УДК 517. 94

Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The asymptotic behavior of a solution of singularly perturbed quasilinear abstract differential equation in the Banach space is studied.

Досліджується асимптотична поведінка розв'язку сингулярно збуреного квазілінійного абстрактного диференціального рівняння у банаховому просторі.

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрим сингулярно возмущенную задачу Коши

$$\varepsilon x_\varepsilon'(t) = A_0 x_\varepsilon(t) + \varepsilon B(x_\varepsilon(t)), \quad x_\varepsilon(0) = f, \tag{1}$$

где A_0 – линейный приводимо обратимый оператор с плотной областью определения $D(A_0)$, порождающий равномерно ограниченную полугруппу $T_0(t)$ класса (C_0) операторов, действующих в $\mathfrak{B}$; B – нелинейный оператор, достаточно гладкий; ε – малый положительный параметр, $t \in [0, \alpha]$.

Так как A_0 – приводимо обратимый оператор, то [1, 2]

$$\mathfrak{B} = N(A_0) \oplus R(A_0), \quad \dim N(A_0) \geq 1,$$

где $N(A_0)$ – ядро оператора A_0, $R(A_0)$ – множество значений оператора A ($N(A_0)$ и $R(A_0)$ — замкнутые подпространства в $\mathfrak{B}$).

Через P обозначим проектор на ядро $N(A_0)$ параллельно $R(A_0)$:

$$A_0 P f = 0, \quad f \in \mathfrak{B}; \quad P A_0 f = 0, \quad f \in D(A_0).$$

Оператор A_0 имеет обобщенный обратный $R_0 = (A_0 + P)^{-1} - P$, удовлетворяющий условиям [1]

$$A_0 R_0 f = Qf, \quad \text{если} \quad f \in \mathfrak{B};$$

$$R_0 A_0 f = Qf, \quad \text{если} \quad f \in D(A_0);$$

$$P R_0 = R_0 P = 0, \quad Q = I - P.$$

Операторнозначная функция $L_0(t) = T_0(t) - P$ удовлетворяет полугрупповому свойству: $L_0(t_1 + t_2) = L_0(t_1) L_0(t_2)$; $L_0(0) = Q$; сужение $L_0(t)$ на $R(A_0)$ есть полугруппа отрицательного типа:

$$\| L_0(t) \| \leq M e^{-\lambda t}, \quad M \geq 1, \quad \lambda > 0.$$

В дальнейшем используем следующие условия:

α) задача Коши

$$x'(t) = PB(x(t)), \quad x(0) = Pf, \tag{2}$$

имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $u(t)$ на отрезке $[0, \alpha]$;

β) оператор B сильно непрерывно дифференцируем по Фреше на некотором выпуклом компакте G, содержащем $u(t)$, $t \in [0, \alpha]$, и $u(t) + \gamma_\varepsilon(t)$,

$$\gamma_\varepsilon(t) = L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f + \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds,$$

$$t \in [0, \alpha], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1], \quad \varepsilon_1 > 0;$$

γ) оператор B дважды сильно непрерывно дифференцируем (по Фреше) в области G.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* α) *и* β).
Тогда:

1) $\|\gamma_\varepsilon(t)\| \le M_1 e^{-\lambda\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon d\left(1 - e^{-\lambda\frac{t}{\varepsilon}}\right), \quad d > 0;$

2) *для* $t \in [0, \alpha]$

$$\int_0^t \|\gamma_\varepsilon(s)\|\,ds \le \varepsilon k, \quad k > 0, \tag{3}$$

где

$$\gamma_\varepsilon = L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f - \varepsilon R_0(u(t)) + \varepsilon R_0 L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)B(Pf) +$$

$$+ \varepsilon R_0 \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B'(u(s))PB(u(s))\,ds; \tag{4}$$

3) $$\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds = -\varepsilon R_0 B(u(t)) + \varepsilon R_0 L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)B(Pf) +$$

$$+ \varepsilon R_0 \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B'(u(s))PB(u(s))\,ds$$

