення табл. необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Табл. починають заповнювати з клітинок, що позначені двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, що позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімальної вартості.

11.3. Поліпшення плану. Умова оптимальності опорного плану

Природно поліпшувати потрібно той початковий опорний план, для якого транспортні витрати найменші. В нашому прикладі таким є план, що знайдений способом "північно-західного кута".

Підрахуємо кількість завантажених кліток *k*. Якщо початковий опорний план транспортної задачі має m+n-1 додатних перевезень ($k = m + n - 1$), то він називається **невиродженим** (або неособливим). Якщо початковий опорний план має менше m+n-1 ($k < m + n - 1$) додатних перевезень, то він називається **виродженим** (особливим).

У даному прикладі початковий опорний план невироджений, тому що кількість завантажених кліток дорівнює 7 ($k = m + n - 1$).

Теорема (умова оптимальності опорного плану). Якщо план транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з m+n чисел U_i і V_j, які задовольняють умовам:

$$U_i+V_j=C_{ij} \qquad (11.5.1)$$

для $X_{ij}›0$ (для завантажених кліток) і

$$U_i+V_j\le C_{ij} \qquad (11.5.2)$$

для $X_{ij}=0$ (для незавантажених кліток), $(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n})$.

Числа U_i. і V_j називаються *потенціалами* постачальників і споживачів відповідно.

Таким чином, якщо виявиться, що хоч для однієї вільної клітки $\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}> 0$, то план *не оптимальний і його треба поліпшувати*. Поліпшення плану полягає в тому, що вільну клітку, для якої $\Delta_{ij} > 0$, заповнюємо, перемістивши в неї за певним правилом число з іншої клітки, щоб для цієї заповненої клітки $\Delta_{ij} = 0$. Якщо є декілька кліток, для яких $\Delta_{ij} > 0$, то заповнюємо ту клітку, для якої Δ_{ij} *найбільше*. При цьому будуємо ланцюг (цикл) перерозподілу постачань. Це замкнена ламана лінія, ребра якої знаходяться у рядках і стовпчиках табл., перша вершина із знаком „+” у клітці, яка потребує навантаження (A_3B_2), а інші вершини з почерговими знаками „-” і „+” у навантажених клітках.

Ланцюги можуть мати різноманітну форму (рис. 11.1):

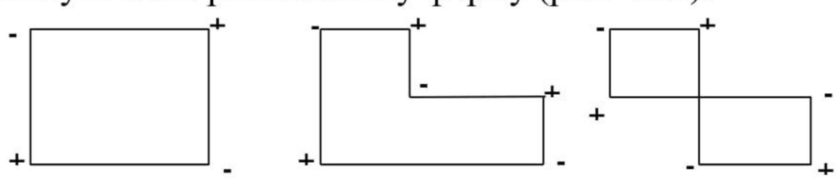


Рисунок 11.1. Цикл перерозподілу

Точка самоперетину не є вершиною ланцюга, і в цій клітці знак не ставиться. Знак „-” означає, що клітку треба розвантажити (частково або повністю), а знак „+” - що клітку треба навантажити або довантажити. Щоб не порушити умову балансу, по ланцюгу треба перекинути одне й те ж число одиниць вантажу. У якості такого числа вибираємо *найменше* навантаження кліток зі знаком „-”.

11.4. Випадок виродження транспортної задачі

Якщо початковий опорний план має менше m+n-1 ($k<m+n-1$) додатних перевезень (завантажених кліток), то він називається **виродженим** (особливим). Щоб **зняти виродження**, необхідно $m+n-1-k$ кліток навантажити нульовими постачаннями. При цьому ніяких перевезень не відбувається. Це необхідно тільки, щоб можна було знайти всі потенціали, і саме у процесі розташування потенціалів краще вводити нульові постачання. Ці навантаження можна робити довільно, але таким чином, щоб через навантажені клітки не можна було б провести замкнений ланцюг.

Виродження у транспортній задачі може виявитися не тільки у початковому плані, а й якщо у ланцюгу серед кліток зі знаком „–” зустрічаються клітки з однаково найменшими постачаннями. При цьому, щоб позбутися виродження, треба одну з цих кліток розвантажити повністю, а в інших залишити нульові постачання.

11.5. Відкрита модель транспортної задачі

Ми розглядали транспортну задачу, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто попит і пропозиція збалансовані. На практиці часто ця умова не виконується. Якщо під час перевірки умови збалансованості виявилося, що ТЗ є *відкритою*, то її потрібно звести до закритої. Можуть бути такі випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва більший від сумарних потреб споживачів, у цьому випадку вводять у задачу фіктивного споживача B_{n+1} з потребами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і з вартостями перевезень $C_{i,n+1}=0$;

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва менший від сумарних потреб споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного постачальника A^{ϕ}_{m+1} із запасом вантажу $a_{m+1}=\sum_{in1}^{n} b_j - \sum_{ji1}^{nm} a_i$, та з вартостями перевезень $C_{m+1,j}=0$.

Відповідні навантаження у цих клітках будуть мати зміст додаткових змінних, а саме: невивезеного вантажу від постачальників у першому випадку і незадоволеного попиту споживачів у другому випадку.

Після того, як задача збалансована, вона розв'язується звичайним способом.

11.6. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача 1. З трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт у п'ять пунктів споживання. Транспортні витрати, об'єм виробництва і об'єм споживання подано в табл. 11.2. Знайти початковий опорний план методом північно-західного кута.

Таблиця 11.2

B_j / A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Розв'язання. У цій задачі маємо три постачальники і п’ять споживачів. Кількість базисних невідомих дорівнює m+n-1, тобто 7. Заповнимо нову табл. 11.3 – початковий опорний план. Напишемо спочатку можливості постачальників і потреби споживачів.

Як бачимо, споживачеві B_1 потрібно 30 одиниць продукції, постачальник A_1 має 125 од.; отже, за рахунок постачальника A_1 можна повністю задовольнити потреби споживача B_1. Записуємо в клітку (1; 1) найменше з чисел 30 і 125: $x_{11} = min$ (30, 125) = 30. Перший стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпчика проставимо нулі (пусті клітки).

Таблиця 11.3

B_j / A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	30	50	45			125
A_2			55	5		60
A_3				35	80	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

У постачальника A_1 залишається ще 125 – 30 = 95 од. Тепер будемо заповнювати клітку (1; 2). Споживачеві B_2 необхідно 50 од. Отже, за рахунок постачальника A_1, у якого залишалося ще 95 од., можна повністю задовольнити потреби споживача B_2. У клітку (1; 2) записуємо найменше з чисел 50 і 95, тобто $x_{12} = min$ (50,95) = 50. Другий стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпчика проставимо пулі. У постачальника, A_1 залишається ще 95-50=45 од.

Тепер будемо заповнювати клітку (2; 3). Споживачеві B_3 необхідно ще додати 55 од., постачальник A_2 має 60 од. У клітку (2; 3) записуємо найменше з чисел 55 і 60 , тобто $x_{23} = min$ (55, 60) = 55. Третій стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в останній клітці цього стовпчика поставимо нуль.

У постачальника A_2 залишається ще 60-55=5 од. Тепер будемо заповнювати клітку (2;4). Споживачеві B_4 необхідно 40 од. Записуємо в клітку (2; 4) найменше з чисел 5 і 40, тобто $x_{24} = min$ (5; 40) = 5. Потреби споживача B_4 задоволено частково, залишилась потреба в 40 – 5 = 35 од. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду, тобто в останній клітці цього рядка ставимо 0.

Тепер будемо заповнювати клітку (3; 4). Споживачеві B_4 необхідно додати 35 од., постачальник A_3 має 115 од. У клітку (3; 4) записуємо найменше з чисел 35 і 115, тобто $x_{34} = min$ (35, 115) = 35. У постачальника A_3 залишається 115 – 35 = 80 од.

Заповнюємо останню клітку (3; 5). Споживачеві B_5 необхідно 80 од., тобто x_{35}=80. На цьому процес побудови початкового опорного плану способом "північно-західного кута" закінчується.

Таким чином, початковий .опорний план, знайдений цим способом, буде таким: x_{11}=30, x_{12}=50, x_{13}=45, x_{23}=55, x_{24}=5, x_{34}=35, x_{35}=80, решта x_{ij}=0. Значення цільової функції:

$$Z = 7 \cdot 30 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 45 + 4 \cdot 55 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 35 + 3 \cdot 80 = 1110.$$

Задача 2. Розглянемо другий спосіб знаходження початкового опорного плану – метод мінімальної вартості (п. 11.2).

Розв'язання. Розглянемо застосування цього методу на попередньому прикладі. Для цього випишемо таблицю вартостей, розмістивши їх у лівому кутку кожної клітки (табл. 11.4).

Таблиця 11.4

B_j / A_j	B_i	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7 / 25	5	2 / 100	8	7 / 0	125
A_2	8 / 5	9	4	6	9 / 55	60
A_3	5 / 0	1 / 50	9	2 / 40	3 / 25	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Шукаємо в таблиці вартостей найменший елемент. У нашому випадку він дорівнює 1 і розміщений у клітці (3; 2). В клітку (3; 2) поміщаємо найменше з чисел 50 і 115, тобто x_{12} = min (50, 115) = 50. Другий стовпчик далі не розглядаємо.

У постачальника A_3 залишилося 115 - 50 = 65 од. У частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент-вартість. Таким елементом буде 2. Він знаходиться в клітці (1; 3). У цю клітку поміщаємо найменше з чисел 100 і 125, тобто x_{13} = min (100, 124) = 100. Третій стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 125 – 100 = 25 од.

У частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент - число 2. Він знаходиться в клітці (3; 4). Споживачеві B_4 треба 40 од., а у постачальника A_3 залишилося 65 од. У клітку (3; 4) поміщаємо найменше з чисел 40 і 65, тобто x_{34} = min (40, 65) = 40. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо. Споживачеві B_5 залишилась потреба 80 – 25 = 55 од.

Аналогічно, продовжуючи заповнення таблиці, одержуємо такий опорний план: x_{11} = 25, x_{13} = 100, x_{21} = 5, x_{25} = 55, x_{32} = 50, x_{34} = 40, x_{35} = 25, решта x_{ij} = 0. Значення цільової функції

$$Z = 7 \cdot 25 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 55 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 25 = 1115.$$

Перевіримо на *оптимальність* план, що знайдений способом "північно-західного кута" (п. 11.3). Складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, використовуючи табл. 11.3. Для заповнених кліток маємо:

$$C_{11}=U_1+V_1=7, \quad C_{23}=U_2+V3=4,$$
$$C_{24}=U_2+V_4=6, \quad C_{12}=U_1+V_2=5,$$
$$C_{34}=U_3+V_4=2, \quad C_{13}=U_1+V_3=2,$$

$$C_{35}=U_3+V_5=3.$$

Маємо систему 7 рівнянь з 8 невідомими. Така система має безліч розв'язків. Знайдемо один з них. Нехай $U_1= 0$, тоді з першого рівняння знаходимо $V_1=7-U_1=7-0=7$.

Аналогічно з останніх рівнянь знаходимо значення всіх інших змінних:

$$V_2=5-U_1=5, \qquad V_3=2-U_1=2, \qquad U_2=4-V_3=2,$$
$$V_4=6-U_2=4, \qquad U_3=2-V_4=-2, \qquad V_5=3-U_3=5.$$

Для визначення потенціалів U_i і V_j можна використати і табл. 11.4. У тих клітках, де були постачання, записуємо транспортні витрати. Нехай $U_1= 0$. Тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13} , можна знайти V_1, V_2, V_3.

$$V_1=C_{11}-U_1 \qquad V_2=C_{12}-U_1, \qquad V_3=C_{13}-U_1.$$
$$V_1=7, \qquad V_2=5, \qquad V_3=2.$$

Знаючи V_3 і C_{23}, знаходимо $U_2= 2$. Знаючи U_2 і C_{24}, знаходимо $V_4= 4$.
Знаючи V_4 і C_{34}, знаходимо $U_3= - 2$. Знаючи U_3 і C_{35}, знаходимо $V_5 = 5$.

Ті клітки, для яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, в нижній - суму U_i+V_j і порівнюємо її з транспортними витратами C_{ij} , тобто перевіримо умову $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$. Потенціали рядків і стовпців можна записувати в останньому стовпцеві та останньому рядку табл. 11.4 відповідно.

