УДК 517.917

Функция Грина возмущенной на спектре двухточечной краевой задачи в банаховом пространстве

Я. Д. Плоткин

Пусть в банаховом пространстве E определена краевая задача

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t)\right) y_\varepsilon + f(t), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k\right) y_\varepsilon(T), \tag{2}$$

где

1) $A_k(t)$ для $\forall t \in [0, T]$ и C_k $(k = \overline{1, \infty})$ являются линейными ограниченными операторами из $[E]$;

2) ряды в правых частях (1), (2) сходятся по норме пространства $[E]$ при $\forall\, t \in [0, T]$ и $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ $(T > 0, \varepsilon_0 > 0)$;

3) $A_k(t)$ $(k = \overline{1, \infty})$ сильно непрерывны при $t \in [0, T]$;

4) C_0 — вполне непрерывный оператор;

5) $y_\varepsilon(t) \in C^1(E; [0, T])$ при $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; $f(t) \in C(E, [0, T])$;

6) предельная однородная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)\, x, \tag{3}$$

$$x(0) = C_0 x(T) \tag{4}$$

имеет нетривиальные решения в $C^1(E; [0, T])$. Близкие задачи рассматривались в работах [1 — 3].

В данной работе рассматривается одно из приложений метода возмущенных на спектре линейных операторов [4] к построению функции Грина задачи (1), (2) в случае, когда предельная задача (3), (4) находится на спектре, т. е. выполняется условие (6).

1. Неоднородная краевая задача

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dt} = A_0(t)\, y + f(t), \\ y(0) = C_0 y(T) + a,\ a \in E, \end{gathered} \tag{5}$$

имеет единственное решение в $C^1(E; [0, T])$ тогда и только тогда, когда задача (3), (4) имеет только тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Это решение

$$y(t) = \int_0^T G(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau + X(t)\,[I - C_0 X(T)]^{-1} a, \tag{6}$$

где функция Грина

$$G(t,\tau)=\begin{cases} X(t)\,[I-C_0X(T)]^{-1}X^{-1}(\tau), & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T,\\ X(t)\,C_0X(T)\,[I-C_0X(T)]^{-1}X^{-1}(\tau), & 0\leqslant t<\tau\leqslant T,\end{cases} \tag{7}$$

$X(t)$ — оператор Коши уравнения (3).

Если выполняется условие 6), то задача (5) разрешима тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение

$$Au=b, \tag{8}$$

где $A=I-C_0X(T)$, $b=a+C_0X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau$. В силу теоремы С. М. Никольского [5] оператор A есть Ф-оператор, т. е. A нормально разрешим и

$$\dim N(A)=n<\infty,\quad N(A)=\{\varphi\in E: A\varphi=0\}.$$

Из нормальной разрешимости следует, что уравнение (8) разрешимо тогда и только тогда, когда для $\forall\rho\in N(A^*)$

$$(\rho,b)=0. \tag{9}$$

Определение 1. Уравнение (8) назовем разрешающим уравнением краевой задачи (5).

Определение 2. Краевую задачу

$$\frac{dz}{dt}=-A_0^*(t)\,z, \tag{10}$$

$$C_0^*\,z(0)=z(T), \tag{11}$$

где $z(t)\in C^1(E^*;[0,T])$, назовем сопряженной задачей к задаче (3), (4).

