Міністерство освіти та науки України
Херсонський державний університет

Показникова, логарифмічна і степенева функції

(Методичні рекомендації)

Плоткін Я.Д.

Херсон
2003

Методичні рекомендації до поглибленого вивчення показникової, логарифмічної та степеневої функції для вчителів математики середньої школи.

Уклад. Я.Д. Плоткін.-

Херсон, 2002.

Укладач: Плоткін Я.Д.

Рецензент Берман В.П., канд. пед. наук, доцент

У курсі математичного аналізу педагогічного інституту (спеціальність ″математика і фізика″) тема ″Показникова, логарифмічна і степенева функції″ вивчається після таких розділів, як дійсні числа, послідовність і границя послідовності, функція, границя функції і неперервність, тобто ця тема завершує ″Введення в аналіз″. Використовуючи основні властивості границь і властивості неперервних функцій можна дати строгі визначення показникової, логарифмічної і степеневої функцій і строго математично довести їхні основні властивості.

У навчальній літературі по математичному аналізі існують деякі розбіжності при викладанні цієї теми.

Дані методичні рекомендації в першу чергу адресовані студентам першого курсу математичних відділень педагогічних вузів та слухачам курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

1. Число *e*.

Для введення числа e розглянемо дві послідовності

$$x_n = \left[1+\frac{1}{n}\right]^n \quad \text{і} \quad y_n = \left[1-\frac{1}{n}\right]^n$$

і, користуючись нерівністю Бернуллі, покажемо, що вони зростають

$$x_{n+1} = \left[1+\frac{1}{n+1}\right]^{n+1} = \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{n+1} = \left[\frac{n+1}{n}\right]^{n+1}\left[1-\frac{1}{[n+1]^2}\right]^{n+1} =$$

$$= \left[1+\frac{1}{n}\right]^{n+1}\left[1-\frac{1}{[n+1]^2}\right]^{n+1} > \left[1+\frac{1}{n}\right]^{n+1}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = \left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} = x_n,$$

тобто $x_{n+1} > x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Аналогічно доводиться, що при будь-якому натуральному n

$$y_{n+1} > y_n .$$

Так як послідовність $\dfrac{1}{y_n}$ спадає й обмежена знизу, наприклад, нулем, то в силу теореми про границю монотонної послідовності вона має границю. Легко показати, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} .$$

Дійсно

$$x_n = \left[1+\frac{1}{n}\right]^n = \left[\frac{n}{n+1}\right]^{-n} = \left[1-\frac{1}{n+1}\right]^{-n-1}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{y_{n+1}}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] .$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} .$$

<u>Означення 1.</u> Числом e називається границя

$$e \overset{\text{î çí .}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\right]^{-n}$$

З властивостей послідовностей x_n і $\dfrac{1}{y_n}$, і означення числа e випливає, що для $n \geq 2$

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^n < e < \left[1-\frac{1}{n}\right]^{-n} . \tag{1}$$

<u>Лема 1.</u> Для будь-якого раціонального числа r виконується нерівність

$$e^r \geq 1+r \tag{2}$$

Для будь-якого раціонального числа $r<1$ виконується нерівність

$$e^r \le \frac{1}{1-r} \qquad (3)$$

Доведення. Для $r = 0$ нерівності (3) і (4) очевидні. Нехай $r = \frac{p}{q}$, де p і q - натуральні числа. В силу (1) і властивості степеня з раціональним показником, поклавши $n = 2q$, отримаємо

$$\left[1 + \frac{1}{2q}\right]^{2p} < e^{\frac{p}{q}} < \left[1 - \frac{1}{2q}\right]^{-2p} \qquad (4)$$

Застосовуючи до лівої частини (4) нерівність Бернуллі, одержимо

$$e^{\frac{p}{q}} > 1 + \frac{2p}{2q} = 1 + \frac{p}{q}$$

тобто для $r > 0 \quad e^r > 1 + r$.

З правої частини (4) одержимо

$$e^{-\frac{p}{q}} > \left[1 - \frac{1}{2q}\right]^{2p} > 1 - \frac{2p}{2q} = 1 - \frac{p}{q} \ ,$$

тобто для $r < 0 \quad e^r > 1 + r$. Таким чином (2) доведено.

