УДК 517.948.35

Обращение возмущенных на спектре нормально разрешимых линейных операторов

Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин

1. Пусть A — замкнутый нормально разрешимый линейный оператор с плотной областью определения $D(A)$, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, и B_k — замкнутые линейные операторы в $\mathfrak{B}$, подчиненные A в том смысле, что $D(B_k) \supseteq D(A)$ для всех $k \geqslant 1$.

Предположим, что операторный пучок $A(\lambda) = A - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k$ имеет ненулевой радиус сходимости. При некоторых дополнительных предположениях относительно A и B_k в данной работе строится разложение резольвенты $R(\lambda) = \left(A - \sum\limits_{k \geqslant 1} \lambda^k B_k\right)^{-1}$ в окрестности нуля в том случае, когда нуль является изолированной кточой спектра оператора A.

Для случая, когда A — Φ — оператор нулевого индекса, резольвента $R(\lambda)$ изучалась во многих работах. Основополагающий результат был получен в [1]. Различные свойства $R(\lambda)$ в этом предположении исследованы в [2—4]. Доказательство конечномероморфности $R(\lambda)$ получено в [5]. И, наконец, в [6; 7, гл. 1, § 3] получены алгоритмы для нахождения членов правильной части лорановского разложения $R(\lambda)$ (в случае аналитической зависимости пучка от λ).

В отличие от указанных работ мы не предполагаем фредгольмовости (хотя наши условия чрезвычайно близки ей) и находим явные выражения для всех членов разложения $R(\lambda)$.

2. Допустим, что оператор A удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

а) нуль — изолированная точка спектра оператора A такая, что $\alpha(A) = \sigma_-(A) \cup \{0\} \cup \sigma_+(A)$, причем $\sup\limits_{\lambda \in \sigma_-(A)} \operatorname{Re}\lambda = \alpha_- < 0$, $\inf\limits_{\lambda \in \sigma_+(A)} \operatorname{Re}\lambda = \alpha_+ > 0$;

б) нуль — простой полюс резольвенты оператора A;

в) $\mathfrak{B} = N(A) \oplus R(A)$, где $N(A)$ — нуль-пространство (ядро) оператора A, $R(A)$ — область значений оператора A.

Обозначим через P оператор проектирования, порожденный разложением $\mathfrak{B} = N(A) \oplus R(A)$: $Pf = f$, $f \in N(A)$; $Pf = 0$, $f \in R(A)$. Из определений A и P следует:

$$APf = 0, \quad f \in \mathfrak{B}; \quad PAf = 0, \quad f \in D(A).$$

Заметим далее, что $N(A) \subset D(A)$ и $R(A) \cap D(A)$ плотно в $R(A)$.

Л е м м а 1 (Обобщенная лемма Шмидта [4, 8]). *Оператор* $G = (A + P)_{-1}$ $\mathfrak{B} \to D(A)$ *существует и ограничен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение

$$(A + P)x = h, \qquad h \in \mathfrak{B}. \tag{2}$$

Так как оператор $A+P$ нормально разрешим, то достаточно показать однозначную разрешимость уравнения (2). В силу (1) из (2) вытекает, что

$$Px = Ph, \tag{3}$$

т. е. уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$Ax = (I-P)\,h. \tag{4}$$

Обозначим через $[A] = [A]_{D(A_0)}$ сужение оператора A на $D(A_0) = D(A) \cap \cap R(A)$. Оператор $[A]$ в силу условия а) осуществляет взаимно однозначное отображение $D(A_0)$ на $R(A)$ и по теореме Банаха существует ограниченный обратный оператор $[A]^{-1}$: $R(A) \to D(A_0)$. Поэтому решение уравнения (4) имеет вид

$$x = [A]^{-1}(I-P)\,h + f_0, \tag{5}$$

где f_0 — произвольный вектор из $N(A)$.