и равномерно по $t \in [0, \alpha]$ *при* $\varepsilon \to 0$

$$\gamma_\varepsilon(t) = L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f - \varepsilon R_0 L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)B(Pf) + O(\varepsilon^2). \tag{5}$$

Доказательство. 1. Из определения $\gamma_\varepsilon(t)$ имеем

$$\|\gamma_\varepsilon(t)\| \le \left\| L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f \right\| + \int_0^t \left\| L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)f \right\| \|B(u(s))\|\,ds \le$$

$$\le M e^{-\lambda\frac{t}{\varepsilon}}\|f\| + \sup_{0\le s\le\alpha}\|B(u(s))\| \int_0^t M e^{-\lambda\frac{t-s}{\varepsilon}}\,ds =$$

$$= M_1 e^{-\lambda\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon d\left(1 - e^{-\lambda\frac{t}{\varepsilon}}\right),$$

где $M_1 = M\|f\|$, $d = \dfrac{c}{\lambda}$, $c = \sup_{0\le s\le\alpha}\|B(u(s))\|$.

2. Аналогично

$$\int_0^t \|\gamma(s)\|\,ds \le \frac{\varepsilon M_1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\frac{t}{\varepsilon}}\right) + \varepsilon d\left(t - \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t} - 1\right)\right) =$$

$$= \varepsilon\left[\frac{M_1}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}\right) + dt\right] + \varepsilon^2 \frac{d}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}\right) \le$$

$$\le \varepsilon\left[\frac{M_1}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}\right) + \alpha d\right] + \varepsilon^2 \frac{d}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}\right) \le \varepsilon k, \quad k > 0.$$

3. Проинтегрировав выражение $\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B(u(s))\,ds$ по частям, получим

$$\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B(u(s))\,ds = -\varepsilon R_0 L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B(u(s))\Big|_0^t +$$

$$+ \varepsilon R_0 \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s)) P B(u(s))\,ds =$$

$$= -\varepsilon R_0 B(u(t)) + \varepsilon R_0 L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) B(Pf) +$$

$$+ \varepsilon R_0 \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s)) P B(u(s))\,ds.$$

Этим самым доказано (4).

Так как

$$\left\| R_0 \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s)) P B(u(s))\,ds \right\| \le$$

$$\le M \| R_0 \| \sup_{0 \le s \le \alpha} \| B'(u(s)) P B(u(s)) \| \int_0^t e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(t-s)}\,ds =$$

$$= \varepsilon K_1\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}t}\right) \le \varepsilon K_1, \quad K_1 = M \| R_0 \| \sup_{0 \le s \le \alpha} \| B'(u(s)) P B(u(s)) \|,$$

то доказано (5).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* α) *и* β). *Если* $x_\varepsilon(t)$ *— решение задачи* (1), $u(t)$ *— решение задачи* (2), *то функция*

$$y_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - u(t) - \gamma_\varepsilon(t) \tag{6}$$

является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} y'_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon} A_0\, y_\varepsilon(t) + B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) - B(u(t)), \\ y_\varepsilon(0) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

и равномерно по $t \in [0, \alpha]$ *при* $\varepsilon \to 0$ $y_\varepsilon(t) = O(\varepsilon)$.

Доказательство. Дифференцируя (6), получаем

$$y'_\varepsilon(t) = x'_\varepsilon(t) - \gamma'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} A_0\, x_\varepsilon(t) + B(x_\varepsilon(t)) - \frac{1}{\varepsilon} A_0 L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f -$$

$$- QB\,(u(t)) - \frac{1}{\varepsilon} A_0 \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B(u(s))\,ds - PB(u(t)) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} A_0 y_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} A_0 \gamma_\varepsilon(t) + B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) - B(u(t)) - \frac{1}{\varepsilon} A_0 \gamma_\varepsilon(t) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} A_0 \gamma_\varepsilon(t) + B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) - B(u(t)),$$

$$y_\varepsilon(0) = x_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon(0) - u(0) = f - Qf - Pf = f - f = 0.$$

От задачи (6) перейдем к эквивалентному интегральному уравнению

$$y_\varepsilon(t) = \int_0^t T_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\big(B(u(s) + \gamma_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s)) - B(u(s))\big)\,ds, \tag{8}$$

где $T_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ – полугруппа с инфинитезимальным оператором $\frac{1}{\varepsilon}A_0$, $\left\|T_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\| \le M$.