Оператор Коши сопряженного уравнения (10)

$$Z(t)=[X^{-1}(t)]^*. \tag{12}$$

Так как оператор $A=I-C_0X(T)$ есть Ф-оператор, то краевые задачи (3), (4) и (10), (11) имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Определение 3. Вектор-функция $\varphi(t)\in C^1(E;[0,T])$ относительно операторов A_k и C_k $(k=\overline{1,\infty})$ образует обобщенную жорданову цепочку вектор-функций $\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi^{(2)}(t),\ldots,\varphi^{(r)}(t)$ длины r, если краевые задачи

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi}{dt}=A_0(t)\,\varphi(t),\quad \varphi(0)=C_0\varphi(T);\\ \frac{d\varphi^{(k)}(t)}{dt}=\sum_{l=0}^{k}A_l(t)\,\varphi^{(k-l)}(t),\quad \varphi^{(k)}(0)=\sum_{l=0}^{k}C_l\varphi^{(k-l)}(T),\end{gathered} \tag{13}$$

разрешимы, а краевая задача

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi^{(r+1)}(t)}{dt}=\sum_{l=0}^{r+1}A_l(t)\,\varphi^{(r+1-l)}(t),\\ \varphi^{(r+1)}(0)=\sum_{l=0}^{r+1}C_l\varphi^{(r+1-l)}(T),\end{gathered} \tag{14}$$

решения не имеет.

Определение 4. $\psi(t) \in C^1(E; [0, T])$ относительно операторов $A_k^*(t)$, C_k^* $(k = \overline{1, \infty})$ образует сопряженную к (13) обобщенную жорданову цепочку $\psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t), \ldots, \psi^{(r)}(t)$, если краевые задачи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A_0^*(t)\,\psi(t), \qquad \frac{d\psi^{(k)}(t)}{dt} = -\sum_{l=0}^{k} A_l^*(t)\,\psi^{(k-l)}(t),$$
$$C_0^*\psi(0) = \psi(T), \qquad \psi^{(k)}(T) = \sum_{l=0}^{k} C_l^*\psi^{(k-l)}(0), k = \overline{1, r}, \tag{13'}$$

разрешимы, а краевая задача

$$\frac{d\psi^{(r+1)}(t)}{dt} = -\sum_{l=0}^{r+1} A_l^*(t)\,\psi^{(r+1-l)}(t),$$
$$\psi^{(r+1)}(T) = \sum_{l=0}^{k} C_l^*\psi^{(r+1-l)}(0), \tag{14'}$$

не имеет решения.

Определение 4 корректно, так как $A = I - C_0X(T)$ есть Φ-оператор.

Начальные векторы $\varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$ (функционалы $\psi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$) решений краевых задач (13) (или (13′)) определяются из соответствующих разрешающих уравнений

$$A\varphi = 0, \quad A\varphi^{(k)} = \hat{\varphi}^{(k-1)}, \quad \hat{\varphi}^{(k-1)} = \sum_{l=1}^{k} B_l\varphi^{(k-l)}, k = \overline{1, r}, \tag{15}$$

$$A^*\psi = 0, \quad A^*\psi^{(k)} = \hat{\psi}^{(k-1)}, \quad \hat{\psi}^{(k-1)} = \sum_{l=1}^{k} \check{B}_l^*\psi^{(k-l)}, k = \overline{1, r}, \tag{15'}$$

где

$$B_k = \sum_{l=0}^{k} C_lX(T)\,H_{k-l}(T), \tag{16}$$

$$\check{B}_k^* = (C_kX(T) + (-1)^{k-1}\check{H}_k(T))^*, \tag{17}$$

$$H_m(t) = \int_0^t \{\dot{K}_1(\tau)\,H_{m-1}(\tau) + \ldots + \dot{K}_{m-1}(\tau)\,H_1(\tau) + \dot{K}_m(\tau)\}\,d\tau,$$
$$H_0(t) = I, \tag{18}$$

$$K_i(t) = \int_0^t X^{-1}(\tau)\,A_i(\tau)\,X(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

$$\check{H}_m^*(t) = \int_0^t \{\dot{K}_1^*(\tau)\check{H}_{m-1}^*(\tau) + \ldots + (-1)^m\dot{K}_m^*(\tau)\}\,d\tau. \tag{20}$$

Из (15) и (15′) вытекает, что вектор $\varphi \in E$ и функционалы $\psi \in E^*$ соответственно относительно операторов $B_k \in [E]$ и операторов $\check{B}_k^* \in [E^*]$ образуют обобщенные жордановы цепочки векторов $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$ и функционалов $\psi^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \psi^{(r)}$ длины r в смысле работы [4].