Подставляя (5) в (3) и принимая во внимание свойства проектора P, получаем $Px = Pf_0$, но $Pf_0 = f_0$. Таким образом,

$$x = \{[A]^{-1}(I-P) + P\}\,h \in D(A), \tag{6}$$

что и доказывает лемму 1.

Определение 1. Оператор $R_0 = G - P : \mathfrak{B} \to D(A)$ называется обобщенным обратным оператором для оператора A.

Введенное определение оправдывается следующими свойствами оператора R_0. (Оператор $[A]$ введен при доказательстве леммы 1.)

Лемма 2.

a)
$$\left.\begin{aligned} R_0Af &= (I-P)\,f, \qquad f \in D(A),\\ AR_0f &= (I-P)\,f; \qquad f \in \mathfrak{B}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$R_0Pf = PR_0f = 0, \qquad f \in \mathfrak{B}; \tag{8}$$

b) R_0 — *расширение оператора* $[A]^{-1}$ *на все* $\mathfrak{B}$ *такое, что* $\|R_0\| = \|[A]^{-1}\|$;

c)
$$\|R_0\| \geqslant \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha = \min(-\alpha_-, \alpha_+). \tag{9}$$

Доказательство. Соотношения (7) и (8) очевидны. Докажем условие b). Для этого рассмотрим уравнение

$$Ax = h. \tag{10}$$

В силу нормальной разрешимости оператора A уравнение (10) имеет решение тогда и только тогда, когда для $\forall \varphi \in N(A^*)$ $(\varphi, h) = 0$, т. е. когда $h \in R(A)$. Решение уравнения (10) можно представить либо в виде

$$x = [A]^{-1}h + f_0, f_0 \in N(A) \tag{11}$$

(см. лемму 1), либо, как легко проверить, в виде

$$x = R_0h + f_0, \qquad f_0 \in N(A). \tag{12}$$

Но (11) и (12) являются разложением вектора x в прямую сумму, поскольку в силу условия б) никакой вектор из $\mathfrak{B}$ оператором R_0 в $N(A)$ не переводится, а $[A]^{-1}h \in D(A) \cap R(A)$, т. е. $[A]^{-1}h = R_0h$ для $h \in R(A)$. Последнее означает, что R_0 — расширение оператора $[A]^{-1}$ на все $\mathfrak{B}$. Далее, принимая во внимание (7) и (8), имеем

$$\|R_0\| = \sup_{h \in \mathfrak{B}} \frac{\|R_0h\|}{\|h\|} = \sup_{h \in R(A)} \frac{\|R_0h\|}{\|h\|} = \sup_{h \in R(A)} \frac{\|[A]^{-1}h\|}{\|h\|} = \|[A]^{-1}\|.$$

Докажем неравенство (11). Рассмотрим оператор

$$R_1(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}P + R_0 + \lambda R_0^2 + \dots \tag{13}$$

Этот оператор ограничен для всех $0 < |\lambda| < \frac{1}{\|R_0\|}$. Пусть $f \in \mathfrak{B}$. Тогда для всех $0 < |\lambda| < \|R_0\|^{-1}$

$$(A - \lambda I) R_1(\lambda) f = f. \tag{14}$$

Если же $f \in D(A)$, то

$$R_1(\lambda)(A - \lambda I) f = f. \tag{15}$$

В истинности последних равенств можно убедиться, воспользовавшись соотношениями (7) и (8). Это значит, что все точки λ такие, что $0 < |\lambda| < \|R_0\|^{-1}$ являются резольвентными точками оператора A. Если допустить теперь, что $\|R_0\| < \frac{1}{\alpha}$, то придем к противоречию с существованием и ограниченностью и равенствами (14) и (15), с одной стороны, и определением точек спектра, с другой стороны. Таким образом, $\|R_0\| \geqslant \frac{1}{\alpha}$. Лемма доказана.