З (2) для $r > -1$ маємо

$$e^{-r} < \frac{1}{1+r}$$

Замінюючи в останній нерівності r на $(-r)$, одержимо для $r < 1$

$$e^r < \frac{1}{1-r}$$

і цим (3) доведено.

Наслідок 1. Якщо $\{r_n\}$ - послідовність раціональних чисел, що збігається до нуля, то послідовність $\left\{e^{r_n}\right\}$ збігається до 1.

Доведення Для $r_n < 1$ в силу леми 1

$$1 + r_n < e^{r_n} < \frac{1}{1 - r_n} .$$

Далі в силу леми про границю проміжної послідовності одержимо, що

$$\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = 1$$

2. Означення функції $y = e^x$ і її властивості.

Нехай $\{r_n\}$ - довільна послідовність раціональних чисел, що збігається до дійсного числа α. Вивчимо властивості послідовності $\{e^{r_n}\}$.

<u>Теорема 1.</u> Якщо послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ збігається до $\alpha \in R$, то послідовність $\{e^{r_n}\}$ також збігається і її границя не залежить від послідовності, $\{r_n\}$, що збігається до α

Доведення. Нехай $\{r_n\}$ - довільна послідовність раціональних чисел, що збігається до α, а $\{r_n'\}$ - зростаюча послідовність раціональних чисел (наприклад, десяткових наближень за недостачею), що збігається до α. Тоді

$$e^{r_n} = e^{r_n - r_n' + r_n'} = e^{r_n - r_n'} \cdot e^{r_n'}$$

Так як послідовність $\{r_n - r_n'\}$ збігається до нуля, то в силу наслідку 1 послідовність $\left\{e^{r_n - r_n'}\right\}$ збігається до одиниці. Послідовність $\left\{e^{r_n'}\right\}$ зростає й обмежена зверху. Отже, вона має границю. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = \lim_{n\to\infty} e^{r_n - r_n'} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{r_n'} = \lim_{n\to\infty} e^{r_n'} .$$

Тепер можна дати означення степеня з довільним дійсним показником.

<u>Означення 2.</u> Нехай α - дійсне число і $\{r_n\}$- послідовність раціональних чисел, що збігається до α

$$e^{\alpha} \overset{\text{î çí .}}{=} \lim_{n\to\infty} e^{r_n} .$$

З означення 2 випливає, що на множині всіх дійсних чисел R визначена функція $x \to e^x$. Ця функція називається показниковою функцією з основою *e*, або експоненціальною функцією чи просто експонентою, і позначається $\exp(x) = e^x$. Вивчимо властивості цієї функції на множині всіх дійсних чисел R.

Лема 2. Нехай $x \in R$ і $x < 1$. Тоді виконуються нерівності

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x}, \tag{5}$$

причому нерівність $1 + x \le e^x$ виконується при довільному $x \in R$.

Доведення. Нехай послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ збігається до $x < 1$ Тоді можна вважати, що $r_n < 1$ для достатньо великих *n*. За лемою 1

$$1 + r_n \le e^{r_n} \le \frac{1}{1-r_n}.$$

Переходячи в останніх нерівностях до границі, одержимо (5). Аналогічно доводиться, що при $\forall x \in R \quad 1 + x \le e^x$.

Лема 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{6}$$

Доведення. Для $0 < x < 1$ з (5) випливає

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x},$$

для $x < 0$

$$\frac{1}{1-x} < \frac{e^x - 1}{x} < 1.$$

Далі користаючись лемою про границю проміжної функції, одержуємо твердження леми.

Основні властивості функції $y = e^x$

1°. Для $\forall x_1, x_2 \in R \quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$, $e^{x_1-x_2} = \dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}$.

Доведення. Нехай послідовності $\{r_n'\}$ і $\{r_n''\}$ раціональних чисел збігаються відповідно до x_1 і x_2. Переходячи до границі в рівностях

$$e^{r_n'+r_n''} = e^{r_n'} \cdot e^{r_n''}, \quad e^{r_n'-r_n''} = \frac{e^{r_n'}}{e^{r_n''}}$$

одержимо 1°.