Таблиця 11.5

v_j / u_i	7	5	2	4	5
0	7	5	2	8 / **4**	7 / **5**
2	8 / **9**	9 / 7	4	6	9 / **7**
-2	5 / **5**	1 / **3**	9 / **0**	2	3

$$\Delta_{14}=4-8=-4, \quad \Delta_{15}=5-7=-2, \quad \Delta_{21}=9-8=1, \quad \Delta_{22}=7-9=-2,$$
$$\Delta_{25}=7-9=-2, \quad \Delta_{31}=5-5=0, \quad \Delta_{32}=3-1=2, \quad \Delta_{33}=0-9=-9.$$

Оскільки $\Delta_{21}= 1 > 0$ і $\Delta_{32}=2 >0$, то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити, побудувавши ланцюг (цикл) перерозподілу постачань. Найбільша оцінка відповідає клітці (3, 2).

Запишемо план, що знайшли способом "північно-західного кута" (табл. 11.6).

Таблиця 11.6

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	- Θ 50	+ Θ 45		
A_2			- Θ 55	+ Θ 5	
A_3		+ Θ		- Θ 35	80

У клітку (3, 2) треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через Θ. Тепер треба знайти замкнений цикл, який забезпечить баланс в задачі. Для цього треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (3, 4) (щоб сума перевезень у третьому рядку залишилася без зміни); далі треба додати Θ до об'єму перевезення клітки (2, 4) (щоб сума перевезень у четвертому стовпці залишилася без зміни); далі треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (2, 3), (щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни); далі треба додати Θ до об'єму-перевезення клітки (1, 3) (щоб сума перевезень у третьому стовпчику залишилася без зміни); нарешті, треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (1, 2) (щоб сума перевезень у першому рядку і у другому стовпці залишилася без зміни).

Величина Θ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом. Θ визначаємо як *найменшу* з усіх поставок, що стоять в клітках, де Θ віднімається (*найменше постачання зі знаком „мінус”*).

У даному прикладі Θ = min (50, 55, 35) = 35. У результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, поданий у табл. 11.7.

Таблиця 11.7

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	**-Θ** 30	15	**+Θ** 80		
A_2	**+Θ**		**-Θ** 20	40	
A_3		35			80

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів і перевірити виконання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

Щоб знайти U_i та V_j, складемо табл. 11.8. У тих клітках, де були постачання, записуємо транспортні витрати C_{ij}. Нехай U_i= 0, тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13},, можна знайти V_1, V_2, V_3: $V_1=C_{11}-U_1=7-0=7,$ $V_2=C_{12}-U_2=5-0=5,$ $V_3=C_{13}-U3=2-0=2.$

Знаючи C_{23} *і* V_3 , можна знайти U_2: $U_2 =C_{23}-V_3=4-2=2.$

Таблиця 11.8

V_j / U_i	7	5	2	4	7
2	7	5	2	8 / 4	7 / 7
0	8 / 9	9 / 7	4	6	9 / 9
-4	5 / 3	1	9 / -2	2 / 0	3

Знаючи C_{24} *і* U_2, знаходимо $V_4 =C_{24}-U_3=6-2=4.$
Знаючи C_{32} *і* V_2, знаходимо $U_3 =C_{32}-V_2=1-5=-4.$
Знаючи C_{35} *і* U_3 знаходимо $V_5 =C_{35}-U_3=3-(-4)=7.$

Ті клітки, в яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, а у нижній – суму $U_i + V_j$, і порівняємо її з транспортними витратами C_{ij} , тобто перевіримо умову $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$. Бачимо, що для клітки (2, 1) $\Delta_{21} = 9 - 8 = 1 > 0$, тобто друга умова оптимальності не виконується. Таким чином, план не є оптимальним, його можна поліпшити.

У клітку (2, 1) табл. 11.7 розміщуємо вантаж Θ. Знаходимо замкнений цикл, переміщуючись по клітках (2, 3), (1, 3), (1, 1). Вибираємо клітки, в яких Θ віднімається: Θ = min (20, 30) = 20. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, поданий у табл. 11.9.

Таблиця 11.9

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	15	100		
A_2	20			40	
A_3		35			80

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів і перевірити виконання другої умови оптимальності для кожної вільної клітки. Для знаходження U_i і V_j, складемо табл. 11.10, як це робили в табл. 11.5 і в табл. 11.8 (в наступних таблицях обчислення без пояснень).

Таблиця 11.10

V_j / U_i	7	5	2	5	7
0	7	5	2	8 5	7 7
1	8	9 6	4 3	6	9 8
-4	5 3	1	9 -2	2 1	3

Усі ненавантажені клітки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} = 0$, тобто для них виконується друга умова оптимальності, отже, розв'язок

$$x_{11} = 10, x_{12} = 15, x_{13} = 100, x_{21} = 20, x_{24} = 40, x_{32} = 35, x_{35} = 80$$

і решта $x_{ij} = 0$, буде оптимальним.

Транспортні витрати на перевезення дорівнюють:

$$Z_{min} = 7•10 + 5•15 + 2•100 + 8•20 + 6•40 + 1•35 + 3•80 = 1020.$$

На рис. 11.2 надана схема перевезень, яка відповідає оптимальному плану, що складений методом мінімальної вартості:

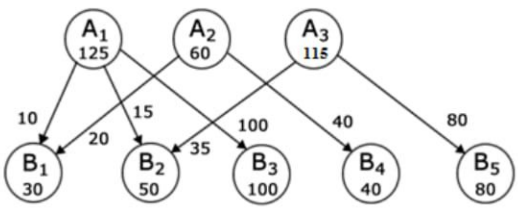


Рисунок 11.2. Схема перевезень

Перевірка:

Z_{min}=$Z_{поч.}$-Θ•Δ_{ij}•$Z_{поч}$=1100$Z'_{нов.}$=1100-35•2=1030 (після першого перерозподілу).

$Z''_{нов}$ = 1030-20•1= 1010 (після другого перерозподілу).

Примітка. Потенціали можна виставляти й у робочому плані: для рядків U_i у останньому правому стовпчику, і для стовпчиків V_j – в останньому рядку таблиці. Так, для останнього плану таблиця матиме вигляд (табл. 11.11).

Таблиця 11.11

Потреби B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_i Запаси		30	80	100	40	80	U_i
A_1	125	10	15	100			0
A_2	60	20			40		1
A_3	115		35			80	-4
V_j		7	5	2	5	7	1020

Задача 3. Розв'язати транспортну задачу (табл. 11.12). Сформулювати економіко-математичну модель вихідної транспортної задачі, знайти оптимальний план закріплення постачальників за споживачами, встановити єдиність або неєдиність оптимального плану.

Таблиця 11.12

Запаси постачальника	Потреби споживача				
	25	10	20	30	15
40	5	3	4	6	4
20	3	4	10	5	7
40	4	6	9	3	4

Розв'язання. Сформулюємо ЕММ цієї задачі:

Нехай x_{ij} - об'єми перевезень від i-того постачальника до j-того споживача.

Цільова функція:

$$\min f(\bar{x}) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 4x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} +$$
$$+ 4x_{31} + 6x_{32} + 9x_{33} + 3x_{34} + 4x_{35}$$

Перевіримо, чи виконується умова балансу:

$$\sum M_i = 40 + 20 + 40 = 100, \qquad \sum N_j = 25 + 10 + 20 + 30 + 15 = 100,$$

тобто умова балансу виконується – транспортна задача закрита.

Функціональні обмеження:

за постачальниками: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 40$,

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 20,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 40;$$

за споживачами: $\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=25, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=100, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=20, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30, \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}=15. \end{cases}$

Побудуємо опорний план методом мінімальної вартості (табл. 11.13).

Таблиця 11.13

Запаси постачальника	Потреби споживача					u_i
	25	10	20	30	15	
40	5	3 **10**	4 **20**	6	4 **10**	0
20	3 **20**	4	10	5	7	-1
40	4 **5**	6	9	3 **30**	4 **5**	0
v_j	4	3	4	3	4	340

Оцінимо вартість перевезень:

$$f(\bar{x}) = 3\cdot 20 + 4\cdot 5 + 3\cdot 10 + 4\cdot 20 + 3\cdot 30 + 4\cdot 10 + 5\cdot 4 = 340.$$

Перевіримо план на оптимальність, склавши матрицю потенціалів:

$$u_i + c_{ij} = v_j;\ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}, \qquad \Delta ij = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: оптимальний план перевезень наведений у табл. 11.13. Вартість перевезень за цим планом складає 340 гр. од. Оптимальний план є єдиним.

Задача 4. З трьох пунктів виробництва треба вивезти однорідний продукт у чотири пункти споживання. Транспортні витрати, об'єм виробництва й об'єм споживання подано в табл. 11.14. Треба спланувати перевезення вантажу з пунктів виробництва до пунктів споживання при мінімальних транспортних витратах.

Таблиця 11.14

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	2	400
A_2	2	4	5	1	180
A_3	3	2	4	3	250
Потреби	100	140	200	90	

Розв'язання. Підрахуємо сумарні запаси $\sum_{i=1}^{3} a_i = 400 + 180 + 250 = 830$ та сумарні потреби $\sum_{j=1}^{4} b_i = 100+140+200+90 = 530$. Задача відкрита (незбалансована) - запаси перевищують потреби на 300 од. Необхідно ввести фіктивного споживача з потребою 300 од. і вартостями перевезень, що дорівнюють нулю. Після того, як задача стала збалансованою, знаходимо початковий опорний план, наприклад, способом *"північно-західного кута"* (табл. 11.15).

Таблиця 11.15

A_i	B_j					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B^{ф}_5$	
A_1	100	140	160			400
A_2			40	90	50	180
A_3					250	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

Спочатку заповнюємо клітку (1, 1): $X_{12} = \min(100, 400) = 100$. Перший стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (1, 2). $X_{12} = \min(140, 400) = 140$. Другий стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (1, 3). $X_{13} = \min(160, 200) = 160$. Перший рядок далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (2, 3). $X_{23} = \min(40, 180) = 40$. Третій стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (2,4). $X_{24} = \min(90, 140) = 90$. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо дві клітки $X_{25} = 50$, $X_{35} = 250$.

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до одержаного плану будуть такі:

$$Z = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 140 + 3 \cdot 160 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 90 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 250 = 1870.$$

Знайдемо тепер початковий опорний план способом *мінімальної вартості*. У табл. 11.16 відшукуємо найменшу вартість, не враховуючи поки що фіктивного споживача (клітки фіктивного постачальника чи споживача з нульовими тарифами заповнюються в останню чергу). Таким елементом є 1 в клітці (2, 4).

Таблиця 11.16

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	$B^{ф}_5$	U_i
		100	140	200	90	300	
A_1	400	4	5	3 / 200	2	0 / 200	0
A_2	180	2 / 90	4	5	1 / 90	0	-1
A_3	250	3 / 10	2 / 140	4	3	0 / 100	0
V_j		3	2	3	2	0	1180

Заповнюємо цю клітку, X_{24} = min (90, 180) = 90. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_2 залишилося 90 од.

У частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 2, що знаходиться в клітці (2, 1) і (3, 2). Заповнюємо клітку (3,2) (сюди можна більше перевезти): X_{32} = min (140, 250) = 140. Другий стовпчик далі не розглядаємо.

У постачальника A_3 залишилося 110 одиниць. Заповнюємо клітку (2, 1): X_{21} = min (100, 90) = 90. Другий рядок далі не розглядаємо. Споживачеві B_1 треба ще 10 одиниць.

У частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 3, що знаходиться в клітках (1, 3) і (3, 1). Заповнюємо клітку (1, 3): X_{13} = min (200, 400) = 200. Третій стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 200 одиниць.

Далі заповнюємо клітку (3, 1). X_{31} = min (10, 110) = 10. Перший стовпчик далі не розглядаємо. Тепер заповнюємо останній стовпчик: X_{15}=200, X_{35}=100.

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до отриманого плану такі:

$$Z = 3 \cdot 200 + 2 \cdot 90 + 1 \cdot 90 + 3 \cdot 10 + 2\text{-}140 = 1180.$$

Ці витрати менші, ніж при знаходженні способом "північно-західного кута”, тому перевіряти на оптимальність будемо план, знайдений способом мінімальної вартості. Кількість заповнених кліток дорівнює 7, тобто план невироджений.

Для перевірки на оптимальність у табл. 11.16 запишемо потенціали рядків U_i та стовпчиків V_j .