Введем операторнозначные функции $\Phi_k(\cdot)$ от операторов:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(C) = C,\\
&\Phi_1(C) = R_0 B^{(1)} C + C B^{(1)} R_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Phi_l(C) = R_0 B^{(l)} C + R_0 B^{(l-1)} C B^{(1)} R_0 + \dots + C B^{(l)} R_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$B^{(1)} = B_1,\ B^{(l)} = \sum_{m=1}^{l} \sum_{i_1+\dots+i_m=l} B_{i_1} R_0 B_{i_2} R_0 \dots R_0 B_{i_m}. \tag{17}$$

Заметим, что из подчиненности операторов B_k оператору A следует корректность определения операторов $B^{(l)}$ в (17), а следовательно, и оператор-функций $\Phi_l(\cdot)$. Известно (например, [9, стр. 175]), что из условия подчиненности следует существование констант α_l таких, что

$$\|B_l u\| \leqslant \alpha_l (\|u\| + \|Au\|) = \alpha_l |u|_A. \tag{18}$$

Лемма 3. *Операторы $B^{(l)}$ удовлетворяют соотношениям*

$$B^{(l)} = B_1 R_0 B^{(l-1)} + \dots + B_{l-1} R_0 B^{(1)} \tag{19}$$

и подчинены оператору A в смысле (18) *с константой*

$$\gamma_l = \beta_l (1 + \beta_{l-1} q)^{l-1}, \tag{20}$$

где $\beta_l = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \alpha_i$, $q = \|R_0\| + \|Q\|$, $Q = I - P$.

Доказательство. Соотношения (19) немедленно следуют из (17). Далее, очевидно, что $D(B^{(l)}) \supseteq D(A)$. Поэтому имеем для $l = 1$:

$$\|B^{(1)} u\| \leqslant \alpha_1 |u|_A.$$

Пусть при $l = k$

$$\|B^{(k)} u\| \leqslant \beta_k (1 + \beta_{k-1} q)^{k-1} |u|_A.$$

Тогда в силу (19) и предыдущего неравенства

$$\| B^{(k+1)}u \| \leqslant \left[q \sum_{m=1}^{k} \alpha_m \beta_{k+1-m} (1 + q\beta_{k-m})^{k-m} + \alpha_{k+1} \right] | u |_A \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{k+1} \left[1 + \sum_{m=0}^{k-1} q\beta_k (1 + q\beta_k)^m \right] | u |_A = \beta_{k+1} (1 + q\beta_k)^k | u |_A.$$

Лемма доказана.

Определение 2. Операторы $\Phi_k(P')$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (см. (16)), назовем присоединенными для оператора A относительно операторов B_k и замкнутого подпространства $N'(A) \subseteq N(A)$, P' — проектор на $N'(A)$.

Определение 3. Присоединенные операторы $\Phi_k(P')$ образуют цепочку конечной длины r, если операторы $PB^{(k)}P$, $k = \overline{1, r}$, нормально разрешимы, $N'(A) \subseteq N(PB^{(k)}P)$, $k = \overline{1, r-1}$, и сужение $[PB^{(r)}P]_{N'(A)}$ оператора $PB^{(r)}P$ на $N'(A)$ обратимо.

Далее предположим, что нуль-пространство $N(A)$ оператора A распадается в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(A) = N_1(A) \oplus \ldots \oplus N_r(A) \tag{21}$$

конечного числа слагаемых.

Разложение (21) порождает разложение проектора P в сумму проекторов

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_r, \tag{22}$$

попарно дизъюнктивных: $P_j P_k = P_k P_j = \delta_{jk} P_k$.

Определение 4. Для оператора A относительно операторов B_k и подпространств $N_i(A)$ существует полный набор присоединенных операторов $\Phi_j(P_i)$ максимальной длины r ($j \leqslant r$), если последние относительно подпространств $N_i(A)$ образуют цепочки конечной длины $r_i \leqslant r$ соответственно и

$$[PB^{(r_i)}P]_{N_j(A)} = \delta_{ij} [PB^{(r_i)}P]_{N_i(A)}. \tag{23}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $r_i = r + 1 - i$, $i = \overline{1, r}$.