З 1°, зокрема, випливає, що $e^0 = 1 \left(e^0 = e^{x-x} = \dfrac{e^x}{e^x} = 1 \right)$.

2°. Для $\forall x \in R \quad e^x > 0$

Доведення. Нехай $x > o$. Тоді $e^x > 1 + x > 0$. Якщо $x < 0$, то

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0 .$$

3°. e^x зростає на множині R, причому

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty .$$

Доведення. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді в силу (5)

$$\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = e^{x_2 - x_1} > 1 + x_2 - x_1 > 1 .$$

Звідки випливає, що $e^{x_2} > e^{x_1}$, тобто e^x зростає на всій числовій осі.

Переходячи в нерівностях $e^x < \dfrac{1}{1-x}$ і $e^x > 1 + x$ до границі, наближаючи відповідно x до $-\infty$ і $+\infty$, одержимо

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty .$$

4°. $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1.$

Доведення. Переходячи в нерівностях $1+x \le e^x \le \dfrac{1}{1-x}$ до границі, наближаючи x до нуля, одержимо 4°.

5°. e^x неперервна на всій числовій осі.

Доведення. Нехай $x_0 \in R$. Тоді $e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}$ й у силу властивості 4°

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0+x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0}.$$

З властивостей 3° і 5° випливає, що множина значень функції e^x є $(0,+\infty)$.

6°. e^x диференційована на всій числовій осі та її похідна $\left(e^x\right)' = e^x$.

Доведення. Нехай $x \in R$. Тоді

$$\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}.$$

Далі в силу леми 3 існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

тобто $\left(e^x\right)' = e^x$.

3. Функція $y = \ln x$ і її властивості.

Експоненціальна функція $y = e^x$ строго зростає на всій числовій осі, і множина її значень є нескінченний інтервал $(0,+\infty)$. Отже, вона має обернену функцію, визначену на множині додатних чисел, і множина її значень збігається з множиною R всіх дійсних чисел. Ця функція називається логарифмічною і позначається $\ln x$ (точніше логарифмічна функція з основою *e*).

Значення логарифмічної функції $\ln x$ називається натуральним логарифмом числа *x*, тобто число $\ln x$ називається натуральним логарифмом числа *x*, якщо

$$e^{\ln x} = x$$

Тому що функція $y = \ln x$, обернена до функції $y = e^x$, то звідси випливає ряд властивостей цієї функції:

1°. $y = \ln x$ зростає на $(0, +\infty)$ і $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

2°. $y = \ln x$ неперервна на всій області означення.

3°. $y = \ln x$ диференційована на всій області означення і $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4°. Якщо ***0<x<1***, то $\ln x < 0, \ln 1 = 0$, якщо x>1, те $\ln x > 0$.

5°. $\ln xy = \ln x + \ln y, \ln\dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$ для x>0, y>0.

Лема 4.

1) Якщо ***x>0***, то

$$\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x - 1. \tag{7}$$

2) Якщо ***x>-1 ,*** то

$$\frac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x. \tag{8}$$

3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{9}$$

Доведення.

1) При ***x>0*** $\dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} < 1$**.** Тоді в силу (5) і означення натурального логарифма маємо

$$e^{\frac{x-1}{x}} \le \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x = e^{\ln x} \le e^{x-1}.$$

Звідки випливає (7).

2) (8) виходить з (7) заміною ***x*** на ***x+1***.

3) Ділячи (8) на ***x*** , одержимо

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \text{ , якщо } \boldsymbol{x>0},$$

$$\frac{1}{1+x} > \frac{\ln(1+x)}{x} > 1 \text{ , якщо } -1<\boldsymbol{x<0}.$$

Переходячи в цих нерівностях до границі $(x \to 0)$ і використовуючи лему про границю проміжної функції, одержуємо (9).

4. Функція $y = a^x$ і її властивості.

Нехай a > 0 і $a \neq 1$.

<u>Означення 3.</u> Якщо $\alpha \in R$, то $a^{\alpha} \overset{\text{озн.}}{=\!=} e^{\alpha \ln a}$.

