Плоткін Я.Д.

Міністерство науки та освіти України
Херсонський державний педагогічний університет

Методичні рекомендації по застосуванню похідної до дослідження функцій

Херсон
ХГПУ
«2001»

Методичні рекомендації по застосуванню похідної до дослідження функцій для вчителів математики середньої школи

Укладач Я.Д. Плоткін .-Херсон: ХДПУ, 2001.

Затверджено на засіданні кафедри математичного аналізу і методики викладання математики

Рецензент кандидат педагогічних наук, доцент Берман В.П.

Зміст:

Література:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1.- М., 1962.
2. Шиманський І. Є. Математичний аналіз. - К., Вища школа, 1972.
3. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, т.1- М.: Высшая школа, 1970.
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу, ч.1 - К., Вища школа, 1976.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз, ч.1 - К., Вища школа, 1978.
6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука,1977.
7. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.
8. Математический анализ в примерах и задачах, ч.1- К.: Высшая школа, 1975.
9. Збірник задач з вищої математики за редакцією Ф. С. Гудименка. – К.: Видавництво Київського університету, 1967.

Застосування похідної

Найбільш характерні задачі, що розв’язуються за допомогою похідної: наближене обчислення значень функцій, знаходження рівняння дотичної до кривої, знаходження найбільших і найменших значень функції, дослідження на зростання та спадання функції, побудова графіків функції.

Проте, не виходячи за рамки шкільного матеріалу, за допомогою похідної можна розв’язати ряд інших задач.

Використання похідної при доведенні та розв'язуванні рівнянь та нерівностей

Нехай потрібно довести нерівність

$f(x) \geq g(x), x \in [a,b)$,

(1)

де $f(x), g(x)$ визначені та неперервні на проміжку $[a,b)$ та диференційовані на проміжку (a,b).

Якщо

$f(a) = g(a)$,

(2)

$f'(x) > g'(x), x \in (a,b)$,

(3)

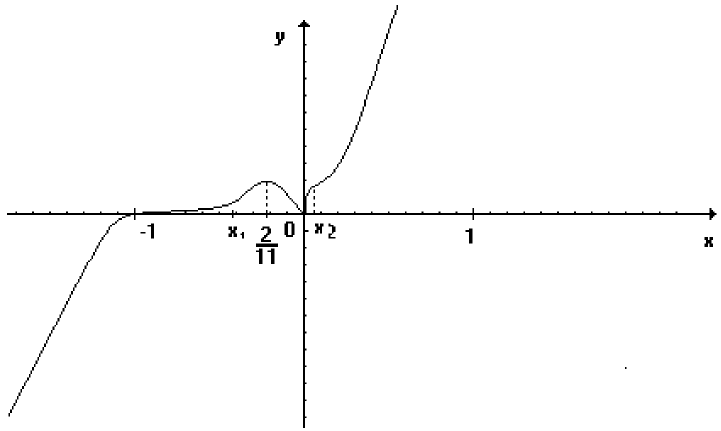
то

$f(x) > g(x), x \in (a,b)$

Дійсно, введемо функцію $F(x) = f(x) - g(x)$. Вона визначена та неперервна на проміжку $[a,b)$ та диференційована на проміжку (a,b). $F(a) = f(a) - g(a) = 0$ в силу (2) , $F'(x) = f'(x) - g'(x) > 0, x \in (a,b)$ в силу (3)

Тобто, функція $F(x)$ зростає на проміжку (a,b), а тому $F(x) > 0, x \in (a,b)$. Звідки випливає, що $f(x) > g(x), x \in (a,b)$.

1.



мал. 9

x_1	+	0		Точка перегину
$\left(x_1;-\frac{2}{11}\right)$	+	-		Опуклість
$-\frac{2}{11}$	0	-	Максимум	
$\left(-\frac{2}{11};0\right)$	-	-	Спадання	
0	Не існує	Не існує	Мінімум	
$(0;x_2)$	+	-	Зростання	
x_2	+	0		Точка перегину
$(x_2;+\infty)$	+	+		Угнутість

Можна розглянути більш загальний випадок: нехай функції $f(x), g(x)$ n-раз диференційовані функції на проміжку $[a,b)$.

Якщо

$$\begin{cases} f(a)=g(a); \\ f'(a)=g'(a); \\ -------- \\ f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a). \end{cases}$$

(4)

$$f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x), x\in(a,b),$$

то

$$f(x)>g(x), x\in(a,b).$$

Дійсно, введемо функцію $F(x)=f(x)-g(x)$. Тоді в силу попереднього припущення з умов $f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a), f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x), x\in(a,b)$, випливає $f^{(n-1)}(x)>g^{(n-1)}(x), x\in(a,b)$.