Если для оператора A относительно операторов B_k и подпространств $N_i(A)$ существует полный набор присоединенных операторов, то в силу нормальной разрешимости операторов $PB^{(r_i)}P$ существуют и ограничены операторы $[PB^{(r_i)}P]^{-1}$. Образуем операторы $\Pi_i = P_i D_i P_i$, $i = \overline{1, r}$, где D_i — инвариантное расширение оператора $[PB^{(r+1-i)}P]^{-1}$ на все $\mathfrak{B}$. Очевидно, подпространства $N_i(A)$ инвариантны соответственно относительно операторов Π_i и имеют место равенства

$$PB^{(j)}PN_i(A) = 0, \qquad j = \overline{1, r_i - 1}, \qquad i = \overline{1, r}. \tag{24}$$

Лемма 4. *Операторы* $PB^{(r)}\Pi_1 (\Pi_1 B^{(r)}P), \ldots, PB^{(1)}\Pi_r (\Pi_r B^{(1)}P)$ *являются проекторами соответственно на* $N_1(A), \ldots, N_r(A)$ *и совпадают соответственно с* $P_1, \ldots, P_r$.

Доказательство проведем для первой «половины» леммы, так как изменения для операторов, стоящих в скобках, очевидны.

Покажем сначала, что операторы $PB^{(r+1-i)}\Pi_i$ ограничены.

$$\| PB^{(r+1-i)}\Pi_i u \| \leqslant \| P \| \beta_{r+1-i} (1 + q\beta_{r-i})^{r-i} | \Pi_i u |_A =$$

$$= \beta_{r+1-i} (1 + q\beta_{r-i})^{r-i} \| \Pi_i \| \cdot \| P \| \cdot \| u \| \leqslant p^2 \beta_{r+1-i} (1 + q\beta_{r-i})^{r-i} \| u \|,$$

где $p = \max\{\|\Pi_i\|,\ i = \overline{1, r},\ \|P\|\}$. Далее,

$$PB^{(r+1-i)}\Pi_i x = PB^{(r+1-i)}P_i D_i P_i x = P_i x,\ x \in \mathfrak{B}.$$

Лемма 5. *Если для оператора A относительно операторов B_k, $k = 1, 2, \ldots$, и подпространств $N_i(A)$ существует полный набор присоединенных операторов, то для достаточно малых λ оператор $R(\lambda) = (A - \Sigma\lambda^k B_k)^{-1}$ существует и ограничен.*

Доказательство. Сначала покажем, что оператор $A(\lambda)$ нормально разрешим для достаточно малых λ. Имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} B_k u \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\lambda|^{k-1} |u|_A \text{ для } u \in D(A).$$

Для нормальной разрешимости оператора $A(\lambda)$ достаточно (см. [3]), чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{k-1} \alpha_k < 1. \tag{25}$$

Далее, для доказательства леммы достаточно показать, что оператор $A(\lambda)$ однозначно разрешим [10].

Рассмотрим уравнение

$$A(\lambda)x = y, \tag{26}$$

где $x \in D(A)$, $y \in \mathfrak{B}$, $\lambda \in D_1 = \left\{\lambda : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{k-1} \alpha_k < 1\right\} \neq \varnothing$. Докажем, что оно имеет единственное решение.

Используя лемму 1, имеем

$$\{A(\lambda) + P\} x = y + Px \Leftrightarrow \{A + P - \lambda B(\lambda)\} x = y + Px \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{I - \lambda G B(\lambda)\} x = Gy + Px,$$

$$\|GB(\lambda)x\| \leqslant \|G\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{k-1} \alpha_k |x|_A < \|G\| |x|_A. \tag{27}$$

Построим операторный ряд

$$I + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l G \hat{B}^{(l)}, \tag{28}$$