Нехай U_1 = 0. Тоді знаходимо V_3 = 3 - 0 =3 і V_5 = 0 - 0 = 0. Тепер можна знайти U_3=0-0=0. Знаючи U3, заходимо V1=3-0=3 і V2=2-0 =2. Тепер можна знайти U_2=2-3=-1. Нарешті, V_4=1-(-1)=2. Для кліток, в яких не було поставок, друга умова оптимальності виконується. Усі клітки в табл. 11.16 мають $\Delta_{ij} \le 0$. Отже, розв'язок X_{13}=200, X_{21}=90, X_{24} = 90, X_{31} = 10, X_{32} = 140 буде оптимальним. При такому плані весь попит задоволений, але не всі запаси вивезені: у постачальника A_1 залишається 200 одиниць, а у A_3 залишається 100 одиниць вантажу. Транспортні витрати будуть мінімальними і становитимуть 1180 грошових одиниць.

11.7. Питання для самоперевірки

1. Постановка транспортної задачі (ТЗ) за критерієм вартості.
2. Що називають постачальниками і їхніми запасами (потужностями), споживачами і їхніми потребами (попитом)?
3. Сформулюйте умову збалансованості ТЗ. Яка модель ТЗ називається закритою?
4. Яка модель ТЗ називається відкритою? Як звести її до закритої моделі?
5. Чи завжди можна збалансувати транспортну задачу?
6. Що називається матрицею перевезень та матрицею витрат? Яку основну умову задовольняють елементи цих матриць?
7. Запишіть математичну модель ТЗ за критерієм вартості перевезень.
8. Скільки ненульових елементів повинен містити невироджений базисний план транспортної задачі?
9. Який опорний план ТЗ називається невиродженим? Виродженим?
10. Що потрібно робити при виникненні ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?
11. Які клітинки табл. ТЗ називається завантаженими, які не завантаженими? Яким невідомим відповідають завантажені клітинки?
12. Що називається ланцюгом (циклом) перерозподілу? Якого виду вони можуть бути?
13. Що таке система потенціалів рядків і стовпців, яким вона відповідає?
14. Сформулюйте умову оптимальності плану ТЗ.
15. Опишіть побудову початкового опорного плану ТЗ методом: а) північно-західного кута; б) мінімальної вартості; в) подвійної переваги.
16. Опишіть побудову нового опорного плану ТЗ за попереднім планом.
17. Для чого вводяться фіктивні пункти? Фіктивних постачальників?

11.8. Навчальні завдання

№ 11.1. Зерно з 4-х районів має бути вивезене на 3 елеватори. Очікуваний збір зерна в районах: a_1 = 400 тис. ц; a_2 = 500 тис. ц; a_3 = 800 тис. ц; a_4 = 500 тис. ц. Потужність елеваторів: b_1 = 700 тис. ц; b_2 = 800 тис. ц; b_3 = 700 тис. ц. Витрати на перевезення 1 ц зерна (у гр. од.) з районів до елеваторів наведені в табл. 11.17. Скласти план перевезень зерна з мінімальними транспортними витратами. Первісний розподіл перевезень скласти методом «північно-західного кута».

Таблиця 11.17

Райони	Елеватори		
	1-й	2-й	3-й
А	10	40	30
Б	70	10	50
В	40	80	30
Г	40	20	80

Відповідь: z_{min} = 480 млн. г. о.

№ 11.2. На чотирьох станціях A_1, A_2, A_3,A_4 є деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом замовникам B_1, B_2, B_3. Потреби замовників (в умовних одиницях) і тарифи (вартість перевезення одиниці вантажу, у г. о.) зазначені в табл. 11.18. Потрібно спланувати перевезення так, щоб загальна сума вартостей була найменшою. Первісний план перевезення скласти методом найменшої вартості.

Таблиця 11.18

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	15	9	120
A_2	11	2	7	3	180
A_3	4	5	12	8	200
A_4	85	65	90	60	300
Потреби	180	200	190	230	800

Відповідь: z_{min} = 1815 г. о.

№ 11.3. Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу з мінімальними транспортними витратами при вихідних даних, наведених у табл. 11.19. Початковий опорний план скласти методом «північно-західного кута».

Таблиця 11.19.

Пункти відправлення	Пункти призначення						Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	8	6	4	7	5	550
A_2	8	5	4	7	6	3	700
A_3	12	6	10	4	8	5	450
A_4	14	7	5	4	10	6	800
Потреби	550	400	300	500	450	300	2500

Відповідь: z_{min} = 14650 г. о.

№ 11.4. Скласти план посівів кормових культур за трьома ділянками землі різної родючості так, щоб загальні витрати засобів були мінімальними. Необхідні дані наведені в табл. 11. 20.

Таблиця 11.20

Кормові культури	Витрати на 1 га за ділянками, тис. г. о.			Посівні площі
	1	2	3	
Кукурудза на силос	11	14	15	600
Кормовий буряк	40	45	46	80
Однолітні трави	4	3,5	4,5	130
Картопля	38	36	40	100
Озимі на корм	4	5	4,5	50
Кормові бахчі	42	46	50	40
Розміри ділянок, га	500	200	300	1000

Відповідь: z_{min} = 16670 тис. г. о.

№ 11.5. Скласти оптимальний план перевезень пального зі складів ремонтно-транспортного підприємства (РТП) району на склади господарств. Критерій оптимальності – мінімум тонно-кілометрів. Запаси пального на складах, потреби господарств у пальному і відстані від складів до господарств дано в табл. 11.21.

Таблиця 11.21

Склади	Пункти призначення					Запаси пального, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	22	28	30	18	1400
A_2	24	22	25	25	20	1200
A_3	23	20	24	26	25	1300
Потреби, т	1100	850	750	800	600	3900 / 4100

Відповідь: z_{min} = 83700 тонно-кілометрів.

№ 11.6. Розв’язати ТЗ, вихідні дані якої наведені в табл. 11. 22.

Таблиця 11.22

A_i \ B_j	**20**	**45**	**30**
74	7	3	6
40	4	8	2
36	1	5	9

Відповідь: z_{min} = 215.

№11.7. Розподілити сільськогосподарські роботи за марками тракторів так, щоб загальні витрати на виконання робіт були мінімальними. Вихідні дані наведено в табл. 11.23.

Таблиця 11.23

Вид роботи	Собівартість 1 га робіт, тис. г. о.				Об'єм робіт, ум. га
	С-80 (2 шт.)	ДТ-54 (10 шт.)	Бєларусь (5 шт.)	КПД-35 (2шт.)	
Культивація	0,80	1,00	0,90	0,85	1500
Оранка	2,40	3,00	3,40	3,20	2000
Сіяння	-	-	1,00	0,95	800
Боронування	0,20	0,27	0,25	0,27	700
Сезонна норма робіт	1000	1600	1550	600	5000 / 4750

Відповідь: z_{min} = 6974 тис г. о.

11.9. Завдання для перевірки знань

№ 11.8. У трьох постачальників A_1, A_2, A_3 є деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом споживачам B_1, B_2, B_3, B_4. Попит споживачів (в умовних одиницях), запаси вантажів у постачальників (у тих же одиницях), і тарифи (у гр. од.) дано в табл. 11.24.

Таблиця 11.24

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	8	7	11	160
A_2	14	3	1	8	400
A_3	9	5	16	7	240
Потреби	180	200	190	230	800

Скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами. Первісний розподіл постачань скласти методом «північно-західного кута».

Відповідь: z_{min} = 3070 г. о.

№ 11.9. Скласти оптимальний план перевезень бензину з мінімальними транспортними витратами (у тис. грн.) за наступними початковими даними (табл. 11.25). Первісний розподіл постачань скласти методом «північно-західного кута».

Відповідь: z_{min} = 480 тис. г. о.

Таблиця 11.25

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	5	2	3	100
A_2	1	4	2	3	3	40
A_3	3	5	2	1	2	30
A_4	2	6	3	5	4	30
Потреби, т	50	50	10	60	30	200

№ 11.10. Скласти оптимальний план перевезень вантажів від трьох постачальників з вантажами 240, 40, 110 т до чотирьох споживачів потребами 90, 190, 40 та 130 т відповідно. Тарифи на перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

Відповідь: z_{min} = 3120 гр. од., оптимальний розв'язок $\begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

№ 11.11. В області є три спеціалізовані майстерні з ремонту двигунів сільськогосподарських машин, що обслуговують 6 районів. Виробничі потужності майстерень, потреба районів у ремонті двигунів за рік і витрати (тис. г. о.) на перевезення одного двигуна з районів до майстерень наведені в табл. 11.26. Скласти план прикріплення районів до ремонтних майстерень, що забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Відповідь: z_{min} = 2315 тис. г. о.

Таблиця 11.26

Райони	Майстерні			Потреби в ремонтах двигунів, шт.
	I	II	III	
1-й	4,5	2,7	8,3	110
2-й	2,1	4,3	2,4	200
3-й	7,5	3,1	4,2	170
4-й	5,3	1,9	6,2	140
5-й	4,1	6,7	3,1	100
6-й	3,5	4,8	5,1	120
Потужності майстерень, шт.	400	250	150	760 / 800

Тема 12. Задачі, що розв'язуються за схемою транспортної задачі, але зі знаходженням максимуму цільової функції

Розв'язування задач економічного змісту за схемою ТЗ методом максимальної оцінки.

12.1. Теоретичні відомості

Існує ряд практичних економічних ЗЛП, які можна розв'язати за схемою транспортної задачі, хоча їх умова прямо не пов'язана з транспортними перевезеннями. У деяких з цих задач треба знайти максимум цільової функції. Початковий опорний план у таких задачах можна складати методом "північно-західного кута", але доцільніше застосувати метод *найбільшої оцінки* клітки, аналогічний до методу найменшого тарифу. Оцінками кліток у задачах, які розв'язуються за схемою ТЗ, будемо називати коефіцієнти цільової функції (аналогічні тарифам у ТЗ).

Критерій оптимальності транспортної задачі, при знаходженні максимуму цільової функції методом потенціалів, складається з двох умов.

1. Сума потенціалів рядка і стовпчика дорівнює оцінці *навантаженої* клітки: $u_i + v_j = \boxed{c_{ij}}$.

2. Сума потенціалів рядка і стовпчика не менша від оцінки *ненавантаженої* клітки: $u_i + v_j \geq c_{ij}$.

Якщо друга умова не виконується для якихось кліток табл., то план не є оптимальним і його можна покращити, вибравши серед цих кліток для навантаження клітку з найбільшою величиною $c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)$.

12.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача. На трьох ділянках з різними попередниками потрібно скласти план посівів 3 сортів озимої пшениці: А, В, С з критерієм оптимальності – максимум валової продукції. Розміри ділянок попередників, посівні площі сортів пшениці та їх урожайність за ділянками наведені в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Попередники	Сорти пшениці / посівна площа / розміри ділянок	A	B	C
		1000	600	400
Чистий пар	800	30	28	25
Кукурудза на силос	400	28	26	24
Багаторічні трави	600	26	24	23
Бобові	200	28	30	22

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати за схемою ТЗ, але за критерієм максимуму ЦФ. При цьому в ролі постачальників будуть ділянки з різними попередниками, а споживачами – різні сорти пшениці. Оцінками кліток будуть урожайності різних сортів пшениці за різними попередниками.

Баланс між загальною площею ділянок і запланованою площею посівів пшениці виконується. Початковий опорний план складаємо методом найбільшої оцінки клітки, починаючи з кліток $(A_1; B_1), (A_4; B_2)$ з найбільшою оцінкою 30 (табл. 12.2).

Таблиця 12.2

Попередники	Сорти пшениці / посівна площа / розміри ділянок	B_1	B_2	B_3	U_i
		1000	**600**	**400**	
A_1	**800**	$\boxed{30}$ **800**	28	25	0
A_2	**400**	$\boxed{28}$ **200**	$\boxed{26}$ **200**	24	-2
A_3	**600**	26	$\boxed{24}$ **200**	$\boxed{23}$ **400**	-4
A_4	**200**	28	$\boxed{30}$ **200**	22	2
V_j		30	28	27	54800

Відповідно до цього плану валовий збір зерна складе:

$$f_1 = 30 \cdot 800 + 28 \cdot 200 + 26 \cdot 200 + 24 \cdot 200 + 30 \cdot 200 + 23 \cdot 400 = 54800.$$

Далі знаходимо потенціали за першою умовою критерію оптимальності і перевіряємо другу умову. Друга умова виконується для усіх незавантажених кліток, отже, цей план є оптимальним.

12.3. Питання для самоперевірки

1. Постановка задач економічного змісту, які розв'язуються за схемою транспортної задачі, але зі знаходженням максимуму цільової функції.
2. Сформулюйте умову оптимальності плану при знаходженні максимуму цільової функції методом потенціалів.
3. Опишіть побудову початкового опорного плану ТЗ методом максимальної оцінки клітки.
4. Опишіть побудову нового опорного плану ТЗ за попереднім планом при знаходженні максимуму цільової функції.