З означення 3 випливає, що на множині R визначена функція $y = a^x$ (показникова функція з основою a), що є композицією експоненти та лінійної функції $y = x \ln a$. З означень експоненціальної функції, лінійної функції та з означення 3 випливають основні властивості функції $y = a^x$:

1°. Для $\forall x_1, x_2 \in R$ $\quad a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \quad a^{x_2-x_1} = \dfrac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$.

Доведення.

$$a^{x_1+x_2} = e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Аналогічно доводиться друга рівність.

З 1° випливає, що $a^0 = 1$.

2°. Для $\forall x \in R \quad a^x > 0$.

3°. Якщо $0 < a < 1$, то a^x спадає на всій числовій осі та

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \; \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Якщо $a > 1$, то a^x зростає на всій числовій осі та

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

Доведення. Нехай $a > 1$, тоді $\ln a > 0$. І нехай $x_1 < x_2$.

Маємо

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} = e^{(x_2 - x_1)\ln a} > 1 + (x_2 - x_1)\ln a > 1, \text{ тобто } a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Спрямовуючи x відповідно до $-\infty, +\infty$ у нерівностях

$$a^x < \frac{1}{1 - x\ln a}, \quad a^x > 1 + x\ln a,$$

одержимо

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

У випадку $0 < a < 1$ треба представити функцію a^x у вигляді $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ або провести доведення аналогічним шляхом з урахуванням, що $\ln a < 0$

4°. $\lim_{x \to 0} a^x = 1$

5°. a^x неперервна на всій числовій осі як композиція неперервних функцій.

6°. a^x диференційована на всій числовій осі і її похідна

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Границя (6) для показникової функції a^x має наступний вид

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x\ln a} \cdot \ln a = \ln a.$$

7°. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доведення. Спочатку покажемо аналогічну властивість для експоненти, що ми раніш не доводили

$$\left(e^{x}\right)^{y}=e^{y\ln e^{x}}=e^{xy};\quad \left(a^{x}\right)^{y}=\left(e^{x\ln a}\right)^{y}=e^{xy\ln a}=a^{xy}.$$

З 7° випливає, що $\ln x^{k}=k\ln x$ для $\forall k\in R$.

5. Функція $y=\log_{a}x$.

Нехай $a>0$ і $a\neq 1$. Функція $y=a^{x}$ строго монотонна, тому вона має обернену функцію, яку називають логарифмічною функцією за основою a і позначають $y=\log_{a}x$.

Значення функції $\log_{a}x$ називають логарифмом числа x за основою a.

Неважко показати, що $\log_{a}x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$. Дійсно, логарифмуючи вираз $x=a^{\log_{a}x}$ за основою e (див. наслідок з 7° для функції a^{x}), одержимо $\ln x=\log_{a}x\cdot\ln a$, або $\log_{a}x=(\ln a)^{-1}\cdot\ln x$. Звідси легко виводяться усі відомі властивості логарифмічної функції.

6.Степенева функція.

Нехай α дійсне число.

<u>Означення 4.</u> Степеневою функцією x^{α}, $x>0$, називають функцію виду

$$x^{\alpha}\overset{\text{î çí.}}{=\!=}e^{\alpha\ln x}.$$

Отже, степенева функція x^{α}, $x>0$, визначається як композиція логарифмічної, лінійної і експоненціальної функцій.

З цього означення і властивостей зазначених функцій випливають основні властивості степеневої функції. Наведемо деякі з них.

1°. x^{α} неперервна при будь-якому $x>0$.

Доведення. Нехай $x_0>0$.

$$\lim_{x\to x_0}x^{\alpha}=\lim_{x\to x_0}e^{\alpha\ln x}=e^{\alpha\ln x_0}=x_0^{\ \alpha}.$$

2°. x^{α} диференційована при $\forall x>0$ і $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

3°. x^{α} строго зростає на $(0;+\infty)$.

Зазначимо, що з означення степеневої функції, (6), (9) і властивостей функцій e^x, $\ln x$, випливають дві важливі границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Дійсно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e.$$

Література

1. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу, 10-11 кл. Київ: „Зодіак-Еко”, 1995, 608 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. М.: Наука, 1969, т.1., 607 с.