где $\hat{B}^{(l)} \sum_{m=1}^{l} \sum_{i_1 + \ldots + i_m = l} B_{i_1} G B_{i_2} G \ldots B_{i_m}$ (ср. (17)). Для $u \in D(A)$ имеем $(l \geqslant 2)$

$$\|G\hat{B}^{(l)}u\| \leqslant \|G\| \left\{\alpha_1 \|\hat{B}^{(l-1)}u\| + \ldots + \alpha_{l-1} \|\hat{B}^{(1)}u\| + \frac{\alpha_l}{q} |u|_A\right\} q.$$

Если умножить последнее неравенство на $|\lambda|^l$ и просуммировать по l от единицы до бесконечности, получим

$$\left(1 - q\|G\| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^k \alpha_k\right) \gamma(\lambda) < \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^k \|G\| \alpha_k |u|_A,$$

где $\gamma(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda^l\ \|G\|\|\ \hat{B}^{(l)}u\|$. Отсюда следует, что $\gamma(\lambda)$ будет ограниченный, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^k \alpha_k < \frac{1}{q\,\|G\|}. \tag{29}$$

Обозначим $D_2 = \left\{\lambda: \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^k \alpha_k < \frac{1}{q\,\|G\|}\right\}$. Если $\lambda \in D_1 \cap D_2$, то оператор (28) является обратным к оператору $I - \lambda G B(\lambda)$ и уравнение (26) эквивалентно уравнению

$$x = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k G \hat{B}^{(k)}\right) P x + G\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \hat{B}^{(k)}\right) y. \tag{30}$$

Отсюда

$$P \Sigma \lambda^k \hat{B}^{(k)} P x = z, \tag{31}$$

где $z = -P(I + \Sigma \lambda^k \hat{B}^{(k)}) G y$. Умножая (31) последовательно на $\Pi_r, \Pi_{r-1}, \ldots$ $\ldots, \Pi_1$ и деля соответственно на $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^r$, получим

$$(\Pi_r \hat{B}^{(1)} P + \lambda \Pi_r \hat{B}^{(2)} P + \ldots + \lambda^r \Pi_r \hat{B}^{(r+1)} P + \ldots) P x = \frac{\Pi_r z}{\lambda},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\Pi_1 \hat{B}^{(r)} P + \lambda \Pi_1 \hat{B}^{(r+1)} + \ldots) P x = \frac{\Pi_1 z}{\lambda^r}.$$

Так как $\Pi_1 \hat{B}^{(r)} P + \ldots + \Pi_r \hat{B}^{(1)} P = P$ (см. лемму 4), то

$$\{I + \lambda (\Pi_r \hat{B}^{(2)} + \ldots + \Pi_1 \hat{B}^{(r+1)}) P + \ldots + \lambda^k (\Pi_r \hat{B}^{(k+1)} + \ldots$$
$$\ldots + \Pi_1 \hat{B}^{(k+r)}) + \ldots\} P x = (\lambda^{-r} \Pi_1 + \lambda^{-r+1} \Pi_2 + \ldots + \lambda^{-1} \Pi_r) z.$$

Из последнего уравнения Px определяется единственным образом для достаточно малых λ. Лемма доказана.

Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — некоторые ограниченные операторы в $\mathfrak{B}$. (Ниже они будут полностью определены.) Обозначим

$$L_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} B^{(i)} H_{k+1-i}, \quad M_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} H_{k+1-i} B^{(i)}, \tag{32}$$

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} B^{(i)} M_{k+1-i} = \sum_{i=1}^{k-1} L_{k+1-i} B^{(i)}. \tag{33}$$

Лемма 6.

$$\sum_{i=1}^{k-1} B_i R_0 L_{k+1-i} = \sum_{j=1}^{k-1} (B^{(k-j+1)} - B_{k-j+1}) H_j, \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{k-2} B_i R_0 S_{k+1-i} = S_{k+1} - \sum_{j=1}^{k-1} B_{k-j} M_{j+1}. \tag{35}$$