Аналогічно, з умов $f^{(n-2)}(a)=g^{(n-2)}(a), f^{(n-1)}(x)>g^{(n-1)}(x), x\in(a,b)$, випливає, що $f^{(n-2)}(x)>g^{(n-2)}(x), x\in(a,b)$, і т. д. на n-ому кроці отримаємо, що з умов $f'(a)=g'(a), f'(x)>g'(x), x\in(a,b)$, випливає $f(x)>g(x), x\in(a,b)$.

Аналогічні перетворення мають місце для доведення рівностей.

Нехай функції $f(x), g(x)$ n-раз диференційовані на проміжку $[a,b)$. Якщо $f(a)=g(a), f'(x)=g'(x), x\in[a,b)$, то $f(x)=g(x), x\in[a,b]$.

Нехай функції $f(x), g(x)$ n-раз диференційовані на проміжку $[a,b)$. Якщо $f(a)=g(a), f'(a)=g'(a),\ldots, f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a), f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x), x\in[a,b)$, то $f(x)=g(x)$, $x\in(a,b)$.

Розв’яжемо декілька прикладів.

<u>Приклад 1.</u> Довести нерівність $tgx \ge x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо функцію

$f(x)=tgx-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

$f(0)=tg0-0=0$;

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}>0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Значить, $tgx-x>0, x\in(0;\frac{\pi}{2})$ і $tgx\ge x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

<u>Приклад 2.</u> Довести нерівність $x^4+1>x^2+\ln(2-x^2+x^4), \forall x.$

<u>Доведення.</u> Представимо нерівність у вигляді $x^4-x^2+1>\ln(1+(1-x^2+x^4))$ та введемо заміну $t=x^4-x^2+1$, тоді $t>\ln(1+t), t>0$ $(t>0$, так як для довільного x

Приведемо тепер більш детальне дослідження функції за допомогою похідної. Знайдемо y' та y''. $y'=\frac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$,

$y''=\frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}}$.

Звідси випливає, що $y'=0$ при $x=-1$ і $x=-\frac{2}{11}$; $y''=0$ при $x=-1$ і коли $4x^2+16x-1=0$, тобто приблизно при $x_1=-\frac{9}{22}, x_2=\frac{1}{22}$.

При $x=0$ похідні не існують. Складемо таблицю поведінки функції:

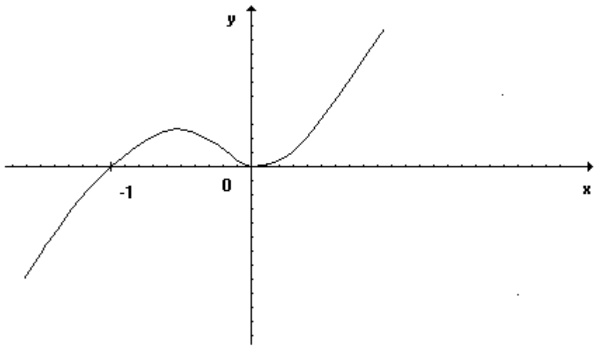
x	y'	y''	Інтервали монотонності, точки екстремуму	Інтервали опуклості, угнутості, точки перегину
$(-\infty;-1)$	+	-		Опуклість
-1	0	0	Зростання	Точка перегину
$(-1;x_1)$	+	+		Угнутість

Приклад 2. побудувати графік функції $f(x)=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$.

Область визначення цієї функції – множина всіх дійсних чисел, причому вона неперервна в кожній точці і тому не має вертикальних асимптот. З того, що $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ випливає, що нема і наклоних асимптот.

Для побудови графіка помітимо, що $f(x)$ обертається в нуль в точках $x=-1; x=0$. $f(x)>0$ при $x>1$ та $x\neq 0$; $f(x)<0$ при $x<1$.

Приблизний вид графіку функції, що можна побудувати на основі цих зауважень, зображений на малюнку.



мал. 8

квадратний тричлен $(x^2)^2-(x^2)+1$ відносно x^2 має від'ємний дискримінант, тобто при довільному x більше нуля). Таким чином, необхідно довести , що для довільного $t>0$ виконується нерівність $t>\ln(1+t)$.