Лемма 1.

$$\sum_{l=1}^{k} \breve{B}_l^* \psi^{(k-l)} = \sum_{l=1}^{k} B_l^* \psi^{(k-l)}, k = \overline{1, r}. \tag{21}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что операторы $H_k^*(t)$ и $\breve{H}_k^*(t)$ $(k = \overline{1, \infty})$ связаны соотношениями

$$\breve{H}_k^*(t) = H_1^*(t)\breve{H}_{k-1}^*(t) + \ldots + (-1)^k H_{k-1}^*(t)\breve{H}_1^*(t) + (-1)^{k+1} H_k^*(t). \tag{22}$$

Далее. в силу (15′) и (22)

$$\sum_{l=1}^{k} \breve{B}_l^* \psi^{(k-l)} = \sum_{l=1}^{k} (X^*(T) C_l^* + (-1)^{l-1} \breve{H}_l^*(T)) \psi^{(k-l)} = X^*(T) C_1^* \psi^{(k-1)} +$$

$$+ H_1^*(T) \{X^*(T) C_0^* \psi^{(k-1)} + (X^*(T) C_1^* + \breve{H}_1^*(T)) \psi^{(k-2)} + \ldots + (X^*(T) C_{k-1}^* +$$

$$+ (-1)^{k-2} \breve{H}_{k-1}^*(T)) \psi_0\} + X^*(T) C_2^* \psi^{(k-2)} + H_2^*(T) \{X^*(T) C_0^* \psi^{(k-2)} +$$

$$+ (X^*(T) C_1^* + H_1^*(T)) \psi^{(k-3)} + \ldots + (X^*(T) C_{k-2}^* + (-1)^{k-3} \breve{H}_{k-2}^*(T)) \psi_0\} + \ldots$$

$$\ldots + X^*(T) C_k^* \psi_0 + H_k^*(T) X^*(T) C_0^* \psi_0 - H_1^*(T) \breve{H}_1^*(T) \psi^{(k-2)} +$$

$$+ (H_1^*(T) \breve{H}_2^*(T) - H_2^*(T) \breve{H}_1^*(T)) \psi^{(k-3)} + \ldots + (-1)^{k-1} (H_1^*(T) \breve{H}_{k-1}^*(T) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k H_{k-1}^*(T) \breve{H}_1^*(T)) \psi_0 = \sum_{l=1}^{k} B_l^* \psi^{(k-l)}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Сопряженным обобщенным жордановым цепочкам в смысле определения* 4 *отвечают сопряженные жордановы цепочки в смысле работы* [4].

2. Используя результаты работы [4], построим функцию Грина $G_\varepsilon(t, \tau)$ краевой задачи (1), (2). Разрешающим уравнением последней будет

$$(A - \varepsilon B_1 - \varepsilon^2 B_2 - \ldots) u_\varepsilon = C_\varepsilon X_\varepsilon(T) \int_0^T X_\varepsilon^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \tag{23}$$

где $X_\varepsilon(t)$ — оператор Коши уравнения

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t)\right) x_\varepsilon; \quad C_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k.$$

Уравнение (23) имеет единственное решение, если существует $(A - \varepsilon B_1 - \varepsilon^2 B_2 - \ldots)^{-1}$.