12.4. Навчальні завдання

№ 12.1. Скласти план посівів пшениці та кукурудзи, який забезпечує максимальний збір зерна за вихідними даними в табл. 12.3.

Таблиця 12.3

Ресурси	Затрати ресурсів на 1 га посівів		Обсяги ресурсів
	пшениця	кукурудза	
Пашня, га	1	1	800
Витрати праці, люд. /дні	2	34	2300
Добрива, ц / га	2,2	1,2	1420
Урожайність, ц / га	36	45	

№ 12.2. Розподілити посіви кормових культур за ділянками землі різної родючості таким чином, щоб одержати максимальну кількість продукції в центнерах кормових одиниць. Посівна площа за культурами, розміри ділянок та врожайність наведені в табл. 12.4.

Таблиця 12.4

Кормові культури	Урожайність за ділянками, ц корм. од. з 1 га.				Посівна площа, га
	1-й	2-й	3-й	4-й	
Кукурудза на силос	10	40	70	100	1400
Вико-вівсяна суміш	8	12	16	30	1300
Суданка	9	14	24	35	900
Картопля	10	24	36	50	150
Кормові баштанні	7	11	15	25	250
Площа ділянок	700	800	1500	1000	4000

Відповідь: z_{max} = 170750 ц корм. од.

№ 12.3. Скласти план посівів зернових культур за ділянками землі різної родючості, при якому загальний збір зерна виявиться максимальним. Розміри ділянок, запланована посівна площа за культурами і прогнозовані врожайності дано в табл. 12.5.

Таблиця 12.5

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц/га				
	1-а	2-а	3-я	4-а	Площа посівів, га
Кукурудза на зерно	50	40	40	30	1000
Пшениця	35	30	25	20	6000
Ячмінь	25	21	18	16	1200
Просо	32	25	20	18	1800
Площа ділянок, га	2000	3000	3500	1500	10000

Відповідь: z_{max} = 282,6 тис. ц.

№12.4. Розподілити посіви п'яти культур на трьох ділянках землі різної родючості з метою одержання максимуму вартості валової продукції. Необхідні дані наведено в табл. 12.6.

Таблиця 12.6

Культури	Урожайність за ділянками, ц / га			Посівні площі, га	Ціна реалізації 1 ц, тис. г. о.
	I	II	III		
Пшениця	25	24	30	500	6,5
Кукурудза на зерно	40	35	45	400	5,0
Картопля	140	150	160	200	3,0
Овочі	210	230	220	30	6,0
Озимі зернові	20	16	24	300	7,5
Розміри ділянок, га	630	500	30	1430	-

Відповідь: z_{max} = 354470 тис. г. о.

12.5. Завдання для перевірки знань

№12.5. Скласти план посівів зернових культур, який забезпечує максимальний збір зерна: А) по затратам ресурсів на 1 га посівів за табл. 12.7; Б) на ділянках різної родючості за табл. 12.8.

Таблиця 12.7

Ресурси	Затрати ресурсів на 1 га посівів		Обсяги ресурсів
	пшениця	ячмінь	
Пашня, га	1	1	700
Витрати праці, люд. /дні	4	3	2800
Добрива, ц / га	2	1	1150
Урожайність, ц / га	36	28	

Таблиця 12.8

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц/ га			Обсяги ресурсів
	I	II	III	
Пшениця	34	28	32	800
Жито	24	20	26	430
Ячмінь	25	30	27	650
Кукурудза	40	42	30	320
Площа ділянок, га	600	850	750	-

№12.6. Скласти план розміщення посівів зернових культур за ділянками землі різної родючості з метою одержання максимального прибутку. Посівні площі за культурами, розміри ділянок, урожайність та ціни реалізації дано в табл. 12.9. Витрати на 1 га за ділянками наведені в табл. 12.10.

Таблиця 12.9

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц / га				Посівна площа, га	Ціна реалізації, тис. г. о.
	I	II	III	IY		
Пшениця	35	25	20	15	2400	6,5
Кукурудза	60	40	30	50	1700	5,0
Ячмінь	30	20	15	15	350	4,3
Жито	25	30	20	15	250	7,0
Просо	40	20	15	10	100	7,2
Розміри ділянок, га.	3000	1000	300	500	4800	-

Таблиця 12.10

Зернові культури	Витрати засобів на 1 га, тис. г. о.			
	I	II	III	IY
Пшениця	50	40	40	40
Кукурудза	90	90	70	65
Ячмінь	50	40	40	45
Жито	50	50	45	40
Просо	60	50	50	50

Відповідь: $z_{max} = 804450$ тис. г. о.

Тема 13. Застосування транспортних моделей в економічних задачах. Розподільні задачі

Застосування теорії лінійного програмування для розв’язування задач про призначення.

13.1. Теоретичні відомості

Алгоритм і методи розв’язування транспортної задачі можуть бути використані при розв’язуванні деяких економічних задач, які не мають відношення до транспортування вантажів. У цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний смисл у залежності від конкретної задачі (наприклад, відстань, вартість, час, продуктивність праці тощо). Економічні задачі можуть мати наступний зміст:

1. Оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. У них величина c_{ij} є продуктивністю. Задача дозволяє визначити, скільки часу та на якій операції потрібно використати кожен із верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Так як транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з від'ємним знаком.

2. Оптимальні призначення або проблема вибору. Є *m* механізмів, які можуть виконувати *n* різних робіт з продуктивністю c_{ij}. Задача дозволяє визначити, який механізм та на яку роботу потрібно призначити, щоб добитися максимальної продуктивності.

3. Задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції.

4. Збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу, скорочення якого дозволить зменшити кількість автомобілів для перевезення за рахунок збільшення їх продуктивності.

5. Розв'язання задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника з якихось причин не може бути направлений одному зі споживачів. Дане обмеження можна врахувати, присвоївши відповідній клітці достатньо велике значення вартості.

Перші дві з цих задач називаються розподільними або задачами на закріплення (призначення). Величини c_{ij} можуть мати різний зміст. Їх можна розв'язати за схемою транспортної задачі, хоча їх умова прямо не пов'язана з транспортними перевезеннями.

Розглянемо ситуацію, коли потрібно розподілити m робіт (або виконавців) за n верстатами. Робота I (=1,2,3,...,m) виконується на верстаті j (=1,2,3, ...n), пов'язана з витратами c_{ij}. Задача полягає в такому розподілі робіт за верстатами (одна робота виконується одним верстатом), який відповідає мінімуму сумарних витрат. Така задача відома як задача про призначення.

Цю задачу можна розглядати як частинний випадок ТЗ. Тут „роботи" являють "вихідні пункти", а „верстати" - "пункти призначення". Пропозиція в кожному вихідному пункті дорівнює 1, тобто a_i= 1 для всіх *i* (тобто один працівник може працювати лише на одному верстаті). Аналогічно, попит у кожному пункті призначення дорівнює 1, тобто b_j=1 для всіх j (тобто на кожен верстат може бути призначений лише один працівник). Вартість перевезень (закріплення) роботи *i* до верстата *j* дорівнює c_{ij}. Якщо яку-небудь роботу не можна виконати на деякому верстаті, то відповідна вартість c_{ij} береться рівною дуже великому числу М. У табл. 13.1 ілюструється загальна структура задачі про призначення.

Таблиця 13.1

Види робіт	Верстати				
	1	2	j	. . .	n
1	0	0	1	0	0
. . . . .	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
. . . . .	0	0	0	1	0
m	0	0	0	0	1

Перш ніж розв’язувати задачу методами, які асоціюються з транспортною моделлю, необхідно "ліквідувати" дисбаланс, додавши фіктивні роботи або верстати в залежності початкових умов (m<n або m>n). Тому без утрати загальності можна покласти m=n.

Задачу про призначення можна уявити наступним чином. Нехай

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо } j\text{ - та робота не виконується на } i\text{ - му верстаті,}\\ 1, & \text{якщо } j\text{ - та робота виконується на } i\text{ - му верстаті.}\end{cases}$$

Тепер задача буде формулюватися так:

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\,x_{ij}\to\min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,2,\ ...\ ,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,2,\ ...\ ,n,$$

$$x_{ij}=0 \text{ або } 1.$$

Специфічна структура задачі про призначення дозволяє розробити ефективний метод її розв’язування. Оптимальний розв’язок задачі про призначення не зміниться, якщо до будь-якого рядка або стовпчика матриці вартостей додати (або відняти) сталу величину. Наведені міркування показують, що якщо побудувати нову c'_{ij} - матрицю з нульовими елементами, й ці нульові елементи або їхня підмножина відповідає допустимому розв’язку, то такий розв’язок буде оптимальним, оскільки вартість не може бути від’ємною. Результатом розв’язування задачі про призначення є вектор $x^*=\{x^*_{ij}\}$, компоненти якого – цілі числа. Оптимальний план задачі про призначення можна представити у вигляді квадратної матриці призначень, у кожному рядку і в кожному стовпчику якої знаходиться рівно одна одиниця. Таку матрицю іноді називають матрицею перестановок. Значення цільової функції, що відповідає оптимальному плану, називають *ефективністю призначень*.

Інша інтерпретація задач про призначення наступна (***економічна постановка*** задачі про призначення):

Для виконання n різних робіт виділено n виконавців (робітників, верстатів, фірм,...). За кожною роботою можна закріпити лише одного виконавця. Кожен виконавець може виконувати лише одну роботу. Прибуток від виконання *i*-ої роботи *j*-тим виконавцем становить c_{ij}. Потрібно розподілити виконавців за роботами так, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Для побудови відповідної математичної моделі введемо змінні x_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,n) так:

$$x_{ij}=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

залежно від того, чи *i*-тий робітник виконує *j*-ту роботу, чи не виконує її.

Отже, проблема полягає в тому, щоб у наступній табл. 13.2 проставити нулі та одиниці найкращим способом. У кожному рядку, як і в кожному стовпці, допускається рівно одна одиниця.

Таблиця 13.2.

Виконавці	Роботи				
	1	.....	j	.....	n
1	0	0	1	0	0
.....	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
.....	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	1

Математична постановка задачі про призначення така:
знайти невідомі величини x_{ij} так, щоб надати максимум лінійній формі L з обмеженнями чотирьох типів:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,\dots,n) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,\dots,n) \qquad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n) \qquad (4)$$

$$x_{ij} - цілі (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n) \qquad (5)$$

Це типова **цілочисельна задача** лінійного програмування. Розв'язувати її симплексним методом неможливо, оскільки так будуть отримані різні дійсні значення між нулем та одиницею. Цілочисельні задачі розв'язуються спеціальними методами, зокрема методом Гоморі, які будуть розглянуті окремо.

13.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п'ять операцій з обробки деталей (операції можуть виконуватися в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів рівний 100, 250 і 180 год. відповідно. Час виконання кожної операції становить 100, 120, 70, 110 та 130 год. відповідно. Визначити, скільки часу й на якій операції потрібно використати кожну групу верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожній операції задана матрицею

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом розв'язання закритої транспортної задачі, при цьому під тарифом будемо розуміти продуктивність верстатів за операціями. Оскільки в задачі потрібно знайти максимум, а відповідно до алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1).

Складемо таблицю 13.3 задачі.

Знаходимо потенціали вільних кліток: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{14} = 3$, $\Delta_{24} = -6$, $\Delta_{25} = -5$, $\Delta_{31} = -4$, $\Delta_{32} = -5$, $\Delta_{33} = -12$.

Таблиця 13.3

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		100	120	70	110	130	
A_1	100	-3 / 40	-5	-11	-10	-5 / 60	0
A_2	250	-5 / 60	-10 / 120	-15 / 70	-3	-2	-2
A_3	180	-4	-8	-6	-12 / 110	-10 / 70	-5
V_j		-3	-8	-13	-7	-5	-4870

Оскільки $\Delta_{14} = 3 > 0$, то план не оптимальний, і необхідно провести перерозподіл вантажів, перекинувши по циклу 60 одиниць вантажу.

+	- 60
- 110	+70

60	
50	130

Отриманий перерозподіл операцій занесемо в нову табл. 13.4.