Розглянемо функцію $f(t)=t-\ln(1+t)$; $f'(t)=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{t+1}$ і $f'(t)>0$ при $t>0$, тобто $f(t)$ зростає на проміжку $[0;+\infty)$. Тому $f(t)>f(0)=0$ або $t-\ln(1+t)>0, t>0$, що і потрібно було довести.

Приклад 3. Що більше e^{π} чи π^{e} ?

Ровязання. Розглянемо функцію

$$f(x)=x-e\ln x, x\geq e;$$
$$f(e)=e-e\ln e=0;$$
$$f'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}>0, \forall x>e;$$

З умов $\begin{cases} f(e)=0; \\ f'(x)>0, x>e \end{cases} \Rightarrow f(x)>0, x>e$.

Так як $\pi>e$, то $f(\pi)>0, \pi-e\ln\pi>0, \pi>e\ln\pi, e^{\pi}>e^{e\ln\pi}=\left(e^{\ln\pi}\right)^{e}=\pi^{e}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_2(x^9-2x^5+3x)\leq 1$

Ровязання. Відмітимо, що нерівність виконується для тих x, для яких виконується нерівність $0<x^9-2x^5+3x\leq 2$.

Розглянемо спочатку ліву частину нерівності

$x^9-2x^5+3x>0$ або $x(x^8-2x^4)+3>0$. Легко бачити, що нерівність справедлива $\forall x>0$. Розглянемо нерівність $x^9-2x^5+3x\le 2$. Щоб її розв'язати, розглянемо функцію $f(x)=x^9-2x^5+3x-2$ на множині дійсних чисел. $f'(x)=9x^8-10x^4+3>0, \forall x\in R$.

$$\begin{cases} f(1)=1-2+3-2=0; \\ f'(x)>0, x\in R \end{cases} \Rightarrow f(x)\le 0, x\le 1.$$

Значить, подвійна нерівність $0<x^9-2x^5+3x\le 2$ буде виконуватись для x, що задовольняє нерівності $0<x\le 1$.

<u>Приклад 5.</u> Довести, що для всіх додатних a,b,c виконується нерівність

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$$

<u>Доведення.</u> Розглянемо функцію

$$y=x+a+b-3\sqrt[3]{abx}, x\ge\sqrt{ab};$$

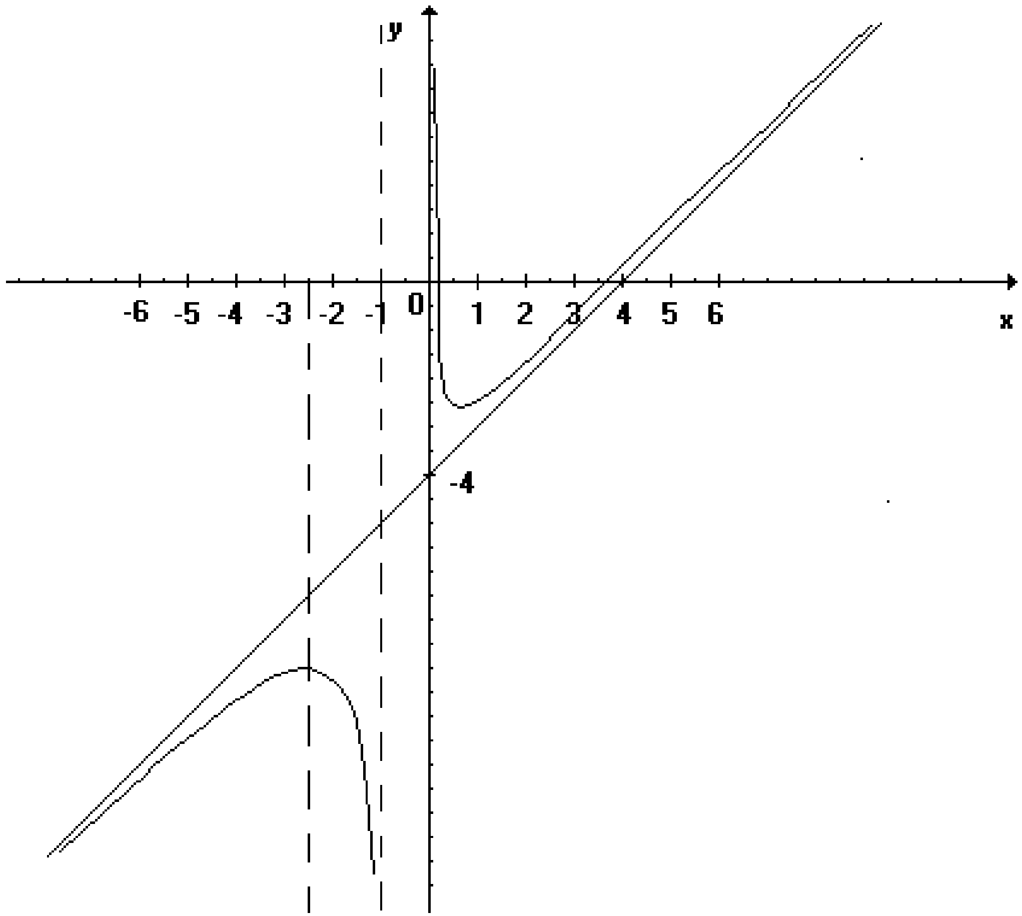
$$y'=1-\frac{3\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{x^2}}>0, x>\sqrt{ab}; (*)$$