В работе [4] показано, что если A есть Ф-оператор, B_k $(k = \overline{1, \infty})$ — ограниченные операторы и $\forall \varphi_i \in N(A)$ относительно операторов B_k образует обобщенную жорданову цепочку векторов $\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(r)}$ конечной длины r, то существует такое положительное ρ, что для всех $0 < |\varepsilon| < \rho$ существует и ограничен оператор

$$(A - \varepsilon B_1 - \varepsilon^2 B_2 - \ldots)^{-1} = \frac{D_{-r-1}}{\varepsilon^{r+1}} + \frac{D_{-r}}{\varepsilon^r} + \ldots + \frac{D_{-1}}{\varepsilon} + D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k D_k,$$

$$r = \max r_i. \tag{24}$$

Коэффициент разложения (24) определяется следующим образом:

$$D_{-r-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_0^{(i)} (\varphi_i \otimes \psi_i),$$

$$D_{-r} = \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_0^{(i)} [\varphi_i^{(1)} \otimes \psi_i + \varphi_i \otimes \psi_i^{(1)}] + \lambda_1^{(i)} (\varphi_i \otimes \psi_i)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (25)$$

$$D_{-1} = \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_0^{(i)} [\varphi_i^{(r)} \otimes \psi_i + \ldots + \varphi_i \otimes \psi_i^{(r)}] + \lambda_1^{(i)} [\varphi_i^{(r-1)} \otimes \psi_i + \ldots$$

$$\ldots + \varphi_i \otimes \psi_i^{(r-1)}] + \ldots + \lambda_r^{(i)} (\varphi_i \otimes \psi_i)\},$$

$$D_0 = R_0 + \sum_{i=1}^{n} \{\lambda_0^{(i)} [\varphi_i^{(r)} \otimes \psi_i^{(1)} + \ldots + \varphi_i \otimes \psi_i^{(r)}] + \lambda_1^{(i)} [\varphi_i^{(r)} \otimes \psi_i + \ldots$$

$$\ldots + \varphi_i \otimes \psi_i^{(r)}] + \ldots + \lambda_{r+1}^{(i)} (\varphi_i \otimes \psi_i)\}, \quad (26)$$

$$D_l = \sum_{i=1}^{l+r+1} \sum_{j=-r-1}^{0} D_{l-i} B_{i-j} D_j, \quad l = \overline{1, \infty}, \quad (27)$$

где φ_i $(i = \overline{1, n})$ — базис $N(A)$, ψ_i $(i = \overline{1, n})$ — базис $N(A^*)$, $(\varphi \otimes \psi)\, x = (\psi, x)\varphi$, $x \in E$, $\lambda_j^{(i)}$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{0, r+1})$ — константы, определяемые формулами:

$$\lambda_0^{(i)} = -1,$$

$$\lambda_1^{(i)} = (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}),$$

$$\lambda_2^{(i)} = (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(r+2)}) + (\psi_i^{(1)}, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}) - 2\lambda_1^{(i)} (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}) + (\lambda_1^{(i)})^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (28)$$

$$\lambda_{r+1}^{(i)} = (\psi_i^{(r)}, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}) + (\psi_i^{(r-1)}, \hat{\varphi}_i^{(r+2)}) + \ldots + (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(2r+1)}) -$$

$$- 2\lambda_1^{(i)} [(\psi_i^{(r-1)}, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}) + \ldots + (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(2r)})] + \Bigg(\sum_{k+j=r} \lambda_k^{(i)} \lambda_j^{(i)} -$$

$$- 2\lambda_r^{(i)}\Bigg) (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}) + \sum_{\substack{k+j=r+1 \\ k, j \neq 0}} \lambda_k^{(i)} \lambda_j^{(i)},$$

$$\hat{\varphi}_i^{(r+k)} = B_{k+1} \varphi_i^{(r)} + B_{k+2} \varphi_i^{(r-1)} + \ldots + B_{k+r+1} \varphi_i.$$