Доказательство. Докажем равенство (34). Проверка (35) проводится аналогично. Учитывая (32) и меняя порядок суммирования, имеем:

$$\sum_{i=1}^{k-1} B_i R_0 L_{k+1-i} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} B_i R_0 B^{(k+1-i-j)} H_j = \sum_{j=1}^{k-1} (B_1 R_0 B^{(k-j)} +$$

$$+ B_2R_0B^{(k-j-1)} + \ldots + B_{k-j}R_0B^{(1)})\, H_j = \sum_{j=1}^{k-1} (B^{(k-j+1)} - B_{k-j+1})\, H_j.$$

Теорема. *Если выполняются условия леммы 5, то для* $0 < |\lambda| < a$

$$R(\lambda) = \frac{T_{-r}}{\lambda^r} + \ldots + \frac{T_{-1}}{\lambda} + T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k T_k, \tag{36}$$

где

$$T_{-r+k} = \Phi_k(H_1) + \Phi_{k-1}(H_2) + \ldots + \Phi_0(H_{k+1}), \quad k = \overline{0, r-1}, \tag{37}$$

$$T_0 = R_0 + \Phi_r(H_1) + \ldots + \Phi_0(H_{r+1}), \tag{38}$$

$$T_k = R_0B^{(k)}R_0 + \Phi_{r+k}(H_1) + \ldots + \Phi_0(H_{r+k+1}), \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{39}$$

операторы H_k, $k \geqslant 1$, *определяются равенствами*

$$\begin{aligned} &H_1 = -\Pi_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &H_r = -\Pi_r + \Pi_{r-1}K_1 + \ldots + \Pi_1K_{r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &H_{r+m} = \Pi_rK_m + \ldots + \Pi_1K_{r+m-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{40}$$

в которых операторы K_m *могут быть явно определены из соотношений*

$$\begin{aligned} &K_1 = B^{(2)}\Pi_r + \ldots + B^{(r+1)}\Pi_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K_m = \sum_{i=1}^{r} B^{(m+i)}\Pi_{r+1-i} - \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1+\ldots+i_k=m} K_{i_1}K_{i_2}\ldots K_{i_k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{41}$$

Радиус сходимости резольвенты $R(\alpha)$ *равен*

$$a = \sup\left\{|\lambda| : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^k \alpha_k < \frac{|\lambda|\alpha_1\tau'_{-r} + \ldots + |\lambda|^r(1+\alpha_r\tau'_{-r} + \ldots + \alpha_1\tau'_{-1}}{\tau'_{-r} + |\lambda|\tau'_{-r+1} + \ldots + |\lambda|^r\tau'_0}\right\}, \tag{42}$$

$\tau'_k = |T_k|_A = \| T_k \| + \| AT_k \|$.

Доказательство. Убедимся прежде всего, что оператор $R(\lambda) = \sum_{k=-r}^{\infty} \lambda^k T_k$, где T_k определяются формулами (37) — (41), ограничен для $0 < |\lambda| < a$ и a определяется формулой (42). Положим $\tau(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \tau_k$, где $\tau_k = \| T_k \|$. Так же, как и [8], можно показать, что при выполнении наложенных на A и B_k условий

$$T_k = \sum_{i=1}^{r+k} T_{k-i}(B_iT_0 + B_{i+1}T_{-1} + \ldots + B_{i+r}T_{-r}). \tag{43}$$

Из (43) имеем

$$\tau_k \leqslant \sum_{i=1}^{r+k} \tau_{k-i}(\alpha_i\tau'_0 + \alpha_{i+1}\tau'_{-1} + \ldots + \alpha_{i+r}\tau'_{-r}).$$

Если умножить последнее неравенство на $|\lambda|^k$ и просуммировать по k, получим

$$\tau(\lambda)\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda|^k(\alpha_k\tau_0'+\ldots+\alpha_{r+k}\tau_{-r}')\right]\leqslant\tau_0+\tau_{-1}\tau_0'\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k+1}|\lambda|^k+\ldots$$

$$\ldots+\tau_{-1}\tau_{-r}'\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k+r+1}|\lambda|^k+\ldots+\tau_{-r}\tau_{-r}'\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2r+k}|\lambda|^k.$$