$$y(\sqrt{ab})=\sqrt{ab}+a+b-3\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}+a+b-3\sqrt{ab}=a+b-2\sqrt{ab}\ge 0; (**$$

З умов $(*)$, $(**)$ випливає, що $x+a+b-3\sqrt[3]{abx}>0, x\ge\sqrt{ab}$.

Звідси маємо $x+a+b\ge 3\sqrt[3]{abx}$.

Поклавши $x=c$, отримаємо $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$.



x		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
y'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
y''	-	-	-	$\nexists$	+	+	+

З таблиці видно, що функція $f(x)$ має в точці $x=-1+\sqrt{2}$ строгий мінімум, а в точці $x=-1-\sqrt{2}$ строгий максимум.
$f\min = f(-1+\sqrt{2})$, $f\max = f(-1-\sqrt{2})$.

При $x<-1$ функція строго опукла, а при $x>-1$ функція строго угнута. Точок перегину нема, так як при $x=-1$ функція розривна.

Ми знайшли загальний характер поведінки функції. Щоб побудувати графік функції більш точно потрібно знайти ряд точок графіка, як це відмічалося вище.

<u>Приклад 6.</u> Довести, що $arctgx + arctgy = arctg\,\frac{x+y}{1+xy}$

<u>Доведення.</u> Розглянемо функції

$f(x) = arctgx + arctgy;\quad f(0) = arctgy;\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$

$g(x) = arctg\,\frac{x+y}{1-xy};\ g(0) = arctgy;$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}\cdot\frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2}$$

$$= \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2x^2y^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

З рівностей $f(0)=g(0); f'(x)=g'(x)$ випливає рівність $f(x)=g(x)$, тобто $arctgx + arctgy = arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$

<u>Приклад7.</u> Довести рівність

$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2) = (x-y)(y-z)(z-x)$

<u>Доведення.</u> Розглянемо функції

$f(x) = x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2);\quad g(x) = (y-z)(x-y)(z-x)$

та визначимо їх значення при $x=0$.

$f(0) = yz^2 - zy^2 = yz(z-y);\quad g(0) = (y-z)(-y)z = yz(z-y);$ тобто $f(0)=g(0)$.

Далі знаходимо $f'(x), g'(x)$

$f'(x) = y^2 - z^2 - 2yx + 2zx = (y-z)(y+z-2x);$

$g'(x) = (y-z)(z-x+y) = (y-z)(y+z-2x);$

тобто $f'(x) = g'(x)$.

З умов $f(0) = g(0); f'(x) = g'(x)$ випливає рівність $f(x) = g(x)$, що і потрібно було показати.

функції. Так як $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x+1}$ можна подати у виді $f(x) = x - 4 + \dfrac{2}{x+1}$, то $f(x) > x - 4$ при $x > 1$ (графік функції знаходиться вище асимптоти) та $f(x) < x - 4$ при $x < -1$ (графік функції знаходиться нижче асимптоти).

Графік функції $f(x)$ перетинає вісь x в точках, в яких $x^2 - 3x - 2 = 0$, тобто при $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ або приблизно $x_1 = -0.5$; $x_2 = 3.5$. Вісь y графік функції $f(x)$ перетинає в точці $y = -2$

Далі знаходимо відповідно першу та другу похідні функції $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}; \; f''(x) = \frac{4}{(x=1)^3} \; .$$

Звідси випливає, що $f'(x) = 0$ при $x = -1 - \sqrt{2 \approx -2{,}4}$ і $x = -1 + \sqrt{2 \approx 0{,}4}$

В точці $x = -1$ прохідні $f'(x)$ і $f''(x)$ не існують .