Далее из (7) имеем

$$\| y_\varepsilon(t) \| \le \int_0^t \left\| T_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\right\| \| B(u(s) + \gamma_\varepsilon + y_\varepsilon(s)) - B(u(s)) \| ds \le$$

$$\le M \sup_{v \in G} \| B'(v) \| \int_0^t \| \gamma_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s) \| ds \le q\left(\int_0^t \| y_\varepsilon(s) \| ds + \int_0^t \| \gamma_\varepsilon(s) \| ds \right),$$

$$q = M \sup_{v \in G} \| B'(v) \|.$$

В силу (3)

$$\| y_\varepsilon(t) \| \le \varepsilon q_1 + q \int_0^t \| y_\varepsilon(s) \| ds, \qquad q_1 = qk.$$

Применяя лемму Гронуолла – Беллмана, получаем

$$\| y_\varepsilon(t) \| \le \varepsilon q_1 e^{\int_0^t q\,ds} = \varepsilon q_1 e^{qt} \le \varepsilon q_1 e^{q\alpha} = \varepsilon q_2, \qquad q_2 = q_1 e^{q\alpha} > 0.$$

Отсюда следует, что равномерно по $t \in [0, \alpha]$ при $\varepsilon \to 0$

$$y_\varepsilon(t) = O(\varepsilon).$$

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия* α) *и* β), *то равномерно по* $t \in [0, \alpha]$ *при* $\varepsilon \to 0$

$$x_\varepsilon(t) = u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f + O(\varepsilon),$$

для $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = u(t).$$

Установим следующий член асимптотического разложения задачи (1). Для этого сначала докажем теорему об асимптотическом представлении эволюционного оператора $T_\varepsilon(t, \tau)$ уравнения [2, 3]

$$x'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[A_0 + \varepsilon B'(u(t))] x_\varepsilon(t). \tag{9}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* α), β), *то для* $f \in D(A_0)$ *равномерно по* $0 \le \tau \le t \le \alpha$ *при* $\varepsilon \to 0$

$$T_\varepsilon(t,\tau)f = \Pi_0(t,\tau)f + L_0\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)f + O(\varepsilon), \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Pi_0(t,\tau) = PB'(u(t))P\Pi_0(t,\tau),\\&\Pi_0(\tau,\tau) = P.\end{aligned}$$

Доказательство. Для $f \in D(A_0)$ эволюционный оператор $T_\varepsilon(t,\tau)$ уравнения (9) представим в виде

$$T_\varepsilon(t,\tau)f = \Pi_0(t,\tau)f + L_0\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)f +$$

$$+ \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B'(u(s))\Pi_0(s,\tau)f\,ds + Z_\varepsilon(t,\tau)f. \tag{11}$$

Так как функция (11) должна удовлетворять уравнению (9), имеем

$$\frac{d}{dt}T_\varepsilon f = \frac{d}{dt}\Pi_0(t,\tau)f + \frac{d}{dt}L_0\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)f +$$

$$+ \frac{d}{dt}\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B'(u(s))\Pi_0(s,\tau)f\,ds + \frac{d}{dt}Z_0(t,\tau) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}A_0L_0\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)f + \frac{1}{\varepsilon}A_0\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)f +$$

$$+ B'(u(s))\Pi_0(s,\tau)f\,ds + \frac{1}{\varepsilon}A_0Z_\varepsilon(t,\tau)f +$$

$$+ \varepsilon B'(u(t))\Pi_0(t,\tau)f + \varepsilon B'(u(t))L_0\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)f +$$

$$+ \varepsilon B'(u(t))\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B'(u(s))\Pi_0(s,\tau)f\,ds + \varepsilon B'(u(t))Z_\varepsilon(t,\tau)f,$$