Таблиця 13.4

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		100	120	70	110	130	
A_1	100	-3 / 40	-5	-11	-10 / 60	-5	0
A_2	250	-5 / 60	-10 / 120	-15 / 70	-3	-2	-2
A_3	180	-4	-8	-6	-12 / 50	-10 / 130	-2
V_j		-3	-8	-13	-10	-8	-5170

Оцінки вільних кліток складають: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{15} = -3$, $\Delta_{24} = -9$, $\Delta_{25} = -8$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{32} = -2$, $\Delta_{33} = -9$.

Знайдений розв’язок є оптимальним, тому що всі оцінки вільних кліток від’ємні; цей розв’язок має вид:

$$\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, на першій групі верстатів варто виконувати операції 1 та 4 тривалістю 40 та 60 год. відповідно, на другій групі — операції 1, 2 та 3 тривалістю 60, 120 та 70 год. відповідно, на третій групі - операції 4 та 5 тривалістю 50 та 130 год. відповідно. При цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 штук.

Задача 2. Фірма отримала замовлення на розробку п'яти програмних продуктів. Для виконання цього замовлення потрібно залучити п'ять досвідчених програмістів. Кожен із них повинен написати одну програму. В наступній таблиці наведені оцінки часу (у днях), який необхідний програмістам для виконання кожної з цих робіт (табл. 13.5).

Таблиця 13. 5

	Програми				
Програмісти	1	2	3	4	5
А	46	59	24	62	67
Б	47	56	32	55	70
В	44	57	19	61	60
Г	47	59	17	64	73
Д	43	65	20	60	75

Розподілити роботи між програмістами так, щоб загальна кількість людино-днів на виконання всіх п'яти замовлень була мінімальною.

Розв'язання. Таблиця призначень задана в умові. Побудуємо математичну модель даної задачі.

Нехай змінна $x_{ij} = 1,$ якщо i-тим програмістом виконується j-та робота (написання відповідної програми), і $x_{ij} = 0,$ якщо i-тим програмістом не виконується j-та робота. Тоді математична модель має наступний вигляд: $z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\ x_{ij} \to min$ при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=1,2,\ \ldots\ ,5,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=1,2,\ \ldots\ ,5,$$

$$x_{ij} \in \{0;1\},\ \ i \in [1;5], j \in [1;5].$$

Відзначимо, що дана задача є збалансованою, тобто число програмістів співпадає з числом програм, які потрібно написати. Якби задача була незбалансована, то спочатку її треба було б збалансувати, ввівши потрібну кількість фіктивних рядків або стовпчиків з достатньо великими «штрафними вартостями» робіт. Провівши розрахунки, а саме: вибравши в кожному рядку і в кожному стовпчику мінімальну „оцінку", отримаємо наступну матрицю призначень (табл. 13.6):

Таблиця 13. 6

	Програми				
Програмісти	1	2	3	4	5
А	0	0	0	0	1
Б	0	0	0	1	0
В	0	1	0	0	0
Г	0	0	1	0	0
Д	1	0	0	0	0

Враховуючи умову, отримуємо такий результат (табл. 13.7):

Таблиця 13. 7

Програмісти	Програми	Кількість людино-днів
А	5	67
Б	4	55
В	2	57
Г	3	17
Д	1	43
Всього		239

Отже, на виконання замовлень потрібно 239 людино-днів. При цьому програміст А повинен розробити п'яту програму, Б – четверту, В – другу, Г – третю, Д – першу.

13.3. Застосування комп'ютера в роботі з розподільними задачами

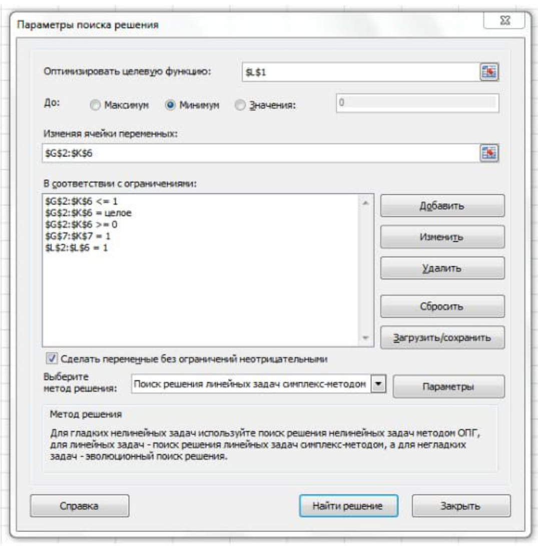
Для розв'язування задачі про призначення (на прикладі Задачі 2 з п. 13.2) засобами ***Пошуку розв'язків*** у MS Excel відведемо під невідомі діапазон кліток G2:K6, а в клітку L1 введемо цільову функцію =СУММПРОИЗВ(G2:K6; A1:E5), що дає загальну кількість людино-днів на виконання всіх п'яти замовлень, яка повинна бути мінімальною. Введемо формули, що задають ліві частини обмежень (табл. 13.8):

Таблиця 13.8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	46	59	24	62	67		кількістьлюдино-днів=					0
2	47	56	32	55	70							0
3	44	57	19	61	60							0
4	47	59	17	64	73							0
5	43	65	20	60	75							0
6												0
7							0	0	0	0	0	

Потім виберемо команду Сервіс / Пошук розв'язків (Tools, Solver) або Файл / Параметри / Надбудови / Пошук розв'язків / Перейти і заповнимо діалогове вікно Пошук розв'язків (Solver) (табл. 13.9). У діалоговому вікні Параметри пошуку розв'язків (Solver) потрібно встановити прапорець Лінійна модель (Assume Linear Model).

Таблиця 13.9



Після натиснення кнопки Виконати (Solve) (Знайти розв’язок) засіб Пошуку розв’язків знайде оптимальний розв’язок (табл. 13.10) задачі про призначення.

Таблиця 13.10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	46	59	24	62	67		кількістьлюдино-днів=					239
2	47	56	32	55	70		0	0	0	0	1	1
3	44	57	19	61	60		0	0	0	1	0	1
4	47	59	17	64	73		0	1	0	0	0	1
5	43	65	20	60	75		0	0	1	0	0	1
6							1	0	0	0	0	1
7							1	1	1	1	1	
8												

Отже, на виконання замовлень потрібно 239 людино-днів. При цьому програміст А повинен розробити п’яту програму, Б – четверту, В – другу, Г – третю, Д – першу.

Прапорець Формули діалогового вікна Параметри (Options), що відкривається за допомогою команди Сервіс**,** Параметри (Tools, Options) (Формули, Показати формули) забезпечує відображення формул у клітках, якщо вони там є (табл. 13.11).

Таблиця 13.11

F	G	H	I	J	K	L
		кількістьлюдино-днів=				=СУММПРОИЗВ(G2:K6;A1:E5)
	0	0	0	0	1	=СУММ(G2:K2)
	0	0	0	1	0	=СУММ(G3:K3)
	0	1	0	0	0	=СУММ(G4:K4)
	0	0	1	0	0	=СУММ(G5:K5)
	1	0	0	0	0	=СУММ(G6:K6)
	=СУММ(G2:G6	=СУММ(H2:H5)	=СУММ(I2:I5)	=СУММ(J2:J5)	=СУММ(K2:	

13.4.Питання для самоперевірки

1. Чи можна розв’язати задачу про призначення методом, який використовується для розв’язування транспортної задачі?
2. Чи правильне твердження, що вихідний розв’язок задачі про призначення буде виродженим?
3. Алгоритм розв’язування задачі про призначення та інтерпретація її розв’язку.
4. Порівняйте алгоритми симплексних перетворень та розподільного методу.

13.5. Навчальні завдання

№13.1. Фірма отримала замовлення на 3 види продукції (А, Б, В), які необхідно виготовити протягом тижня. Об’єми замовлень: А — 4000 штук, Б — 2400 штук, В - 1000 штук. Дільниця з виготовлення продукції має 3 верстати, на кожному з яких можна виготовляти будь-який із заказаних видів продукції з однаковою продуктивністю. Одиничні витрати з кожного виду продукції різні в залежності від верстата, що використовується, і задані табл. 13.8.

Таблиця 13.8

Верстат \ Продукція	А	Б	В
1	1,2	1,3	1,1
2	1,4	1,2	1,5
3	1,1	1,0	1,3

Крім того, відомо, що виробничі потужності 2-го та 3-го верстатів на цей тиждень складуть 3000 штук, а станка 1 — 2000 штук. Використовуючи модель транспортної задачі, знайти оптимальний план виробництва, що забезпечує мінімум витрат при виготовленні заказаних видів продукції.

№ 13.2. Розв'язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в табл. 13.9, 13.10. Знайти оптимальний розв'язок.

А) Таблиця 13.9

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	10	15	10	20
Б	5	50	21	10
В	17	30	18	34
Г	25	14	11	46

Б) Таблиця 13.10

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	10	25	12	24
Б	15	35	21	10
В	37	30	18	34
Г	25	4	11	50

13.6. Завдання для перевірки знань

№ 13.3. Потрібно спланувати перевезення будівельного матеріалу з трьох заводів до чотирьох будівельних майданчиків, використовуючи залізницю. Протягом кожного кварталу на чотирьох майданчиках потрібно, відповідно, 5, 10, 20, 15 вагонів будівельних матеріалів. Можливості заводів рівні 10, 15 та 25 вагонів у квартал відповідно. Умова задачі наведена в табл. 13.11. Числа на перетині рядків та стовпців табл. означають вартість перевезень одним вагоном (гр. од.).

Таблиця 13.11

Завод і його можливості		Потреба будівельних майданчиків			
		1	**2**	**3**	**4**
		5	10	20	15
A	10	8	3	5	2
B	15	4	1	6	4
C	25	1	9	4	3

№ 13.4. Розв'язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в табл. 13.12, 12.13. Знайти оптимальний розв'язок.

А) Таблиця 13.12

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	11	40	25
Б	15	31	21	10
В	7	30	18	14
Г	22	24	16	5

Б) Таблиця 13.13

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	35	10	12	27
Б	15	20	2	10
В	31	30	18	34
Г	25	3	11	16

Тема 14. Цілочислове програмування

Застосовування теорії цілочислового програмування при аналізі дробового алгоритму розв'язання повністю цілочислової задачі.

Цілочислове програмування орієнтоване на розв'язування задач математичного програмування, в яких всі або деякі змінні повинні приймати тільки цілочислові значення. Задача називається ***повністю цілочисловою***, якщо умову цілочисельності накладено на всі її змінні; коли ця умова стосується лише деяких змінних, задача називається ***частково цілочисловою***. Задача є ***лінійною цілочисловою***, якщо цільова функція і функції, що входять у обмеження, – лінійні.

Методи розв'язування задач цілочислового програмування можна класифікувати як методи відсікань (відтинань) і комбінаторні методи.

14.1. Дробовий алгоритм розв'язування повністю цілочислових задач

Необхідною умовою застосування даного алгоритму є цілочисельність всіх коефіцієнтів і правих частин обмежень вихідної задачі, тобто наявність у обмеженнях дробових коефіцієнтів призводить до порушення цілочисельності додаткових змінних.

При розв'язуванні цілочислової задачі лінійного програмування виконуються такі кроки:

✓ Розв'язується задача з послабленими обмеженнями (яка виникає в результаті виключення вимоги цілочисельності змінних). Якщо отриманий оптимальний розв'язок виявляється цілочисловим, то він є розв'язком вихідної задачі.

✓ У противному випадку потрібно ввести додаткові обмеження, які породжують (разом з вихідними обмеженнями) нову задачу лінійного програмування, розв'язок якої виявляється цілочисловим і співпадає з оптимальним розв'язком вихідної цілочислової задачі. Нехай отримана остання симплекс–таблиця задачі з послабленими обмеженнями має вид (табл. 14.1):

Таблиця 14.1.

	$x_1 \dots x_i \dots x_m$	$W_1 \dots W_j \dots W_n$	B
x_1	$1 \dots 0 \dots 0$	$\alpha_1^1 \dots \alpha_1^j \dots \alpha_1^n$	$\beta 1$
	$\dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots \quad \dots$	
x_i	$0 \dots 1 \dots 0$	$\alpha_i^1 \dots \alpha_i^j \dots \alpha_i^n$	βi
x_m	$0 \dots 0 \dots 1$	$\alpha m^1 \dots \alpha m^j \dots \alpha m^n$	βm
z	$0 \dots 0 \dots 0$	$C1 \dots Cj \dots Cn$	βo

Через x_i (i= l, m) позначимо базисні змінні; W_i (i= l, n) позначимо небазисні змінні.