Складемо таблицю зміни знаку першої та другої похідних в залежності від зміни аргументу, включивши в неї критичні точки(*таблиця поведінки функції):

певною точністю) точки перетину графіка з осями координат і точки, що відповідають екстремумам функції; інші точки знаходяться у разі потреби.

У випадку громіздких виразів для другої похідної іноді потрібно обмежитись розглядом тих властивостей графіка, які можна вивчати за допомогою першої похідної.

<u>Приклад 1.</u> побудувати графік функції $f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$.

Ця функція визначена та неперервна для всіх $x\neq -1$.

Так як $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{x^2-3x-2}{x+1}=-\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x^2-3x-2}{x+1}=+\infty$, то вона має вертикальну асимптоту $x=-1$.

Невертикальну асимптоту ми шукаємо у вигляді $y=kx+b$, де

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3x-2}{x(x+1)}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2-3x-2}{x+1}-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-4x-2}{x+1}=-4$.

Тобто, $y=x-4$ є невертикальною асимптотою заданої

Побудова графіків функцій.

У багатьох питаннях математики та фізики дуже важливо вміти швидко схематично будувати графіки як найпростіших елементарних функцій, так і функцій, які отримуються в результаті алгебраїчних операцій та композицій під елементарними функціями.

Добре знаючи основні властивості елементарних функцій, можна порівняно просто, не використовуючи похідну функції будувати графіки функцій, які отримуються в результаті алгебраїчних операцій та композицій над останніми.

Наведемо приклади побудови графіків деяких складних функцій.

<u>Приклад 1.</u> побудувати графік функції $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+4}$

Дана функція є композицією двох функцій g та h, де $g(x)=x^2-5x+4, h(x)=\frac{1}{x}$. візьмемо дві системи координат (мал. 1).

В яких осі y лежать на одній прямій та напрямлені в один бік. В першій системі координат схематично будуємо графік функції $g(x)=x^2-5x+4$. Це парабола, яка перетинає вісь x в точках 1 та 4, а вісь y в точці 4. вершина параболи має координати $\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$, гілки параболи напрямлені вгору.

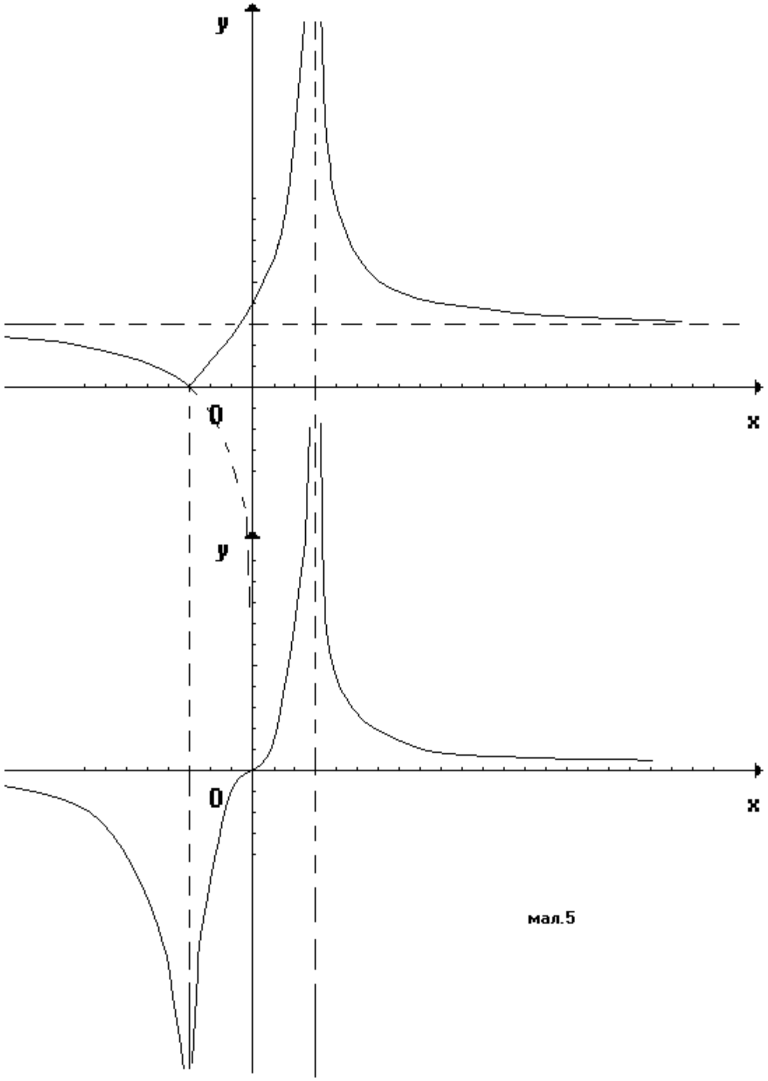
Графік функції $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$ будуємо у другій системі координат, для цього скористаємося властивостями $h(x)=\dfrac{1}{x}$. Функція f визначена при всіх x, не рівних 1 та 4. в першій системі координат будуємо точки $(1;0)$, $(4;0)$, $\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$, $(0;4)$. У другій системі $\left(0;\frac{1}{4}\right)$, $(1;0)$, $(4;0)$, $\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$. Так як функція g на проміжку $(-\infty;1)$ спадає від $-\infty$ до 0, то функція f на цьому проміжку зростає від 0 до ∞. Так як функція g на проміжку $\left(1;\frac{5}{2}\right)$ від'ємна та спадає від 0 до $\left(-\frac{9}{4}\right)$, то функція f на цьому проміжку від'ємна і зростає від $-\infty$ до $\left(-\frac{4}{9}\right)$. Так як функція g на проміжку $\left(\frac{5}{2};4\right)$ від'ємна та зростає від $\left(-\frac{9}{4}\right)$ до 0, то функція f на цьому проміжку від'ємна та спадає від $\left(-\frac{4}{9}\right)$ до $-\infty$. Так як