или

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t,\tau)f = \frac{1}{\varepsilon}[A_0 + \varepsilon B'(u(t))]Z_\varepsilon(t,\tau)f +\\&+ B'(u(t))\left[L_0\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)f + \int_\tau^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B'(u(s))\Pi_0(s,\tau)f\,ds\right].\\&Z_\varepsilon(t,\tau)f = 0.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$Z_\varepsilon f = \int_\tau^t T_\varepsilon(t,s)B'(u(s))\left[L_0\left(\frac{s-\tau}{\varepsilon}\right)f +\right.$$

$$\left.+ \int_\tau^s L_0\left(\frac{s-v}{\varepsilon}\right)B'(u(v))\Pi_0(v,\tau)f\,dv\right]ds.$$

Поскольку для $0 \le \tau \le t \le \alpha$ $\quad \|T_\varepsilon(t,\tau)\| \le K,$ $\left\|L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\| \le Me^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}$, в силу условий α) и β) имеем

$$\|Z_\varepsilon(t,\tau)\| \le \int_\tau^t \|T_\varepsilon(t,s)\| \|B'(u(s))\| M e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)} ds +$$

$$+ \int_\tau^t \|T_\varepsilon(t,s)\| \|B'(u(s))\| ds \int_\tau^s M e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-v)} \|B'(u(v))\| \|\Pi_0(\nu,\tau)\| d\nu \le$$

$$\le M_2 \int_\tau^t e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)} ds + M_3 \int_\tau^t ds \int_\tau^s e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\nu)} d\nu =$$

$$= -\frac{\varepsilon M_2}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)} \Big|_\tau^t + M_3 \frac{\varepsilon}{\lambda} \int_\tau^t e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\nu)} \Big|_\tau^s ds = \frac{\varepsilon M_2}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)}\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon M_3}{\lambda} \int_\tau^t \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)}\right) ds = \frac{\varepsilon M_2}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)}\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon M_3}{\lambda}\left[(t-\tau) + \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\tau)}\right)\right] \le \varepsilon N, \quad N > 0,$$

т. е. равномерно по $0 \le \tau \le t \le \alpha$ при $\varepsilon \to 0$

$$\|Z_\varepsilon(t,\tau)f\| = O(\varepsilon).$$

Отсюда следует (10) и теорема доказана.

Теорема 3. *Если выполнены условия* α) *и* γ), *то равномерно по* $t \in [0, \alpha]$ *при* $\varepsilon \to 0$ *решение задачи* (1) $x_\varepsilon(t)$ *имеет следующее асимптотическое представление*:

$$x_\varepsilon = u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f + \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)f\right) ds +$$

$$+ \int_0^t \Pi_0(t,s)\left[B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)f\right) - B(u(s))\right] ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s)) R_0 L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) B(Pf) ds -$$

$$- \varepsilon \int_0^t \Pi_0(t,s)\, B'(u(s)) R_0 B(u(s)) ds + O(\varepsilon^2).$$

Доказательство. Уравнение (7) для $y_\varepsilon(t)$ представим в виде

$$y'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[A_0 + \varepsilon B'(u(t))] y_\varepsilon(t) + h_\varepsilon(t),$$

где

$$h_\varepsilon(t) = B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) - B'(u(t)) y_\varepsilon(t).$$

Тогда в силу $y_\varepsilon(0) = 0$ имеем

$$y_\varepsilon(t) = \int_0^t T_\varepsilon(t,s)\, h_\varepsilon(s) ds. \tag{12}$$

Функцию $h_\varepsilon(t)$ можно представить в виде

$$h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon^{(1)}(t) + h_\varepsilon^{(2)}(t) + h_\varepsilon^{(3)}(t) + h_\varepsilon^{(4)}(t), \tag{13}$$

где

$$h_\varepsilon^{(1)}(t) = B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) -$$
$$- B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t)) - B'(u(t) + \gamma_\varepsilon(t))\,\gamma_\varepsilon(t),$$
$$h_\varepsilon^{(2)}(t) = B\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds\right) -$$
$$- B(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f) - B'(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f)\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds,$$
$$h_\varepsilon^{(3)}(t) = \big(B'\big(u(t)+\gamma_\varepsilon(t)\big) - B'\big(u(t)\big)\big)y_\varepsilon(t) + \tag{14}$$
$$+ \left(B'\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f\right) - B'(u(t))\right)\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds,$$
$$h_\varepsilon^{(4)}(t) = B\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f\right) - B(u(t)) +$$
$$+ B'(u(t))\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds.$$