Пусть соответственно $\varphi_i, \varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(r)}$ и $\psi_i, \psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(r)}$ $(i = \overline{1, n})$ — начальные векторы и функционалы решений краевых задач (13) и (13′). Тогда

$$\varphi_i(t) = X(t)\, \varphi_i,$$

$$\varphi_i^{(k)}(t) = X(t) \left[\varphi_i^{(k)} + \sum_{m=1}^{k} H_m(t)\, \varphi_i^{(k-m)} \right], \quad i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, r}; \quad (29)$$

$$\psi_i(t) = [X^{-1}(t)]^* \psi_i,$$

$$\psi_i^{(k)}(t) = [X^{-1}(t)]^* \left[\psi_i^{(k)} + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \check{H}_m^*(t)\, \psi_i^{(k-m)} \right], \quad i = 1, n;\ k = \overline{1, r}, \quad (30)$$

где $X(t)$ — оператор Коши уравнения (3), $H_m(t), \check{H}_m^*(t)$ определяются формулами (18) — (20).

Обозначим

$$S_k^{(i)} = (\psi_i, \hat{\varphi}_i^{(r+k)}) + (\psi_i^{(1)}, \hat{\varphi}_i^{(r+k-1)}) + \ldots + (\psi_i^{(k-1)}, \hat{\varphi}_i^{(r+1)}), \quad k = \overline{1, r};\ i = \overline{1, n}. \tag{31}$$

Лемма 2.

$$S_k^{(i)} = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{r+1} (\psi_i^{(l)}, C_{k+m-l} \varphi_i^{(r+1-m)}(T)) + $$
$$+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{r+1} \int_0^T (\psi_i^{(l)}(\tau), A_{k+m-l}(\tau) \varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\, d\tau, \tag{32}$$

где $\varphi_i^{(r+1)}(t)$ $(i = \overline{1, n})$ — *решение уравнения* (14), *удовлетворяющее начальному условию.*

Доказательство. Предварительно заметим, что

$$X^*(t) A_k^*(t) \psi_i(t) + X^*(t) A_{k-1}^*(t) \psi_i^{(1)}(t) + \ldots + X^*(t) A_1^*(t) \psi_i^{(k-1)}(t) =$$
$$= -\frac{d}{dt} [X^*(t) \psi_i^{(k)}(t)], \quad k = \overline{1, r}; \tag{33}$$

$$S_k^{(i)} = \sum_{l=0}^{k-1} (\psi_i^{(l)}, \hat{\varphi}_i^{(r+k-l)}) = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=1}^{r+1} \sum_{s=0}^{k+m-l} (\psi_i^{(l)}, C_s X(T) H_{k+m-s-l}(T) \varphi_i^{(r+1-m)}) =$$
$$= (C_0^* \psi_i, X(T)(H_{k+1}(T) \varphi_i^{(r)} + \ldots + H_{k+r+1}(T) \varphi_i)) +$$
$$+ (C_0^* \psi_i^{(1)} + C_1^* \psi_i, X(T)(H_k(T) \varphi_i^{(r)} + \ldots + H_{k+r}(T) \varphi_i)) + \ldots$$
$$\ldots + (C_0^* \psi_i^{(k-1)} + \ldots + C_{k-1}^* \psi_i, X(T)(H_2(T) \varphi_i^{(r)} + \ldots + H_{2+r}(T) \varphi_i)) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=1}^{r+1} (\psi_i^{(l)}, C_{k+m-l} X(T) [\varphi_i^{(r+1-m)} + H_1(T) \varphi_i^{(r-m)} + \ldots + H_{r-m+1}(T) \varphi_i]) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{k-1} (\psi_i^{(l)}, C_{k-l} X(T) [H_1(T) \varphi_i^{(r)} + \ldots + H_{r+1}(T) \varphi_i]).$$

Обозначив

$$U_i^{(s)}(t) = X(t) [H_s(t) \varphi_i^{(r)} + \ldots + H_{s+r}(T) \varphi_i], \ t \in [0, T],$$
$$i = \overline{1, n}; \ s = \overline{2, k+1},$$

и воспользовавшись соотношениями (13′) и (29), получим

$$S_k^{(i)} = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{r+1} (\psi_i^{(l)}, C_{k+m-l} \varphi_i^{(r+1-m)}(T)) + \sum_{m=0}^{k-1} (\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T)).$$