Побудова графіків функцій за допомогою похідної.

Вивчення функції та побудова її графіка за допомогою похідної доцільно проводити в наступній послідовності:

1. визначити область існування функції, область неперервності та точки розриву.
2. знайти асимптоти.
3. приблизно намалювати графік функції.
4. обчислити першу, а якщо потрібно, і другу похідну (без похідних більш високих порядків часто можна обійтись).
5. знайти точки, в яких перша та друга похідні або не існують, або дорівнюють нулю.
6. скласти таблицю зміни знака першої та другої похідних. З'ясувати проміжки зростання, спадання, опуклості, угнутості, знайти точки екстремумів та точки перегину.
7. остаточно накреслимо графік функції.

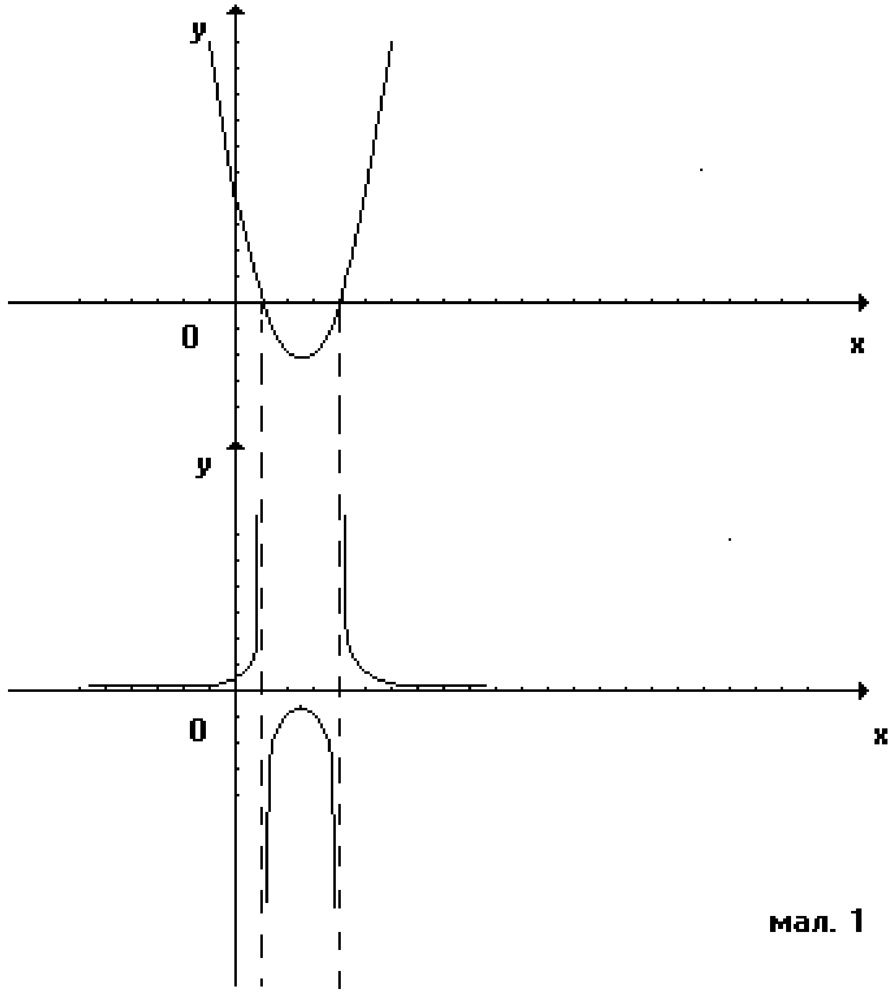
При цьому чим більшої точності графіка ми хочемо досягти, тим більше, взагалі кажучи, необхідно знайти точок, що лежать на ньому. Зазвичай доцільно знайти (можливо з