Розглянемо *i*-ий рядок симплекс-табл., якому відповідає неціле (дробове) значення базисної змінної x_i , і виразимо x_i через небазисні змінні:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j \text{, де } \beta_i \text{ - неціле.}$$

Кожний рядок симплекс-табл., що породжується аналогічною нерівністю, будемо називати *твірним* рядком. Так як коефіцієнти цільової функції можна вважати цілими числами, змінна Z також повинна бути цілою і нижній рядок табл. допустимо вибирати в якості твірного.

Нехай $\beta_i = [\beta_i] + f_i, \ a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij}$,

де $N = [a]$ – ціла частина числа а, тобто найбільше ціле число, яке задовольняє умові $N \le a$, звідси слідує, що 0<fi<l - додатний дріб; 0<fij<l - від'ємний дріб.

Наприклад,

a	[a]	f=a-[a]
1,5	1	0,5
-2,5	-3	0,5
-1	-1	0
-0,4	-1	0,6

Після підстановки, рівняння для x_i набуває виду:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j = x_i - [\beta_i] + \Sigma [a_{ij}] W_j \tag{14.1}$$

Оскільки всі змінні x_i і W_j - цілі, то права частина повинна бути цілою, отже, ліва частина також повинна приймати цілі значення.

Так як $f_{ij} \ge 0$ і Wj≥0 для всіх *i* та *j*, то $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \ge 0$.

Отже, виконується нерівність $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \le f_{ij}$.

Так як $f_i < 1$, то $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \le 1$.

Так як ліва частина розглядуваної нерівності повинна приймати ціле значення, то запишемо цю умову цілочисельності у вигляді: $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_i \le 0$.

Останнє обмеження перепишемо у вигляді рівності: $S_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_i - f_i$, де S_i – невід'ємна додаткова змінна, яка повинна приймати цілі значення.

Таке обмеження-рівність визначає відсікання Гоморі для повністю цілочислової задачі.

Із симплекс-таблиці видно (так як W_i небазисна), що W_i=0, і S_i=-f_i - дана компонента розв'язку не є допустимою, отже, це означає, що отриманий раніше розв'язок задачі не задовольняє нове обмеження.

У такій ситуації потрібно використати двоїстий симплекс-метод, реалізація якого забезпечує відсікання деяких областей многогранника розв'язків, що не містить точок з цілочисловими координатами.

Перетворимо вихідну табл. шляхом приписування до неї рядка і стовпчика, що відповідають побудованому відсіканню **методу Гоморі** для повністю цілочислової задачі.

Отримаємо нову табл. 14.2:

Таблиця 14.2

	x_i ... x_i ... x_m W_l ... W_j ... W_n	S_i	B
x_1 x_i x_m	1 ... 0 ... 0 a_1^1 ... a_1^j ... a_1^n 0 ... 1 ... 0 α_i^1 ... α_i^1 ... α_i^n 0 ... 0 ... 1 αm^1 ... αm^j … αm^n	0 0 0	β1 βi βm
S_i	0 ... 0 ... 0 -fi^1 ... -fij ... –fin	1	fi
Z	0 ... 0 ... 0 C1 ... Cj ... Cn	0	βo

Якщо отриманий розв'язок (у результаті застосування двоїстого симплекс-методу) є цілим, то процес розв'язання задачі завершено. У противному випадку необхідно ввести нове відсікання на базі отриманої таблиці і знову скористатися двоїстим симплекс-методом. Загальне число обмежень не може перевищувати кількості змінних вихідної задачі (*m*+*n*).

Вид нерівності, що визначає деяке відсікання, залежить від вибору твірного рядка. Одна і та ж симплекс-таблиця породжує різні відсікання. Для визначення найбільш ефективного відсікання використовують емпіричні правила. Два таких правила приписують будувати відсікання на основі твірного рядка, якому відповідає:

- ✓ $\max_i \{f_i\}$,
- ✓ $\max_i \{f_i | \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\}$.

Друге правило більш ефективне.

Якщо на деякій ітерації симплекс-метод виявиться відсутність допустимого розв'язку, то розглядувана задача не має цілочислового оптимального розв'язку.

Назва «дробовий алгоритм» пов'язана з тим, що всі ненульові коефіцієнти введеного відсікання менші за одиницю.

14.2. Алгоритм розв'язування частково цілочислових задач

Розглянемо відповідний базисній змінній рядок симплекс-табл., що містить розв'язок задачі з послабленими обмеженнями. Цей рядок породжує рівність

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j \,.$$

Оскільки деякі зі змінних не є цілочисловими, для розв'язування поставленої задачі не можна використати процедуру відсікань, що розглянута вище. Можна побудувати відсікання іншого типу.

Для цілочислової змінної повинна виконуватися одна з двох нерівностей: xi≤[βi] або xi≥[βi]+1. Провівши необхідні перетворення (14.1), отримаємо рівняння відсікання: $S_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj} W_i - f_i$, де

$$\lambda_j = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} \ge 0, \quad W_j - \text{неціле}, \\ \dfrac{f_i}{(f_i - 1)a_{ij}}, & a_{ij} \le 0, \quad W_j - \text{неціле}, \\ f_{ij}, & f_{ij} \le f_i, \quad W_j - \text{ціле}, \\ \dfrac{f_i}{1-f_i}(1 - f_{ij}) & f_{ij} > f_i \quad W_j - \text{ціле}. \end{cases}$$

Якщо у початковий базис задачі входили штучні змінні, то при складанні додаткового обмеження їх потрібно опустити.

Метод відсікань Гоморі має деякі **недоліки**, серед яких найголовнішими є:

1. Обов’язковою умовою застосування методу є цілочисельність усіх коефіцієнтів початкової моделі.
2. Процес розв’язування є повільно збіжним.
3. Похибки округлення можуть призвести до того, що отриманий цілочисельний план не буде оптимальним.
4. Застосування ІКТ при розв’язуванні ЗЦЧП має певні труднощі.

Ефективнішим за метод Гоморі ЗЦЧП є метод „віток” і „меж”.

14.3. Алгоритм розв’язування методом „віток” і „меж”

1. За допомогою симплекс-методу розв’язується послаблена ЗЦП, тобто знаходиться умовно-оптимальний план ЗЦП.

Якщо деяка компонента x_j^* опорного плану останньої симплекс-табл. є дробовою, то, очевидно, можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\left[x_j^*\right]; \left[x_j^*\right]+1\right)$ цілих значень взагалі немає.

2. Для однієї з дробових компонент x_j^* опорного плану останньої симплекс-табл. формуються додаткові обмеження:

$$x_j \le \left[x_j^*\right] \quad \text{або} \quad x_j \ge \left[x_j^*\right] + 1 \qquad (14.2)$$

3. Початкова задача ЦЧП розбивається на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних і додаткових обмежень (14.2). При цьому останні матимуть вигляд:

***Перша задача**:* Знайти

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \qquad (14.3)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le = \ge b_i \ \ (i = \overline{1,m}) \qquad (14.4)$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,n}) \qquad (14.5)$$

$$x_j \in Z, \qquad (14.6)$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right] \qquad (14.7)$$

***Друга задача**:* Знайти

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (14.8)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le = \ge b_i \;\; (i=\overline{1,m}) \qquad (14.9)$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j=\overline{1,n}) \qquad (14.10)$$

$$x_j \in Z \qquad (14.11)$$

$$x_j \ge \left[x_j^*\right]+1 \qquad (14.12)$$

4. Далі симплекс-методом розв'язуються послаблені задачі (14.3) - (14.7) і (14.8) - (14.12), тобто відповідні ЗЛП без обмежень (14.6) і (14.11). Якщо знайдені оптимальні плани цих задач задовольняють умові цілочисельності, то ці плани визначають розв'язок початкової ЗЦЧП. Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження береться задача з *більшим* значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на max, і з *меншим* значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на min. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлена неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план – оптимальний.

Зауваження. **1)** Розв'язування ЗЦЧП методом „віток" і „меж" можна значно прискорити, приєднуючи обмеження виду (14.7) і (14.12) до останньої симплекс-табл. не початкової ЗЦЧП, а відповідних задач.

2) Якщо дробових значень невідомих в умовно-оптимальному плані декілька, то додаткові обмеження складають для тієї з них, яка має найбільшу дробову частину.

Як і метод Гоморі, метод „віток" і „меж" має свої **недоліки**:

1. Немає чітких правил вибору змінної, з якої починається розгалуження.
2. Відсутні правила для вибору послідовності розв'язання породжених задач.
3. Важливо *повністю* розв'язати породжені задачі симплекс-методом, що є громіздкою роботою, особливо при розв'язуванні задач великої розмірності.

Але на практиці цей метод найефективніший. Крім того, існує різновид модифікацій цього методу для певних видів ЗЦЧП.

Типові цілочисельні задачі економіко-математичного моделювання або дослідження операцій можна розв'язувати вищевказаними методами. Але іноді це неможливо, оскільки можуть бути отримані різні дійсні значення між нулем та одиницею. Тому цілочисельні задачі рекомендується розв'язувати за використанням інформаційних технологій. Обмеження в команді TOOLS.SOLVER в Пошуку розв'язків системи MS EXCEL можуть мати вигляд: комірка =int (комірка = цел), і розв'язують цілочисельні задачі (пп. 10.1;10.2; 13.3).

14.4. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП):

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 \le 100, \\ 40x_1 + 20x_2 \le 190 \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ - цілі.}$$

Розв'язання. Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисельності. Остання симплекс-таблиця набере наступного вигляду (табл. 14.3).

Таблиця 14.3

C_{ij}	Базисні змінні	0	350	150	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4
350	x_1	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
150	x_2	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
Δ_i		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка останньої симплекс-табл. додаткове обмеження виду $\sum\limits_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \geq \{b_i\}$:

$$\{1\}x1 + \{0\}x2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x4 \geq \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Враховуючи, що $\{1\} = 0,\ \{0\} = 0,\ \left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5},\ \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4},\ \left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, додаткове обмеження набере вигляду: $\frac{3}{5}x3 + \frac{3}{4}x4 \geq \frac{1}{2}$.

Зведемо його до канонічного виду та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x3 + \frac{3}{4}x4 - x5 + x6 \geq \frac{1}{2}.$$

Приєднавши отримане обмеження до останньої симплекс-табл. з умовно-оптимальним планом, дістанемо наступну симплекс-табл. 14.4.

Розв'язавши останню задачу, знайдемо, нарешті, оптимальний план: $Z_{\max} = 1450$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Таблиця 14.4

C_{ij}	Базисні змінні	0	350	150	0	0	0	-M
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
350	x_1	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
150	x_2	$7\frac{1}{2}$	0	1	$7\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
-M	x_6	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
Δ_i		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Задача 2. Методом „віток" і „меж" розв'язати попередню Задачу 1 цілочислового програмування (ЗЦЧП).

Розв'язання. Відкинувши умову цілочисельності, дістанемо умовно-оптимальний план $x_1 = 2$, $x_2 = 7\frac{1}{2}$. Тому допустиме ціле значення x_2 повинне задовольняти одну з нерівностей $x_2 \leq \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor = 7$ або $x_2 \geq \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 8$.

Приєднуючи до задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисельності, розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі. Для першого обмеження $x_2 \le 7$ умовно-оптимальним буде розв'язок $x_1' = 1{,}2;\ x_2' = 7$, при цьому $Z'_{\max} = 1470$. Для другого обмеження $x_2 \ge 8$ умовно-оптимальним буде розв'язок $x_1'' = \frac{3}{4};\ x_2'' = 8$, при цьому $Z''_{\max} = 1462{,}5$. Цілочислового розв'язку знову не отримали, тому процес відсікання треба продовжити, узявши для наступного розгалуження першу із задач, умовно-оптимальний план якої дає більше значення цільової функції. Далі розглядаємо дві задачі, приєднуючи умови $x_1 \le 1;\ x_2 \ge 2$, звідки й отримуємо оптимальний план $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $Z_{\max} = 1450$.

14.5. Питання для самоперевірки

1. Приклади задач цілочислового програмування.
2. Загальний вид ЗЦЧП.
3. Суть методу Гоморі розв'язування ЗЦЧП.
4. Поняття послабленої ЗЛП.
5. Поняття умовно-оптимального плану для ЗЦЧП.
6. Чи можна отримати допустимий цілочисловий розв'язок шляхом заокруглення розв'язку задачі з послабленими обмеженнями у вигляді рівностей?
7. Як скласти додаткове обмеження, якщо компоненти оптимального плану, обчисленого симплекс-методом, є дробовими?
8. Чи може значення цільової функції в оптимальному розв'язку цілочислової задачі максимізації бути більшим оптимального значення цільової функції відповідної задачі з послабленими обмеженнями?
9. В чому полягає розв'язування частково цілочислової задачі лінійного програмування?
10. Недоліки методу Гоморі.
11. Метод „віток" і „меж" розв'язування ЗЦЧП.
12. Недоліки методу „віток" і „меж".