Действительно,

$$h_\varepsilon^{(1)}(t) + h_\varepsilon^{(2)}(t) + h_\varepsilon^{(3)}(t) + h_\varepsilon^{(4)}(t) = B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) -$$
$$- B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t)) - B'(u(t) + \gamma_\varepsilon(t))\,y_\varepsilon(t) +$$
$$+ B\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f + \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds\right) -$$
$$- B\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f\right) - B'\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f\right)\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds +$$
$$+ \big(B'\big(u(t) + \gamma_\varepsilon(t)\big) - B'\big(u(t)\big)\big)\,y_\varepsilon(t) + \left(B'(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f -\right.$$
$$\left. - B'(u(t))\right)\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds +$$
$$+ B\left(u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f\right) - B(u(t)) + B'(u(t))\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)B(u(s))\,ds =$$
$$= B(u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + y_\varepsilon(t)) - B'(u(t))\,y_\varepsilon(t) - B(u(t)) = h_\varepsilon(t).$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$\left\|\int_0^t T_\varepsilon(t,s)\,h_\varepsilon^{(1)}(s)\,ds\right\| \le \int_0^t \|T_\varepsilon(t,s)\|\,\left\|h_\varepsilon^{(1)}(s)\right\|ds \le K\int_0^t \left\|h_\varepsilon^{(1)}(s)\right\|ds =$$
$$= K\int_0^t \|B(u(s) + \gamma_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s)) - B(u(s) +$$

$$+ \gamma_\varepsilon(s)) - B'(u(s) + \gamma_\varepsilon(s) + y_\varepsilon(s))\Big\| ds \le$$

$$\le \frac{1}{2} K \sup_{Z \in G} \left\| B''(Z) \right\| \int_0^t \| y_\varepsilon(s) \|^2 ds \le \varepsilon^2 \tilde{K}_1, \tilde{K}_1 > 0,$$

в силу леммы 2.

Итак,

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) h_\varepsilon^{(1)}(s) ds \right\| \le \varepsilon^2 \tilde{K}_1, \tag{15}$$

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) h_\varepsilon^{(2)}(s) ds \right\| K \int_0^t \left\| h_\varepsilon^{(2)}(s) \right\| ds =$$

$$= K \left[\int_0^t \left\| B(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f + \int_0^s L_0\left(\frac{s-v}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu - \right.\right.$$

$$- B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) -$$

$$\left.\left. - B'\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) \int_0^s L_0\left(\frac{s-v}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu \right\| ds \right] \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{Z \in G} \| B''(Z) \| \int_0^t \left\| \int_0^s L_0\left(\frac{s-v}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu \right\|^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{2} K \int_0^t \left(\int_0^s M e^{-\lambda \frac{(s-v)}{\varepsilon}} \sup_{s \in G} \| B(Z) \| d\nu \right)^2 ds =$$

$$= \frac{1}{2} K \int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\nu)} \Bigg|_0^s \right) ds = \frac{1}{2} K \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon} s} \right)^2 ds \le \varepsilon^2 \tilde{K}_2, \tilde{K}_2 > 0;$$

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) h_\varepsilon^{(2)}(s) ds \right\| \le \varepsilon^2 K_2, K_2 > 0, \tag{16}$$

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) h_\varepsilon^{(3)}(s) ds \right\| \le K \int_0^t \Big\| (B'(u(s) + \gamma_\varepsilon(s)) - B'(u(s))) y_\varepsilon(s) +$$

$$+ \left(B'\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B'(u(s)) \right) \int_0^s L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu \Big\| ds \le$$

$$\le K \int_0^t \| B'(u(s) + \gamma_\varepsilon(s)) - B'(u(s)) \| \| \gamma_\varepsilon(s) \| ds +$$

$$+ K \int_0^t \left\| B'\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B'(u(s)) \right\| \left\| \int_0^s L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu \right\| ds \le$$

$$\leq \varepsilon K' \int_0^t \|\gamma_\varepsilon(s)\| ds + \varepsilon K'' \int_0^t \left\| L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right\| ds \leq \varepsilon^2 K_3,\ K_3 > 0;$$