мал.5

функція g на проміжку $(4;\infty)$ зростає від 0 до ∞, то функція f на цьому проміжку спадає від ∞ до 0.

В результаті цих міркувань отримаємо графік функції $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$, що показана на малюнку 1.



мал. 1

Приклад 2. побудувати графік функції $f(x) = \ln\cos x$. Будуємо дві системи координат, як в прикладі 1. функція f є композицією функцій $g(x) = \cos x$ та $h(x) = \ln x$. Так як функція $g(x)$ періодична та має період $T = 2\pi$, тому функція $f(x)$ також періодична та її період $T = 2\pi$.

В першій системі координат будуємо графік функції $g(x) = \cos x, x \in [-\pi;\pi]$. В другій системі координат будуємо графік функції $f(x) = \ln\cos x$ для тих $x \in [-\pi;\pi]$, $\cos x > 0$, тобто для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Так як функція $\ln(x)$ зростає на всій області визначення, то там, де функція $g(x) = \cos x$ буде додатною і зростаючою, функція $f(x) = \ln\cos x$ буде спадати від 0 до $-\infty$. Графік функції $f(x) = \ln\cos x$ побудуємо на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. а потім його періодично продовжимо з періодом $T = 2\pi$ на інтервал виду $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$

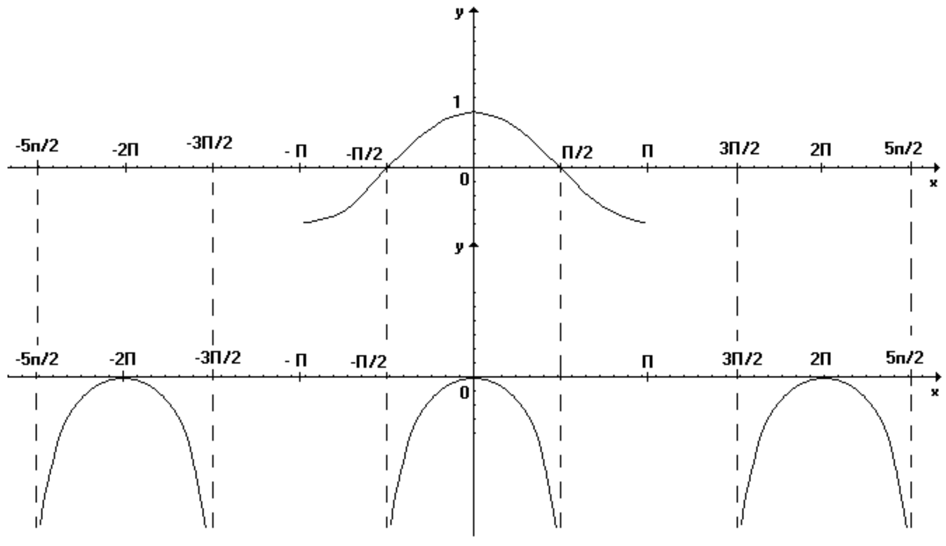
будуємо графік $f(x) = \log_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ (дивись мал. 5).

Візьмемо дві системи координат(мал..5). В першій системі координат за пунктами 1 та2 будуємо графік функції $m(x)$. Для побудови графіка $n(x)$ додатково перетворимо вираз $\frac{x+1}{x-1}:\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$.

Тоді $n(x)=1+\frac{2}{x-1}$, звідки видно, що $n(x)$ є гіпербола з асимптотами $x=1$ та $y=1$ які зображені на малюнку 5 пунктирними лініями. Частина гіперболи $n(x)$, яка лежить нижче осі x також зображена пунктирною лінією. І так графік функції $m(x)=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ побудован.