14.6. Навчальні завдання

№ 14.1. Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП):

а) $$Z = x_1 \to max,\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 24, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$$

б) $$Z = x_1 + x_2 \to max,\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$$

в) $$Z = 3x_1 + 3x_2 \to max,\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36, \\ x_2 \le 13, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$$

г) $$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to max,\quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$$

д) $$Z = 6x_1 + 4x_2 \to min,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$$

е) $$Z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 \to max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -6, \end{cases}\quad x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$$

№ 14.2. Методом „віток” і „меж” розв’язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП).

а) $Z = 2x_1 + x_2 \to max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 6x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

б) $Z = 3x_1 + 7x_2 \to max,$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

в) $Z = 3x_1 + 2x_2 \to max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 \ \ + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 \ \ + x_5 = 9, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

д) $Z = 2x_1 + 3x_2 \to max,$ $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

Відповідь: в) (9;4;0; 1;32); 35.

14.7. Завдання для перевірки знань

№ 14.3. Методом Гоморі та методом „віток” і „меж» розв’язати ЗЦЧП.

а) $Z = 8x_1 + 5x_2 \to max,$ $\begin{cases} 12x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

б) $Z = x_1 + 4x_2 \to max,$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

в) $Z = 12x_1 + 3x_2 \to max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

г) $Z = 3x_1 + 5x_2 \to max,$ $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j - цілі.$

№ 14.4. Розв’язати частково цілочислові задачі.

а) $Z = 5x_1 + x_2 \to max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{2}, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_1, x_2 - цілі.$

б) $Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to max,$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ -2x_1 + 6x_2 + \frac{5}{2}x_3 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_{2,3} - цілі.$

Відповідь: а) 15: (3; 0; ½; 5);   б) ½; (1/2; 1; 0).

Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання з основних тем курсу містять тридцять варіантів. Номер варіанта співпадає з сумою двох (трьох) останніх цифр номера залікової книжки студента.

До теми 1

Скласти за умовою задачі математичну модель задачі лінійного програмування, і визначити її форму.

№ 1. Виконати замовлення на виготовлення 32 виробів виду $В_1$ та 4 виробів виду $В_2$ взялися бригади $Б_1$ та $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ по виготовленню 32 виробів виду $В_1$ та $В_2$ складає відповідно 4 і 3 вироби за одиницю часу, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 од. Продуктивність бригади $Б_1$ – відповідно 1 і 3, а її фонд робочого часу – 4 од. Витрати, що пов'язані з виготовленням одиниці виробу, для бригади $Б_1$ дорівнює відповідно 9 і 20 тис. г. о., для бригади $Б_2$ – 15 і 30 тис. г. о. Потрібно:

1) Скласти математичну модель задачі за показником витрат на виконання замовлення;
2) Знайти оптимальний план розміщення замовлення при додатковій вимозі: фонд робочого часу бригади $Б_2$ повинен бути повністю використаний.

№ 2. Три нафтопереробних заводи А, Б, В із щоденною максимальною продуктивністю відповідно 20, 15, 25 тис. т пального забезпечують чотири сховища Г, Д, Е, Ж, потреби яких у пальному 15, 10, 20, 25 тис. т відповідно. Пальне транспортується за допомогою трубопроводів. Вартість (в у. г. о.) постачання 1000 т пального від заводів до сховищ задано матрицею:

*	Г	Д	Е	Ж
А	4	5	3	7
Б	8	5	2	5
В	2	3	7	6

Спланувати постачання пального з мінімальними витратами.

№ 3. Є три технологічних процеси для виділення із руди двох необхідних речовин А та В. Із кожної тонни руди при застосуванні процесів 1, 2 і 3 отримується відповідно (табл. 1.1). Визначити оптимальний розподіл 10т руди за процесами 1, 2 і 3, щоб витрати були мінімальними, якщо необхідно отримати не менше 3 кг кожної речовини.

Таблиця 1.1

Речовини	Вихід речовини (в кг) із тонни руди при застосуванні процесу		
	1	2	3
А В	0.4 0.6	0.6 0.4	0.2 0.2
Витрати	5000	1600	1000

№ 4. Промислова фірма виробляє виріб, що містить три різних вузли. Ці вузли виготовляються на 2 заводах. Через різницю в складі технологічного обладнання продуктивність заводів по випуску кожного із трьох видів вузлів неоднакова. В табл. 1.2 містяться вихідні дані, що характеризують як продуктивність заводів по випуску кожного із вузлів, так і максимальний сумарний ресурс часу, який протягом тижня має кожний із заводів для виробництва цих вузлів.
Ідеальною є така ситуація, коли виробничі потужності обох заводів використовуються таким чином, що в результаті забезпечується випуск однакового кількості кожного із видів вузлів. Але цього важко досягти через різницю в продуктивності заводів. Більш реальна мета полягає, очевидно, в тому, щоб максимізувати випуск виробів, що, по суті, еквівалентно мінімізації кожного із трьох видів вузлів і залежить від того, який фонд часу виділяє кожний завод для їх виготовлення. Потрібно визначити щотижневі витрати часу (в годинах) на виробництво кожного з

трьох видів вузлів на кожному заводі, що не перевищують в сумі часові ресурси кожного заводу і забезпечують максимальний випуск виробів.

Таблиця 1.2

Завод	Максимальний тижневий фонд часу, год.	Продуктивність, вузол/год.		
		Вузол №1	Вузол №2	Вузол№3
1	120	10	6	10
2	100	8	10	6

№ 5. Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання вказані в табл. 1.3. У ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного з типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 1.3

Обладнання	Витрати часу			Фонд часу
	A	B	C	
Токарне	8	6	10	150
Фрезерне	9	4	7	120
Зварювальне	4	2	12	80
Шліфувальне	6	12	8	100
Прибуток	10	8	12	

Визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

№ 6. Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості потрібно щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна отримати не менш як 60 од. поживної речовини А, не менше 50 од. речовини В і не менше 12 од. речовини С. Вказані поживні речовини містять три види корму. Вміст одиниць поживних речовин у 1кг кожного із цих видів корму наведено в табл. 1.4:

Таблиця 1.4

Речовина	Вид корму		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, який забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових затратах, якщо ціна 1кг корму I-го виду становить 9 коп., корму II-го виду – 12 коп. , і корму III-го виду - 10 коп.

№ 7. На швейній фабриці тканина може бути розкроєна кількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при *i*-му варіанті розкрою (i=1,…, *n*) зі 100 кв. м тканини виготовляється b_{ij} деталей *i*-го виду (*i*=1,…, *m*), а величина відходів при даному варіанті розкрою рівна 1 кв. м. Знаючи, що деталей *i*-го виду потрібно виготовляти В штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано необхідну кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі.

№ 8. У трьох пунктах відправлення є однорідний вантаж в кількостях, які відповідно дорівнюють 420, 380, 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, які відповідно дорівнюють 260, 520 і 420 т. Вартості перевезень 1т вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, який забезпечує вивезення наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пунктах призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень.

№ 9. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В і С використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду наведені в табл. 1.5. В ній же вказана загальна кількість сировини кожного виду, яке може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду. Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

Таблиця 1.5

Вид сировини	норми витрат сировини (т) на одну тонну карамелі			кількість
	А	В	С	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре		0,1	0,1	120
Прибуток	108	112	126	

№ 10. Продукцією міського молочного заводу є: молоко, кефір і сметана, які розфасовані в пляшки. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливанні 1т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Всього для виробництва сметанно-молочної продукції завод може використати 136000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани - протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1т молока, кефіру і сметани відповідно рівний 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

До теми 2

Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції.

№ 1. $$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,03x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,1x_2 + 0,02x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 8 \end{aligned}$$

№ 2. $$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,2x_1 + 0,3x_3 + 0,08x_4 + 8 \\ x_3 &= 0,09x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 7 \end{aligned}$$

№ 3. $$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,25x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,3x_1 + 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$$

№ 4. $$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,03x_1 + 0,02x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,2x_1 + 0,08x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,15x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,05x_1 + 0,07x_2 + 4 \end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,02x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,09x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,05x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,25x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,07x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ .8.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,08x_1 + 0,3x_2 + 1 \end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,25x_3 + 0,05x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,09x_1 + 0,1x_2 \end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 9 \end{aligned}$$

До тем 3-4

Знайти область допустимих розв'язків (ОДР) систем нерівностей і координати однієї з її вершин.

№ 1.
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

№ 2.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

№ 3.
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

№ 4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

№ 5.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -15, \\ 4x_1 - x_2 \ge 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 30, \\ x_1 - 2x_2 \le 20. \end{cases}$$

№ 6.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1. \end{cases}$$

№ 7.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le -1, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

№ 8.
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 - 2x_1 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{cases}$$

№ 8.
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28. \end{cases}$$

№ 10.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -1, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

До теми 5

Розв’язати графічно задачу лінійного програмування:

№ 1.
$$\begin{aligned}&F=-3x_1+6x_2\to\min;\\&5x_1-2x_2\le 4,\\&x_1-2x_2\ge -4,\\&x_1+x_2\ge 4,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned}&F=3x_1+3x_2\to\max;\\&x_1+x_2\le 8,\\&3x_1+7x_2\ge 21,\\&x_1-2x_2\le 10,\\&0\le x_1\le 5,\\&0\le x_2\le 1.\end{aligned}$$

№ .3.
$$\begin{aligned}&F=x_1+x_2\to\max;\\&-5x_1+x_2\le 0,\\&-x_1+5x_2\ge 0,\\&x_1+x_2\le 6,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned}&F=x_1+x_2\to\max;\\&5x_1-2x_2\le 7,\\&-x_1+x_2\le 5,\\&x_1+x_2\le 6,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned}&F=2x_1-4x_2\to\max;\\&8x_1-5x_2\le 16,\\&x_1+3x_2\ge 2,\\&2x_1+7x_2\le 9,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned}&F=2x_1+2x_2\to\max;\\&3x_1-2x_2\ge -6,\\&x_1+x_2\ge 3,\\&0\le x_1\le 3,\\&0\le x_2\le 5.\end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned}&F=2x_1-x_2\to\max;\\&x_1-x_2\ge -3,\\&6x_1+7x_2\le 42,\\&2x_1-3x_2\le 6,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 8.
$$\begin{aligned}&F=7x_1+6x_2\to\max;\\&2x_1+5x_2\ge 10,\\&5x_1+2x_2\ge 10,\\&x_1\le 6,\\&x_2\le 5,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned}&F=3x_1+3x_2\to\max;\\&x_1+x_2\le 4,\\&3x_1+x_2\ge 4,\\&x_1+5x_2\ge 4,\\&0\le x_1\le 3,\\&0\le x_2\ge 3.\end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned}&F=2x_1-x_2\to\max;\\&x_1-x_2\ge -3,\\&6x_1+7x_2\le 42,\\&2x_1-3x_2\le 6,\\&x_1+x_2\ge 4,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

До тем 6-8

Розв'язати ЗЛП за допомогою симплекс-методу.

№ 1.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;\\&x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4,\\&5x_1 + x_3 \ge -12,\\&-2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4,\\&x_1 + x_2 \ge 4,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned}&L = 3x_1 + 2x_2 \to \max;\\&4x_1 + 2x_2 \ge 12,\\&x_1 + 2x_2 \le 10,\\&2x_1 + 2x_2 = 6,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 3.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 + 6x_2 \to \max;\\&8x_1 - 5x_2 \le 40,\\&2x_2 + 5x_3 \ge 10,\\&-6x_1 + 5x_2 \le 60,\\&2x_1 + x_2 \le 14,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;\\&x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,\\&2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20,\\&x_1 + 2x_2 + x_4 = 10,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned}&L = (-2x_3 + 2x_4 + x_5) \to \max;\\&x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4,\\&x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2,\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned}&L = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4) \to \max;\\&2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3,\\&-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned}&L = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 \to \min;\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \le 30,\\&3x_1 \le 10,\\&x_2 + 4x_3 \le 20,\\&2x_4 + x_5 \le 15,\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 8.
$$\begin{aligned}&L = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) \to \max;\\&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40,\\&x_1 + 3x_2 \le 30,\\&2x_1 + x_2 \le 20,\\&x_3 \le 10,\\&x_4 \le 10,\\&x_3 + x_4 \le 15,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned}&L = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 +\\&6x_5 + 12x_6) \to \max;\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 \le 24,\\&x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 18,\\&x_5 + 2x_6 \le 10,\\&3x_5 + x_6 \le 12,\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned}&L = (2x_1 - x_2 + 3x_4) \to \max;\\&x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \le 2,\\&2x_1 - x_2 \le 1,\\&x_1 + 2x_2 \le 3,\\&-x_3 + 2x_4 \le 2,\\&-2x_3 + x_4 \le 1,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

До теми 9

Скласти двоїсту задачу; розв'язати одну із задач симплексним методом і знайти оптимальний план іншої задачі; показати взаємозв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач.