Это означает, что $\tau(\lambda)$ будет ограниченным для всех таких λ, для которых $\Sigma|\lambda|^k(\alpha_k\tau_0'+\ldots+\alpha_{r+k}\tau_{-r}')<1$. Отсюда после простых выкладок получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda|^k\alpha_k<$$

$$<\frac{|\lambda|\alpha_1\tau_{-r}'+|\lambda|^2(\alpha_2\tau_{-r}'+\alpha_1\tau_{-r+1}')+\ldots+|\lambda|^r(1+\alpha_r\tau_{-r}'+\ldots+\alpha_1\tau_{-1}')}{\tau_{-r}'+|\lambda|\tau_{-r+1}'+\ldots+|\lambda|^r\tau_0'}.$$

При $\lambda=0$ это неравенство сводится к очевидному $\alpha_r<\dfrac{1+\tau_{-r}\alpha_r}{\tau_{-r}}$. Таким образом, для $0<|\lambda|<a$ оператор $R(\lambda)$ как оператор из $\mathfrak{B}$ в $D(A)$ существует и ограничен. Пусть $f\in\mathfrak{B}$. Рассмотрим выражение $\left(A-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^kB_k\right)R(\lambda)f$. Найдем коэффициенты при различных степенях λ.

$\lambda^{-r}: AT_{-r}f,$

$$\lambda^{-r+k}:\left(AT_{-r+k}-\sum_{i=1}^{k}B_iT_{-r+k-i}\right)f,\quad k=\overline{1,r-1},\tag{44}$$

$$\lambda^0:\left(AT_0-\sum_{i=1}^{r}B_iT_{-i}\right)f,\tag{45}$$

$$\lambda^k:\left(AT_k-\sum_{i=1}^{r+k}B_iT_{k-i}\right)f,\quad k=\overline{1,\infty}.\tag{46}$$

Для вычисления выражений (44) — (46) представим (37) — (39) в виде

$$T_{-r+k}=H_{k+1}+R_0L_{k+1}+M_{k+1}R_0+R_0S_{k+1}R_0,\quad k=\overline{0,r-1},\tag{47}$$

$$T_0=R_0+H_{r+1}+R_0L_{r+1}+M_{r+1}R_0+R_0S_{r+1}R_0,\tag{48}$$

$$T_k=R_0B^{(k)}R_0+H_{r+k+1}+R_0L_{r+k+1}+M_{r+k+1}R_0+R_0S_{k+r+1}R_0,\tag{49}$$

где L_{k+1}, M_{k+1}, $k=\overline{1,\infty}$, S_{k+1}, $k=\overline{2,\infty}$, имеют вид (32), (33). В силу леммы 2

$$AT_{-r+k}=L_{k+1}+S_{k+1}R_0-P(L_{k+1}+S_{k+1}R_0)=L_{k+1}+S_{k+1}R_0,$$

так как в силу (24) и (40)

$$PL_{k+1}=P\left(B^{(1)}\left\{-\Pi_k+\sum_{i=1}^{k-1}\Pi_{k-i}K_i\right\}+B^{(2)}\left\{-\Pi_{k-1}+\sum_{i=1}^{k-2}\Pi_{k-1-i}K_i\right\}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-B^{(k)}\Pi_1\right)=0\tag{50}$$

для $k=\overline{0, r-1}$. Следовательно,

$$PS_{k+1}R_0 = P\sum_{i=1}^{k-1} L_{k+1-i}B^{(i)}R_0 = 0 \tag{51}$$

для $k=\overline{0, r}$. Далее, в силу леммы 6 и (47)

$$\sum_{i=1}^{k} B_i T_{-r+k-i} = \sum_{i=1}^{k} B_i H_{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k} (B^{(k-i+1)} - B_{k-i+1}) H_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} B_i M_{k-i+1} R_0 + S_{k+1}R_0 - \sum_{i=1}^{k} B_{k-i} M_{i+1} R_0 = S_{k+1}R_0 + L_{k+1} \tag{52}$$