В другій системі координат, користуючись властивостями функції $\log_2 x$, будуємо графік функції $f(x)=\log_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

Так як $m(x)$ на проміжку $(-\infty;-1)$ спадає від одиниці до нуля, то $f(x)$ також спадає (в силу монотонності логарифмічної функції) від нуля до $-\infty$. На проміжку $(-1;1)$ $m(x)$ зростає від нуля до нескінченості, а $f(x)$ на цьому проміжку зростає від $-\infty$ до ∞. Так як функція $m(x)$ на проміжку $(1;\infty)$ спадає від нескінченості до одиниці, то функція $f(x)$ на цьому проміжку спадає від нескінченості до нуля. Враховуючи викладене,

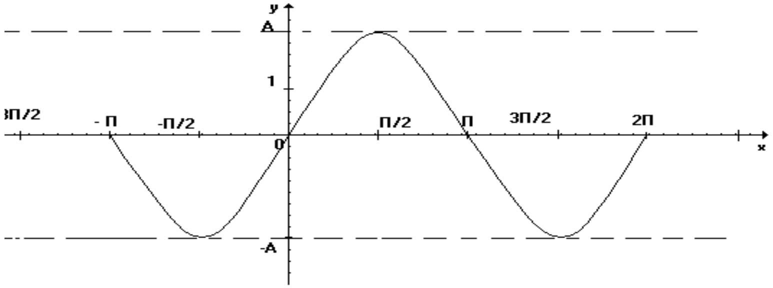


мал. 2

<u>Приклад 3.</u> побудувати графік функції $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Будуємо графік функції $f(x)=A\sin x$, який описує гармонічне коливання з постійною амплітудою А.

Для цього будуємо пунктиром прямі $y=A$ та $y=-A$ на яких лежать найбільш віддалені від осі x точки графіка функції $f(x)=A\sin x$Б а далі будуємо синусоїду з амплітудою А (мал. 3).



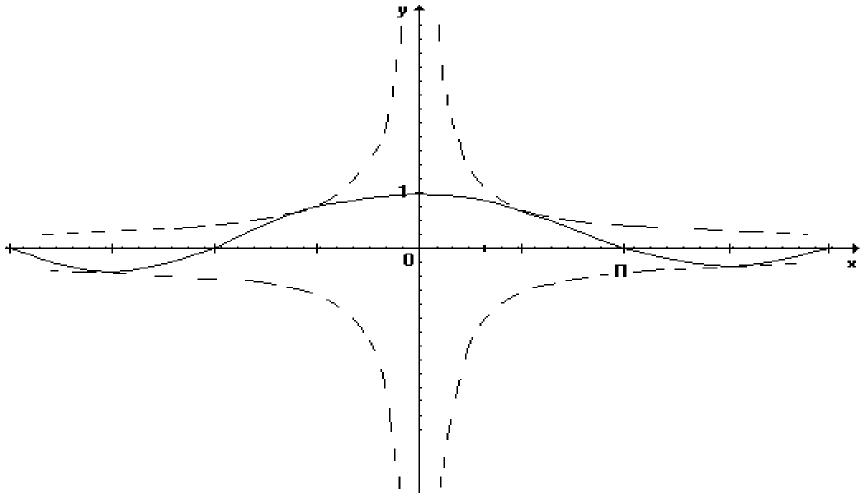
мал. 3

Графік функції $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ будується аналогічно. Ця функція для всіх $x \neq 0$ описує коливальний рух зі змінною амплітудою $A(x)=\dfrac{1}{x}$. Будуємо пунктиром графіки функцій $y=\dfrac{1}{x}$ та $y=-\dfrac{1}{x}$ на яких лежать найбільш віддалені від осі x точки графіка функції $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ (мал. 4). Відмітимо декілька таких точок на лініях $y=\dfrac{1}{x}$ та $y=-\dfrac{1}{x}$:

$\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2}{\pi}\right),\left(\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{2}{3\pi}\right),\ldots$

Та декілька точок в яких графік перетинає вісь x (наприклад, $(\pi;0)$). Отримані точки з'єднаємо плавною лінією. Далі, враховуючи, що функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ парна та $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Продовжуємо графік функції на від'ємну частину осі x.



мал. 4

Приклад 4. побудувати графік функції $f(x)=\log_2\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

Ця функція є композицією трьох функцій $n(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x)=|x|$, $h(x)=\log_2 x$.

Для побудови графіка функції $m(x)=\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ достатньо:

1. побудови графіка функції $n(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;
2. частину графіка функції n(x), що лежить нижче осі x, дзеркально відобразити відносно осі x і отриманий образ об'єднати з частиною графіка функції $n(x)$, що лежить вище осі x або на ній.