№ 1.
$$L=(x_1+2x_2)\to \max;$$
$$2x_1+3x_2\le 8,$$
$$2x_1+x_2\le 6,$$
$$x_1+x_2\ge 1,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 2.
$$L=(-2x_1+3x_2)\to \min;$$
$$2x_1+x_2\le 8,$$
$$x_1+3x_2\ge 6,$$
$$3x_1+x_2\ge 3,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 3.
$$L=(6x_1+4x_2)\to \min;$$
$$2x_1+x_2\ge 3,$$
$$x_1-x_2\le 1,$$
$$-x_1+2x_2\ge 1,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 4.
$$L=(4x_1+3x_2)\to \max;$$
$$5x_1+2x_2\ge 20,$$
$$x_1+3x_2\le 15,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 5.
$$L=(x_1+3x_2)\to \max;$$
$$x_1+x_2\ge 3,$$
$$6x_1+x_2\le 42,$$
$$2x_1-3x_2\ge 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 6.
$$L=(x_1-2x_2)\to \max;$$
$$5x_1-2x_2\le 3,$$
$$x_1+x_2\ge 1,$$
$$-3x_1+x_2\le 3,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 7.
$$L=(8x_1+2x_2)\to \max;$$
$$x_1+4x_2\le 4,$$
$$-4x_1+x_2\le 4,$$
$$x_1+x_2\le 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 8.
$$L=(2x_1-3x_2)\to \min;$$
$$5x_1+2x_2 10,$$
$$x_1+3x_2\le 12,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 9.
$$L=(5x_1+4x_2)\to \max;$$
$$2x_1+3x_2\le 3,$$
$$x_1+3x_2\le 4,$$
$$-x_1+x_2\le 5,$$
$$5x_1+4x_2\le 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 10.
$$L=(2x_1+3x_2)\to \max;$$
$$x_1+5x_2\ge 16,$$
$$3x_1+2x_2\ge 12,$$
$$2x_1+4x_2\ge 16,$$
$$x_1\ge 1,$$
$$x_2\ge 0.$$

До тем 11-12

Знайти опорний та оптимальний плани задачі транспортного типу. Для задач використати нижченаведені дані:

Постачальник / Споживач	B_1 = 55+3M	B_2 = 115-M	B_3 = 10+2M	B_4 = 200-4M
A_1 =68+M	8-K	7	5+K	9
A_2 =25+2M	1	2	4	3
A_3 =99-3M	2	1+K/2	7	7-K

№ 1.	К=2; М=15.	**№ 2.**	К=4; М=17.
№ 3.	К=6; М=19.	**№ 4.**	К=2; М=21.
№ 5.	К=4; М=18.	**№ 6**.	К=6; М=20.
№ 7.	К=2; М=10.	**№ 8.**	К=4; М=15.
№ 9.	К=3; М=10.	**№ 10.**	К=4; М=35.

До теми 13

Розв'язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в табл.. Прочерк (нуль) означає, що даний робітник не може працювати на даному верстаті. Знайти оптимальний розв'язок.

№ 1.

Виконавці	Верстати 1	2	3	4
А	12	10	10	30
Б	5	56	21	10
В	7	34	18	34
Г	23	24	11	56

№ 2.

Виконавці	Верстати 1	2	3	4
А	3	1	3	10
Б	5	4	7	5
В	6	38	8	8
Г	27	5	2	6

№ 3.

Виконавці	Верстати 1	2	3	4
А	2	5	7	9
Б	8	9	7	3
В	6	5	8	5
Г	5	3	6	8

№ 4.

Виконавці	Верстати 1	2	3	4
А	1	10	1	30
Б	5	56	2	13
В	7	34	18	34
Г	32	42	12	1

№ 5.

Виконавці	Верстати 1	2	3	4
А	2	10	51	3
Б	53	45	23	1
В	4	34	48	3
Г	5	24	2	5

№ 6.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	10	20	40
Б	55	66	45	10
В	27	43	38	24
Г	77	78	22	37

№ 7.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	10	3	10
Б	8	4	7	1
В	7	3	9	3
Г	3	4	10	6

№ 8.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	5	7	46
Б	2	35	6	3
В	5	3	34	7
Г	3	3	56	54

№ 9.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	5	7	8	4
Б	9	5	6	7
В	5	6	8	8
Г	4	5	7	5

№ 10.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	4	3	5
Б	4	5	7	5
В	5	4	8	4
Г	6	5	9	6

До теми 14

Розв'язати задачі у цілих числах або довести, що вони не мають розв'язку: а) методом Гоморі; б) методом „віток і меж".

1. $F = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$

$2x_1 + x_2 \le 11,$

$-3x_1 + 2x_2 \le 10,$

$3x_1 + 4x_2 \ge 20,$

$x_1 \ge 0,$

$x_2 \ge 0.$

2. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$

$3x_1 - 2x_2 \ge -6,$

$x_1 + x_2 \ge 3,$

$0 \le x_1 \le 3,$

$0 \le x_2 \le 5.$

5. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$5x_1 - 2x_2 \le 4,$

$x_1 - 2x_2 \ge -4,$

$4x_1 - 3x_2 \le 12,$

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

6. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$

$x_1 - x_2 \ge -3,$

$6x_1 + 7x_2 \le 42,$

$2x_1 - 3x_2 \le 6,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

7. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$

$8x_1 - 5x_2 \le 16,$

$x_1 + 3x_2 \ge 2,$

$2x_1 + 7x_2 \le 9,$

$x_1, x_2 \le 0.$

8. $F = -2x_1 + x_2 \to \max;$

$2x_1 + x_2 \le 8,$

$x_1 + x_2 \le 6,$

$-3x_1 + 2x_2 \ge 3,$

$x_1, x_2 \ge 0.$

9. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$

$8x_1 - 5x_2 \le 16,$

$x_1 + 3x_2 \le 2,$

$2x_1 + 7x_2 \ge 9,$

$x_1, x_2 \le 0.$

10. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$5x_1 - 2x_2 \le 4,$

$x_1 - 2x_2 \ge -4,$

$x_1 + x_2 \ge 4,$

$x_1, x_2 \le 0.$

Список рекомендованої літератури

Основна література

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів. / М.К. Бугір. – К.: ВЦ Академія, 2003. - 520 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. / М.К. Бугір. – К.: ВЦ Академія, 1998. – 272 с.
4. Бугір М.К. Навчально-методичний посібник щодо використання ПК в задачах лінійної оптимізації. / М.К. Бугір, С.В. Криворучка, О.Й. Сирник. – Тернопіль: Економічна думка, 2000. – 164 с.
5. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навчальний посібник. / В.В. Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.
6. Вітлінський В.В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни. / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко. - К.: КНЕУ, 2000. - 292 с.
7. Вітлінський В.В. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник. / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, О.Д. Шарапов. - К.: ІЗМН, 1996. – 400 с.
8. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. / В.Д. Гетманцев. – К., 2001. – 240 с.
9. Гетманцев В.Д. Математика для економістів. Дослідження операцій. Математичне програмування. / В.Д.Гетманцев. – К.: КНЕУ, 2006. – 308 с.
10. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0.- СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.- 384 с.
11. Лавренчук В.П. Вища математика: Навч. посібник. У 3-х частинах. Частина 3 (Математичне програмування). / В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – 2-е вид. – Чернівці: Рута, 2002. – 169 с.
12. МихайленкоВ. Математичний аналіз для економістів. / В. Михайленко, Н. Федоренко. – К.: ВШ,1999. – 380 с.
13. Наконечний С.І. Математичне програмування. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна.– К., 2003. – 180 с.
14. Пономаренко О. Математичні методи в економіці. / О. Пономаренко, М. Перестюк, В. Бурим. - К., 1995. – 320 с.
15. Ржевський С.В. Дослідження операцій. / С.В. Ржевський, В.М. Александрова. – К.: Академвидав, 2006. – 560 с.
16. Романюк Т.П. Математичне програмування: Навч. посібник. / Т.П. Романюк, Т.О. Терещенко, Г.В. Присенко, І.М. Городкова. – К.: ІЗМН, 1996. – 364 с.
17. Савченко О.Г. Економіко-математичне моделювання. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. / О.Г. Савченко, Н.В. Валько, Л.В. Кузьмич. – Херсон: РВЦ «Колос» ХДАУ, 2011. – 179 с.
18. Савченко О.Г. Оптимізаційні методи і моделі: Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни. / О.Г. Савченко, Н.В Валько., Л.В. Кузьмич, Г.М. Кавун. – Херсон: Айлант, 2014. – 430 с.
19. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Харків, 2003. – 126 с.
20. Черняк А.А. Математика для экономистов на базе Mathcad. / А.А. Черняк, В.А. Новиков, О.И. Мельников, А.В. Кузнецов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 496 с.
21. https://www.youtube.com/watch?v=B4hdkK5lMEg
22. https://www.youtube.com/watch?v=HEoCopBfU1k
23. https://exceltable.com/otchety/reshenie-uravneniy

Додаткова література

1. Алдохин Н.П., Кулиш З.А. Экономическая кибернетика. – Харьков: Вища школа, 1983.
2. Андрийчук В.Г. Наконечный З.Н. Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства. - ДО.: КНИХ, 1982.
3. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.
4. Боровиков В. Statistica: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. /Боровиков В. – СПб.: Питер, 2001. – 656 с.
5. Браславец М.Е., Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельскохозяйственном производстве.- М.: Колос, 1972.- 589 с.
6. Бугір М.К. Посібник по розв'язуванню задач з математичного програмування. Навч. посібник. / М.К. Бугір, Ф.П. Якімов. – Тернопіль: Економічна думка, 1997. – 208 с.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Київ: Вища школа, 1988. – 320 с.
8. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. - Київ: Вища школа, 1990. – 248 с.
9. Исследование операций в экономике:. / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. – М.: ЮНИТИ, 2002. - 407 с.
10. Кабак Л.Ф., Суворовский А.А. Математическое программирование. - К.: ІМКВО, 1992. – 160 с.
11. Калихман М.Л. Линейная алгебра и программирование. / М.Л. Калихман. – М.: Высшая школа, 1967. – 428 с.
12. Калихман М.Л. Сборник задач по математическому программированию. / М.Л. Калихман. – М.: Высшая школа, 1975. – 276 с.
13. Линейное и нелинейное программирование. / Под ред. И.Н. Ляшенко. - К.: Вища школа, 1975. – 342 с.
14. Крупка М., Островерх П., Реверчук С. Основи економічної теорії. - Львів, 1997. – 268 с.
15. Леонтьев В.В. Экономическое эссе. Теории, исследования, факты и политика. / В.В. Леонтьев. - М.: Политиздат, 2003. – 159 с.
16. Савченко О.Г., Малік Я.Г., Плоткін С.Я. Методичні вказівки та варіанти контрольної роботи з математичного

програмування. - Херсон, 2010. – 35 с.
17. Ситник В.Ф., Каратодава Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. - К.: Вища школа, 1985. – 60 с.
18. Таха Х. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом „Вильямс", 2001. - 912 с.
19. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. - М.: Статистика, 1988. – 280 с.
20. Тунеев М.М., Сухоруков В.Ф. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. - М.: Колос, 1977. - 224 с.

Навчально-методичне видання

Н.В. Валько
Л.В. Кузьмич
О.Г. Савченко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

ПРАКТИКУМ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧИЙ ПОСІБНИК

ISBN 978-966-630-228-4

Технічний редактор – Дудченко С.Г.

Віддруковано з готових оригінал-макетів.
Підписано до друку 22.042.2019 р. Формат 60 х 84 1/16.
Папір офсетний. Друк різографія. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 9,5. Наклад 300 прим.

Віддруковано в ТОВ "Айлант",
73000, Україна, м. Херсон, пров. Пугачова, 5/20.
Свідоцтво про реєстрацію ХС №1 від 20.08.2000 р.
тел. 49-33-48, 050-396-08-91.