для $k=\overline{0, r}$. (При этом следует считать $S_2 = M_1 = L_1 = 0$.) Для $k=r+1$

$$\sum_{i=1}^{r+1} B_i T_{-i+1} = B_1 R_0 + S_{r+2}R_0 + L_{r+2}. \tag{53}$$

Для $k=r+m$, где $m>1$,

$$\sum_{i=1}^{r+m} B_i T_{m-i} = B^{(m)}R_0 + S_{r+m+1}R_0 + L_{r+m+1}. \tag{54}$$

В силу лемм 2, 4 и (51)

$$AT_0 = I - P + L_{r+1} + S_{r+1}R_0 - P(L_{r+1} + S_{r+1}R_0) = I + L_{r+1} + S_{r+1}R_0, \tag{55}$$

ибо

$$PL_{r+1} = P\left\{B^{(1)}\left(-\Pi_r + \sum_{i=1}^{r-1}\Pi_{r-i}K_i\right) + \ldots + B^{(r)}(-\Pi_1)\right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{r} P_i = -P.$$

И, наконец, (см. (49))

$$AT_m = B^{(m)}R_0 + L_{r+m+1} + S_{r+m+1}R_0 - P(L_{r+m+1} + S_{m+r+1}R_0 + B^{(m)}R_0).$$

Покажем, что $P(L_{r+m+1} + S_{r+m+1}R_0 + B^{(m)}R_0) = 0$ для $m>0$. Используя соотношения (32) и (41), имеем

$$PL_{r+m+1} = \sum_{i=1}^{r} P_i K_m + P\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{r} B^{(j+i)}K_{m-j} - P\sum_{i=1}^{r} B^{(m+i)}\Pi_{r+1-i} =$$

$$= P\left\{K_m + K_1K_{m-1} + (K_2 + K_1^2)K_{m-2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i_1+\ldots+i_k=m-1} K_{i_1}\ldots K_{i_k}\right)K_1 - \sum_{i=1}^{r} B^{(m+i)}\Pi_{r+1-i}\right) =$$

$$= P\{K_m - K_m\} = 0.$$

Таким образом, $PL_{r+m+1} = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ -P, & m = 0. \end{cases}$ Отсюда

$$PS_{r+m+1}R_0 = P\sum_{i=1}^{r+m-1} L_{r+m+1-i}B_iR_0 = -PB^{(m)}R_0 \tag{56}$$

и $P(L_{r+m+1}+S_{m+r+1}R_0+B^{(m)}R_0)=0$. Следовательно,

$$AT_m = B^{(m)}R_0 + L_{r+m+1} + S_{m+r+1}R_0. \qquad (57)$$

Используя соотношения (52) — (57), имеем

$$\left(AT_{-r+k} - \sum_{i=1}^{k} B_i T_{-r+k-i}\right) f = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq r, \\ f, & \text{если } k = r. \end{cases}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, т. 77, № 1, 1951.
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН, т. 15, вып. 3, 1960.
3. Т. Като, Теория возмущения линейных операторов, «Мир», М., 1972.
4. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука«, М., 1969.
5. В. П. Трофимов, О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра, Математические исследования, т. 3, № 3 (9), Кишинев, 1968.
6. Т. Сабиров, К вопросу о вычислении нерегулярной части разложения резольвенты в окрестности точки спектра, Труды НИИ математики ВГУ, № 4, 1974.
7. Т. Сабиров, Исследования по теории рождения малых периодических и почти периодических решений из состояния равновесия в нелинейных системах дифференциальных уравнений, Автореферат докт. дисс., Институт математики АН УССР, К., 1974.
8. Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин, Обращение возмущенных на спектре линейных операторов, УМЖ, т. 23, № 2, 1971.
9. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.
10. С. Г. Крейн, Линейные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1971.

Поступила 29.V 1974 г.
Херсонский педагогический институт,
Институт математики АН УССР