Далее, используя (33),

$$\sum_{m=0}^{k-1} (\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T)) = (\psi_i(T), U_i^{(k+1)}(T)) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{k-1} (\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T)) = \sum_{m=1}^{k-1} \int_0^T (\psi_i(\tau), A_m(\tau) U_i^{(k-m+1)}(\tau))\, d\tau +$$

$$+\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_{k+m}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+\sum_{m=1}^{k-1}(\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T))=$$

$$=\int_0^T d\tau\int_0^\tau (X^*(\tau)\,A_1^*(\tau)\,\psi_i(\tau), X^{-1}(s)\{A_1(s)\,U_i^{(k-1)}(s)+\ldots+A_{r+k}(s)\,\varphi_i(s)\})\,ds+$$

$$+\sum_{m=2}^{k-1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m+1)}(\tau))\,d\tau+\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_{k+m}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=1}^{k-1}(\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T))=\sum_{m=1}^{k-2}\int_0^T(\psi_i^{(1)}(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i^{(1)}(\tau), A_{k+m-1}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_{k+m}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+\sum_{m=2}^{k-1}(\psi_i^{(m)}(T), U_i^{k+1-m)}(T))+$$

$$+\sum_{m=2}^{k-1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m+1)}(\tau)\,d\tau=\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T\psi_i(\tau), A_{k+m}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i^{(1)}(\tau), A_{k+m-1}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+\int_0^T d\tau\int_0^\tau(X^*(\tau)\,A_1^*(\tau)\,\psi_i^{(1)}(\tau)+$$

$$+X^*(\tau)\,A_2^*(\tau)\,\psi_i(\tau), X^{-1}(s)\{A_1(s)\,U_i^{(k-2)}(s)+\ldots+A_{k+r-1}(s)\,\varphi_i(s)\})\,ds+$$

$$+\sum_{m=3}^{k-1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m+1)}(\tau))\,d\tau+\sum_{m=2}^{k-2}\int_0^T(\psi_i^{(1)}(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=2}^{k-1}(\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T))=\sum_{l=0}^{r}\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i^{(l)}(\tau), A_{k+m-l}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=3}^{k-1}\int_0^T(\psi_i(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m+1)}(\tau))\,d\tau+\sum_{m=2}^{k-2}\int_0^T(\psi_i^{(1)}(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=1}^{k-3}\int_0^T(\psi_i^{(2)}(\tau), A_m(\tau)\,U_i^{(k-m-1)}(\tau))\,d\tau+\sum_{m=3}^{k-1}(\psi_i^{(m)}(T), U_i^{(k+1-m)}(T))=$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i^{(l)}(\tau), A_{k+m-l}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+(\psi_i^{(k-1)}(T), U_i^{(r)}(T))+$$

$$+\int_0^T d\tau\int_0^\tau\left(\sum_{j=1}^{k-1}X^*(\tau)\,A_j^*(\tau)\,\psi_i^{(k-j-1)}(\tau), X^{-1}(s)\sum_{l=1}^{r+2}A_l(s)\,\varphi_i^{(r+2-l)}(s)\right)ds=$$

$$=\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T(\psi_i^{(l)}(\tau), A_{k+m-l}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^l(\psi_i^{(k-1)}(\tau), A_{m+1}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau=$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{r+1}\int_0^T (\psi_i^{(l)}(\tau), A_{k+m-l}(\tau)\,\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau.$$

Лемма доказана.