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) h_\varepsilon^{(3)}(s) ds \right\| \leq \varepsilon^2 K_3,\ K_3 > 0. \tag{17}$$

В силу (12) – (17) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$y_\varepsilon(t) = \int_0^t T_\varepsilon(t,s) h_\varepsilon^{(4)}(s) ds + O(\varepsilon^2).$$

Так как

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) \left(B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B(u(s)) \right) ds \right\| \leq K \int_0^t \left\| L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right\| ds \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 \tilde{K}_4,\ \tilde{K}_4 > 0,$$

и

$$\left\| \int_0^t T_\varepsilon(t,s) \left(B'(u(s)) \int_0^s L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu \right) ds \right\| \leq$$

$$\leq \tilde{K} \int_0^t ds \int_0^s M e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}(s-\nu)} d\nu \leq \varepsilon^2 K_4^{(2)},\ K_4^{(2)} > 0,$$

в силу теоремы 2 при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$y_\varepsilon(t) = \int_0^t \left(\Pi_0(t,s) + L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \right) \left[B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B(u(s)) + \right.$$

$$\left. + B'(u(s)) \int_0^s L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) d\nu \right] ds + O(\varepsilon^2). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (6), находим

$$x_\varepsilon(t) = u(t) + \gamma_\varepsilon(t) + \int_0^t \Pi_0(t,s) \left[B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B(u(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) ds - \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B(u(s)) ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s \left(\Pi_0(t,s) + L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \right) B'(u(s))\, L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) ds d\nu + O(\varepsilon^2) =$$

$$= u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f + \int_0^t \Pi_0(t,s) \left[B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B'(u(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{t-s}{\varepsilon} \right) B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) ds + \int_0^t \int_0^s \left(\Pi_0(t,s) + \right.$$

$$\left. + L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \right) B'(u(s))\, L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu)) ds d\nu + O(\varepsilon^2). \tag{19}$$

В двойном интеграле формулы (19) вычисляя внутренний интеграл по частям, имеем

$$\int_0^t \int_0^s \left(\Pi_0(t,s) + L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\right) B'(u(s))\, L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B(u(\nu))\, ds d\nu =$$

$$= \int_0^t \left(\Pi_0(t,s) + L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\right) B'(u(s)) \left[-\varepsilon R_0 B(u(s)) + \varepsilon R_0 L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) B(Pf) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon R_0 \int_0^s L_0\left(\frac{s-\nu}{\varepsilon}\right) B'(u(\nu))\, P B(u(\nu))\, d\nu \right] ds =$$

$$= -\varepsilon \int_0^t \Pi_0(t,s)\, B'(u(s))\, R_0 B(u(s))\, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s))\, R_0 L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) B(Pf)\, ds + O(\varepsilon^2), \tag{20}$$

так как при $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^t \Pi_0(t,s)\, R_0 L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) B(Pf)\, ds = O(\varepsilon)$$

и

$$\int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s))\, R_0 B(u(s))\, ds = O(\varepsilon).$$

Подставляя (20) в (19), получаем, что равномерно по $t \in [0, \alpha]$ при $\varepsilon \to 0$

$$x_\varepsilon(t) = u(t) + L_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f +$$

$$+ \int_0^t \Pi_0(t,s) \left[B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) - B(u(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B\left(u(s) + L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) f \right) ds - \varepsilon \int_0^t \Pi_0(t,s)\, B'(u(s))\, R_0\, B(u(s))\, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t L_0\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) B'(u(s))\, R_0\, L_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) B(Pf)\, ds + O(\varepsilon^2),$$

что и требовалось доказать.

1. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 286 с.
2. *Korolyuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundations of the state lumping of large systems. – Kluver Acad. Publ., 1983. – 284 p.
3. *Плоткин Я. Д., Турбин А. Ф.* Эволюционный оператор неавтономного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. – Киев, 1987. – 25 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87. 20).

Получено 19.06.98