Следствие 2.

$$\lambda_k^{(i)} = S_k^{(i)} - 2\lambda_1^{(i)} S_{k-1}^{(i)} + \sum_{j=2}^{k-1}\sum_{\substack{t+s=j\\ t,s\neq 0}} (\lambda_t^{(i)}\lambda_s^{(i)} - 2\lambda_j^{(i)})\, S_{k-j}^{(i)} + \sum_{\substack{t+s=k\\ t,s\neq 0}} \lambda_t^{(i)}\lambda_s^{(i)},$$

$$k = \overline{1, r+1};\quad i = \overline{1, n}, \tag{34}$$

где

$$S_k^{(i)} = \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{r+1} (\psi_i^{(l)}, C_{k+m-l}\varphi_i^{(r+1-m)}(T)) + \int_0^T \psi_i^{(l)}(\tau), A_{k+m-l}(\tau)\varphi_i^{(r+1-m)}(\tau))\,d\tau.$$

Если положить

$$\overline{\psi}_i = \lambda_0^{(i)}\psi_i,$$
$$\overline{\psi}_i^{(1)} = \lambda_0^{(i)}\psi_i^{(1)} + \lambda_1^{(i)}\psi_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{\psi}_i^{(r)} = \lambda_0^{(i)}\psi_i^{(r)} + \lambda_1^{(i)}\psi_i^{(r-1)} + \ldots + \lambda_r^{(i)}\psi_i$$

(нетрудно видеть, что $\overline{\psi}_i\ (i = \overline{1, n})$ — собственный, а $\overline{\psi}_i^{(1)}, \ldots, \overline{\psi}_i^{(r)}$ — присоединенные элементы оператора A относительно операторов $B_k\ (k = \overline{1, \infty})$), то формулы (25), (26) принимают вид:

$$D_{-r-1} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \otimes \overline{\psi}_i),$$

$$D_{-r} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^{(1)} \otimes \overline{\psi}_i + \varphi_i \otimes \overline{\psi}_i^{(1)}), \tag{35}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{-1} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^{(r)} \otimes \overline{\psi}_i + \ldots + \varphi_i \otimes \overline{\psi}_i^{(r)}),$$

$$D_0 = R_0 + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^{(r)} \otimes \overline{\psi}_i^{(1)} + \ldots + \varphi_i^{(1)} \otimes \overline{\psi}_i^{(r)} + \varphi_i \otimes \widetilde{\psi}_i^{(r)}),$$

где $\widetilde{\psi}_i^{(r)} = \lambda_1^{(i)}\psi_i^{(r)} + \lambda_2^{(i)}\psi_i^{(r-1)} + \ldots + \lambda_r^{(i)}\psi_i^{(1)} + \lambda_{r+1}^{(i)}\psi_i$.

Теорема. *Пусть в банаховом пространстве E определена краевая задача* (1), (2) *и выполняются условия* 1) — 6). *Тогда, если любое решение $\varphi_i(t)$ предельной краевой задачи* (3), (4) *относительно операторов $A_k(t)$ и $C_k\ (k = \overline{1, \infty})$ образует обобщенную жорданову цепочку вектор-функций $\varphi_i^{(j)}(t)\ (i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, r})$ конечной длины r и начальные векторы $\varphi_i^{(j)}\ (i = 1, n;\ j = \overline{0, r})$ относительно операторов $B_k\ (k = \overline{1, \infty})$ образуют полный жордановый набор* [5], *то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует функция Грина $G_\varepsilon(t, \tau)$ задачи* (1), (2) *и*

$$G_\varepsilon(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(t) \otimes \overline{\psi}_i(\tau)}{\varepsilon^{r+1}} + \frac{\varphi_i(t) \otimes \overline{\psi}_i^{(1)}(\tau) + \varphi_i^{(1)}(t) \otimes \overline{\psi}_i(\tau)}{\varepsilon^{r}} + \ldots$$

$$\ldots+\frac{\varphi_i(t)\otimes\bar{\psi}_i^{(r)}(\tau)+\ldots+\varphi_i^{(r)}(t)\otimes\bar{\psi}_i(\tau)}{\varepsilon}+\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l P_l(t,\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T,\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l Q_l(t,\tau),\ 0\leqslant t<\tau\leqslant T,\end{cases}\tag{36}$$

где $\varphi_i^{(r+1)}(t)$, $\bar{\psi}_i^{(r+1)}(\tau)$ *являются соответственно решениями задач*

$$\frac{d\varphi_i^{(r+1)}(t)}{dt}=A_0(t)\,\varphi_i^{(r+1)}(t)+\sum_{k=1}^{r+1}A_k(t)\,\varphi_i^{(r+1-k)}(t),$$

$$\varphi_i^{(r+1)}(0)=0,$$

$$\frac{d\bar{\psi}_i^{(r+1)}(\tau)}{d\tau}=-A_0^*(\tau)\,\bar{\psi}_i^{(r+1)}(\tau)-\sum_{k=1}^{r+1}A_k^*(\tau)\,\bar{\psi}_i^{(r+1-k)}(\tau),$$

$$\bar{\psi}_i^{(r+1)}(0)=\widetilde{\psi}_i^{(r)},$$

$$P_0(t,\tau)=X(t)\,R_0X^{-1}(\tau)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r+1}(\varphi_i^{(j)}(t)\otimes\bar{\psi}_i^{(r+1-j)}(\tau)),$$

$$P_l(t,\tau)=\sum_{\substack{s+j+k=l\\ s,k\geqslant 0\\ -r-1\leqslant j\leqslant l-1}}\ \sum_{\substack{m+l+v=j\\ -r-1\leqslant m,v\leqslant l-1\\ l\geqslant 1}}(-1)^kX(t)\,H_s(t)\,D_mB_lD_v\check{H}_k(\tau)\,X^{-1}(\tau),\ l=\overline{1,\infty},$$

$$Q_0(t,\tau)=P_0(t,\tau)-X(t)\,X^{-1}(\tau),$$

$$Q_l(t,\tau)=P_l(t,\tau)-\sum_{k=0}^{l}(-1)^kX(t)\,H_{l-k}(t)\check{H}(\tau)\,X^{-1}(\tau).$$

Доказательство. В силу (7)

$$G_\varepsilon(t,\tau)=\begin{cases}X_\varepsilon(t)\left[I-\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kC_k\right)X_\varepsilon(T)\right]^{-1}X_\varepsilon^{-1}(\tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T,\\ X_\varepsilon(t)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kC_k\right)X_\varepsilon(T)\left[I-\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kC_k\right)X_\varepsilon(T)\right]^{-1}X_\varepsilon^{-1}(\tau),\\ \qquad\qquad 0\leqslant t<\tau\leqslant T.\end{cases}\tag{37}$$

Но

$$X_\varepsilon(t)=X(t)\left[I+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kH_k(t)\right],\tag{38}$$

$$X_\varepsilon^{-1}(\tau)=\left[I+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k\check{H}_k(\tau)\right]X^{-1}(\tau),\tag{39}$$

$$\left[I-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kC_k\right)X_\varepsilon(T)\right]^{-1}=\frac{D_{-r-1}}{\varepsilon^{r+1}}+\frac{D_{-r}}{\varepsilon^r}+\ldots+\frac{D_{-1}}{\varepsilon}+$$

$$+D_0+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kD_k.\tag{40}$$

Если $0 < \rho \leqslant \varepsilon_0$ достаточно мало, то для $0 < |\varepsilon| < \rho$, $0 \leqslant t \leqslant T$, ряды (38) — (40) сходятся. Перемножая ряды (38) — (40), получим требуемое. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных операторов, ДАН СССР, т. 77, № 1, 1951.
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН, т. 15, вып. 3, 1960.
3. Ю. К. Ландо, О собственных значениях и собственных функциях интегро-дифференциальных операторов, Дифференц. уравнения, т. 1, № 7, 1965.
4. Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин, Обращение возмущенных на спектре линейных операторов, УМЖ, т. 23, № 2, 1971.
5. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука», М., 1969.

Поступила 31.V 1973 г.

Херсонский педагогический институт